



**HAL**  
open science

## Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas

Nicolas Balacheff

► **To cite this version:**

Nicolas Balacheff. Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. una empresa docente, pp.200, 2000. hal-00520133

**HAL Id: hal-00520133**

**<https://hal.science/hal-00520133>**

Submitted on 22 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **PROCESOS DE PRUEBA EN LOS ALUMNOS DE MATEMÁTICAS**

**NICOLAS BALACHEFF**



**una empresa docente®**

**Universidad de los Andes**

Bogotá, 2000

PRIMERA EDICIÓN: AGOSTO 2000

PROCESOS DE PRUEBA EN LOS ALUMNOS DE MATEMÁTICAS  
AUTOR: NICOLAS BALACHEFF

TRADUCCIÓN: PEDRO GÓMEZ  
COLABORACIÓN EN LA TRADUCCIÓN: ANGELA PINILLA

D. R. © 2000 una empresa docente®

Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, archivada o transmitida en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico, de fotorreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro, sin el previo y expreso permiso por escrito de “una empresa docente” y del autor.

Diseño carátula: INTERLÍNEA EDITORES LTDA.

una empresa docente®  
Universidad de los Andes  
Cra. 1 Este # 18 A - 70  
Apartado Aéreo 4976  
Tel.: (57-1) 339-4949 ext. 2717  
Fax: (57-1) 339-4949 ext. 2709  
Servidor WWW: <http://ued.uniandes.edu.co>  
Bogotá, Colombia

Primera edición: agosto de 2000

Impresión: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

ISBN 958-9216-26-9

Impreso en Colombia

## TABLA DE CONTENIDO

Introducción .....	1
La enseñanza de la demostración: definición del problema .....	1
Contenido de los trabajos de investigación presentados .....	6
Capítulo I. Explicación, prueba y demostración .....	11
Precisiones sobre el vocabulario .....	11
Situación y procesos de validación .....	14
La posición del “sujeto aprendiz” .....	19
Niveles y tipos de pruebas .....	24
Dialéctica de la validación .....	32
Capítulo II. Pruebas y contraejemplos: “los polígonos” .....	39
Presentación del estudio .....	39
Los tipos de prueba .....	54
El tratamiento de los contraejemplos .....	87
Capítulo III. Acerca del problema de la definición: regreso a “los polígonos” .....	125
Introducción .....	125
Primera observación. La génesis de una problemática de la definición .....	126
Segunda observación. La utilización de una información de referencia .....	138
Capítulo IV. Conclusiones .....	173
Procesos de validación en los alumnos de colegio .....	173
Elementos de la complejidad del problema de la enseñanza de la demostración .....	178

Referencias .....	185
Epílogo. ¿A dónde va la investigación sobre la prueba?.....	191
Relaciones entre prueba y demostración .....	191
La validación y el papel del docente .....	193
Referencias.....	198



# INTRODUCCIÓN

## I. LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN: DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

### I.1. LA DEMOSTRACIÓN COMO OBJETO DE LA ENSEÑANZA

Hasta ahora, la noción de demostración ha ocupado un lugar importante en la enseñanza de las matemáticas en Francia. Esta solía incluirse en el tercer año del primer ciclo de secundaria (clase de 4° de Collège<sup>1</sup>) como un verdadero *objeto de enseñanza*. Al retomar las cláusulas del programa de 1971, se encuentra que su objetivo era “hacer que los estudiantes entiendan qué son las demostraciones y cómo se desarrollan”. Los sumarios ministeriales de abril de 1977 exigían mostrar “la diferencia entre una demostración y una simple constatación experimental”, y el documento público que fijaba los objetivos de la enseñanza precisaba que “habituarse al alumno a expresarse claramente” implica, entre otras cosas, “presentar una demostración”.

Sin embargo, la palabra “demostración” ha desaparecido de la formulación de los programas educativos y de sus comentarios en la última reforma de la enseñanza de las matemáticas (escribimos este texto en mayo de 1987, pero nos referimos a aquellos programas precisados por el decreto ministerial del 14 de noviembre de 1985). Estos, que empezaron a regir en 1988 para 4°, y en 1989 para 3° de secundaria, estipulan que para 4°, los estudiantes deben “entrenarse progresivamente en razonamiento deductivo”, y los de 3° tienen que “entrenarse constantemente en razonamiento deductivo”<sup>2</sup>.

1. La educación secundaria en Francia cubre dos períodos: el “Collège”, con alumnos de 11 a 15 años; y el “Lycée” con alumnos de 15 a 18 años.
2. Nota del traductor: las notas de pie de página que comienzan con el título “Nota 2000” son adiciones que el autor ha hecho para actualizar el texto, teniendo en cuenta el desarrollo del tema desde la presentación del trabajo original.

Nota 2000: La situación ha evolucionado sensiblemente desde 1997. El término “demostración” aparece explícitamente en los comentarios de los programas. Para la clase de 4° se promueve la experimentación, pero trae una advertencia: “se buscará, en todo caso, que los estudiantes no la confundan con la demostración”. Más adelante se dice: “se trata, al continuar la iniciación muy progresiva al razonamiento deductivo comenzada en 6°, de pasar de la utilización consciente de una propiedad matemática dentro del estudio de una situación, a la elaboración completa de un proceso deductivo para casos simples”. Los comentarios a los programas de 1999 para la clase de 3° promueven la continuación de “los estudios experimentales con el propósito de enunciar conjeturas y de dar significado a las definiciones y a los teoremas. Se buscará, como en el pasado, que los estudiantes no confundan conjetura y teorema; ellos serán puestos, tanto como sea posible, dentro y fuera del salón de clase, en situaciones de elaborar y escribir demostraciones”. No obstante, los programas *stricto sensu* no consideran la demostración como un objeto de enseñanza.

Pero detrás de esta referencia al razonamiento deductivo, la cuestión se centra en la demostración. Así lo demuestra el comentario de la inspección general, el cual sugiere “implementar cuidadosamente secuencias deductivas cuya extensión y grado de dificultad puedan hacerse progresivos a lo largo de los 4 años de secundaria”.

Se podría pensar que esta evolución es una respuesta a los problemas encontrados en la enseñanza de la demostración, de la cual hablaremos más adelante. Sin embargo, resulta más pertinente señalar que el hecho de que la demostración sea, por sí sola, un objeto de enseñanza, o que se convierta en una herramienta (no explícita) de la actividad matemática de los estudiantes, no implica que se pueda dudar de ésta como tema específico y esencial de las matemáticas en sí, y de su enseñanza (es decir, de la educación matemática). Inclusive, en los más recientes textos de 6° encontramos los verbos “demostrar” y “probar”. Podemos citar como ejemplo la excelente obra de Bareil y Zehren (1986), en la que encontramos: “...demuestre [...lo que quiere decir...] pruebe por medio de un razonamiento...”.

En el campo de las matemáticas, o en cualquier otra rama del conocimiento, es fundamental tener en cuenta que la demostración no puede ser enseñada del mismo modo en un aula de clase que en un ambiente puramente científico. Para convertirse en contenido de enseñanza, las matemáticas deben sufrir una transformación adaptativa, una transposición didáctica (Chevallard, 1985), bajo un conjunto de límites específicos del sistema didáctico. Por medio del análisis de los programas, de los sumarios ministeriales y de los comentarios que los acompañan, hemos podido identificar los lineamientos de esta transformación (Balacheff, 1982, pp. 265-271). Pero antes de centrarnos en este punto, es necesario recordar los dos aspectos principales de la demostración en lo relativo a la comunidad científica:

- la demostración es una herramienta esencial de prueba; ésta conduce a un ejercicio práctico, que hace posible la comunicación y la evaluación a la vez;
- es también el objeto de estudio de los que se ocupan de la lógica; la demostración tiene, por lo tanto, una definición precisa dentro del cuadro de las teorías formalizadas.

En sus consideraciones generales, los textos que hemos examinado presentan la demostración con el sentido y las características propias de la comunidad matemática. En particular, ésta es introducida como una actividad de prueba en la actividad científica del matemático. Pero estos mismos textos hacen parte del origen de una transformación debida a la presentación de un modelo de enseñanza que reduce la demostración a un cálculo lógico. A continuación incluimos dos citas que así lo evidencian:



Una vez las hipótesis o los temas estén consignados de tal manera que los alumnos tengan la suficiente visibilidad para comprenderlos, el profesor deducirá lentamente con ayuda de la clase cuando sea posible; hará el resumen correspondiente para cada uno de los resultados encontrados y hará que sus estudiantes los reformulen. De este modo, los alumnos no experimentarán desconcierto al tratar de relacionar una acumulación de términos en enunciados sintéticos, cuya construcción sería, en parte, producto de su propia invención. Se dedicaría más tiempo para lo más importante: los teoremas tomarían forma en el momento oportuno y podrían fijarse en la memoria usando los procedimientos habituales (Sumario del 2 de septiembre de 1925).

Guiado por el maestro y realizando en primer lugar las operaciones concretas aplicadas a los objetos dados, el niño llegará a adquirir la noción abstracta de una operación de naturaleza bien definida, pero que incluya un elemento indefinido. Más tarde, será capaz de imaginarse que aplica una operación al resultado de la primera, sin haberla realizado en realidad. Para resumir, concibiendo la sucesión de mecanismos de las operaciones así definidas, el niño podrá predecir ciertas propiedades de los resultados: habrá realizado su primera demostración (Decreto del 20 de julio de 1960).

Tales indicaciones para el desarrollo práctico de la demostración no toman en cuenta el compromiso social que ésta implica. De hecho, comprobaremos que la demostración juega un papel esencial en su significado como herramienta de prueba (Capítulo I). Las anteriores indicaciones le dan mayor importancia a la forma y erigen a la demostración como modelo de la actividad matemática... cuando en realidad es considerada por la lógica como una ciencia de los métodos en matemáticas.

## **I.2. ASPECTOS DEL PROBLEMA DE LA ENSEÑANZA**

La evaluación realizada por los maestros de educación secundaria consiste en la “constatación de un fracaso generalizado respecto a la capacidad de los alumnos de 4° para formular una demostración, particularmente de la geometría” (Gaud y Guichard, 1984). Se ha reconocido ampliamente que este tratamiento del fracaso no es apropiado para la enseñanza en Francia: un estudio realizado por Senk (1985) en los Estados Unidos dio como resultado que de 2.699 graduandos de secundaria, el 85% no domina la formulación de una demostración.

Este fracaso es persistentemente imputado a los estudiantes o a la enseñanza, evocando para los primeros, su debilidad o falta de madurez lógica. Pero el carácter permanente de estas dificultades y su resistencia a numerosas tentativas de innovación o a la modificación de los programas nos invitan a un estudio más profundo tanto en lo referente a los alumnos, como al sistema didáctico. Mientras que para los primeros se busca delimitar la natura-

leza de los problemas encontrados, para el segundo se busca examinar los elementos coercitivos y el funcionamiento respecto al proyecto de enseñanza de la demostración.

¿Cómo se enseña la demostración? “Generalmente se hacen demostraciones delante de los estudiantes y luego se les pide hacer lo mismo. Se sabe qué tipo de dificultades surgen” (informe del Grupo Primer Ciclo, Jornadas Nacionales APMEP, 1979). Así, la imitación es el medio más difundido de enseñanza. En tal proceso, el hecho de que la demostración sea una herramienta de prueba, una manera de validar un enunciado, está oculto bajo la concepción de la demostración como género del discurso, cuya base esencial es la estructura.

La *evidencia* permite organizar temáticamente la forma cuyos problemas son formulados en la práctica: uno se desespera de que los alumnos no experimenten la necesidad de demostrar, aún en geometría, donde las figuras son evidencia de la demostración. Retomando una fórmula muy usada en otros contextos (Petit, 1986), el racionalismo de la demostración se opondría a “esta clase de sensualidad que sirve de base a la evidencia”. Obligar a los estudiantes a demostrar no sería más que una frágil superación de este obstáculo. Para tratar este problema a fondo, Chevallard y Tonelle (1982) sugieren ubicarse en el terreno mismo de la evidencia, partiendo de los argumentos del alumno; se trata de conducirlo a una situación paradójica en la cual él se verá obligado a ponerlos nuevamente en tela de juicio. No se trata de recurrir a la refutación, sino de hacer que se tome conciencia de que no siempre es posible atenerse a los argumentos de evidencia iniciales. En otras palabras, se trata de problematizar la evidencia. Si este procedimiento ofrece perspectivas para tratar el obstáculo de *la evidencia de los hechos* subjetivamente asimilado por el alumno, podría también considerar *la evidencia que se impone a la razón*. Lo que todavía está en tela de juicio es la racionalidad de los estudiantes, quienes antes del advenimiento de la demostración, disponían de los medios (aceptados de hecho) para “hacer matemáticas”. Este último tipo de evidencia reemplaza aquella que Fischbein (1982) llama “creencia cognitiva”, y que describe de la siguiente manera: “tipo de convicción intrínseca e intuitiva directamente impuesta por la *estructura* de la situación misma” (p. 11, la palabra “estructura” no aparece en cursiva en el texto original). La creencia cognitiva constituye por naturaleza un obstáculo fundamental al proceso de validación que se desearía ver en ejecución. No es posible rebasar este obstáculo sino a través de una evolución radical de los conocimientos de los estudiantes. Las observaciones realizadas en el curso de uno de nuestros primeros estudios dieron como resultado el indicio de que los estudiantes manifiestan su conciencia de la necesidad de hacer explícito un procedimiento para luego establecerlo, pero se agobiaban por su incapacidad de comprenderlo como articulación de operaciones elementales (Balacheff, 1982).

Este obstáculo de la evidencia será superado, pero restará otro obstáculo que concierne al funcionamiento del sistema didáctico. De manera implícita, la enseñanza en matemáticas despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Esto es particularmente notorio cuando el problema planteado se presenta de la forma: “mostrar que...”. En una formulación de este tipo, el enunciado en cuestión es de hecho considerado como verdadero; lo que está por descubrir es una demostración. Además, el criterio de aceptación de esta demostración no reside solamente en que ésta establezca la validez del enunciado en cuestión, aunque este hecho satisfaga al profesor; la demostración propuesta puede ser torpe, confusa, incompleta e insuficiente, sin que por lo tanto sea falsa. Los criterios de tales juicios no son susceptibles de ser totalmente explícitos. En este contexto, la demostración aparece como una retórica específica de la clase de matemáticas; se caracteriza por sus formas lingüísticas y su estructura. Podría entonces crearse una diferencia importante entre la convicción del alumno respecto a la validez de una solución que él mismo produce y la que produce bajo los criterios del profesor. Para el profesor lo importante es producir un discurso que “haga matemáticas”, aún con el riesgo de presentar distorsiones que den lugar a que los estudiantes duden de sus capacidades de razonamiento (e.g., el caso de Pascal (Balacheff, 1982) o el caso de Grégory (Paquelier, 1985)).

Por otro lado, estos obstáculos para el aprendizaje de la demostración se ven afectados por el hecho de que cada vez es más frecuente el tratamiento de la demostración en contextos de evaluación. Se trata de demostrarle al profesor que uno sabe matemáticas, como lo afirma este alumno inglés de 13 años: “probar algo en matemáticas significa que uno lo ha sabido hacer, y esto también prueba qué tan bueno es uno para estas cuestiones y cuánto las ha llegado a comprender” (Galbraith, 1979).

Este rápido vistazo a los problemas que plantea la enseñanza de la demostración indica que su estudio apunta hacia la dirección ya adoptada por otras nociones matemáticas. Para que la demostración tenga sentido es necesario que se presente ante los alumnos como una herramienta eficaz y confiable para establecer la validez de una proposición. Para conseguirlo, debemos descubrir y tener en cuenta la racionalidad que ellos tienen inicialmente, saber cómo funciona y cómo puede evolucionar; porque es a partir de esta racionalidad, en pro o en contra de ella, que los alumnos construirán el sentido de la demostración. El paso siguiente es la construcción de situaciones que aseguren la transferencia de la responsabilidad de la verdad a los alumnos. Como lo resalta justamente Brousseau (1986): “la didáctica se encuentra ante el desafío de producir situaciones que permitan al estudiante poner en ejecución los saberes y los conocimientos matemáticos como medio efectivo para convencer (y convencerse) de todo, llevándolo a rechazar los medios retóricos, que no son buenas pruebas ni refutaciones” (p. 359).

## II. CONTENIDO DE LOS TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN PRESENTADOS

Los trabajos de investigación que presentamos en este libro conciernen, por una parte, al alumno, estudiado desde la perspectiva de los procedimientos que utiliza para establecer una proposición o tratar una refutación; por otra parte, al sistema didáctico para estudiar en él los elementos coercitivos y las características específicas como el espacio en donde se desarrollan todas las actividades del estudiante.

En un primer capítulo nos proponemos analizar la complejidad de la noción de prueba matemática a nivel teórico. Se trata de un estudio desde el punto de vista de su funcionamiento en la práctica y no del objeto matemático, del que se hace cargo el lógico. Los principales aspectos abordados son las relaciones de los procedimientos de prueba con los conocimientos, particularmente en sus características lingüísticas y con las situaciones en las que ellos se desarrollan. Destacaremos diferentes tipos de prueba, en los que se da lugar a la hipótesis en la génesis de la demostración; por otro lado, plantaremos el problema del significado de los contraejemplos, o, en términos más generales, de las contradicciones en la resolución de un problema.

### II.1. LO CONCERNIENTE AL ALUMNO

Como lo testifica la revisión bibliográfica realizada por Stein (1981) sobre los trabajos de investigación acerca de la enseñanza o del aprendizaje de la demostración, la mayor parte de ellos se atiene a una evaluación de las competencias de los alumnos para elaborar una cadena de deducción. De hecho, se trata muy frecuentemente de una evaluación de la enseñanza, que arroja como resultado esencial que aún los alumnos de mayor edad no entienden lo que es una demostración (“una prueba axiomática formal”), Reynolds (1967). Existe entonces un concepto de demostración en términos de la perspectiva del lógico. Los medios de la investigación consisten en pruebas administradas de la forma “papel-lápiz”, que contienen lo que podríamos llamar problemas cerrados. Los trabajos de Bell (1976) han permitido un avance importante tomando como base de estudio problemas más abiertos y sin limitarse a un estudio en términos de éxito y fracaso con respecto al análisis lógico de las producciones de los alumnos. Bell pone notoriamente en evidencia muchos niveles de empirismo, de hecho, de racionalidad, que llevan a matizar fuertemente los resultados obtenidos hasta este punto. Sin embargo, su punto de apoyo está constituido por producciones escritas y no da información sobre los procesos que se presentan en su origen. Fischbein (1982) y Vinner (1983) abordan también este problema del aprendizaje de la demostración, no desde el punto de vista de la lógica, sino planteando claramente el problema del sentido que éste puede tener para el alumno, particularmente en una confrontación al “razona-

miento empírico”. Fischbein sugiere que la convicción fundada sobre una validación empírica y la fundada sobre la demostración no son del mismo orden y que ellas pueden cohabitar, pero sobre este punto hablaremos más adelante. Aquí los medios utilizados por la investigación (de cuestionarios) todavía limitan la comprensión que podemos tener de la producción de los alumnos.

Nuestro proyecto tiene como fin dilucidar la posición y el sentido de los procesos de prueba puestos en ejecución en la solución del problema, particularmente examinando de qué manera los alumnos llegan a la convicción de la validez de la solución que se proponen. Utilizaremos para este propósito situaciones de interacción social que minimizan la intervención del observador y dan acceso, por los debates que ellas suscitan, a la observación de los procesos que sostienen las decisiones tomadas por los alumnos. Esta operación de búsqueda a la que se hace referencia en el Capítulo II utiliza el problema de enumeración de las diagonales de un polígono. Este problema, en el nivel en el cual nos hemos centrado (la clase de 4<sup>o</sup>) constituye un problema abierto para los estudiantes. En una primera modalidad de observación, expusimos el problema sin suministrar ningún tipo de documentos; en una segunda modalidad, los alumnos disponían de un texto sobre los polígonos. A esta segunda operación de búsqueda se hará referencia en el Capítulo III. La comparación de las dos modalidades está esencialmente centrada en el problema de la definición, donde nos dedicaremos a ilustrar en ellas su estatus y su rol en la actividad de solución del problema.

El segundo punto importante de las investigaciones que presentamos sobre este tema es el tratamiento de un contraejemplo, que para nosotros está intrínsecamente ligado a la prueba. Esta parte de nuestros trabajos aportará elementos al estudio del problema fundamental, que, según Glaeser (1986, p. 147) aún permanece planteado. Más aun, el hallazgo de un contraejemplo constituye en matemáticas la esencia de lo que este autor denomina “contradicción factual”, es decir una contradicción que “interviene cuando los hechos observados desmienten lo previsto” (que él califica de “(pseudo) científicas”). El problema diseñado por Glaeser se refiere al conocimiento de la actitud de los alumnos en la gestión “compatible con la ciencia”. Las investigaciones que hemos señalado a este respecto, especialmente Burke (1984) y Bell (1976) se limitan esencialmente a examinar si el contraejemplo es suficiente para descartar una proposición defendida por un alumno. El resultado es que esto ocurre raramente, y como lo señala Galbraith (1979), cuyos trabajos siguieron a los de Bell, se necesitan muchos contraejemplos para que los estudiantes los consideren como significativos. Pero debido a que no toman en cuenta los procesos en juego, estas investigaciones son insuficientes para aclarar el sentido que los alumnos pueden dar a una refutación en el contexto de la solución del problema. Abordamos esta cuestión en el contexto experimental evocado a continuación; los resultados se presentarán en el Capítulo II (§ III) y en el Capítulo III (§ III. 2. 2).

## II.2. ASPECTOS CONCERNIENTES AL SISTEMA DIDÁCTICO

En el marco de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) y apoyándonos en nuestras investigaciones en “lo concerniente a los alumnos”, trataremos de analizar las características de un proceso didáctico cuya finalidad es la de plantear problemas de prueba e inducir a los estudiantes a tomar la responsabilidad de resolverlos y, por consiguiente, responsabilizarlos también de los medios de validación utilizados por ellos. Procesos de este orden han sido ya concebidos y estudiados en el marco de numerosas investigaciones en didáctica; estos tenían por objetivo el aprendizaje de una noción matemática determinada. Su observación y su análisis están basados en los contenidos que se pretenden aprender y en los indicios de significado construidos por los estudiantes. Nuestro objetivo es sensiblemente diferente puesto que no estudiaremos los comportamientos de los alumnos en sí, sino como indicios del funcionamiento de las situaciones que hemos puesto en práctica.

La primera operación de la investigación, apuntó al estudio de las restricciones de una situación en la cual estudiantes de 5°, a quienes no se les había enseñado la demostración, tenían que emitir una conjetura y suministrar una prueba. La conjetura planteada era la invarianza de la suma de los ángulos de un triángulo rectilíneo. La posibilidad de tal invariante no debería desafiar la concepción — tan frecuente a ese nivel — según la cual el valor de esta suma debería depender del “tamaño” del triángulo; este desafío constituirá entonces un motivo esencial de la participación de los estudiantes en un proceso de prueba, tanto para establecer la propiedad, como para refutarla. La complejidad de tal situación se debe a que, por una parte, el profesor no pueda formular la propiedad por sí mismo, salvo para eliminar el carácter conjetural, y por otra parte, a la exigencia de la socialización: los alumnos no solamente se apropian del problema, sino de que también comparten su significado.

Nuestra hipótesis principal, sobre las situaciones didácticas dirigidas al aprendizaje de la demostración, es que los alumnos no darán la importancia verdadera a los procedimientos de la validación en matemáticas si estos no aparecen como medio fiable y eficaz para establecer la verdad de una proposición. Siguiendo a Brousseau, vemos en la interacción social un elemento determinante de esta toma de conciencia. El objeto de la segunda operación de investigación es estudiar esta hipótesis teniendo en cuenta, en la medida de lo posible, las restricciones de la práctica. Estos trabajos fueron desarrollados en colaboración con un equipo del IREM de Lyon, que se unió a las investigaciones sobre la “práctica del problema abierto en las clases” (Arsac y Mante, 1983), cuya problemática estaba muy próxima a la nuestra. En la introducción a este capítulo haremos más explícito de qué se trata. Por ahora mencionamos solamente que el objetivo de la situación mencionada no es lograr el aprendizaje de una noción matemática determinada, sino crear las

condiciones de un debate de prueba cuyo desenlace estará bajo la responsabilidad de los estudiantes. Nuestro análisis apuntará a la complejidad del funcionamiento de una situación dada, particularmente a la naturaleza de las interacciones entre los alumnos y sus procedimientos de validación en sus relaciones hacia las matemáticas, y a lo que una situación determinada implique, desde el punto de vista de la responsabilidad del profesor.





## EXPLICACIÓN, PRUEBA Y DEMOSTRACIÓN

### I. PRECISIONES SOBRE EL VOCABULARIO

Los verbos explicar, probar, y demostrar son considerados frecuentemente como sinónimos en la práctica de la enseñanza de las matemáticas; esto se puede verificar rápidamente en los textos escolares. Confiar en estos hábitos constituye, a nuestro modo de ver, un obstáculo para las investigaciones sobre el asunto que nos interesa. Ellos conducen a amalgamar diferentes niveles de actividad de los alumnos. Es necesario distinguirlos. Trataremos de mostrar este fenómeno a través de la complejidad del problema del aprendizaje de la demostración. Nos proponemos precisar este vocabulario a continuación<sup>1</sup>.

Desde la perspectiva de Piaget (1970), diríamos que explicar, “en el terreno de las ciencias deductivas”, es en primer lugar despejar las “razones” para “responder a la pregunta del por qué”. Pero desde el punto de vista de la práctica misma de las matemáticas, es dar las justificaciones de un teorema, explicarlo y demostrarlo señalando exigencias distintas. El paso inicial hace referencia a lo que los matemáticos llaman a menudo “intuición”. Esta se remite a los significados, es decir, a la comprensión de la validez de una aseveración, no por medio de la lógica, sino a través de las relaciones con el cuerpo de los conocimientos matemáticos. Este es el sentido de la siguiente observación de Bourbaki (1948, p. 37, nota 1): “todo matemático sabe por lo demás que una demostración no será verdaderamente ‘comprendida’ en tanto se limite a verificar paso a paso la corrección de las deducciones que en ella figuran sin tratar de concebir claramente las ideas que en principio condujeron a construir esta cadena de deducciones prioritariamente”. Las razones, “en tanto que organizaciones inferenciales de significados” (Halbwachs, 1981, pp. 199-229) pueden librarse de una demostración por lo demás irreprochable desde el punto de vista de la lógica. Así lo demuestra por ejemplo la frase célebre de Cantor cuando interpela a Dedekind a propósito de la demostración que acaba de describir: “lo veo pero no lo creo” (citado por Cavaillès, 1962, p. 211).

---

1. Nota 2000: Recientemente, Guershon Harel (1998), en el marco del proyecto PUPA, en los Estados Unidos, ha propuesto unas definiciones sensiblemente diferentes. La distancia entre esas definiciones y las que nosotros proponemos aquí, se debe esencialmente a una diferencia de naturaleza epistemológica en la referencia a la prueba en matemáticas, y probablemente de manera más general en el campo científico. Por consiguiente, Harel relaciona la prueba a la persona sin hacer referencia a ningún dominio disciplinario o conceptual: “el esquema de prueba de una persona consiste en aquello que, para esa persona, es afirmativo y persuasivo”. Este relativismo profundo tiene implicaciones en el desarrollo de la investigación que se hace dentro de este esquema.

## **I.1. EXPLICACIÓN**

Siguiendo a los lingüistas, situamos la explicación al nivel del sujeto locutor. Para él ésta establece y garantiza la validez de una proposición, se arraiga en sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad, es decir, sus propias reglas de decisión de la verdad. En el momento en que la explicación se expresa en un discurso, ésta pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor. La explicación no se reduce necesariamente a una cadena deductiva, Miéville la describe así en un estudio sobre “Explicación y discurso didáctico de las matemáticas”: “ésta tiene como propósito establecer en el interlocutor un sistema de objetos caracterizados por una cierta homogeneidad. Estos objetos se encuentran, se armonizan y en su afinidad determinan la organización de una explicación que se orienta hacia el descubrimiento de un nuevo saber...” (Miéville, 1981, p. 150). La base de la explicación es esencialmente la lengua natural.

## **I.2. PRUEBA**

Cuando una explicación es reconocida y aceptada, conviene para diseñarla disponer de un término que permita marcar su distinción del sujeto locutor. En matemáticas es claro que el término “demostración” no es el más conveniente debido a que su acepción es muy específica. Seleccionamos el término prueba.

El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad. Esta posición no es definitiva; con el tiempo puede evolucionar simultáneamente con el avance de los saberes en los cuales se apoya. Por otro lado, una prueba puede ser aceptada por una comunidad, pero también puede ser rechazada por otra. De lo anterior tenemos un ejemplo reciente en matemáticas con el “teorema de los cuatro colores”, cuya prueba, por Appel y Haken, no es una demostración en el sentido clásico, y es aún así es aceptada por ciertos matemáticos como Swart (1980). Otros, como Tymoczko la rechazan: “la confiabilidad de la teoría de los cuatro colores no puede ser demostrada al nivel de las pruebas tradicionales ya que su confiabilidad reside en la determinación de un complejo grupo de factores empíricos” (Tymoczko, 1979, citado en Hanna, 1983, p. 85). Sin embargo, la aceptación de la “explicación” de Appel y Haken no se basa en simples criterios de verificación lógica: “la razón por la cual quienes hemos trabajado en pruebas de reducibilidad estamos felices con los resultados de reducibilidad de Haken, Appel y Koch, se debe principalmente a que estos resultados han sido verificados por el uso de diferentes programas en diferentes computadores” (Swart, 1980, p. 698).

### **I.3. DEMOSTRACIÓN**

El tipo de prueba dominante en matemáticas tiene una forma particular. Se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas. De aquí en adelante llamaremos *demonstración* a estas pruebas. Lo que caracteriza a las demostraciones como género del discurso es su forma estrictamente codificada. Más aun, este rigor formal debe ser matizado a la luz de la práctica. Por ejemplo, ciertas etapas de la demostración pueden no estar explícitas; el descubrirlas depende del lector. Si, en principio, una demostración señala criterios lógicos por medio de un discurso, en la realidad, los procesos sociales en el seno de la comunidad matemática juegan un papel importante: “una demostración se convierte en tal, después del acto social de ‘aceptar que lo es’. Lo mismo sucede en matemáticas, física, lingüística y biología” (Manin, citado por Hanna, 1983, p.71).

Al hablar de la comunidad matemática, asumimos un punto de vista ingenuo, o más bien de sentido común. No ignoramos que desde la perspectiva misma de la demostración, esta comunidad no es monolítica. Hay doctrinas que se oponen (método axiomático, intuicionismo, formalismo, etc.); Hanna hace una buena exposición de esta oposición. Pero como lo reconoce este autor (pp. 64-65), lo que divide a las matemáticas no es la demostración en calidad de estructura, sino la elección de los axiomas lógicos en matemáticas. Por ello no creemos necesario considerar estas distinciones en nuestro estudio.

### **I.4. RAZONAMIENTO Y PROCESOS DE VALIDACIÓN**

Generalmente el término “razonamiento” tiene dos acepciones, por cierto bien sintetizadas por Blanché (1973, p. 39): “el razonamiento se acerca cada vez más a la intuición en la medida en que se concentra el pensamiento, entendido como acto de la mente. Por el contrario, cuando se detiene en su expresión verbal o simbólica, aparece como una manera de organizar el discurso para convertirse al final en una serie de operaciones formales exactamente ordenadas, es decir, un cálculo”. En nuestro estudio, esta doble acepción constituye una dificultad, ya que introduce una ambigüedad evidente que no permite distinguir claramente si se trata de la actividad intelectual del individuo, o de la producción de su explicación.

En este estudio utilizaremos la palabra razonamiento para designar la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. Le asignaremos el término procesos de validación a esta misma actividad cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración)<sup>2</sup>.

## II. SITUACIÓN Y PROCESOS DE VALIDACIÓN

### II.1. EVIDENCIA DEL PAPEL DE LA SITUACIÓN

Las precisiones de vocabulario consignadas anteriormente hacen que las dimensiones sociales de las pruebas y de las demostraciones se destaquen como productos de un proceso de validación.

Ahora nuestro propósito es ir más lejos, convencidos de que la naturaleza o el nivel de un proceso de validación depende esencialmente de la situación. Esta, que se constituye en el origen de tal proceso, eventualmente implica una interacción social. Partiremos entonces de una metáfora de Popper que nos servirá para aclarar esta idea (Popper, 1972, pp. 89-90):

Quando compro un libro, y como vueltos debo recibir veinte centavos siempre estoy “muy seguro” de que las monedas que me dan son auténticas [...] Si alguien me preguntara “estás seguro de que las monedas que tienes en la mano no son falsas?” revisaría de nuevo y diría “sí”. Sin embargo, si algo verdaderamente importante dependiera de la absoluta veracidad de mi apreciación, creo que me atrevería a ir al banco para pedirle al cajero que me revisara las piezas; y si la vida de un hombre dependiera de esto, sería capaz de consultar al jefe de cajeros de toda la banca inglesa para que certificara la autenticidad de las mismas. [...] la ‘certitud’ de una creencia no reside tanto en su naturaleza como en la ‘situación’: la cual nos permite prever ciertas consecuencias posibles.

La ausencia de todo proceso de validación o la puesta en práctica de un proceso sólidamente fundado en la teoría está relacionado con el análisis que el individuo hace de la situación. Su evaluación del riesgo y la decisión que debe tomar juegan un papel central en este proceso. El proceso de validación está así ligado a fines prácticos: proporciona las garantías necesarias para una puesta en acción, es decir, la acción de decidir acerca de la veracidad de una aserción. En cuanto al uso de diferentes niveles de validación, el proceso responde a una economía de lógica, “que procura no aplicar más lógica de la que suplen las necesidades de la práctica” (Bourdieu, 1980, p. 145).

Así, en la situación que nos interesa, el nivel de validación observado debe por lo tanto estar relacionado con el contexto en el que opera el estudiante, antes de proponerle una evaluación. Este nivel estará limitado en primer lugar por la naturaleza de conocimientos del sujeto; sin embargo, la atribución de una racionalidad al estudiante sólo se puede hacer bajo la reserva de su identificación en un contexto que demande un compromiso suficiente.

---

2. Nota 2000: Hay que anotar que Raymond Duval ha escogido la otra alternativa complementaria. Para él, el razonamiento designa la explicitación verbal y simbólica dentro de un discurso (ver sobre este punto (Duval, 1995)).

## II.2. SITUACIÓN DE VALIDACIÓN Y SITUACIÓN DE DECISIÓN

El solo hecho de proponer un problema a los estudiantes no es suficiente para garantizar que pongan en marcha un proceso de validación. En una observación sistemática que se hizo a un gran número de estudiantes resolviendo problemas de geometría, Audibert (1982) señala que son muy pocos quienes realmente se interesan en un proceso de producción de prueba, y aún menos los que realizan una demostración. No nos concierne realmente la naturaleza o el nivel de las pruebas que el alumno sea capaz de producir; lo verdaderamente importante para nosotros son las características de las situaciones que determinan estos aspectos.

Observemos primero que los procesos de prueba no son elementos constitutivos de toda actividad matemática de los estudiantes, y que no toda situación didáctica exige tales procesos. De este modo, éstos podrían entenderse como fases de apropiación de las reglas de un juego o del funcionamiento de un material. Por ejemplo, en la descripción del “concurso de 20”<sup>3</sup> estudiado por Brousseau (1975), el primer paso lo constituye dar a conocer las reglas del juego a todos los estudiantes. Luego, se invita a estos a participar en el juego. Existen diferentes etapas, y cuando se acaba cada una de ellas empieza una nueva, en la que cualquier estudiante puede participar sin estar condicionado por exigencia alguna. De este modo el alumno puede jugar una parte, ignorar las que le precedieron y nunca tomar sus propias decisiones: la situación permite la ausencia de la validación. Sin embargo, los pocos estudiantes que deseen ganar buscarán razones y pruebas de validez que justifiquen las estrategias escogidas para lograr el triunfo. En este tipo de situaciones, la ocurrencia de triunfos reiterados puede instituir reglas de acción, que se constituirán en la fuente de teoremas en acto<sup>4</sup> (Vergnaud, 1981) constitutivos e indicadores de las concepciones construidas por los alumnos.

Este también es el caso de las situaciones en las que el sujeto debe aplicar algoritmos o sucesiones numéricas, o trabajar con prácticas determinadas por elementos que no cambian; para éstas ni siquiera se plantea su validez o su consistencia. Estas situaciones constituyen lo que llamamos, inspirándonos en Bourdieu (1980), esferas de práctica. Las esferas de práctica constituyen dominios disyuntivos de la puesta en práctica de los conocimientos. De este modo, “hay pocas posibilidades de que dos aplicaciones contradictorias de los mismos esquemas estén enfrentadas” (p. 145). De hecho, éstas no exigen control de las producciones; todo error contingente de ejecución es considerado irrelevante porque la situación se centra principal-

---

3. Una operación en la que los porcentajes son indispensables.

4. El concepto de teorema en acto fue introducido para designar “las propiedades de las relaciones que la persona utiliza en la solución de los problemas”. No obstante, esto no significa que por lo tanto dicha persona pueda hacerlos explícitos o justificarlos.

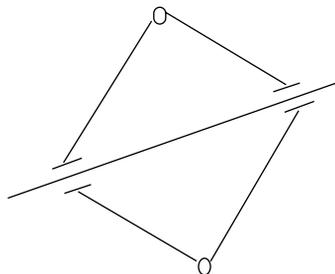
mente en los “objetos buenos” o en las “buenas relaciones”. Así, no se necesita la evaluación de las condiciones de la validez de la acción.

En este caso, ni la inexistencia de los procesos de validación, ni el nivel de las pruebas eventualmente desarrolladas evidencian la racionalidad de los estudiantes debido a que sencillamente pueden evitarse.

Nos interesa lo que concierne a las situaciones que recurren a un proceso de validación. Sin embargo, tales situaciones no conducen necesariamente, ni de manera explícita, a la producción de pruebas. A continuación presentamos dos tipos de situaciones, con sus respectivos ejemplos.

Retomemos el caso del “concurso de 20” de Brousseau. En la última fase del juego, llamémoslo juego de descubrimiento, los equipos que juegan deben elaborar proposiciones que permitan “ganar sobre seguro” (Brousseau, 1975). Un sistema de señales sanciona la producción de enunciados verdaderos (“aceptados”) y de enunciados falsos (“probados como falsos”). Los estudiantes están frente a una situación de prueba en el sentido de Brousseau (1977). El objetivo es la producción de una prueba (la veracidad o la falsedad) de un enunciado. Esta situación restringe la posibilidad de poner en práctica un proceso de validación.

En el caso de las secuencias didácticas descritas por Gras (1983) a propósito del aprendizaje de la simetría ortogonal en lo referente a la familiarización con el simetrizador (dispositivo mecánico que permite realizar una simetría ortogonal, (figura N° 1)), se incita a los alumnos a anticipar, a predecir la imagen que este instrumento producirá. Estamos entonces en lo que llamamos una situación de decisión. Esta exige la ejecución de procesos de validación sin que, por lo tanto, sea necesaria una producción explícita de “pruebas”. Lo que se debe producir es una proposición y no la prueba de esta proposición.



Este instrumento mecánico permite realizar una simetría ortogonal. Está constituido por un rombo deformable que se desliza a lo largo de un eje cuya posición sigue una de sus diagonales. Los dos vértices que permanecen libres pueden portar un lápiz.

*Figura N° 1.*

### **II.3. LA INTERACCIÓN SOCIAL COMO MOTOR DE LOS PROCESOS DE VALIDACIÓN**

Uno de los principales medios que permiten transformar una situación de decisión en una situación de prueba es someterla a debate para garantizar o desconocer su validez.

En una situación de decisión, las operaciones intelectuales del razonamiento hipotético-deductivo (en su calidad de sistema legítimo y fiable de producción de información) pueden ser puestas en práctica sin que, por consiguiente, sea producida una prueba. Los controles lógicos y semánticos funcionan localmente en el proceso de elaboración de la solución. Como matemáticos que somos, reconocemos eventualmente en este proceso una organización del orden de la demostración; sin embargo, lo que actúa en función del sujeto es una herramienta y no un objeto (Douady, 1984). Por el contrario, las situaciones en las cuales los estudiantes tienen que producir soluciones comunes a un problema (bien sea en pequeños grupos o al nivel de la totalidad de la clase) necesitan la formación progresiva de un lenguaje común, adecuado a los objetos y a las relaciones en juego. Necesitan también de la elaboración o el reconocimiento de un sistema común de decisión y prueba para los grupos de trabajo constituidos. Especialmente en el trabajo por parejas, Brousseau (1986) considera dos aspectos: el carácter esencial de esta dimensión social que parte de “hacer” para llegar a “hacer que otros hagan” y su papel determinante en la construcción de los significados de los conocimientos matemáticos. Brousseau distingue numerosos tipos de situaciones que se caracterizan por la naturaleza del funcionamiento intelectual de los estudiantes. A continuación presentamos lo correspondiente a las situaciones de validación (Brousseau, 1986, pp. 358-359):

Las situaciones de validación enfrentarán a dos jugadores que discutirán con respecto a un objeto de estudio compuesto, de una parte, por mensajes y descripciones que el estudiante produjo; y de otra, por el medio a-didáctico que sirve de referente a tales mensajes.

Los dos jugadores se desempeñan en sus funciones de “proponer algo” y “oponerse a ese algo”. Ambos intercambian aserciones, pruebas y demostraciones a propósito de la combinación “medio/mensaje”. Esta combinación es el nuevo dispositivo, el medio de la situación de la validación. Puede presentarse como un problema acompañado de sus soluciones tentativas, como una situación y su modelo, o como una realidad y su descripción...

En caso de que las relaciones entre el informante y el informado presenten descompensaciones (que uno sepa una cosa que el otro ignora), es necesario que ambos, quien propone y quien se opone, tengan posiciones asimétricas, tanto en lo concerniente a las informaciones y los medios de acción que del juego y los mensajes disponen, como de los medios de sancionarse mutuamente en la puesta en juego de la combinación “medio/mensaje”.

Sin embargo, el hecho de que una situación tenga las características de una situación social no es una condición necesaria o suficiente para asegurar la producción de pruebas:

- Esta condición no es necesaria porque podría suceder que el estudiante, teniendo que asumir el riesgo que implica estar enfrentado a una incertidumbre, se empeñe en hacer una síntesis de las razones y/o de las condiciones necesarias para establecer un criterio de validez. Estas condiciones son finalmente las mismas que lleva a cabo en un proceso de prueba.
- Esta condición tampoco es suficiente porque no considera la posibilidad de que algunos alumnos se nieguen a participar en actividades que impliquen un debate. De este modo, ni aumentar la ocurrencia de estas situaciones de validación, ni forzar a los estudiantes sería suficiente para asegurar la producción de pruebas. Además, la noción de riesgo no tiene sentido por sí misma, sino en relación a un individuo que la reconoce o no y le asigna un determinado grado de importancia. Aún habiendo reconocido el riesgo, el estudiante puede mostrarse temeroso; es decir, solamente avanzará hasta que encuentre lo estrictamente necesario para garantizar la validez de su decisión.

En otras palabras, no se puede esperar que la situación sea determinista. Trataremos solamente las situaciones que *toleran* la ausencia de trabajo alguno sobre la validación, situaciones que *evocan* tal proceso.

En efecto, Brousseau (1986) señala que el hecho de situar a los alumnos en una situación que implique interacción social puede suscitar fenómenos de tipo social o afectivo lo suficientemente significativos para desplazar el debate fuera del campo cognitivo que nos interesa. Especialmente en los procedimientos de prueba, los argumentos ya establecidos y considerados como absolutamente verdaderos pueden ser sustituidos por una argumentación apoyada en los contenidos<sup>5</sup>. Debido a este carácter socio-afectivo, los alumnos pueden deliberadamente presentar y defender enunciados falsos o rechazar enunciados verdaderos.

Con el fin de entablar un proceso de prueba para la solución de un problema, es necesario que haya dos elementos: un *riesgo motivado por la incertidumbre* y un desafío que valga la pena, para que uno pueda asegurarse de un resultado. Para despertar en los interlocutores el interés por formular una solución elaborada y discutirla, es necesario que la situación contenga un *desafío a la contradicción*, lo que implica a su vez un *desafío a admitir*. Sin este último, el rechazo de la contradicción puede convertirse en una estrategia de defensa. De este modo, la situación debe a la vez justificar y sus-

---

5. El segundo volumen de mi tesis y los trabajos de Arsac.



citar la toma de conciencia del riesgo que implica admitir un enunciado falso o rechazar uno verdadero.

## **II.4. EL DESEO DE CERTIDUD COMO MOTOR DE LOS PROCESOS DE VALIDACIÓN**

En los ejemplos anteriores hemos resaltado la importancia que, para producir pruebas o poner en marcha procesos de prueba, tiene la identificación de un riesgo generado por la incertidumbre en la motivación de un individuo. Otra motivación es el deseo de certitud, cuya presencia no está determinada por ningún factor. Los desafíos pueden partir de una satisfacción intelectual o de una curiosidad por la verdad que puede motivar a los estudiantes. Es precisamente por eso que se buscan “problemas motivadores”<sup>6</sup> para hacer más efectivos los procesos de innovación. Brousseau (1986, p. 449) se apoya precisamente en este deseo de certitud en una clase de geometría, en la que le pide a los estudiantes trazar las mediatrices de un triángulo, sin darles un caso particular. Muy seguramente los estudiantes van a escoger el “triángulo escaleno” para hacer el ejercicio, pero la concurrencia testaruda de las mediatrices hará que los estudiantes teman a este caso especial<sup>7</sup>. En este contexto aparece una conjetura: las mediatrices de un triángulo son concurrentes. Hacer un teorema al respecto o asegurarse de que esto es completamente cierto, constituye un deseo de saber, que existe independientemente de la situación de riesgo o de un interés práctico. Los estudiantes no saben si tal propiedad podrá ser útil para algo.

## **III. LA POSICIÓN DEL “SUJETO APRENDIZ”**

### **III.1. INTRODUCCIÓN**

Haber compilado las condiciones más favorables para que los alumnos lleven a cabo procesos de validación, no es suficiente para asegurar su producción. Además, en caso de que éstas sean producidas, tampoco se podrá asegurar su naturaleza. La naturaleza de sus conocimientos y la manera como estos se lleven a la práctica van a jugar un papel esencial. Nos proponemos precisarlos en esta sección.

La historia de las matemáticas pone en evidencia que la demostración es una herramienta de prueba reconocida, y que el problema de la verdad se presenta en los procedimientos científicos. Sin embargo, esto no implica que los matemáticos puedan probar su saber apoyándose en pruebas de esa naturaleza. Por otro lado, antes de la existencia del modelo euclidiano, los antiguos matemáticos se valían de medios de prueba para establecer el carácter

6. Problemas que suscitan interés en los alumnos creando la aceptación o el deseo de buscar la solución por sus propios medios.

7. Los trazos defectuosos resultantes mantendrán la incertidumbre.

necesario de una proposición o de un resultado. En otras palabras, la actividad matemática reconocida como tal es anterior a la “invención” de la demostración hecha por los griegos.

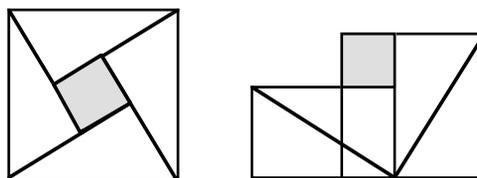
De la misma manera, supongamos que existe la posibilidad de que los alumnos construyan, antes de dominar la demostración, pruebas de los enunciados matemáticos que ellos mismos producen. Nos interesa saber cuál es la naturaleza de estas pruebas, si es posible dilucidar una jerarquía de la génesis de la demostración, y cuáles son los medios para provocar su eventual evolución.

Pero, por otro lado, estaríamos tratando de hacer una constatación banal; el solo hecho de disponer de la demostración como una herramienta de prueba no es suficiente para garantizar su uso. Retomemos la historia: la aparición de la demostración en la civilización griega es contemporánea a “la definición de objetos de la matemáticas por medio de axiomas y definiciones; se definen éstos, como objetos ideales independientes de la experiencia sensible” como de la explicación de “enunciados generales [...] por medio de hipótesis precisas que especifican las aseveraciones verdaderas para los hechos matemáticos”. Así mismo, el reconocimiento del carácter necesario de una proposición pasa, en el niño, por una diferenciación de los objetos del pensamiento y de sus relaciones (Piaget, 1983).

Un indicativo importante de estos procesos son las herramientas lingüísticas puestas en práctica. Distanciarse del “discurso argumentativo natural” (como lo definen Esperet et al., 1987) para elaborar un “discurso argumentativo formal” basado en un lenguaje operativo, permite el cálculo de las proposiciones y las relaciones que caracterizan las pruebas de nivel elevado, sobre todo las demostraciones. De este modo, la construcción de tales herramientas lingüísticas no puede disociarse de la construcción del conocimiento. Un ejemplo ampliamente conocido es el desarrollo del álgebra elemental, marcada por tres períodos: el primero, en el cual el soporte de expresión es la lengua natural; el segundo, en el que se hace uso de abreviaciones; y el tercero, cuando aparecen símbolos específicos que permiten el cálculo de las relaciones expresadas por signos.

### **III.2. PRUEBAS PRAGMÁTICAS Y PRUEBAS INTELLECTUALES**

De acuerdo con los estados más primitivos de la génesis de un conocimiento, estados en los cuáles ésta puede ser descrita en términos de “esquemas de acción” en el sentido de la psicología piagetiana, la forma más elemental de una prueba es la ostensión. Las operaciones y los conceptos que ésta entraña son ejecutados; no son diferenciados ni articulados, y solamente se prestan para ser observados. Esto no implica por lo tanto la ausencia del lenguaje, pero a este nivel, éste no es una herramienta fundamental de transmisión del conocimiento (figura N° 2).

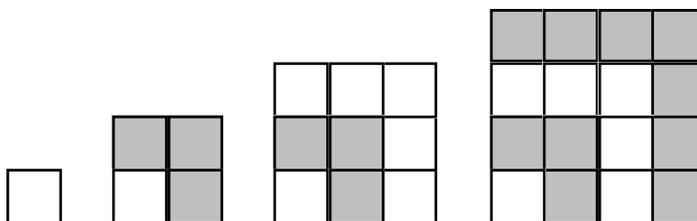


“Observa”

Prueba de Bhascara del teorema de Pitágoras

*Figura N° 2.*

Un ejemplo clásico de tal prueba por ostensión es la propiedad según la cual la suma de los primeros enteros impares es  $n^2$  (figura N° 3).



*Figura N° 3.*

Estas pruebas se fundamentan en la capacidad que tenga quien observa la figura para reconstruir las razones que el locutor tiene en mente y que no sabe explicitar de otra manera. Sémadéni recomienda el uso de tales pruebas en la educación elemental y al respecto expone la siguiente (Sémadéni, 1984, pp. 32-4):

Una prueba de una afirmación S debe seguir el siguiente procedimiento:

1. Escoger un caso especial de S. El caso debe ser genérico (es decir, sin características especiales), no muy complicado, pero tampoco muy simple (un ejemplo trivial puede ser posteriormente difícil de generalizar). Escoger una representación activa y/o icónica de este caso, o un ejemplo paradigmático (en el sentido de Freudenthal, 1980).

Ejecutar ciertas acciones físicas concretas (manipular objetos, hacer dibujos, mover el cuerpo, etc.) para verificar la afirmación en un caso dado.

2. Escoger otros ejemplos conservando el esquema general, pero variando las restricciones involucradas. Verificar la afirmación para cada caso tratando de usar el mismo método expuesto en el numeral 1.

3. Cuando las acciones físicas ya no sean necesarias, continuar eje-

cutándolas mentalmente hasta estar convencido de que sabe como aplicar el mismo procedimiento a otros ejemplos.

4. Tratar de determinar la clase o las clases para las cuales este método funciona.

Los teoremas en acto juegan un papel fundamental en este tipo de prueba. Consisten en determinadas propiedades que el individuo utiliza en la solución de problemas, sin que por lo tanto pueda enunciarlos<sup>8</sup>.

Denominaremos *pruebas pragmáticas* a las pruebas que recurren a la acción o a la ostensión y llamaremos *pruebas intelectuales* a las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones. A pesar de lo anterior, este aislamiento de lo pragmático no es evidente: aunque la práctica está prohibida, podría ser evocada y el discurso podría no ser tan cercano a la prueba en sí. El locutor se expresará por medio del *lenguaje de la familiaridad* (Bourdieu, 1980, p. 153), lenguaje que no conoce: “aquel que no reconoce sino los casos particulares y los detalles del interés práctico o de la curiosidad anecdótica, utilizando siempre nombres propios de personas o de lugares [...] este lenguaje, que no se usa sino con las personas con quienes se establece un cierto grado de confianza, omite todo lo que se considera asimilado”.

La acción explícita por este lenguaje lleva la marca del tiempo y de la duración: la marca de aquél que actúa y del contexto de su acción. Sin embargo, este lenguaje exige un paso adicional para que la acción pueda ser descrita y explicada, y así, se presenten los primeros indicios de una construcción cognitiva. De hecho Sémadéni, quien piensa en una extensión de las pruebas en acto, sugiere que las pruebas intelectuales se fundamenten en la toma de conciencia del carácter genérico de las situaciones consideradas. A manera de ilustración, presentamos el siguiente ejemplo (figura N° 4).

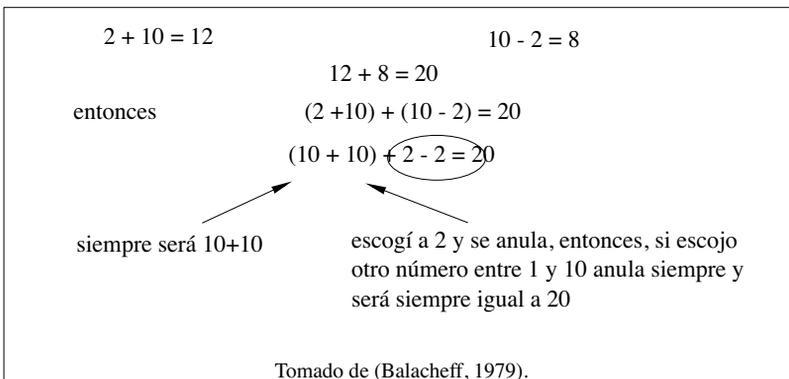


Figura N° 4.

8. Ver pie de página 4.

El desarrollo en el terreno de las pruebas intelectuales exige un cambio de posición. El locutor debe alejarse de la acción y del proceso efectivo de solución del problema<sup>9</sup>. El conocimiento tratado hasta este punto se convierte en el objeto de reflexiones, discursos, y aún de debates. El lenguaje de la familiaridad, cuyo soporte esencial es la lengua natural, permite una evolución en esta dirección. Pero hace falta más que esto para elaborar pruebas “formales”, e incluso demostraciones. El lenguaje debe convertirse en una herramienta para el cálculo lógico y no solamente en un medio de comunicación. La elaboración de este lenguaje requiere en particular de:

- una descontextualización, o renuncia al objeto actual como medio efectivo para la realización de las acciones, para acceder a la categoría de los objetos, independientemente de las circunstancias anexas o anecdóticas de su aparición;
- una despersonalización, separando la acción de quien ha sido su actor, y del cual ésta debe ser independiente;
- una destemporalización, liberando las operaciones de la fecha en la que fueron realizadas y de su duración anecdótica. Este proceso marca la transición del universo de las acciones al de las relaciones y las operaciones (en el sentido de Piaget).

Los lenguajes funcionales se caracterizan generalmente por la introducción de un léxico específico o de un simbolismo. Al nivel más elevado, encontraríamos una lengua estrictamente simbólica. De hecho, por razones de economía, la práctica matemática recurre a una asociación de la lengua natural y la lengua simbólica: lo que Bourbaki (1984) llama el “formalismo ingenioso”. Esta asociación corresponde a una construcción y a un funcionamiento lingüístico específico (Laborde, 1982).

La elaboración de demostraciones requiere más que un cierto grado de conocimientos. Estas deben constituirse en una verdadera teoría reconocida como tal; es decir, aceptada por una comunidad que deje de buscar argumentos donde le plazca. La demostración en matemáticas se fundamenta sobre un cuerpo de conocimientos fuertemente institucionalizado, sobre un conjunto de definiciones, de teoremas y de reglas de deducción, cuya validez es aceptada socialmente. Este principio es uno de los fundamentos del rigor matemático.

La transición de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales, especialmente la demostración, se apoya también en tres polos que interactúan fuertemente:

- el polo de los conocimientos,

---

9. Recordemos que los estudiantes a quienes se plantea la cuestión del por qué, siempre responden reiterando las operaciones que han realizado para resolver el problema.

- el polo lingüístico o de la formulación,
- el polo de la validación o de los tipos de racionalidad que sustentan las pruebas producidas.

La tabla N° 1 que presentamos a continuación ilustra la correspondencia entre los diferentes polos con respecto a las jerarquías que cubren. Dicha tabla indica las posiciones relativas aproximadas y no las correspondencias estrictas entre los niveles de las diferentes columnas.

<b>Naturaleza de las concepciones</b>	<b>Formulación</b>	<b>Validación</b>
prácticas (saber-hacer, teorema en acto)	ostensión  lenguaje de la familiaridad	pruebas pragmáticas   pruebas intelectuales
conocimientos como objeto (saber) conocimiento teórico y reconocido (saber científico, teorema)	lenguaje funcional  formalismo ingenuo	demostración

*Tabla N° 1.*

## **IV. NIVELES Y TIPOS DE PRUEBAS**

### **IV.1. “PROBLEMÁTICA DE LA EFICACIA” VERSUS “PROBLEMÁTICA DEL RIGOR”**

La constitución de las matemáticas como una ciencia autónoma se caracteriza por la naturaleza de las preguntas que ella aborda, y los medios que pone en práctica para asegurar la validez de una aserción. Esta ciencia se independiza de los problemas externos para los cuales ha propuesto herramientas de solución, para consagrarse al estudio de los conceptos específicos procedentes de su desarrollo interno. Lo anterior se manifiesta en su historia, particularmente en la evolución de las problemáticas de prueba. Esto es lo que Dahan y Pfeiffer (1982, p. 114) escriben sobre las matemáticas egipcias: “al igual que la geometría de los babilonios, la geometría egipcia es práctica; no razona ni ha estudiado en sí esta ciencia. Sin embargo, aunque sea a tientas, se propone establecer reglas eficaces y satisfactorias por medio de la aplicación”. El advenimiento de la demostración será obra de los filósofos, como evidencia de una fuerte ruptura con el mundo sensible, sustituyendo la observación por la razón como método en el que se fundan la verdad y el conocimiento. El cambio de la problemática

consiste en la transición de una “problemática de la eficacia” a una “problemática del rigor”.

En la enseñanza, la introducción de la demostración da origen a una ruptura del mismo orden. La clase de geometría de 4º grado en la educación francesa ilustra claramente este paso de la práctica a la teoría. La ruptura entre geometría práctica (la de la regla y el compás y la producción de la figura) que se enseña en los primeros años<sup>10</sup> de Collège y la geometría deductiva reside en un cambio de posición epistemológica, como lo afirman Chevallard y Tonelle (1982). La investigación<sup>11</sup> que ellos hicieron sobre la clase de geometría de 4º y 5º grado muestra que la geometría pasa de ser la esfera del “trazado preciso de las figuras” a la esfera del “estudio de las figuras”. Esta ruptura es unilateral: es el hecho del sistema didáctico y constituye un cambio del contrato didáctico<sup>12</sup>, cuya consecuencia es un cambio de la posición del alumno, un cambio de función. El alumno cambia su papel en la práctica por uno que le da un mayor acceso a la teoría, permitiéndole “conocer” más. Es en virtud del conocimiento y no de la práctica que la evidencia permite rechazar algo para establecer una verdad. Dicho cambio implica la transición de una esfera cuyo criterio es la eficacia a otra cuyo criterio es el rigor.

La distinción que acabamos de hacer pone en evidencia una característica importante de las situaciones de enseñanza: la posibilidad de acceso a la experiencia. La realización material de una decisión o del contenido de una afirmación suministra pruebas pragmáticas cuando éstas son producidas por el alumno para establecer la validez de una proposición. Cuando esta realización material no puede ser llevada a cabo, el alumno se ve forzado a producir pruebas intelectuales. Estas pruebas no establecen de la misma manera las proposiciones que sustentan, ni presentan la misma complejidad:

- lo que garantiza la prueba pragmática es la singularidad del evento que la construye. Esta prueba suministra además elementos contingentes: herramientas imprecisas e imperfección de funcionamiento.
- La prueba intelectual implica un significado contra otro, una pertinencia contra otra, una racionalidad contra otra.

Por otro lado, la naturaleza misma de la dialéctica asociada con estos tipos de prueba es fundamentalmente diferente. En particular, la contradicción originada por los “hechos” no tiene la misma importancia que la originada por el “discurso”. Aún cuando se haga uso de estos mismos hechos para justificarse, la contradicción puede ser discutida en términos de interpretación.

10. Lo que corresponde a los niveles 5 y 6 de Collège en Francia.

11. Sin publicar.

12. Con base en la distinción entre contrato y costumbre que establece Balacheff (1988).

## IV.2. TIPOS DE PRUEBA

Nuestros primeros trabajos de investigación (Balacheff, 1978, 1979) y los de Bell (1976) nos permiten distinguir cuatro tipos principales de pruebas pragmáticas e intelectuales que tendrán un lugar privilegiado en la génesis cognitiva de la demostración: el *empiricismo ingenuo*, la *experiencia crucial*, el *ejemplo genérico* y la *experiencia mental*. Los dos primeros tipos de prueba no permiten establecer la verdad de una aserción. Su condición de pruebas es reconocida únicamente por aquellos que las consideran como tales. Como lo mostraremos a continuación, existe una ruptura fundamental entre los dos primeros tipos de prueba y los dos restantes. De hecho, no se trata de “mostrar” que la proposición en cuestión es verdadera porque “funciona” para el ejemplo genérico y la experiencia mental, sino de establecer el carácter necesario de su validez presentando las razones que lo justifiquen. Esto constituye un cambio radical en la racionalidad de los estudiantes que defienden estas pruebas.

Por otra parte, plantearemos una jerarquía hipotética de estos tipos de prueba, evidenciada por el orden en que los presentaremos más adelante. La posición de cada tipo de prueba dentro de esta jerarquía está determinada por su nivel de exigencia de generalidad, y por su nivel de conceptualización de los conocimientos que exige. Así, la transición del ejemplo genérico a la experiencia mental debe cumplir con dos condiciones: el paso de la acción a la acción interiorizada y una descontextualización, que marca el progreso decisivo en la construcción de los conocimientos. Lo anterior resalta el carácter no disociable de la evolución de tres elementos: los medios de prueba, los conocimientos y los medios lingüísticos (ver § III.2., Fischbeint (1982) y Halbwachs (1981)).

### IV.2.1. El empiricismo ingenuo

El empiricismo ingenuo consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos. Este modo de validación tan rudimentario e insuficiente, es una de las primeras formas de los procesos de generalización (Piaget, 1978). Muestra de ello es el siguiente caso citado por Bell (1976, Capítulo 9). De un grupo de estudiantes de 15 años, a quienes fue propuesta una serie de problemas, el 25% obtuvo una determinada respuesta basándose en la sola verificación de algunos casos. Podríamos afirmar que el empiricismo ingenuo constituye una forma resistente de generalización.

### IV.2.2. La experiencia crucial

La expresión “experiencia crucial” fue una invención de Francis Bacon (1620), que designa una experimentación cuyo resultado permite escoger entre dos hipótesis, siendo verdadera sólo una de ellas. Tengamos en cuenta que si esta experiencia permite rechazar una hipótesis, no es posible afirmar que la otra es verdadera.



Utilizaremos esta misma expresión para designar el proceso que consiste en verificar una proposición de un caso para el cual no se asume que “si funciona ahora, entonces funcionará siempre”. Este es un ejemplo extraído de Bell (1976, Capítulo 10, p. 12): “Jane muestra un polígono complicado y puede decir definitivamente que el enunciado es verdadero”. La experiencia crucial servirá de cierta manera para decidir entre una proposición y su negación.

Este tipo de validación se distingue del empiricismo ingenuo en que el individuo plantea explícitamente el problema de la generalización y lo resuelve, aventurándose a la ejecución de un caso que reconoce tan poco particular como le es posible.

#### *IV.2.3. El ejemplo genérico*

El ejemplo genérico consiste en la explicación de las razones de validez de una aserción para la validación de operaciones o transformaciones de un objeto en calidad de representante característico de determinada clase. La formulación libera las propiedades, características y las estructuras de una clase, estando siempre ligada a su categoría y a la exhibición de uno de sus representantes. El siguiente ejemplo, nos sirve a manera de ilustración (Bezout, 1832, p. 23):

El residuo resultante de la división de un número por 2 o por 5 es el mismo que el residuo de la división de la última cifra a la derecha por 2 o por 5. El residuo de la división de un número por  $2 \times 2$  o por  $5 \times 5$ , es el mismo que el residuo que resulta de dividir al dividendo, expresado por sus dos últimos números a la derecha, por  $2 \times 2$  o  $2 \times 5$ , y así sucesivamente. Para probarlo, tomemos el número 43728 y el divisor  $5 \times 5$ . El número 43728 es igual a  $43700 + 28$ . Ahora bien, 43700 es divisible por  $5 \times 5$  porque 43700 es el producto de 437 por 100, y 100 es igual a  $10 \times 10$ , a  $5 \times 2 \times 5 \times 2$  o a  $5 \times 5 \times 2 \times 2$ ; el factor 100 es entonces divisible por  $5 \times 5$ . El residuo de la división de 43728 por  $5 \times 5$  o 25 es por lo tanto el mismo que el de la división de 28 por 25.

#### *IV.2.4. La experiencia mental*

La experiencia mental se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular. Se desarrolla en una temporalidad anecdótica, pero las operaciones y las relaciones que inician la prueba nunca están designadas por su puesta en práctica. Las operaciones y las relaciones que sirven de preludeo a la prueba nunca son escogidas por el resultado de su puesta en práctica; este es el caso genérico. Aquí tenemos la prueba que Cauchy da al teorema de los valores intermedios (Cauchy, 1821):

[...] basta hacer notar que la curva de ecuación  $y=f(x)$  cortará una o muchas veces la recta de ecuación  $y=b$  en el intervalo comprendido entre las ordenadas que corresponden a las abscisas  $x_0$  y  $X$ ; es eviden-

temente lo que pasará en la hipótesis aceptada. Siendo la función  $f(x)$  continua entre los límites  $x=x_0$  y  $x=X$ , la curva de ecuación  $y=f(x)$ , que pasa primero por el punto correspondiente a las coordenadas  $(x_0, f(x_0))$ , y que luego pasa por el punto correspondiente a las coordenadas  $(X, f(X))$ , será continua entre estos dos puntos; y como la ordenada constante  $b$  de la recta de ecuación  $y=b$  se encuentra comprendida entre las ordenadas  $f(x_0)$ ,  $f(X)$  de dos puntos considerados, la recta pasará necesariamente entre estos dos puntos, lo que no puede hacer sin cortar en el intervalo la curva antes mencionada.

Esta prueba exige la implicación de la experiencia mental en cuanto remite de hecho a teoremas en acto verificados en la práctica del trazado de curvas representativas de las funciones continuas más comunes, curvas de cualquier tipo que no serán interrumpidas en ningún punto (observemos que en la nota III, Cauchy propone a su clase una demostración “directa y puramente analítica” de este teorema).

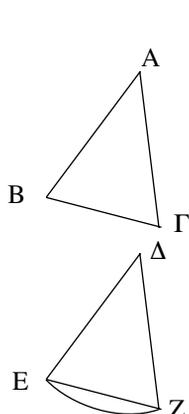
### **IV.3. OBSERVACIONES SOBRE LAS PRUEBAS INTELLECTUALES Y LA DEMOSTRACIÓN**

Recurrir a la experiencia mental marca verdaderamente la transición de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales, en la medida en que las pruebas pasan de ser acciones efectivas a acciones interiorizadas (en el sentido de Piaget) puestas en práctica. Las acciones interiorizadas se encuentran en la génesis de las operaciones que serán necesarias para la elaboración de pruebas de un nivel más alto. Las pruebas basadas en un ejemplo genérico constituyen un estado intermedio en la medida en que decidir el carácter genérico del ejemplo no puede hacerse sino en virtud del uso que se hace del ejemplo. Este uso del ejemplo admite dos posibilidades:

- puede ser la esfera de la ejecución de las operaciones efectivas que aseguran la validez de un enunciado o el medio para mostrarlas, y por lo tanto lo consideramos de la categoría de las pruebas pragmáticas;
- o puede también proporcionar al locutor un medio para expresar su prueba, y entonces lo consideramos de la categoría de las pruebas intelectuales.

En la transición de la experiencia mental a la demostración se deberían reconocer diferentes tipos de pruebas intelectuales que difieren tanto en sus niveles de descontextualización, destemporalización y despersonalización, como en su nivel de formalismo. Aún falta por hacer un análisis de estas pruebas y su tipología. Desde el punto de vista de la demostración, entendida como estructura del discurso, el nivel de formalización de los conocimientos que ella pone en práctica es un punto crucial.

Para ilustrar esto, tomaremos un ejemplo de la geometría elemental: “el segundo caso de igualdad de triángulos”. A continuación presentamos la *demonstración* clásica de los Elementos de Euclides (Traducción de Kayas, 1978, pp. 4-5):



Siendo  $AB\Gamma$  y  $\Delta EZ$  dos triángulos tales que se tiene:

$$AB = \Delta E, A\Gamma = \Delta Z \text{ y } B\Lambda\Gamma = E\Delta Z$$

Yo digo también que  $B\Gamma = EZ$  y que estos dos triángulos son iguales y tienen todos los otros elementos homólogos iguales. Lo anterior quiere decir que:

$B\Gamma = EZ, AB\Gamma = \Delta EZ$  y  $A\Gamma B = \Delta ZE$ . De hecho, si el triángulo  $AB\Gamma$  se superpusiera sobre el triángulo  $\Delta EZ$ , de manera que coincidieran los puntos  $A$  y  $\Delta$  y los lados  $AB$  y  $\Delta E$ , el punto  $B$  coincidiría con  $E$ , porque  $AB = \Delta E$ .

Los lados  $A\Gamma$  y  $\Delta Z$  coincidirían también debido a

la igualdad de los ángulos  $B\Lambda\Gamma = E\Delta Z$ , de tal manera que el punto  $\Gamma$  coincidiría a su vez con  $Z$ , porque  $A\Gamma = \Delta Z$ .

Habiendo ya coincidido los puntos  $B$  y  $E$ , los lados  $B\Gamma$  y  $EZ$  coincidirán también porque, si por una parte  $B$  y  $E$ , y por otra  $\Gamma$  y  $Z$  coinciden, pero los lados  $B\Gamma$  y  $EZ$  no coinciden, dos rectas podrían delimitar un área, lo que es imposible. (*Ax.10*).

Así, los lados  $B\Gamma$  y  $EZ$  no coincidirán, y serán iguales. (*Ax. 8*).

Como consecuencia, el triángulo  $AB\Gamma$  coincidirá en su totalidad con el triángulo  $\Delta EZ$  y será igual a éste, y los ángulos restantes del uno coincidirán con los ángulos restantes del otro y serán respectivamente iguales, a saber:

$$AB\Gamma = \Delta EZ \text{ y } B\Gamma A = \Delta ZE$$

*Figura N° 5.*

Esta prueba tiene los fundamentos de la experiencia mental: “aplicar” y “hacer coincidir”, operaciones mentales del pensamiento que no tienen estatuto matemático. Esta es la función de la geometría mientras que no dispuso de las transformaciones como conceptos matemáticos. Los “Nuevos Elementos de la Geometría” de Méray (1874) ilustran el progreso en este terreno; la prueba de este teorema (p. 60) se presenta de forma análoga a la prueba de los Elementos de Euclides. Las expresiones “superponer los ángulos” y “coincidir” son tratadas por Méray con más precisión, como lo veremos a continuación:

dos figuras sólidas son *iguales* cuando se puede (por lo menos en el pensamiento) hacer que coincidan, es decir hacer que se confundan en todas sus partes (p. 3).

*Transportar* un ángulo a un plano a partir de una semirecta dada, es situarlo sobre este plano, de tal manera que uno de sus lados coincida con dicha semirecta, y que otra semirecta móvil que gira alrededor del vértice con una rotación en el sentido apropiado, idéntico a la amplitud del ángulo, se sitúe precisamente sobre el segundo lado (p. 47).

Como podemos notar, Méray tiene en cuenta explícitamente los “movimientos” como elementos de la construcción de sus elementos (Advertencia para la tercera edición, 1905):

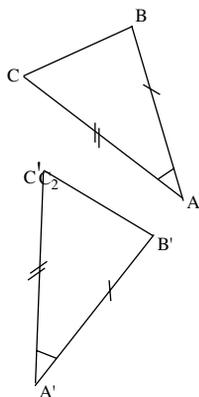
Se ha dicho que la idea de movimiento debe ser desterrada de la geometría. Yo protesto contra tal idea bizantina y estoy convencido de que la superposición de las figuras, base de la geometría, es inseparable, en esencia, de la concepción de *desplazamiento*. Para demostrarlo recordemos la teoría clásica de la perpendicular, según la cual cualquier semiplano se pone en *movimiento* alrededor de su bisagra.

Sin embargo, los Nuevos elementos de Méray conservan los rasgos de la experiencia mental. Esto se evidencia en el uso de verbos de acción y en la referencia a la experiencia y a un actor. Como lo señala Rousseau<sup>13</sup>: “los profesores no se dejaron convencer. Para ellos, parecía fácil aceptar los axiomas de la Geometría de Euclides: su reacción se limitó a un silencio prudente. Pero admitir los axiomas de los desplazamientos, y en particular de las traslaciones como resultado de la experiencia, era para estos profesores como confesarle a los estudiantes la incapacidad de la geometría para bastarse a sí misma”. La constitución de las transformaciones en conceptos matemáticos en términos de *movimiento*, es obra de los geómetras del siglo XIX. Borel<sup>14</sup> dice que ellos nos enseñaron que *la geometría es el estudio de los movimientos*. Luego hace referencia a un proceso evolutivo que parte de la elaboración de pruebas separadas de la experiencia mental y se dirige hacia las demostraciones en el sentido moderno: “Sustituir paulatinamente el estudio dinámico de los fenómenos por su estudio estadístico es una tendencia esencial del pensamiento moderno”.

La figura N° 6 que presentamos más adelante, es el ejemplo de una demostración del “segundo caso de igualdad de triángulos” utilizando transformaciones geométricas.

13. Th. Rousseau en “Informe de la subcomisión francesa de la CIEM sobre la enseñanza secundaria”, Bioche, (1911, p. 102, comunicación personal y documento aportado por Georges Glaeser, 1987).

14. Citado por Rousseau, (1911, p. 103, comunicación personal y documento aportado por Georges Glaeser, 1987).



Siendo dos triángulos ABC, A'B'C' tales que uno de los ángulos sea igual a un ángulo del otro triángulo, y que los lados que formen este ángulo sean respectivamente iguales:

$$AB = A'B' : AC = A'C' : \widehat{A} = \widehat{A}'$$

En una simetría donde se producen simetrías axiales, siendo A'B'C<sub>2</sub> el triángulo homólogo de ABC y teniendo el lado A'B' en común con el triángulo A'B'C', tal que A'B'C<sub>2</sub> y A'B'C' pertenezcan al mismo semiplano de la frontera A'B'

Por construcción:  $\widehat{B'A'C_2} = \widehat{BAC}$

entonces  $\widehat{B'A'C_2} = \widehat{B'A'C'}$

Por hipótesis:  $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$

$$\widehat{A'C_2} = \widehat{AC}$$

Así:

entonces  $A'C_2 = A'C'$

$$\widehat{A'C'} = \widehat{AC}$$

Siendo los ángulos  $\widehat{B'A'C_2}$  y  $\widehat{B'A'C'}$  iguales las semirectas A'C<sub>2</sub> y A'C' de origen A' se confunden. Debido a que A'C<sub>2</sub> = A'C', los puntos C<sub>2</sub> y C se confunden del mismo modo que sucede con los triángulos A'B'C<sub>2</sub> y A'B'C'.

**Conclusión:** el triángulo ABC igual a A'B'C<sub>2</sub> es por lo tanto igual a A'B'C'.

Si dos triángulos tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales, dichos triángulos son iguales.

**Hipótesis**

**Conclusión**

$$AB = A'B'$$

$$AC = A'C'$$

$$\widehat{A} = \widehat{A}'$$

$$\Rightarrow \text{triángulos ABC y A'B'C' iguales}$$

Ejemplo extraído de una obra de enseñanza (1967, Matemáticas, 5º, París: Hatier).

Figura N° 6.

De hecho, la constitución de las transformaciones, especialmente de la simetría, en conceptos matemáticos y en objeto de enseñanza debería conllevar

la desaparición de los “casos de igualdad de los triángulos”, que no serían más que una aplicación elemental. Esto, de hecho, es así.

Para finalizar, precisemos que lo que acabamos de describir constituye una ilustración de nuestro propósito y no un estudio histórico de la conceptualización de las transformaciones en geometría. Nos hemos centrado en un proceso de cierta manera interno en la geometría sin tener en cuenta los factores externos, que pudieron haber jugado un papel esencial en un estudio del “desarrollo histórico de la geometría”, como lo muestran Piaget y García (1983). Ambos examinan en especial el papel que juega el álgebra. A continuación presentamos una cita de Chasles (Piaget y García, 1983, p. 111) que resalta toda su importancia.

[...] reflexionando sobre los procedimientos del álgebra y buscando la causa de las inmensas ventajas que ésta aporta a la geometría, ¿acaso uno no percibe que una buena parte de estas ventajas provienen de la facilidad de las *transformaciones* que se realizan sobre las expresiones que se han introducido? El secreto y mecanismo de estas transformaciones constituye la verdadera ciencia y el objeto constante de las investigaciones del analista. No era natural introducir en geometría pura transformaciones análogas sobre las figuras propuestas y sus propiedades.

En nuestro estudio hablaremos del *cálculo sobre enunciados* para designar aquellas pruebas de los estudiantes sobre la experiencia mental que no podemos reconocer verdaderamente como demostraciones.

## V. DIALÉCTICA DE LA VALIDACIÓN

### V.1. PRUEBAS Y REFUTACIONES

La elaboración de pruebas es sólo uno de los aspectos del procedimiento de la validación. Otro de estos aspectos lo constituye el análisis crítico de las pruebas, es decir, la exploración de los objetos matemáticos, cuya verdadera naturaleza es siempre cuestionada. Debido a que la historia muestra claramente la diferenciación entre estos dos aspectos, la generalización de los conceptos matemáticos no se terminará de hacer nunca. Así, por ejemplo, el concepto de número, a la vez elemental y fundamental, no ha cesado de cambiar: números enteros y racionales positivos, números negativos (cuya naturaleza fue discutida hasta el siglo XIX), construcción de números reales en el siglo XIX, y más recientemente, la invención de números reales no estándar. Tales evoluciones hacen necesario que se retomen las pruebas, que se reconsideren su carácter de validez y que se precisen los objetos que les sirven de apoyo.

Esta dinámica del desarrollo de las matemáticas pone en evidencia un proceso fundamental: la dialéctica de las pruebas y las refutaciones. Lakatos

(1976) sostiene a este respecto una tesis radical según la cual “las matemáticas no formales, cuasi empíricas, no se desarrollan por un aumento continuo del número de teoremas indudablemente establecidos, sino por el mejoramiento incesante de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, a la lógica de las pruebas y las refutaciones” (p. 5).

No obstante, muchos son los que no están de acuerdo con tal tesis. Dieudonné, uno de sus más asiduos críticos afirma, sin embargo, que (Dieudonné, 1984, pp. 9-10):

La evolución de la mayoría de las partes de las matemáticas se lleva a cabo siguiendo un mismo desarrollo: se trata de unos objetos de los cuales los matemáticos afirman tener un buen conocimiento “intuitivo”, cuya naturaleza no es profundamente analizada, y sobre los cuales se fundamentan razonamientos que parecen escaparse a toda objeción [...]. En una segunda fase, estos razonamientos que pretenden ser “rigurosos” son objeto de contradicciones o hasta de consecuencias que aparentemente son contrarias a la “intuición” que se cree tener de los objetos considerados. Se vuelve entonces necesario retomar las bases de estos razonamientos para definir con más precisión los objetos que se estudian y las operaciones permitidas para ellos. Pero frecuentemente los iniciadores de estas reformas continúan retomando las ideas de sus predecesores y tienden a no poner en práctica las reglas que ellos mismos han promulgado, dejándose arrastrar por las viejas “intuiciones” que los llevan finalmente a conclusiones erróneas. Solamente cuando la siguiente generación se obliga a sí misma a respetar escrupulosamente las reglas de la deducción lógica a partir de un sistema *explícito* de proposiciones admitidas en principio (“un sistema de axiomas”), la teoría adquiere un poder de convicción tal que, contrariamente a lo que pretenden algunos, deja de ser cuestionada.

Sin entrar en este debate, quisiéramos sugerir que lo que esta en cuestión parece ser finalmente la validez del modelo de Lakatos. Lakatos pone toda su atención en aquellos que se interesan por la génesis de los conocimientos matemáticos. Hemos seleccionado el modelo propuesto por él para analizar los procesos de prueba realizados por los alumnos y su evolución en el curso de la construcción de sus conocimientos matemáticos, especialmente, en el transcurso de la solución de un problema. En efecto, este modelo es coherente con las teorías desarrolladas por la escuela de Ginebra respecto a la génesis de las estructuras cognitivas, para la cual Piaget (1975) ha señalado el papel central que juega la contradicción, fuente generadora de desequilibrios que, una vez superados, dan origen a construcciones nuevas. Por otro lado, los últimos trabajos de Piaget (1983) sobre la génesis de *lo necesario* indican cuán importante es que el sujeto tenga en cuenta *lo posible*: “ésta [la necesidad] contribuye con la constitución de los posibles; mientras que éstos

engendran diferencias, la necesidad está ligada a procesos de integración. Así se crea un equilibrio entre estas dos formaciones” (p.163).

Sostenemos entonces que la toma de una decisión sobre la validez de un enunciado es legítima cuando se confirma como *necesaria* en contraposición a otros enunciados que son sólo *posibles*, aunque lo anterior no aparezca de manera explícita. Así, el proceso de validación, independientemente de que se cumpla o no en la explicitación de una prueba, está fundado en el análisis del pro y el contra, en otras palabras, en las contradicciones potenciales. Por lo anterior, este proceso es esencialmente *dialéctico*. Este hecho es aún más evidente en un contexto de debate, en el juego de las pruebas y las refutaciones. Por otro lado, fuera del contexto social, la elaboración de una prueba pasa por un análisis crítico y proviene de la dialéctica misma: una prueba rigurosa y definitiva es una prueba que no será refutada; incluso para algunos, una prueba que no sería refutable.

## V.2. EL PROBLEMA DE LA CONTRADICCIÓN

Una de las finalidades de un proceso de prueba es asegurar la ausencia de contradicciones formales o semánticas de un problema. Sin embargo, el “hecho” de la contradicción, como centro del debate de validación, presenta una complejidad que no se deja reducir a la complejidad de la lógica.

De hecho, la contradicción no existe por sí misma, sino en su relación con un sistema cognitivo. Por ejemplo, tal contradicción será reconocida por el profesor o por el observador en la situación experimental, pero no podrá ser reconocida por el estudiante:

Habiendo mostrado que la sucesión  $(u_n)$  admite un límite  $\mathbf{I}$ , verificando que  $\mathbf{I} < 1$ , y dada la siguiente expresión:

$$u_n^{n+1} + u_n^n + u_n^2 + u_n + 1$$

los estudiantes tratarán de manera independiente  $n$  exponente y  $n$  índice:

$$\begin{aligned} \lim (u_n^{n+1} + u_n^n + u_n^2 + u_n + 1) &= \lim (u_n^2 + u_n + 1) \\ &= (\mathbf{I}^2 + \mathbf{I} + 1) \end{aligned}$$

(Robert, 1982)

Pero una contradicción puede ser constatada por los estudiantes, aunque para el profesor ésta sea inexistente:

Para los estudiantes de 5° la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser igual a  $180^\circ$  para todos los triángulos, porque el resultado de la suma de los ángulos de un triángulo pequeño, no puede ser la misma que la de un triángulo más grande (Balacheff, 1987).



En 5º, para calcular el volumen de un paralelepípedo por medio de pequeños cubos, algunos estudiantes cuentan y recuentan el número de cubos en una de las dimensiones. Luego consideran que es necesario restar uno a cada una de las otras dimensiones del paralelepípedo *porque no se puede contar dos veces los cubos de las esquinas* (Bodin, 1980).

En estos ejemplos las razones de identificación o la ausencia de identificación de una contradicción se deben a la naturaleza misma de los conocimientos utilizados por los estudiantes.

Los dos últimos casos corresponden a situaciones de conflicto cognitivo, que sirven de base a las situaciones didácticas que concebimos. La hipótesis, como toma de conciencia de tales contradicciones, hace necesaria la evolución de las concepciones del estudiante. Aquí se reconoce la problemática constructivista, según la cual la contradicción es la fuente de un desequilibrio que para compensarse necesita el motor del progreso del conocimiento (en el doble proceso de la acomodación y la asimilación tratado en las obras clásicas de Piaget). Es dentro de esta perspectiva que se encuentra la epistemología científica heredada de Popper. Sin embargo, cuando Lakatos retoma esta problemática, en lo que concierne a las matemáticas, la superación de las contradicciones no parece ser realmente la fuente del progreso.

En el funcionamiento didáctico, la existencia de un saber matemático de referencia (saber científico o saber escolar) le da al profesor el poder de decidir acerca del carácter contradictorio de una situación. La tarea del profesor consiste entonces en facilitarle al alumno la posibilidad de reconocer este carácter contradictorio de la situación. Pero se convierte en un problema didáctico saber...

¿cuáles son las condiciones necesarias para que el estudiante se haga consciente de una contradicción y de su superación?

Para Piaget (1974), esta toma de conciencia “no se produce sino cuando el sujeto alcanza el nivel en el que es capaz de tal superación” (p. 161). Pero lograr que esta superación consista en una verdadera organización de los conocimientos es un tanto difícil. No exigiremos esta superación potencial; solamente requerimos del planteamiento del problema: ser consciente de una contradicción es plantear el problema de selección entre dos proposiciones: una afirmación y su negación. Cualquiera que sea el resultado de esta elección, supone que la afirmación está disponible y es susceptible de ser negada. La contradicción es, de este modo, dependiente de una doble construcción. Estamos convencidos de que la toma de conciencia no se producirá sino cuando el sujeto sea capaz de hacer esta doble construcción.

Una vez la contradicción ha sido identificada por el sujeto, su superación sólo se logra después de un extenso trabajo. Así, en el caso de la medida de

los ángulos de un triángulo, la superación de la contradicción mencionada anteriormente será antecedida por el hecho de que el alumno se apropie de las concepciones de la medida de un ángulo y del postulado de Euclides, incluyendo sus consecuencias. Si al relacionar las proposiciones se presentan contradicciones, el proceso de superación no habrá sido exitoso. Por ejemplo, las proposiciones “entre más grande sea un triángulo, más grande es la suma de sus ángulos” y “la suma de los ángulos de todo triángulo es  $180^\circ$ ”, son contradictorias, y por lo tanto no habría una relación lógica entre ellas si se llegaran a relacionar.

Además, la contradicción no existe sino con respecto a un resultado que se espera, pero que al final no resulta; en otras palabras, a una conjetura inválida. La existencia potencial de la afirmación no es suficiente. Es necesario que se encuentre, como lo diría Hadamard, delante de la escena. El mismo Piaget menciona que “la toma de conciencia de la contradicción es una tarea fácil cuando esta surge de una predicción y un elemento exterior que la desmiente”. Se puede constatar que Piaget no se limita solamente a las condiciones cognitivas, sino que abre su análisis a las condiciones ligadas con la situación. Sin embargo, Piaget no profundiza mucho a este respecto, por lo menos en lo que hemos podido leer.

La toma de conciencia de una contradicción supone una predicción, es decir, la participación efectiva del estudiante en la elaboración de una afirmación. Esto significa alejarse de la acción, gracias a lo cual la acción es considerada como susceptible de una reflexión, e incluso de un discurso. La acción no está solamente en la práctica. Como producto de un proceso de elección, es remitida a sus condiciones de validez y a sus efectos. Está sometida a una finalidad. La acción plantea entonces la cuestión de la elección y de las condiciones de la acción.

Consideramos que las siguientes condiciones son necesarias para la toma de conciencia de una contradicción:

- existencia de algo que se espera obtener: predicción o anticipación,
- posibilidad de construir la afirmación asociada con lo esperado y su negación.

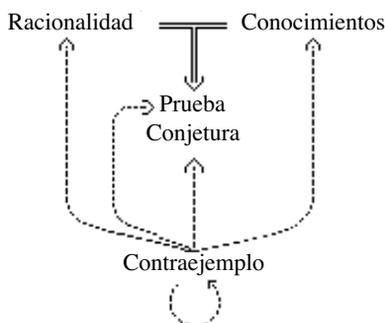
De lo anterior resulta que la contradicción está tanto asociada a un proceso de evaluación, que puede ser explícito o deliberado, como a un proceso de decisión.

Para que el estudiante sea capaz de hacer estas anticipaciones, es necesario que sus conocimientos constituyan un modelo de la realidad, con el fin de permitirle un control a priori de la situación-problema en que se encuentra.

### V.3. TRATAMIENTO DE LAS REFUTACIONES

En la clase de matemáticas, el contraejemplo es generalmente percibido como una catástrofe cuya consecuencia es el abandono puro y simple de posiciones conquistadas durante la solución del problema. El universo de la clase de matemáticas se revela, desde este punto de vista, más maniqueo que dialéctico. El análisis de la actividad del matemático o de la comunidad de matemáticos, como nos la presenta Lakatos, revela un funcionamiento bien diferente y, seguramente, menos radical.

Teniendo como base el análisis que propone Lakatos (1976), se pueden diferenciar las consecuencias de un contraejemplo en términos de su repercusión sobre la conjetura, sobre la prueba, o inclusive sobre los conocimientos o sus fundamentos racionales. Puede suceder igualmente que la superación de la contradicción, revelada por el contraejemplo, sea objeto de la crítica y el rechazo del mismo contraejemplo. El esquema que presentamos a continuación, en el que se hacen explícitas la conjetura y su prueba como el producto conjunto de los conocimientos y de la realidad de un individuo (líneas continuas), resume las principales consecuencias factibles de un contraejemplo (líneas punteadas), tales como la enmienda de una conjetura, la recuperación de una definición, el rechazo del contraejemplo, etc.



A pesar de ser claro, este esquema no es más que una evocación de la multiplicidad de los efectos posibles de un contraejemplo. En este caso sería suficiente poner en evidencia un problema fundamental, hasta ahora ocultado por los análisis didácticos (y por los psicológicos).

El carácter dialéctico del desarrollo de los conocimientos matemáticos que Lakatos evidencia en lo concerniente a la filogénesis y que ya conocemos como ontogenia, tiene como consecuencia un problema que no ha sido señalado por él, pero que no se le escapa a la persona preocupada por la didáctica: *¿qué es lo que determina la legitimidad de la elección de una respuesta a un contraejemplo?*

Los matemáticos que Lakatos considera en su estudio parecen basarse en el mismo principio de racionalidad. Pero no sucede lo mismo con los alumnos: el empiricismo ingenuo o la experiencia crucial pueden fundar pruebas

y constituir las raíces legítimas de una convicción. Así, si nos apoyamos en una contradicción presentada al alumno para que los fundamentos racionales de su conjetura y de su prueba sean reconsiderados, ¿cómo evitar que el debate se base en una contradicción o en una enmienda de la conjetura? Lo anterior puede parecerle al alumno totalmente legítimo, ya que toda esta racionalidad le es suficiente para enfrentar numerosas situaciones prácticas que encuentra por doquier.

Si el profesor presenta un contraejemplo al estudiante, ¿cómo evitar que este estudiante declare que se trata de un caso particular, ya que su conjetura está basada en un empiricismo ingenuo? Este problema cobra gran importancia en los niveles más avanzados de escolaridad, en los cuales el estudiante discutirá acerca de la legitimidad de un contraejemplo. Pero para nosotros lo que está en cuestión es la concepción que este estudiante tiene del conocimiento en juego.

Fundar el aprendizaje, es decir, la concepción de situaciones didácticas, sobre el hecho de que los estudiantes tomen conciencia de las contradicciones (sobre una didáctica de la validación), requiere que esta incertidumbre acerca de la naturaleza de la superación de una contradicción sea tomada en cuenta. Si parece estar suficientemente claro que no hay un determinismo estrictamente cognitivo, ¿cuál es el papel de las características de la situación? Las intervenciones del profesor y su gestión del contrato didáctico serán muy seguramente elementos determinantes para que el cuestionamiento de los conocimientos, y especialmente de los fundamentos racionales de la conjetura, sean considerados pertinentes en la presentación de un contraejemplo. La labor del profesor puede aún hacer que se estime adecuado el cuestionamiento del mismo contraejemplo, más que el de la prueba.

## **PRUEBAS Y CONTRAEJEMPLOS “LOS POLÍGONOS”**

### **I. PRESENTACIÓN DEL ESTUDIO**

#### **I.1. INTRODUCCIÓN**

La experiencia, cuya concepción y análisis presentamos aquí, fue elaborada para retomar las tesis de Lakatos en el marco de la solución de un problema por parte de los alumnos.

Al nivel del primer ciclo que nos atañe aquí, no era necesario retomar el problema del establecimiento de la fórmula de Euler para los poliedros, a menos que el manejo del campo conceptual correspondiente fuera completamente desconocido por los alumnos. Sin embargo, no quisimos centrarnos tanto en este tipo de problema, ya que nos limitaríamos esencialmente a la discusión de la hipótesis de un paralelismo entre los procesos puestos en juego al nivel de un individuo y los descritos por Lakatos.

Por lo anterior, hemos seleccionado el problema del descubrimiento y el establecimiento de una fórmula de enumeración de las diagonales de cualquier polígono. Como medio de investigación de los procedimientos utilizados por los estudiantes, elegimos una situación de interacción social entre dos alumnos que requiere comunicación. En lo que sigue explicaremos tanto los aspectos que motivaron esta elección, como el campo conceptual seleccionado, y haremos el estudio a priori de las soluciones que los alumnos pueden aportar a este problema.

La primera modalidad que utilizamos consistió en proponerle el problema a los estudiantes sin proporcionarles ni la definición de polígono ni la de diagonal. Esto fue hecho con el fin de darles la posibilidad de observar la (re)construcción de estos conceptos en el curso de la solución, especialmente en relación con las refutaciones. De este modo, hemos buscado situarnos en un contexto tan cercano, como fuese posible, del objeto de estudio de Lakatos, quien, con los problemas de prueba, plantea los de la constitución de los conocimientos matemáticos.

La modalidad en la que las definiciones serán proporcionadas al estudiante será también objeto de estudio en el siguiente capítulo. En este capítulo presentaremos los procesos de prueba observados y su evolución, los diferentes tratamientos de las refutaciones y los problemas ligados a la definición.

)+( , ( , )+ . □□, □□□, □ - □e-□ ,

A

A

□ ( 6326-792 ) : 3) 5-0 ) 1 □

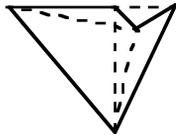
□BF47H□ABFC□54-4A8A5-AB□BF ABC8A8A FABHAMCL C8B7FCBA8  
78 GA8 C4C8? 6B□B 78F88A ? B5I8H47BE?8F 8JC?64 DH8G8A8A DH8  
E87464EHA8JCB DH8F8M8A<47B4 B8BF6B□C4R8BF78 H□□□B Ak8?  
8F6B?E A8?GJCBG8A8ADH8

□84EHA□87-B DH8 C8□□ 64?H4E8? AT□8B 78 74:BA48F78 HA  
CBP8AB747B8?AT□8B78FH8E8F

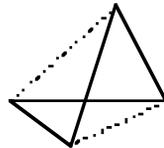
□B4A8E8E8F□C8B8 8AHA4B=4 DH8BF8FGH74A8F GH8EBA4 H7-F  
CBF5-SA7H8A8C874? B5I8H46-SA - 4□5-NAF8 ?8F7<B DH8CB7A74CB  
A8E78 B7B8?8□C8DH8 A88F8A 86?4E8?C8B58□4 6B□B 8FH8C8  
F8H4FHC8C478 64-SA

□B6BA88H8 ? C8□8E4 C48 78 ? 8JC8E8A64 □H8B 78 DH8BF8F  
GH74A8F7-8EBA4 6BAB8EHFC8CH8F 8?B5I8H47BE<LB□8A6SA78 ?F  
CBF5?8F7<6H□78FDH8BF8FGH74A8F <A8EBH8BFCB7EAC8A8E4?4C?<  
64E4 6-8H8FCB8P8AB8F8?□87-B 78 6M8H8 CBCH8C FC84□8A8 ?F  
6BAchE46-BA8?78 ? c:HE4 □Y 7858H4AF8EC8CH8CF8F8□M64□8A8

□G 8JC8E8□8A86-SA8 :E45S 8A4H7B□4?HAFI868F8 c □S □H8F  
8BF4AM8F8C48A78?6BAH8E878 CB7H6-BA8F8F8E8F78 ?BF8FGH74A8F  
78 ?FAB8F78?B5I8H47B□78 ?F8A8E8C6BA8?78 4?HA8F:E4546-BA8  
E84?4474F



) 6 BAIN88F4 ?A8?7BF



) 6 H47B

85 □ C

□□□ 32□□/□378□

A8?Ak8?DH8AB8A8E8F4 ? 6?4F8 78 Y ?BFC8P8AB8F8 C8F8A8GA□MF  
6B□B B588BF6H8H8?8F DH86B□B B588C8 78 8A8R4A4 ??BF8BA8E4  
□8A8□8A86BA7BF8A ?BFCJCBF8F6B?8F78 8F8 Ak8? CBEB□8ABF8A  
?BF6B88FCBA8A8F4 ?BFCB:E4□4F78 78688C878? 78 AB<8□5E8  
78 DH8H8BA?BF8F45?86-7BFC44 ?F 6?4F8F DH8B5I8H4□BF ?  
B5I8H46-SA GH8 ?H:4E8A 8? F8:HA7B8E8□8F88 78?4RB8F6B?E78  
H47BF8 ;468 □8A86SA78 ?BFC8P8AB8F8FCB8DH8468AC488 78?

preámbulo a la presentación de otras figuras geométricas (especialmente el paralelogramo), que sí son verdaderos objetos de enseñanza.

Sin embargo, los polígonos fueron objetos de enseñanza en la enseñanza primaria, especialmente en el CE1: se observan, se cuentan sus lados y sus vértices, se diferencia su forma, se les designa con algún nombre, etc. El siguiente texto extraído de ERMEL (1978, p. 160) es un ejemplo de cómo se describen las actividades sobre las formas planas.

La comparación de formas planas diversas, a través de las observaciones que susciten, hará que los estudiantes hagan explícitos los criterios seleccionados para las clasificaciones efectuadas. Entre estos criterios, tendrán mayor importancia los relativos a: la convexidad, la rectitud de las aristas, el número de aristas (lados) o de vértices, las relaciones entre los lados (isometría, paralelismo, ortogonalidad), los elementos de simetría, etc.

Al párrafo anterior le siguen otros tres acerca de la “Clasificación de las formas planas”, la “clasificación de las formas poligonales” y la “clasificación de los cuadriláteros”. Los polígonos son las figuras que tienen “lados rectos” (p. 161).

De hecho, el estudio de los polígonos en este nivel es esencialmente la puesta en práctica del uso de definiciones, y aún de su elaboración. El siguiente es un ejemplo propuesto por Basiss (1984, p. 115) con motivo de una secuencia propuesta acerca de los polígonos:

Cada conducta de clasificación hace que los estudiantes formulen designaciones de conjuntos, designación que tiene el valor de definición porque no se contenta con ser una yuxtaposición de propiedades descriptivas, sino que conduce a la formulación de propiedades necesarias y suficientes.

Examinamos esto en detalle para las clases de 4º, 5º y 6º con base en las obras de la colección E. Gallion (OCDL Hatier, ediciones de 1977, 1978 y 1979). Estas obras fueron utilizadas en el colegio de Moirans, de donde surgieron 4 de los 14 binomios que observamos.

*En 6º:* la palabra “diagonal” aparece al hablar del paralelogramo. Se muestra al mismo tiempo que “lado”, “paralelogramo”, “vértice” y “centro” en una figura. Las diagonales se cortan en el centro de la figura (Bassis, p. 27). La palabra “polígono” aparece en una sección titulada “perímetro” (p. 39), en la que se muestra un polígono cóncavo y se define su perímetro.

*En 5º:* la palabra “polígono” aparece en un ejercicio de clasificación de objetos (Bassis, p. 117). Es una sección acerca de las particiones. Los octágonos y los heptágonos regulares fueron mencionados (p. 40) en una actividad

de confección de volúmenes. Se pidió a los estudiantes encontrar la etimología de los nombres de estos polígonos.

*En 4º:* toda una sección lleva como nombre “vocabulario sobre los polígonos” (Bassis, p. 20). Esta es una sección de “revisión de este vocabulario” (p. 20). Las primeras actividades se basan en la observación de polígonos regulares (hexágono, octágono, cuadrado). Un polígono cóncavo aparece en dos actividades: en la primera se pide enumerar los vértices y en la segunda los estudiantes tienen que distinguir un cuadrilátero cruzado de otro no cruzado. Seguidamente, los términos “vértice”, “lado” y “diagonal” se introducen en un ejemplo de un cuadrilátero, y todos los ejercicios posteriores tratan únicamente del cuadrilátero. La palabra “diagonal” aparecerá solamente en el siguiente texto, al tratar las propiedades del rombo (p. 118), del rectángulo (p. 214) y del paralelogramo (p. 216).

No encontramos sino un texto escolar de 4º, ediciones de Magnard que dedique una sección a los polígonos (a pesar de haber buscado en la biblioteca del IREM de Grenoble, constituida por una docena de obras). El “libro del profesor precisa que esta lección sirve de introducción, a la designación de los polígonos” (Bassis, p. 54). En otra obra de Jéomatri (de Ophris 1979), no son utilizadas ni la palabra “polígono” ni la palabra “diagonal” (para hablar del paralelogramo utiliza el término la mitad de los bipuntos). De hecho, la mayoría de las obras consultadas utilizan, sin definirla, la palabra “diagonal” al tratar las propiedades características del paralelogramo y eventualmente de otros cuadriláteros como un cuadrado o un rombo (Dela-grave 1979, Hachette 1979, La Capitelle 1979, A. Colin 1979).

A excepción de algunas menciones superfluas, los polígonos se han convertido en objetos viejos. Son más que todo un marco para la introducción de algunos cuadriláteros particulares, cuyo estudio será más profundo.

Lo anterior nos conduce a sostener la hipótesis de que los estudiantes podrán interiorizar lo suficientemente rápido las concepciones de polígono y diagonal, aunque, con la tendencia a privilegiar los polígonos regulares o el prototipo del paralelogramo (lo que debería conducir a lo que llamamos las diagonales diamétricas — diagonales que se cortan en su punto medio).

### *1.2.3. Análisis a priori de los procedimientos*

**Anotación:** en todo lo que sigue,  $f$  designa la aplicación  $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  que hace que el número de diagonales de un polígono corresponda al número de sus vértices, y  $s: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  designa la aplicación que hace que el número de diagonales de un vértice corresponda al número de vértices de un polígono.

Como en el caso de los sólidos de Euler en el siglo XVIII, los polígonos serán para los alumnos objetos familiares y no problemáticos a priori. Del mis-



mo modo que los poliedros de Platón, los polígonos regulares juegan aquí un papel privilegiado.

En caso de que los alumnos interiorizaran una concepción clásica del polígono y de la diagonal, contamos con cuatro tipos de proposiciones:

- $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ , fundamentada en la invarianza del número de las diagonales en cada vértice del polígono, y en el hecho de que la suma de estos números lleva a contar dos veces cada diagonal.
- $f(n) = (n-3) + \sum_{p=3}^{p=n} (n-p)$ , fundamentada en un procedimiento de enumeración sistemático de las diagonales de un polígono recorriendo su borde en un sentido determinado. En adelante, esta solución será designada por  $f(n) = \sum \zeta_n$ , donde  $\zeta_n$  designa la sucesión de los números de diagonales en cada vértice encontrados en el transcurso de este recorrido.
- $f(n) = f(n-1) + (n-2)$ , fundamentada en la construcción del polígono  $P_n$  (polígono con  $n$  vértices) a partir del polígono  $P_{n-1}$ . Una solución análoga, expresada por una fórmula de recurrencia puede surgir de la observación de la sucesión de los binomios: (número de vértices, número de diagonales). El análisis de las “diferencias sucesivas” puede llevar a  $f'(n) = f'(n-1) + a(n)$  y  $a(n) = a(n-1) + 1$ ; con los valores iniciales:  $f'(3) = 0$  y  $a(3) = 0$ .
- Por último se puede considerar la solución:  $f(n) = c_n^2 - n$ . No obstante, ésta supone una aproximación combinatoria, poco susceptible de manifestarse en los alumnos de 4º, primero, por la razón evidente de que las fórmulas de enumeración están fuera de su alcance, y segundo porque una concepción combinatoria del polígono (conjunto abstracto originario de una relación de incidencia) es poco plausible a este nivel.

Para los estudiantes, estas soluciones tienen significados diferentes, aunque sean equivalentes desde el punto de vista matemático. Estas implican análisis diferentes, de tipo de enumeración, y una apropiación diferente de las concepciones de polígono y diagonal.

Por otro lado, es posible que frente a la aceptación de las diagonales exteriores al polígono, en el caso de los polígonos cóncavos, exista una posición de rechazo. Estas soluciones podrían entonces ser llevadas a cabo considerando una condición de convexidad.

En el caso en que los alumnos pongan en juego concepciones fuertemente marcadas por el prototipo del paralelogramo o por los polígonos regulares, consideramos soluciones del tipo  $f(n) = \frac{n}{2}$ . Esto supone una concepción de “diagonal” como diámetro del polígono. Por supuesto, tal solución es refutada por los polígonos cuyo número de vértices sea impar. El tratamiento de esta refutación nos parece completamente abierto: introducción de una condición, explicitación de una definición que “salva” la conjetura, modificación de la conjetura, etc. Uno de los objetivos de nuestra investigación es precisar aquello que determina la selección de uno de estos tratamientos.

Hemos considerado dos soluciones que podrían ser resultantes de la conjugación de un empiricismo ingenuo de la observación de los casos de un polígono de 5 o de 7 vértices. Se trata, respectivamente, de  $f(n) = n$  y de  $f(n) = 2n$ . Se destacará la fragilidad de estos procedimientos, que son refutados por cualquier otro polígono diferente al que les dio origen. Otras conjeturas “frágiles” suponen el examen de polígonos teniendo un gran número de vértices, como en el caso de  $f(n) = 3n$  que es verificada solamente por el  $P_9$ . Es poco probable que los estudiantes lleguen hasta aquí.

#### *1.2.4. Recurso a la interacción social*

En este estudio hemos utilizado una situación de interacción y de comunicación como herramienta experimental. Este tipo de situación, utilizada desde hace muchos años en diversos trabajos (Balacheff y Laborde, 1985a, 1985b) permite un acceso particularmente eficaz a las concepciones de los estudiantes y los procedimientos que ellos utilizan.

La característica principal de esta situación es que los estudiantes tienen la tarea de resolver juntos un problema. Las interacciones entre individuos en igualdad de condiciones permite independientemente de toda intervención de un experimentador la exteriorización de las concepciones, de los proyectos y de la toma de decisiones.

Para la primera parte de la experiencia, los estudiantes trabajarán en una situación cuasi-aislada, lo que no excluye la existencia de un contrato experimental, que debe ser analizado (se entiende por “contrato experimental” el conjunto de reglas más frecuentemente implícitas en las relaciones entre los compañeros en la situación observada, en las que también participa inclusive el observador. Esta noción es directamente derivada de la concebida por Brousseau (1986) en el contrato didáctico).

Cada binomio de estudiantes dispone únicamente de un lápiz: esta restricción tan artificial es un elemento importante en la situación. Es un obstáculo para la organización de la investigación en un trabajo separado e independiente de cada uno de los estudiantes y para la confrontación con sus producciones. Esta confrontación se vuelve un proceso delicado debido a la dificultad de cada uno para entrar en la solución del otro, dado que todos sustentan su propio proyecto. Pero el hecho de no disponer sino de un solo medio de escritura obliga a los estudiantes a una confrontación constante para seleccionar la estrategia de una operación que vayan a realizar, o para determinar criterios comunes para aceptar o refutar una aserción. Tal situación materializa la situación de validación tal como la concibe Brousseau, descrita previamente (Capítulo I).

Por otra parte, la situación de interacción social favorece los conflictos socio-cognitivos que, como lo señalan Doise y Mugny (1981), ponen más fácilmente en evidencia las contradicciones que las situaciones de funcionamiento individuales. Dichas contradicciones permanecen generalmente ocultas por las distancias temporales entre los hechos que las revelan.

Por último, dado que se ha presentado el problema a los alumnos, éste se constituye en elemento de referencia para los procesos de comunicación entre compañeros, siendo todos pertenecientes al mismo nivel escolar. Esta situación es la que denominamos una situación de comunicación invocada porque estos compañeros están ausentes, no habrá respuesta a los mensajes emitidos (contrariamente a lo que sucede en las situaciones de comunicación realizada, ver por ejemplo Balacheff, 1982). Este contexto pone fin a la actividad y a la producción de los alumnos. El hecho de que el procedimiento de cálculo descrito deba ser utilizado por otros estudiantes desconocidos, sobre quienes los emisores no ejercen ningún tipo de control, debería favorecer la toma de consciencia y el compromiso con los problemas de la generalización, y su puesta en marcha. Igualmente debería favorecer una problemática de la fiabilidad, que pudiera dar origen al sometimiento de las soluciones propuestas a severas pruebas y así constituirse en el preámbulo a una problemática de la prueba.

Creemos entonces que esta situación experimental reúne las condiciones de interacción social, cognitivas y situacionales necesarias para la aparición de los procesos que queremos observar.

### **I.3. DATOS GLOBALES DE LAS OBSERVACIONES REALIZADAS**

**Anotación:** entiéndase  $P_n$  como un polígono con  $n$  vértices.

#### *I.3.1. La población de los alumnos observados*

Observamos catorce binomios de estudiantes de escuelas de la región de Grenoble bien en el transcurso del segundo trimestre de 1980-1981, o en el segundo trimestre de 1981-1982. Trece de los binomios observados estaban

cursando 4º y el otro binomio (Pierre y Mathieu) fue observado al comienzo del mes de julio de 1980, en el período final de 5º grado.

Estas observaciones hubieran sido imposibles de realizar sin la colaboración de los profesores y la voluntad de los estudiantes. Los estudiantes se organizaron libremente en binomios, según sus afinidades, lo que probablemente constituya una debilidad metodológica de este estudio. Infortunadamente, tal condición resultó impuesta en la práctica por las condiciones mismas de nuestra investigación en ese momento (no obstante, la riqueza de los resultados obtenidos hace que lo anterior no tenga mayor relevancia).

Las observaciones fueron realizadas en recintos escolares, pero por fuera de clase. El momento en el que fueron realizadas, no siempre el más propicio, dependía de la disponibilidad de los estudiantes. Generalmente oscilaba entre “media hora y dos horas” después de la clase de la tarde, pero antes de la partida del transporte escolar. El tiempo de trabajo de la mayoría de los binomios fue en promedio una hora y media.

A continuación presentamos la lista de los binomios, acompañada de los datos correspondientes a las fechas y los lugares.

#### 4º

Antoine y Damien	26 de mayo de 1982	CES “Eaux Claires”	Grenoble
Christophe y Bertrand	15 de febrero de 1982	CES “La moulinière”	Domène
Blandine e Isabelle	3 de febrero de 1982	CES “Pablo Picasso”	Echiroles
Evelyne y Christine	28 de enero de 1982	CES “Le Vergeron”	Moirans
Georges y Olivier	3 de febrero de 1982	CES “Pablo Picasso”	Echiroles
Hamdi y Fabrice	8 de enero de 1982	CES “Le Vergeron”	Moirans
Laurent y Lionel	15 de febrero de 1982	CES “La moulinière”	Domène
Lydie y Marie	3 de febrero de 1982	CES “Pablo Picasso”	Echiroles
Martine y Laura	31 de marzo de 1981	CES “Pablo Picasso”	Echiroles
Nadine y Elisabeth	12 de marzo de 1981	CES “Gérard Philipe”	Fontaine
Naïma y Valérie	18 de febrero de 1982	CES “Le Vergeron”	Moirans
Olivier y Stéphane	18 de febrero de 1982	CES “Le Vergeron”	Moirans
Pierre y Philippe	12 de marzo de 1981	CES “Gérard Philipe”	Fontaine

#### 5º

Pierre y Mathieu	8 de julio de 1981	CES “Stendhal”	Grenoble
------------------	--------------------	----------------	----------

*Tabla N° 2.*

### *1.3.2. El contrato experimental*

El dispositivo experimental que pusimos en práctica comprende dos partes muy diferentes. La transición de la una a la otra implicó una ruptura del contrato experimental: el papel del observador cambió al romper con su neutralidad para producir contraejemplos.

Algunas declaraciones, por cierto poco significativas con respecto al volumen de los antecedentes recolectados, muestran que el funcionamiento de los estudiantes en el transcurso de la primera parte no estuvo totalmente aislado del observador, sino solamente “semi-diagonal”.

El observador pudo ser para algunos un individuo de referencia al que preguntaban lo que se debía hacer (lo que encaja en el sentido de un contrato experimental), o un árbitro al que podían dirigirse:

- Hamdi y Fabrice preguntaron si podían hacer dibujos (Ham 17)<sup>1</sup> y si podían utilizar cualquier polígono (Ham 38),
- Lydie y Marie preguntaron si podían utilizar ejemplos (Lid 6.8),
- Olivier y Stéphane se dirigieron al observador para preguntarle por la definición de polígono (Sté 16) y si la solución tenía que ser dada en términos “generales” (Sté 46),
- Pierre y Philippe se dirigieron al observador para confirmar la eficacia de un resultado (Phi 33) o de una definición (Pie 44),
- Lydie y Marie buscaron en el observador un árbitro para su conflicto de concepción (fin de la fase I),
- Naïma y Valérie dejaron abierto su conflicto sobre  $P_5$  (considerado o no como un polígono) y se remitieron al observador (fin de la fase I).

Para algunos estudiantes, la situación de observación modifica el sentido mismo de la tarea. Así, Pierre y Mathieu (especialmente Pierre) no se involucran precisamente en un procedimiento de validación porque esperan que el observador les revele la solución; ellos perciben este trabajo como una especie de adivinanza (ver § II.2.1). Para otros binomios, la forma de intervención del observador durante la segunda parte de la experimentación transforma la naturaleza de su actividad. Para Antoine y Damien y Naïma y Valérie la situación se convierte en un juego en el que deben defenderse de los contraejemplos producidos por el observador (ver más detalles en el Capítulo III, § II.2.4).

Para la mayoría de los otros alumnos, la ruptura del contrato no parece afectar esencialmente su comportamiento. Por supuesto, los polígonos producidos por el observador como contraejemplos llevan la huella de su autoridad, pero esto no implica que se descarten estas refutaciones. De hecho, esta dimensión de la situación es considerada en nuestro análisis, ya que reconocemos la importancia de los caracteres situacionales en los procedimientos de validación (Capítulo I).

---

1. Nota del traductor: los términos del tipo (Ham 17) se refiere al sistema de codificación utilizado en la transcripción de las interacciones entre los alumnos.

De este modo, el contrato experimental no es un elemento secundario en nuestro análisis; por el contrario, es un elemento considerado en toda su extensión y en su carácter de inevitable que tenemos en cuenta en todos los aspectos de nuestro análisis.

### *1.3.3. Problema planteado y problema tratado*

El problema planteado a los alumnos es, por lo menos desde nuestro punto de vista, un problema de numeración. No obstante, el problema tratado por los estudiantes será el que van a reconstruir en el marco del dispositivo experimental concebido por nosotros, a partir del enunciado dado y de sus concepciones correspondientes al campo de las matemáticas en cuestión.

Advertimos que la enumeración de las diagonales de un polígono es fuertemente subyacente a una de las soluciones posibles, como en el caso de

$$\sum \zeta_n .$$

El hecho de que se hayan presentado problemas en los procesos de enumeración se debe la mayoría de las veces a las dificultades que ciertos binomios encontraron para decidir lo que son las diagonales de un polígono y para trazarlas. Así, la primera producción de Naïma y Valérie es un texto que indica cómo trazar las diagonales de  $P_6$ . De la misma manera, la primera producción de Lydie y Marie es la definición de diagonal. Como Christophe le comenta a Bertrand, una vez trazadas las diagonales de un polígono, los interlocutores “las cuentan después; no es muy práctico, pero...” (Chr 200).

Si los estudiantes someten una solución determinada al juicio del observador no están haciendo uso de un “medio de cálculo”. Se limitan al problema de la enumeración.

Ni Naïma y Valérie ni Lionel y Laurent caen en la cuenta de que es necesario producir un medio de cálculo para todos los polígonos. El primer binomio da un resultado para  $P_6$ , y el segundo uno para  $P_5$ . El observador señala que el problema planteado no está solucionado y los estudiantes retoman entonces lo que han realizado bajo un procedimiento que les permita producir una solución para “los” polígonos (en lo referente a sus concepciones).

En pocas palabras, ciertos aspectos habituales del contrato didáctico en 4° aparecen en el contrato experimental cuando es reconstruido por los estudiantes. Tanto Georges y Olivier como Martine y Laura señalan que se trata de producir un medio de cálculo y no su prueba o explicación. Se cree por lo tanto que la tarea fue bien planteada, ya que a este nivel, el producto de una actividad escolar es más la validación de un resultado matemático que su producción.

### *1.3.4. Primeros datos sobre la solución del problema*

#### *a) Las soluciones*

La tabla N° 3 muestra las diferentes soluciones aportadas por los alumnos al problema de la enumeración de las diagonales.

Esta tabla pone en evidencia que más de la mitad de los binomios llegaron a lo que denominaríamos una solución correcta. Solamente uno de ellos llegó a la solución clásica  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$  desde la primera parte de la solución.

Estos resultados confirman nuestro análisis a priori que ya habíamos hecho de los procedimientos y de las concepciones que los alumnos pondrían en juego. Aun la solución  $f(n) = 2n$ , inexistente en la tabla, hizo su aparición: fue terminantemente defendida por Christophe en contraposición a Bertrand. Haber tomado al paralelogramo como modelo para el problema de las diagonales, explica el predominio de las soluciones de tipo  $f(n) = \frac{n}{2}$ .

<b>Binomios</b>	<b>Primera parte</b>	<b>Segunda parte</b>
Christophe y Bertrand	$\frac{n(n-3)}{2}$	
Hamdi y Fabrice	$n^2$	$\frac{n(n-3)}{2}$
Lionel y Laurent	$n$	$\frac{n(n-3)}{2}$
Nadine y Elisabeth	$f(n+1) = f(n) + a(n+1)$	
Martine y Laura	$\sum \zeta n$	
Olivier y Stéphane	$\sum \zeta n$	
Georges y Olivier	$\sum \zeta n$	
Pierre y Philippe	$n \cdot s(n)$	
Lydie y Marie	$\frac{n}{2}$	
Naïma y Valérie	$\frac{n}{2}$	
Antoine y Damien	$\frac{n}{2}$	
Blandine e Isabelle	$\frac{n}{2}$ o $n - \frac{1}{2}$	
Evelyne y Christine	$\frac{n}{2}$ o $n$	
Pierre y Mathieu	$n$	$\frac{n}{2}$ o $n - 2$

La columna de la derecha indica la solución al término de la segunda fase, cuando las soluciones aportadas por los estudiantes consistieron en modificaciones radicales a su conjetura inicial (ver Capítulo III para un análisis detallado del tratamiento de las refutaciones).

Tabla N° 3.

En otras observaciones acerca de mismo problema (Borenson, 1986; Vertes, 1983) de las que tuvimos conocimiento posteriormente, descubrimos una solución que se había escapado a nuestro análisis a priori. Se trata de

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 1\frac{1}{2}n. \text{ Esta solución fue propuesta por dos alumnos ingleses,}$$

Andy y Mike, quienes trabajaron juntos. Tuvo como origen el análisis de las diferencias sucesivas de los números de diagonales: “Andy señaló que el hecho de que las segundas diferencias fueran constantes, sugería que la fórmula tendría que ser cuadrática” (Vertes, 1983, p. 18). Advertimos que tal observación no hubiera podido surgir de nuestros binomios por razones ligadas al contenido de la enseñanza que ellas reciben. Mike prosiguió notando que para la serie de cuadrados enteros esta segunda diferencia es 2; así concluye que “la fórmula debe ser  $\frac{1}{2}n^2$  o algo parecido” (Vertes, 1983). Un ajuste empírico conduce a la fórmula citada anteriormente; ésta es confirmada en el caso del octágono.

*b) La formulación de mensajes*

Las soluciones de tipo  $f(n) = \frac{n}{2}$  no presentaron problemas particulares de formulación. Los estudiantes utilizaron expresiones tales como “Si el número de los vértices del polígono es par, es necesario dividir este número por dos para obtener el número de sus diagonales” (extraído del mensaje de Christine y Evelyne, no citado aquí).

Por otro lado, los estudiantes que defendieron las otras soluciones  $\left(n\frac{(n-3)}{2}, f(n+1) = f(n) + a(n+1), \sum \zeta n\right)$  encontraron dificultades significativas. El punto esencial de estas dificultades reside en la elaboración de medios para designar relaciones, de elementos de cálculo o de resultados intermedios. La utilización de la lengua natural es poco apropiada, pero ningún estudiante utilizó la herramienta algebraica.

Para  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$  :

*Hamdi y Fabrice* producen un mensaje confuso marcado por grandes ambigüedades o ideas implícitas importantes. No se distinguen los diferentes elementos que se incluyen en el cálculo<sup>2</sup>:

2. Nota del traductor: los textos que aparecen en cursiva son textos que en el original en francés aparecen tal y como los escribieron los estudiantes.



Un polígono cualquiera siempre tiene tres diagonales, a menos que la suma de los vértices del polígono multiplicándola por el número de vértices, y se divide por dos.

*Figura N° 8. Mensaje de Hamdi y Fabrice*

*Christophe y Bertrand* mezclan en su texto la descripción del medio de cálculo con elementos de su justificación. Sin haber sido extraído del contexto de su descubrimiento, el medio de cálculo es explicado de cierta manera. Se distinguen bien los diferentes elementos, aunque las ambigüedades siguen latentes (por ejemplo en el caso de la expresión “el número de las diagonales”):

Sabiendo el número de vértices de un polígono, partirá de cada punto — el número de vértices- (los dos vecinos, más él mismo). Es necesario multiplicar lo que se encontró por el número de vértices (para cada vértice, parte el mismo número de diagonales). Pero se cuenta cada diagonal dos veces: el número de diagonales encontradas se debe por lo tanto dividir por dos para encontrar el número de diagonales.

*Figura N° 9. Mensaje de Bertrand y Christophe*

*Lionel y Laurent* en cambio, no formulan tales expresiones. “Muestran” el cálculo por realizar valiéndose de muchos ejemplos. Como esto no los satisface, buscan una expresión general y sintética. Se oponen por consiguiente al problema de la designación de los elementos intermediarios del cálculo:

En un polígono de 4 lados sale una diagonal por vértice, entonces salen 4 diagonales; ya que una diagonal une dos vértices.  
 En un polígono de 5 ~~lados~~ vértices resultan 2 diagonales por vértice; entonces son 10 diagonales. Pero como una diagonal une dos puntos, no hay sino 5 diagonales:  $10 : 2 = 5$   
 En un polígono de 6 vértices hay 3 diagonales por vértice, entonces hay 18 diagonales. Pero como una diagonal une dos puntos no hay sino 9 diagonales:  $18 : 2 = 9$ , y lo mismo con 7 vértices, 8, 9, 10, 11, etc. Entonces de 7 vértices saldrán 4 diagonales por vértice.

Cada vez que se tenga un vértice, se adiciona uno por [texto ilegible] divide por 2 el número de todas las diagonales del polígono. Y para encontrar el número de diagonales partiendo de cada [texto ilegible] se sustrae al número vértice, [texto ilegible]

*Figura N° 10. Mensaje de Lionel y Laurent*

Para  $f(n + 1) = f(n) + a(n + 1) :$

*Nadine y Elisabeth* muestran la relación de recurrencia por medio de ejemplos. Las reglas de cálculo no son explícitas sino que deben ser extraídas de los diversos casos mostrados:

Una figura de 4 lados nos hace encontrar dos diagonales. Para una figura de 5 lados encontramos 5 diagonales. Adicionamos un lado a la figura anterior y tres diagonales. Para 6 lados encontramos 9 diagonales. Por lo tanto, se adiciona una diagonal de más a la figura anterior cuando se agrega un lado.

ejemplo: 4 lados  $\Rightarrow$  2 diagonales

3 lados  $\Rightarrow$  2 diagonales más otras 3=5 diagonales

6 lados  $\Rightarrow$  3 diagonales más otras 4=9 diagonales

7 lados  $\Rightarrow$  9 diagonales más otras 5=14 diagonales

10 lados  $\Rightarrow$  27 diagonales (figura de 9 lados) más otras 8=35 diagonales, etc...

*Figura N° 11. Mensaje de Nadine y Elisabeth*

Para  $\sum \zeta_n$ :

La expresión de esta solución se opone a los problemas específicos de la formulación de una iteración. Muchos de los elementos de tal cálculo (descripción de las operaciones por repetir, iniciación, control del fin de la iteración) no son descritos por los estudiantes. Si nos referimos a trabajos sobre la iteración específicamente (Mejias, 1985), encontramos que estos están relacionados esencialmente con las restricciones propias de la comunicación en lengua natural y entre operadores humanos “da lugar a numerosos implícitos en los algoritmos y en las interpretaciones” (p. 73).

*Olivier y Stéphane* precisan con suficiente claridad la iniciación del cálculo y el fin de la iteración. Sin embargo, tienen dificultades para expresar la iteración misma y el conjunto de las operaciones sobre las cuales se apoya:

En un polígono: se toman dos puntos AB de lado a lado y se traza su diagonal: el número de diagonales será el mismo para estos dos puntos se toma el punto siguiente C y habrá el mismo número de diagonales que para AB menos seguro porque una diagonal estará confundida.

Se toma el punto siguiente a C que es D; habrá el mismo número de diagonales que para AB menos dos porque habrá dos diagonales confundidas.

[texto ilegible]

hasta que se encuentre una diagonal a un punto, entonces se adiciona el número total de diagonales encontradas.

*Figura N° 12. Mensaje de Olivier y Stéphane*

*Martine* y *Laura* dejan implícitas las condiciones del fin del cálculo:

<p>1er vértice: número de diagonales = número de vértices -3          2o vértice: número de diagonales = igual ↗          a partir del 3er vértice: número de diagonales obtenido anteriormente -1 diagonal</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">así sigue</p> <p>- al final se adicionan todos los números de diagonales obtenidos para cada vértice para encontrar el número de diagonales del polígono.</p>
---

*Figura N° 13. Mensaje de Martine y Laura*

*Georges* y *Olivier* si bien dan indicaciones acerca de la internalización y el fin del cálculo iterativo, están muy confundidos acerca de las operaciones que se deben repetir:

<p>Para calcular el número de diagonales de un polígono es necesario restarle 3 al número de vértices del polígono.</p> <p>[Hay un texto tachado]</p>
<p>Los 2 primeros vértices tienen <math>x-3</math> diagonales y [Hay un texto tachado] para los vértices siguientes. [texto ilegible]          [texto ilegible]</p>

*Figura N° 14. Mensaje de Georges y Olivier*

Para  $f(n) = n \cdot s(n)$ :

*Pierre* y *Philippe* no llegan finalmente a expresar la solución que defienden,  $f(n) = n \cdot s(n)$ , sino a partir de su manifestación en ejemplos:

<p>Se imagina un polígono. Este polígono tiene muchos vértices, con los vértices encontrará las diagonales de este polígono. Si hay 8 vértices en un polígono, 5 diagonales deben partir de cada vértice, y uno se da cuenta de que hay 40 diagonales (<math>8 \times 5</math>)          Si hay 6 vértices en un polígono, tres diagonales deben partir de cada vértice; hay 18 diagonales (<math>6 \times 3</math>).</p>
---

*Figura N° 15. Mensaje de Pierre y Philippe*

En la siguiente sección, evidenciaremos la diferencia importante que existe entre la imagen que pueden causar estas producciones y la realidad de los procesos de solución realizados, especialmente los procedimientos de validación.

## II. LOS TIPOS DE PRUEBA

### II.1. INTRODUCCIÓN

En esta parte nos interesa lo concerniente a los procedimientos de validación de los enunciados que, desde la perspectiva de los alumnos, aparecen como conjeturas. En otras palabras, nos interesa aquellos procedimientos que los alumnos consideran significativos, y no todas las especulaciones que aparecen pero que no son consideradas verdaderamente. Por otro lado, no tuvimos en cuenta sino la primera parte de la observación. En este punto, todos los estudiantes están en las mismas condiciones experimentales: no hay ninguna intervención del observador en la solución del problema.

La tabla N° 4 presenta una imagen global de los diferentes tipos de prueba encontrados. En la columna titulada “experiencia crucial” aparece el polígono, que es el elemento en el que se basa esta experiencia; de igual manera, en la columna “ejemplo genérico” se indicó el polígono utilizado. Sin embargo esta tabla no contempla el elemento cronológico, excepto por una conjetura particular, cuando una flecha trazada de izquierda a derecha muestra un movimiento cualitativo de las validaciones.

A continuación presentaremos detalladamente el análisis de cada uno de los binomios, organizándolos alrededor de los principales tipos de prueba.

#### Tipos de prueba

	Empiricismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experiencia mental	Cálculo sobre los enunciados
<b>Binomios</b>					
Lio - Lau	$f(n) = n$				
Pie - Phi	$f(n) = n.s(n)$				
Naï - Val	$f(n) = \frac{n}{2}$				
Pie - Mat	$f(n) = n$				
Nad - Eli		$f(n)$ función de $f(n-1)$ , $P_{10}$			
Géo - Oli	$f(n)=2f(n-1)$	Oli $P_{14}$		$\zeta n$ sobre $P_6$	
Mar - Lau		Lau $P_{10}$		$\zeta n$ sobre $P_6$	

Tabla N° 4.

Eve - Chri	$f(n) = \frac{n}{2}$	----->	$f(n) = \frac{n}{2}$
Bla - Isa		$f(n) = n - 3,$ sobre $P_7$	$f(n) = \frac{n}{2}$ o $n - \frac{1}{2}$ (*)
Lyd - Mar	Lyd: $f(n) = \frac{n}{2}$		no hay fórmula para los cóncavos
Ber - Chr	Chr: $f(n) = 2n$	Chr $P_8$	$f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ Ber ---->
Oli - Sté		Ste $P_8$	$\zeta n$ sobre $P_8$ $s(n) = n - 3$ ----->
Ant - Dam			$f(n) = \frac{n}{2}$
Ham - Fab			$f(n) = n^2$

(\*) con un soporte genérico o lenguaje de familiaridad.

Tabla N° 4.

## II.2. LAS PRUEBAS PRAGMÁTICAS

### II.2.1. El empiricismo ingenuo

Este término se usa para denominar los procedimientos marcados por la ausencia de índices de procesos de validación. Las conjeturas se obtienen del examen de pocos casos y el problema de su validez no es abordado. Los estudiantes se fían plenamente de estas afirmaciones y manifiestan su confianza en los hechos o por medio de sus declaraciones.

De los catorce binomios estudiados, seis pertenecen a esta categoría. Por otro lado, trataremos un caso en el que, sobre la base de un empiricismo ingenuo, un estudiante defiende una afirmación, enfrentada a otra basada en una prueba-experiencia mental (binomio de Christophe y Bertrand). Finalmente presentaremos un caso de transición del empiricismo ingenuo a una prueba-experiencia mental (binomio de Evelyne y Christine).

### El empiricismo ingenuo: conclusión

Más que una característica de los estudiantes que hemos observado, el empiricismo ingenuo aparece como un estado en el cual ellos se encuentran y permanecen debido a razones ligadas a la situación o a sus relaciones con el conocimiento mismo.

El hecho de que los binomios no superen este nivel del empiricismo ingenuo no puede ser descrito en términos de obstáculo.

### La interacción social como fuente del obstáculo

El deseo de tener la razón sobre el compañero puede no favorecer la ejecución de los problemas de validación. Así, Christophe defiende la conjetura

$f(n) = 2n$  (solamente verificada para  $P_7$ ) contra la de Bertrand, sin mostrar ningún tipo de incertidumbre o voluntad de buscar una validación.

Lydie defiende paso a paso su aserción  $f(n) = \frac{n}{2}$  contra Martine por medio de argumentos *ad hoc* para hacer frente a las refutaciones. En estos dos casos, los estudiantes se aprovechan de las dificultades de sus compañeros para plantear su propia solución. No se asocian verdaderamente en un esfuerzo colectivo para la solución.

La interacción social puede constituir también un obstáculo debido a que relaciona a individuos cuyas concepciones son muy diferentes. Este es el caso de Pierre y Mathieu, cuyas concepciones del polígono y de diagonal son esencialmente diferentes. La complejidad de la unificación de sus puntos de vista y la intensidad afectiva del conflicto constituyen un obstáculo para la puesta en práctica de problemas de prueba. Estos problemas son de cierto modo evocados, como sucede por ejemplo al elegir entre dos soluciones, pero el conflicto es tal, que favorece una lectura de la situación en términos de un juego, en el cual no se pierde gran cosa. Pierre y Mathieu acuden entonces al observador.

### La evidencia como obstáculo

Se presenta la conjugación de dos circunstancias: por una parte, una relación estrecha entre una concepción y una aserción (o una conjetura) que aporta a ésta la exactitud de la evidencia; por otra parte, está la incapacidad de hacer explícitas las concepciones en vigor. Este es el caso de Lionel y

Laurent, de Lydie y Naïma a propósito de  $f(n) = \frac{n}{2}$ , y de Evelyne y Christine.

Las soluciones propuestas son esencialmente empíricas, es decir, a partir de un conocimiento del polígono (polígono no regular) y de la diagonal (diámetro). No obstante, la relación directa entre las concepciones y la aserción puede ser “comprendida” por los estudiantes, a pesar de que la explicitación de las razones exigiría que ellos se involucraran en un proceso complejo de definición de los objetos. El caso de Evelyne y Christine ilustra bien esta dificultad. Sus formulaciones están permanentemente muy cercanas a la ostensión. Naïma y Valérie no llegan a solucionar este problema de la definición (ni siquiera resolviendo sus diferencias con respecto al contraejemplo  $P_5$ ).

### Una forma primitiva de la recurrencia

El caso de Georges y Olivier requiere ser mencionado particularmente en esta conclusión. Su solución es el resultado del examen sistemático de  $P_4$ ,  $P_5$  y  $P_6$ , seguido de una verificación de lo que podríamos denominar el polígono sucesor:  $P_7$ . Proponemos considerar este procedimiento como una

forma primitiva de la recurrencia, sin desconocer su carácter de empiricismo ingenuo, ya que no se aborda o considera ningún tipo de análisis de las razones.

### II.2.2. *La experiencia crucial*

Haremos referencia a este tipo de procedimientos marcados por una voluntad deliberada de someter a prueba una proposición aplicándola a un nuevo polígono. En contraposición al caso del empiricismo ingenuo, el problema de la generalización es no solamente tenido en cuenta, sino tratado, aunque permanezca fundamentalmente en un marco empiricista.

La experiencia crucial fue observada en cinco binomios como medio de validación, bien para validar una proposición (Nadine y Elisabeth), o como instrumento del debate de validación entre los dos miembros de un mismo binomio.

#### **Christophe (y Bertrand)**

Este ejemplo concierne a Christophe, y **no** al binomio Christophe y Bertrand.

Del resultado obtenido por  $P_7$ , Christophe indujo directamente: “¡7 y 7: 14! [...] se debe encontrar el doble de estos vértices” (Chr 302-314). Por lo tanto, esta aserción está en contradicción con lo que se había hecho para  $P_5$  (5 diagonales fueron trazadas, Ber 27). Sin embargo, los dos resultados no se aproximan.

Christophe no puede imponer esta solución porque “no la demostró” (Ber 303), y como él mismo lo reconoce: “si, yo sé que no hay derecho a inventársela” (Chr 340). Cuando Bertrand desarrolla argumentos para

$$f(n) = \frac{n(n-3)}{2} \quad (\text{que es cierto con base en } P_7), \text{ Christophe sostiene su}$$

conjetura. El mismo verá un poco “complicada” la solución de Bertrand (Chr 471) y ratificará su ingenua aserción: “el número de vértices se obtiene multiplicando por 2; así, si se tienen 7 vértices, dará 14, y se sabe bien que habrá 14 diagonales” (Chr 475-477).

Este es un ejemplo característico del empiricismo ingenuo: basado en un solo caso, Christophe induce una conjetura (falsa y fácilmente refutable). El la sostiene en contraposición a Bertrand sin cuestionarla.

#### **Lydie (y Marie)**

Habiendo examinado un solo cuadrilátero, Lydie saca la conjetura

$$f(n) = \frac{n}{2} : \text{“4 lados y 2 diagonales esto quiere decir que se divide por 2”}$$

(Lyd 119). Enseguida, ella defiende esta conjetura contra todo contraejemplo por medio de contradicciones *ad hoc*, aún rechazando dichos contraejemplos al considerar que no son polígonos.

Lydie impone su solución porque Marie no logra proponer otra, y finalmente se da por vencida (ver § III.2.3.a). No obstante, cuando Lydie propone su solución al observador, hace una anotación: “¡no es seguro que funcione para todo! ¡A lo mejor no sirve sino para los pares! No sé.” (Lyd 311-317).

El deseo de imposición de sus ideas con respecto a las de Marie, es el principal obstáculo de Lydie para salir de su empiricismo ingenuo. Este deseo es tan fuerte, que las refutaciones adquieren el carácter de ajustes *ad hoc* que pueden ser descartados. Sin embargo, una vez Marie se rinde, Lydie muestra cierta incertidumbre y se cuestiona la validez de  $f(n) = \frac{n}{2}$ . Pero ella no se involucra en procedimientos de validación; se dirige al observador.

### Lionel y Laurent

Los estudiantes examinan representaciones de  $P_5$  y concluyen: “hay 5 diagonales diferentes [...] Pues bien, ya se probó” (Lio 135-141). “Probar” significa aquí que el número de las diagonales de  $P_5$  es el resultado de un proceso riguroso de enumeración: “se buscan todos los cuadriláteros que existan en polígono de la forma ABCDE y como se sabe cuadrilátero: 2 diagonales [...] después todas las diagonales de cada cuadrilátero y se quitan las que son comunes [...] y se encuentran “las diagonales diferentes... Todas las diagonales” (Lio 144-150 y Lau 151).

Esta explicación concierne a la enumeración de las diagonales de  $P_5$  y no a la aserción  $f(n) = n$ . Esta aserción es directamente inferida, más no explícita por los estudiantes a partir de un solo caso. Se confirma cuando el observador considera el caso  $P_6$ : “bien, ¡habrá 6 diagonales!” (Lio 170).

El mensaje propuesto por los estudiantes se presenta a continuación (figura N° 16). Este es otro ejemplo claro de empiricismo ingenuo, donde  $f(n) = n$  es el producto de una generalización de su forma a través del enunciado: “hay 5 vértices y 5 diagonales” (Lau 140).

polígono ABCDE	AD y EB
- cuadrilátero ABDE	EB y AC
- se tienen las diagonales AD y EB	EC y BD
- cuadrilátero AEBC	diagonales comunes: EB
se tienen las diagonales	Se encontraron 6 diagonales, de las
EB y AC	cuales 1 es común por lo tanto hay
- cuadrilátero EBCD se tienen las	diagonales diferentes
diagonales EC y BD	

Figura N° 16.



Se puede pensar que en este punto, ni Lionel ni Laurent tratan el problema que pensábamos haberles planteado, especialmente el de saber contar las diagonales de cualquier polígono. En este caso,  $P_5$  puede ser considerado por ellos como un valor genérico: se aplica el mismo procedimiento para cualquier otro polígono.

Lo anterior no le resta a la conjetura  $f(n) = n$ , que Lionel presenta con gran convencimiento, el carácter de aserción ingenua (sin embargo, después de una intervención del observador, los estudiantes desistieron de esta solución y tomaron otra dirección que los llevó a producir  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$  con procedimientos de validación de un nivel superior. Ver § II.4.1).

### Pierre y Mathieu

Después de un debate de gran importancia sobre el problema de saber lo que es una diagonal (ver Capítulo III), lo que dio origen a diversas proposiciones, la aserción  $f(n) = \frac{n}{2}$  fue el resultado de haber examinado  $P_4$ ,  $P_6$  y  $P_8$ : “con un cuadrado, con una cosa de esas de 8 y otra de 6, se debe siempre dividir por 2” (Mat 207). Cuando Pierre presenta el contraejemplo  $P_5$ , se responde ratificando la aserción “par, se divide por 2; impar, se resta 1” (Pie 215), que es confirmada por una verificación controvertida y elaborada acerca de  $P_7$ . El carácter *ad hoc* de esta ratificación confirma el empiricismo ingenuo que preside la actividad de los dos alumnos (figura N° 17).

De hecho, para Pierre ésta es una “teoría” (Pie 229) que Mathieu puede refutar si no está de acuerdo; una conjetura sobre la cual él mismo declara: “no estoy seguro de que ésta es, pero es necesario ensayar en vez de quedarse en el mismo sitio” (Pie 251).

Pero estos alumnos no ejecutan otro procedimiento de validación. Esto es lo que llamamos una conjetura ingenua.

Para las figuras cuyo número de vértices es par, se divide por 2 el número de diagonales con relación al número de vértices.  
Para las figuras cuyo número de vértices es impar, se resta 2 al número de diagonales con relación al número de vértices.

Figura N° 17.

Sin refutarla directamente, Mathieu rechaza tal conjetura afirmando que “sería necesario que la regla se aplicara a todos los casos” (Mat 214). Del estudio de  $P_5$  y  $P_7$  cuyas representaciones se presentan a continuación.



*Figura N° 18.*

Mathieu deduce que  $f(n) = n$ , explicándolo así:

Para encontrar el número de diagonales, se necesita considerar el número de vértices.

*Figura N° 19.*

La anterior es todavía una conjetura ingenua: “yo pienso más que todo que hay tantas diagonales como vértices” (Mat 300-302).

Las dos conjeturas son concurrentes, “se tiene que escoger una” (Mat 302). Pierre propone una estrategia para salir de tal situación: “vamos a presentar cada unas de nuestras teorías y trataremos de eliminar las falsas” (Pie 235). Esta proposición no se lleva a cabo, pero demuestra que el empiricismo ingenuo no es tan intrínseco en estos dos estudiantes (la agudeza de los debates de definición es también un índice de esto, ver Capítulo III, § II.2.2).

En lugar de iniciar un debate de prueba, los estudiantes acuden al observador. A Pierre le gustaría mucho tener la solución, mientras que Mathieu dice: “uno puede creer que falló en todo, o que de pronto todo lo hizo bien” (Mat 330).

Este fatalismo de Mathieu y la impaciencia de Pierre se constituyen en obstáculos esenciales para dar fin a su empiricismo ingenuo. A lo anterior se suma el hecho de que esta situación es considerada como una adivinanza: “esto es un juego... más vale intentar” (Mat 338), y no es tratada con interés: “no importa qué, pero hay que intentarlo” (Pie 339).

### **Pierre y Philippe**

Habiendo examinado  $P_6$  y  $P_8$  estos estudiantes llegaron a la conclusión de que el número de diagonales resultará de hacer las operaciones  $6 \times 3$  y  $8 \times 5$  respectivamente para cada caso (aunque haya contradicción con los trazos inicialmente obtenidos para  $P_6$ ). La aserción inducida es  $f(n) = n \cdot s(n)$ ; pero no aparece explícita: “uno no sabe cómo explicarla” (Phi 467). Otro aspecto que nos indica que esta es una conjetura ingenua es el hecho de que, cuando el observador presenta el caso de  $P_9$ , los estudiantes hacen el cálculo  $9 \times 6$  después de haber evaluado  $s(9)$  en un ángulo, y concluyen: “hay 54, y entonces es el mismo procedimiento” (Pie 569).

He aquí el texto que los estudiantes presentaron al observador:

Se dibuja un polígono. Este polígono tiene muchos vértices. con los vértices haga las diagonales de este polígono.  
 Si hay 8 vértices en un polígono, 5 diagonales deben partir de cada vértice, y uno se da cuenta que hay 40 diagonales ( $8 \times 5$ ).  
 Si hay 6 vértices en un polígono, 3 diagonales deben partir de cada vértice, hay 18 diagonales ( $6 \times 3$ ).

*Figura N° 20.*

Este juicio de empiricismo ingenuo que constituye, al menos en el caso de Philippe, el motor de la solución, debe ser diferenciado: al experimentar con  $P_7$  y  $P_8$ , Philippe deduce que el número de las diagonales es el mismo en cada vértice de un polígono dado. El hecho de que  $f(n) = n \cdot s(n)$  se deduce de que  $f(n)$  se obtiene al agregar  $s(n)$  en cada vértice: “hay 5 que parten para cada punto: 5-10-15-20-25-30-35-40” (Phi 367). Pero  $s(n)$  debe calcularse nuevamente para cada polígono a partir de una representación (en una representación de  $P_9$  convexa que se les presentó, solamente las diagonales de dos de los vértices serían trazadas).

Al final de la solución del problema, Philippe se pregunta si “no hay otras formas de polígono” (Phi 467); pero cuando el observador propone el tratamiento de  $P_9$  presentando vértices que parecen alineados, él la rechaza. Esto puede ser un indicio del carácter genérico de  $P_6$  y  $P_8$  como representantes de las figuras que tienen una “mitad” (Phi 19), o un “centro” (Pie 44).

La precisión de la evidencia del modelo multiplicativo y de la concepción del polígono que este binomio tiene, además de la condición de invarianza del número de diagonales en cada vértice del polígono, son obstáculos que impiden la realización de procesos de validación (o al menos de verificación).

### **Naima y Valérie**

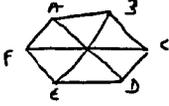
Luego de haber discutido el concepto de diagonal, las estudiantes se pusieron de acuerdo en una concepción de tipo “diámetro”. Encontraron 3 diagonales en  $P_6$  y el estudio del cuadrado las condujo a la aserción: “6 vértices, hay 3 [...] en un cuadrado, no hay sino 4 lados, solo hay 2: esta es la mitad” (Naï, 110-114). La primera etapa de formulación de su solución es el texto que aparecerá posteriormente (figura N° 21).

Con respecto a  $P_8$  el observador manifestó que este texto no satisface la instrucción (no presenta el medio de cálculo), y en respuesta a esto, las estudiantes reconsideraron su formulación. La explicitación de  $f(n) = \frac{n}{2}$ ,

que retorna la definición de la división por 2 en las  $\mathbf{N}$  llevó a plantear el problema de la validez de su aserción. El punto de vista de las estudiantes es

diferente: para una de ellas,  $P_5$  es un caso en el que “ésta no funciona”, (Naï, 261), y para la otra, “no es un polígono” (Val 264).

No obstante, tales posiciones no fueron categóricas en el momento en que se presentaron al observador (figura N° 22).



Polígono que tiene 6 vértices  
y 3 diagonales.

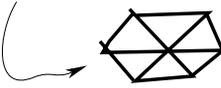
Procedimiento:

A----->D	Trazar una recta que parte de un vértice y va al vértice opuesto.
B----->E	Volver a hacer este procedimiento para cada vértice.
C----->F	

*Figura N° 21.*

Para encontrar el número de diagonales en un polígono es suficiente con dividir el número de vértices por dos.

Polígono de 6 lados:  
 $6:2=3$  diagonales  
 ejemplo



Polígono de 8 vértices:  
 $8:2=4$  diagonales



*Figura N° 22.*

Esta formulación fue obtenida después de que Valérie creara un texto que tenía como base genérica a  $P_8$ : “esto lo demuestra” (Val 219), el cual fue rechazado por Naïma, afirmando que “es necesario hacer una cosa más general” (Naï, 230).

Puede considerarse que la validación de la solución de Naïma y Valérie está en el límite del empiricismo ingenuo y el ejemplo genérico. La impor-

tancia del debate de la definición desde los primeros momentos de la solución, además de la consideración del problema de la validez (a partir de la división por 2 en  $\mathbf{N}$ ) combaten el empiricismo ingenuo. Sin embargo, la omisión del debate acerca de la validez de la aserción no permitió alcanzar un nivel superior de validación.

La precisión de la evidencia obtenida a partir de las concepciones del polígono (regular) y de la diagonal (diámetro), las cuales sustentan la labor de las estudiantes, se constituyó en un obstáculo que impidió superar el problema de la prueba.

### Evelyne y Christine

Con base en el examen de  $P_8$ , Evelyne formuló la aserción  $f(n) = \frac{n}{2}$  que fue posteriormente confirmada para el caso  $P_4$ : “habrá 2, entonces siempre será [...] dividido por 2” (Eve 58-62). Una verificación sobre  $P_6$  “solamente para ver” (Eve 74) permitió concluir “entonces siempre se divide por 2 [...], sí, pero es necesario que el número sea par” (Eve 85-86).

Cuando la restricción a los polígonos pares es considerada por Evelyne como una restricción *ad hoc* (adaptación de la división por 2 en  $\mathbf{N}$ ), ella hace que Christine plantee los problemas de definición, tomando en cuenta especialmente los contraejemplos  $P_7$  y  $P_3$  (ver Capítulo III, § II.2.3).

Por querer afrontar tales problemas, las estudiantes formularon la siguiente conjetura ingenua:

Cuando se conoce el número de vértices de un polígono, basta con dividir por 2 este número para obtener el número de diagonales.  
El número de vértices debe ser par.

Figura N° 23.

Pero este mensaje no fue presentado al observador por la observación que hizo Evelyne: “esto no debe ser porque aquí (en el enunciado) decimos que el polígono... los vértices son pares” (Eve 140). Lo anterior se constituye en una cláusula implícita del contrato experimental, que, del modo en que es formulado por los alumnos, es el motor de la recuperación del análisis de la conjetura inicial.

Lo referente a la definición es el centro de este análisis, el cual conduce a considerar como polígono “una figura geométrica en la que cada lado es paralelo a otro: los lados son paralelos de dos en dos” (Chr 216).

La aserción  $f(n) = \frac{n}{2}$  tiene, por lo tanto, como prueba una experiencia mental que se basa esencialmente sobre esta definición. Esta validación requiere que la relación entre los vértices y las diagonales (extremidades de

los lados) sea imaginada: “siempre es así... tu verás... del lado correspondiente al otro lado paralelo” (Chr 197-199). Evelyne desearía que fuera estipulado que “es necesario que el número de vértices sea par” (Eve 200), pero Christine se opone a la definición que implica un apareamiento de los vértices: “si se dice que un polígono es una cosa en la que los lados son siempre paralelos dos a dos es necesario precisar” (Chr 201).

En este intercambio entre las estudiantes, la experiencia mental evocada por Christine tiene como soporte a  $P_8$ . Sin embargo, ella no se apoya esencialmente en esta polígono, sino también en la capacidad de Evelyne para imaginar la relación de los vértices, independientemente de una representación efectiva.

Así, el hecho de que la racionalidad de Evelyne y Christine presente menos rasgos de un empiricismo ingenuo no es una característica intrínseca. Es el resultado de su rendición al tratar el difícil problema de la definición y las razones de validez de su conjetura. Para pasar a un nivel superior de prueba, les sería necesario hacer explícitos los objetos en juego en la solución del problema, al igual que sus relaciones. Ambas logran alcanzar parte del objetivo, pero su proceso se detiene en las formas de formulación, muy cercanas a la ostensión.

### Georges y Olivier

Gracias a errores de enumeración, estos estudiantes obtuvieron la sucesión doble: (4, 2), (5, 4), (6, 8). Georges dedujo de lo anterior: “cada vez que multiplicas por 2” (Geo 140), y dice acerca de  $P_7$ : “ahora estoy seguro, va a haber 16” (Geo 140). De hecho, la enumeración en  $P_7$  no sería llevada a su término por su complejidad. Los estudiantes cambiarían el procedimiento.

Esta experiencia sobre  $P_7$  podría parecer como una experiencia crucial destinada a validar definitivamente la aserción ingenua de Georges; sin embargo, no se trata de eso:

- Esta experiencia permite evaluar la validez de la transición del paso  $n$  al paso  $n+1$  en la recurrencia que Georges defiende:  $f(n+1) = 2f(n)$ . Para esto, en la situación presente,  $P_7$  no puede ser reemplazado por otro polígono. Se impone natural y necesariamente después de  $P_4$ ,  $P_5$  y  $P_6$ .
- No obstante, la validación considerada tiene relación con el empiricismo ingenuo porque ni las razones de la conservación de la relación en la transición del rango  $n$  al rango  $n+1$  ni su carácter de generalidad son examinados (ver en contraposición el caso de Nadine y Elisabeth tres páginas más adelante).

Sin embargo, consideramos que aquí hay más que empiricismo ingenuo, lo que será evidente en los tres primeros casos considerados. La conjetura es sometida a prueba. Esto sugiere considerar, a partir del “razonamiento direc-

to”, categorías del razonamiento por recurrencia. El presente caso ilustrará la primera de estas categorías.

### Christophe y Bertrand (1)

Este binomio, característica del empiricismo ingenuo por la actitud que presenta Christophe, continúa siéndolo aún aquí: de hecho, la experiencia crucial va a reemplazar su función original en los aspectos que oponen a los dos estudiantes.

Existen dos aserciones:  $f_1(n) = 2n$  (presentada por Christophe) y

$f_2(n) = n \frac{(n-3)}{2}$  (presentada por Bertrand). El papel de la experiencia

propuesta por Christophe sobre  $P_8$  no es el de establecer su solución, de la cual está convencido, sino el de contrastar sus diferencias con las de Bertrand. El calcula  $f_2(8)$ , y confía que para este polígono: “esto da como resultado 20, desde (su) punto de vista” (Chr 534). Bertrand, quien primero se atiene a los principios: “tú no lo demostraste, no tienes derecho a decirlo” (Ber 539), acepta finalmente el juicio de esta experiencia. El resultado le quita la razón a Christophe, quien se asombra (“Sí, bien, dígalo entonces”, (Chr 575)). Christophe renuncia definitivamente a su conjetura.

### Christophe y Bertrand (2)

Bertrand aborda la solución del problema por medio del examen de  $P_5$ , de donde obtiene la aserción: en todo polígono, cada vértice tiene dos vecinos. La validez de esta aserción está vinculada con su concepción de polígono (convexo) para la cual  $P_5$  tiene un valor genérico. Hacer explícita esta aserción significa hacer explícita la definición de polígono, lo que es particularmente complejo debido a que sería también necesario considerar lo que no es un polígono desde este punto de vista. Sin embargo, esta aserción es esencial para hacer esta otra: “[en un vértice] se pueden trazar las diagonales hasta cada vértice, excepto hasta el que está a su lado” (Ber 35), lo que conduce a  $s(n) = n - 2$ . Igualmente, cuando Christophe hace un gesto de duda, Bertrand, careciendo de una explicitación de las razones, propone una experiencia crucial: “ve, haz una allá, con muchos lados, ya verás. Cada punto tiene dos vecinos en un polígono, no importa la figura” (Ber 129), agrega; sin embargo: “no lo hagas en uno cóncavo”. Esto es suficiente

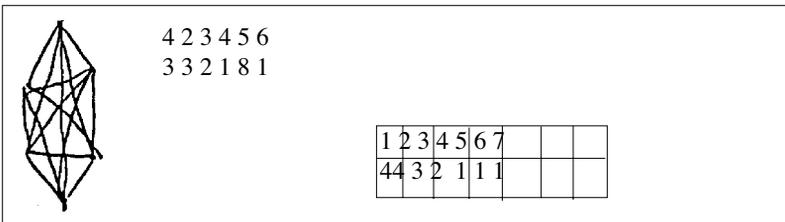
para convencer a Christophe. Los dos estudiantes redactan el texto que presentamos a continuación (figura N° 24).

En un polígono, cada punto tiene 2 vecinos.  
 [texto ilegible] de un punto todos los otros puntos, a excepción de sus vecinos (se obtendrán [texto ilegible] diagonales que parten de este punto). Y se hace lo mismo para todos los otros puntos, entonces se obtienen todas las diagonales de este polígono.

*Figura N° 24.*

### Georges y Olivier

A pesar del ejemplo genérico sobre el cual está fundada la aserción  $f(n) = \sum \zeta_n$ , a cuya construcción contribuye Olivier, él conserva una duda: “no es simple porque esto cambia. Allá en el caso en el que había 7, era el doble. Porque allá 6, yo hubiera pensado que era 12. Pero después esto no da 12 sino 9” (Oli 326). Para superar esta duda, Georges le propone a Olivier una experiencia crucial sobre  $P_{14}$ : “yo no sé, tu coges 14 vértices [...] hay dos 11 al comienzo, un 10, un 9 [...]” (Geo 327-329-341). De este modo crea  $\zeta_{14}$ . Olivier verifica que esta sucesión de números tenga 14 términos, luego manifiesta su certitud: “está bien, funciona [...] Ahora toca explicarlo” (Oli 346-348). Debe anotarse que se logró esta certitud a pesar de que no hubo verificación efectiva sobre una representación de  $P_{14}$ . Por otro lado, la rapidez de la construcción de  $\zeta_{14}$  y el cálculo de sus términos amplía la hipótesis de una experiencia mental que relacionaría los términos de  $\zeta_{14}$  y los vértices de un polígono  $P_{14}$  ficticio. La propiedad que funciona aquí como teorema en acto: “ $\zeta_n$  tiene  $n$  términos”, fue puesta en evidencia por las representaciones utilizadas para  $P_7$  y  $P_6$  (figura N° 25).



*Figura N° 25.*

A continuación, esta propiedad fue verificada por Olivier para el caso de  $P_8$ , para el cual no había sido utilizada la misma representación. Para Olivier es suficiente que el resultado del procedimiento  $\zeta_{14}$  comparta con el procedimiento pragmático (por ejemplo, una representación del polígono) esta propiedad, que adquirió la categoría de una propiedad característica en su opinión.



### Martine y Laura

En conjunto, las estudiantes establecieron el procedimiento que permite obtener  $\zeta_n$ , fundándolo sobre un ejemplo genérico (ver § II.2.3). Pero Laura, siempre insegura acerca de la ejecución efectiva del procedimiento, quiere someter esta solución a una experiencia crucial: “voy a hacer una inmensa figura para verificar” (Lau 198). Martine considera que esta verificación es inoficiosa (“estás exagerando”, Mar 201). Con un tono un tanto humorístico, Laura confirma el valor crítico que le concede a esta experiencia: “porque supón que al final encuentras 2. No, pero eso no se puede” (Lau 203). Dicho comentario significa que la hipótesis de 2 diagonales es una broma, no que el procedimiento va a dar un buen resultado a priori.

La experiencia se lleva a cabo sobre  $P_{10}$  cóncavo. Nuevamente Laura se pierde al trazar las diagonales. Martine le ayuda a hacer el cálculo: entonces Laura se convence (el procedimiento permite a la vez producir  $\zeta_n$  y controlar el trazado de las diagonales de  $P_n$ ). Luego ella propone pasar a la descripción del procedimiento.

### Olivier y Stéphane

A pesar de haber colaborado en la construcción de esta solución Stéphane pone en duda la validez de  $f(n) = \sum \zeta_n$  para calcular el número de las diagonales de  $P_n$ . Para asegurarse, propone una experiencia en la que se reconoce un valor crítico: “ya veremos si lo que tú dices es cierto. Ahora lo haremos con 8” (Ste 548) ( $P_8$  es, por lo tanto el ejemplo genérico sobre el cual se basa  $\sum \zeta_n$ ). La construcción de  $\zeta_n$  es verificada paso a paso: “ya hicimos 1-2-3-4-5 [...], esto da 10. Entonces tu dirás que hay 4, ¡ah! ya lo vi: 2-3-4, tienes razón, no hay sino uno, sí, así es” (Ste 522-524).

La convicción de Stéphane no se logra sino después de haber realizado esta experiencia crucial.

### Nadine y Elisabeth

Examinando  $P_4$ ,  $P_5$  y  $P_6$ , las estudiantes indujeron la conjetura:

$$f(n+1) = f(n) + a(n+1) \text{ y } a(n+1) = a(n) + 1$$

$$\text{con } f(4) = 2 \text{ y } a(5) = 3.$$

Antes de hacer la verificación, afirman que para  $P_7$  “se debe añadir 5, generalmente” (Nad 56) y “por lo general, con 7 se deben encontrar 14 diagonales, ahí nunca funcionará” (Nad 60).

La experiencia sobre  $P_7$  convexo es positiva; pero antes, al examinar  $P_7$  cóncavo, hubo problemas: “si esto se encuentra siguiendo la figura, no se encuentra el mismo número de diagonales [...] tendría que ser sin ángulos” (Nad 74). Igualmente, al menos para Nadine, esta validación por medio de

la experiencia sobre  $P_7$  es insuficiente (contrariamente a lo que observamos en el caso de Georges y Olivier): “Generalmente, si tienen siempre 8 lados, deberían encontrarse 6 más” (Nad 85). De hecho, ella se remite a una experiencia crucial para decidir: “ensaya una vez con 15 y, si funciona, eso quiere decir que también va a funcionar con los otros” (Nad 91). Dicha experiencia fue realizada sobre  $P_{10}$ , porque  $P_{15}$  parecía muy complejo a priori: “entonces, generalmente, si son 10 lados, se deberían encontrar 35 diagonales” (Nad 98). La experiencia realizada confirma el resultado.

Las dificultades encontradas en la prueba de  $P_7$ , realizada inicialmente, ponen en evidencia la superioridad de este tipo de validación: éste considera explícitamente el problema de la generalización.

### **La experiencia crucial: conclusiones**

En todos los casos observados, la experiencia crucial es la evaluación de una proposición para un polígono particular, con el propósito deliberado de un sometimiento a prueba, y consecuentemente, de la concientización del problema de la generalización.

Este objetivo es explícito en el caso de Nadine y Elisabeth, quienes confirman una conjetura inicialmente fundada en lo que denominamos una recurrencia primitiva.

Sin embargo, para casi todos los binomios, la experiencia crucial tiene una función en la interacción: es utilizada para vencer la convicción de uno de los participantes; la del que está menos convencido (o sin ningún tipo de convicción). En el caso de Christophe y Bertrand, esta experiencia reemplaza evidentemente su función original de selección entre dos hipótesis. Sin embargo, esta función es análoga en los otros casos: es presentada frecuentemente como un reto por uno de los participantes, y el papel de este sometimiento a prueba es más para rechazar la conjetura, que para establecerla.

#### *II.2.3. El ejemplo genérico*

En esta sección incluimos los binomios en cuyos casos el procedimiento de prueba fue aplicado con el fin de extraer las *razones* de la validez de una aserción o conjetura, basándose en la representación de un polígono particular. El carácter genérico del ejemplo utilizado está relacionado con el hecho de que, en el procedimiento de los estudiantes, el ejemplo no se examina en sí mismo, sino para hacer explícito un modelo de acción que fundamenta la conjetura.

A continuación presentaremos el análisis de cinco casos de este tipo de validación que consideramos importantes.

### **Martine y Laura**

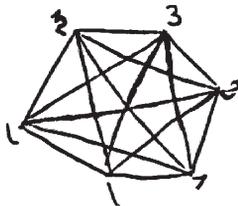
La construcción de la sucesión  $\zeta_n$  para enumerar las diagonales de un polígono  $P_n$  tiene su origen en dos elementos: la enumeración cuidadosa que los estudiantes hacen de las diagonales, para no contar la misma dos veces,

)+. . 1 (□+ □□)□.□□.) (□! (□(□

□ 4 BC8F8A06-SADH8HG2L4A 74 6H4 C8E□<8 :H4E74E18H07BFC46-4  
8F8 A74□ 8□B84 c:HE□ Y

F46 BA6H6-SA9H8 JC76474C4E8 76 4FB78)

□6H47BC4E8F 78? CE□8E INE68 6H8AF 67BF7BFINE68F 4  
8J68C6SA78 785-7B 4 DH8F8F ABCH88F 6□4EBF7E FBA  
7BFDH88F0A 4? 747B A6A6F 4? CE□8E-A6A6 68AF □ 8A 8?  
F8:HA7B68AF 74 □ 4□ 4 64A67 7E 8A8? 8E8E-A6A6 68AF HAB  
□8AB6-8AF2 □ 3FP78 FCHNABF N □ 4H  
□AB68AF-ABHA2E AB746 H8AF-ABHA4 8L □ 4E □



□ □ C

8FCHN78 BC□4E8F8 CB6FB 78 6M6HB8JCH8CBIE4HE C4E )  
∑ ζ1 8 F9BEIH474C4EGB7BCBPBAB

□8A6A6F C4E 8? CE□8E INE68 8F8? AT□8B 78 INE68F□8ABF  
7E C4E 8? F8:HA7B8F<H4? 78FCHN 4 C4E 78? 8E8E INE68 F8  
8F8HAB7E E 8 H□4GB7B□□4H

, <A8□54EB 8F□14?746-SA78 ζ1 FB5E ) AB8FHc6-8A6C4E □4HE 7B  
DH8CH88 8A6A78F8 4? 6BA78E4E 7F 7< 6H□78F I8E□MF 47824A6 □4H  
8?4 DH88 8J4□<A4EHA8-8□C B AH8B ) F□ I8E c 646-SA8F <9H6  
GHBF C4E □ 4E8A8 DH8AH5HE 74 □ CB6A64 78 74 I8E c 646-SA8A6474  
INE68 78 HA□ABE4□8A62F8 7858 8A6A8E □ 6BA7B 6H474E:8 HIF8F  
9H8LB4 □ BKEHFH6BA<66-SANB4 FHC8E7478 □4HE I8E□□

□□□ □ 3□□ □ □

□4 784 78 74 6BA6H6-SA78 74 FH6FSAζ1 68A8HBE8 A8A74 8AH3E4  
6-SAF8□M64 78 74F74:BA48F78 ) FIB5E 8F8 □4□BCBEPBABDH8  
ζ1 8 FM8JC76-6 □ 8JC7647B □BF7BFCHAF DH8F8 6□4E8A C4E 8?  
6B□8AIB 7E ;4 68A □78FCHN 6474 I8L DH8F8 6□8A 7BFCHAF F8  
8F84 HAE8ABE ( < F□ T□□4 4F8E-SA8FM9HA744 FB5E  
□HA474:BA478 □8ABICBDEH8E 8A6 HAE□MF< 4 74F6BA9A78□M□

(Oli 411-413). La explicitación de esta razón recurre al ejemplo genérico de P<sub>8</sub>:

Sté: “A, aquí tendrá 5 puntos”

Oli: “B, 5 puntos y los otros 4 puntos”

Sté: “entonces C tendrá 5 puntos [...] menos porque habrá CA, entonces 4 puntos”

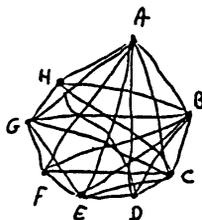


Figura N° 27.

Oli: “D será de 3 puntos porque habrá A y B, E será, automáticamente de 3 puntos porque habrá A,B,C (...) F será de 2 puntos”

Sté: “Pero E no será de 3 puntos, E?”

Oli: “sí, 2 puntos”

Sté: “sí, F será de 1 punto [...] y G tendrá más,”

Oli: “no, G tendrá más y H aún menos”

De hecho, Olivier piensa que hubiera sido suficiente haber tomado el caso de P<sub>4</sub> “es más fácil (tomando) lo menos posible para ver” (Oli 434-443). En esta ocasión, él hace explícito el carácter genérico que concede al ejemplo utilizado: “pero justamente, tu lo explicas ahí [...] e intentas ver si sí es eso” (Oli 438-349): el ejemplo genérico proporciona las razones.

A pesar de lo anterior, Stéphane propone posteriormente la prueba de esta conjetura (ver § II.2.2).

### Georges y Olivier

La construcción de la  $\zeta_n$  no responde a “un problema” (Geo 209), como lo señala Georges cuando estudia la proposición  $f(n) = n \cdot s(n)$ : “estas (las diagonales) se reencuentran” (Geo 198).

El problema de una validación se apoya esencialmente en la validación del primer término de  $\zeta_n$ . Con el soporte genérico de P<sub>6</sub> los estudiantes establecen que tal término será de la forma  $n-3$ :

“Mira... como tú sabes, al comienzo hay tres, porque cada vez tienes [...] porque tienes tu cosa de partida, de la que van a partir las flechas, y lue-

go tus otras cosas, con las que se une. Por lo tanto, todo esto es en total tres puntos conectados” (Geo 296-298).

Más claramente: “Los dos segmentos que están al lado del punto que escoges no pueden tener diagonales porque son así. Entonces, los del lado [...] si tomas uno, ya hay dos del lado que son eliminados. Aquí te quedan los otros dos; en fin,... el resto” (Oli 299-301).

Este punto establece que la sucesión de la construcción de  $\zeta_n$  está validado sobre  $P_6$ . Sobre este ejemplo genérico se presenta la confrontación de un modelo de acción, que permanece implícito, y de una realización paso a paso:

“Entonces, espera. Entonces estoy seguro de que hay dos. Aquí uno [...] aquí nada, nada, entonces vamos a ver [George acaba de constituir la tabla de valores de  $\zeta_6$  y se remite a una representación de  $P_6$ ].

Para estas dos tengo tres por cada una. Para la tercera tengo... 1-2: ¿qué te había dicho antes? [...] que para la cuarta no tengo sino una; esa de allá [...] y para la quinta [...] no tengo ninguna. Para la sexta tampoco tengo ninguna. Como ves me doy cuenta de todo esto mirando la figura [...] Si la figura N° 28 tiene 8, hay 5-4-3-2-1, ¡así es siempre!” (Geo 307-319).

4 2 3 4 5 6  
3 3 1 1 1 1

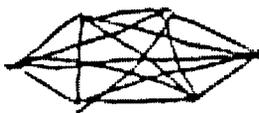


Figura N° 28.

Figura N° 29.

La expresión de esta validación es la ostensión: es cierto, porque verlo permite asegurar que así lo es. “No se puede decir que funciona” (Geo 453). Aquí se podría ver una de las formas de la experiencia crucial. Hemos descartado esta clasificación por las siguientes razones:

- la investigación y la formulación de razones para el cálculo del primer término de  $\zeta_n$ ;
- la verificación paso a paso testifica la voluntad para hacer el análisis de  $\zeta_n$ : “para los dos últimos vértices no hay que hacer dia-

gonales porque para los otros vértices ya se habrán hecho” (Geo 429).

Evidentemente, no hay explicaciones acerca de la construcción de términos sucesivos de  $\zeta_n$ . Sin embargo, en una etapa primitiva, la construcción de  $\zeta_n$  es una respuesta a la exigencia de no contar más de una vez cada diagonal. La validez de la transición de un término de  $\zeta_n$  al siguiente puede permanecer implícita (o no hacerse explícita más que en la acción, por ostensión, como en el caso del ejemplo genérico  $P_6$ ).

No obstante, esta prueba, fundada sobre un ejemplo genérico no afecta la convicción de Olivier. El no se somete sino a la evidencia de una experiencia crucial con  $P_{14}$  (ver § II.2.2).

### Blandine e Isabelle

Teniendo como ejemplo  $P_7$ , Isabelle explica por qué hay  $n-3$  diagonales en cada vértice de un polígono  $P_n$ . La expresión de esta propiedad en el caso general, y la explicitación de las razones para  $P_7$  son conducidas paralelamente (figura N° 31), lo que testifica el valor genérico del ejemplo:

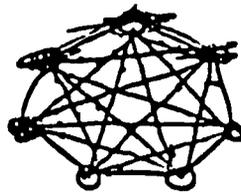


Figura N° 30.

“Cada vez hay el número de puntos menos 3 de diagonales y multiplicas por el número de puntos mira, eso da como resultado, entendamos  $x$  como el número de vértices luego resulta  $x-3$  ya que, bueno hay 1-2-3 los tachas [ella tacha 3 vértices adyacentes en la representación  $P_7$ , figura N° 30] no puede ser, esta no es una diagonal  $x-3$  multiplicado por  $x$  igual al número de diagonales” (Isa 34-36-46).

$X =$ número de vértices $x = 3xX =$ [texto ilegible] 7 puntos $X=7$ $7-3=4$ $4 \times 7=28$
--

Figura N° 31.

Esta aserción es refutada y luego abandonada.

### **El ejemplo genérico: conclusiones**

En los tres primeros casos, el ejemplo genérico es utilizado para establecer la validez de la proposición  $f(n) = \sum \zeta_n$  (o por lo menos de  $\zeta_n$  como sucesión de números, permitiendo contar las diagonales de un polígono). Pero la prueba que se obtiene nunca supera la convicción de ambos estudiantes, aunque aparentemente haya existido colaboración mutua. De hecho, en cada uno de estos casos, es una experiencia crucial la que supera las dudas del participante escéptico.

La dificultad de estas pruebas reside en que necesitan que los interlocutores estén de acuerdo acerca del carácter genérico del ejemplo utilizado, y por consiguiente, que compartan las mismas concepciones de los objetos en juego. Cuando esto no ocurre, la explicación desarrollada aparece ligada a un caso particular. En este contexto empírico, es legítimo recurrir a la experiencia crucial como medio del debate de validez.

Además, en el caso de  $\zeta_n$  sería particularmente difícil realizar un debate sobre el campo de las razones; así lo demuestran los problemas de formulación del mensaje correspondiente. De hecho, tal debate exige principalmente la expresión de una iteración y de un sistema de representación de gran complejidad en lengua natural, en el que se exige un alto nivel de conceptualización para ser formulada en un lenguaje más formal (que reduciría la complejidad en el plano lingüístico). Esta complejidad puede constituirse en un obstáculo para la evolución de los tipos de prueba utilizados, lo que impediría alcanzar un nivel más alto.

## **II.3. LAS PRUEBAS INTELECTUALES**

### *II.3.1. La experiencia mental*

Para relacionar el procedimiento de prueba de un binomio con esta categoría no exigimos sino que la explicación de las razones, que fundamentan la validez de la proposición, se basen en un análisis de las propiedades de los objetos en juego. Estas propiedades no pueden ser testificadas por medio de sus representantes, sino deben ser formuladas en su generalidad. La acción es objeto de un proceso de interiorización, y es invocada en el discurso que hace explícitos los argumentos, las pruebas.

No retomaremos aquí el caso de Evelyne y Christine que ya presentamos (ver § II.2.1), pero lo tomaremos en cuenta para la síntesis de esta sección.

### **Lydie y Marie**

Tanto Marie como Lydie excluyen las diagonales no interiores al polígono. Esto nos lleva a afirmar que es imposible encontrar un medio de cálculo válido para todo polígono: una ligera deformación es suficiente para modi-

ficar el número de diagonales y da lugar a que un contraejemplo lo refute. Esta es una experiencia mental que fundamenta su explicación; Marie la expresa así:

“Es imposible calcular esta cosa porque basta con que haya un lado que lo dañe, no convexo, y entonces los cálculos ya no son certeros... así es” (Mar 300-302).

### **Blandine e Isabelle**

Las estudiantes establecieron la aserción que reproducimos en la figura N° 32. Esta aserción está esencialmente fundada en la concepción de diagonal que estaba en vigor durante su actividad:

- a. “es una recta que une ‘un vértice’... con el vértice opuesto” (Isa 86)
- b. “es una recta que pasa por la mitad” (Blan 67)
- c. “no sale sino una diagonal de cada punto” (Isa 70).

Tal concepción asegura el apareamiento de los vértices de un polígono par.

Su explicitación y la de  $f(n) = \frac{n}{2}$  son concomitantes.

Si el número de vértices es par, se divide por 2.

*Figura N° 32.*

En el caso de un polígono impar, parece que “hay un punto que queda solo, no tiene diagonal” (Isa 79). Por el contrario, los otros vértices son apareados por medio de diagonales; para los polígonos pares, los estudiantes proponen: “[se resta] 1 para que quede un número par [...] luego se divide por 2” (Isa 155, Blan 158). La explicación se basa en parte sobre una representación disponible de  $P_6$  para explicitar el paso de un polígono par a uno impar:

“En este punto, ¿no hay diagonal? [...] no puede haber porque no hay punto opuesto, el vértice opuesto es él mismo” (Isa 140-142).

*Figura N° 33.*

Pero el significado de  $P_6$  no es el de un ejemplo genérico. La representación utilizada es el soporte gráfico para la experiencia mental, el paso de  $P_{2n}$  a



$P_{2n+1}$ , sobre el cual ella se apoya para formular su aserción. Isabelle no muestra interés sino por lo que es una propiedad del vértice “suplementario” de cualquier polígono impar.

### Olivier y Stéphane

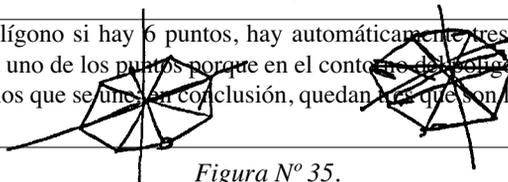
La construcción de la prueba para la aserción presentada a continuación es el resultado de una larga y deliberada búsqueda de explicaciones para  $s(n) = n - 3$ .

En un polígono si se tienen X vértices, el número de las diagonales que salen de un punto será X-3 porque hay un punto de donde se parte y los otros dos puntos que se unen al polígono.

*Figura N° 34.*

La primera explicación se apoya sobre el ejemplo genérico de  $P_6$ : “hay 2 puntos donde están enlazados, esto ya se anuló: quedan 3, es normal” (Sté 109). Tal explicación se formula de la siguiente manera:

En un polígono si hay 6 puntos, hay automáticamente tres diagonales para cada uno de los puntos porque en el contorno del polígono hay dos puntos a los que se une. en conclusión, quedan tres que son las diagonales.



*Figura N° 35.*

Pero la expresión de una explicación sobre un ejemplo es rechazada como prueba: “aquí se hace un ejemplo, no se deberían hacer ejemplos debería ser para lo general” (Sté 158).

Olivier propone utilizar letras en vez de números: “tú pones X puntos” (Oli 161). El texto anterior es modificado, y queda de la siguiente manera:

En un polígono si hay X puntos, habrá automáticamente Y diagonales para cada uno de los puntos porque en el contorno del polígono hay dos puntos que los unen: conclusión, quedan tres que son las diagonales.

*Figura N° 36.*

No obstante, el reemplazo de 6 por X y de 3 por Y no considera la relación entre el número de vértices y el número de diagonales. Los estudiantes orientan sus búsquedas hacia otras direcciones. Como lo sugiere Olivier: “no hay sino una explicación” (Oli 169).

La siguiente figura (figura N° 37) recurre a las formas de la retórica de la geometría. Esta explicación es de hecho la formulación de una experiencia mental. Es necesario reconocer en el esquema un vértice, los adyacentes a

éste, y los demás vértices. Este dibujo no es una representación de  $P_6$ ; Stéphane “hizo una cosa” (Sté 172) que parece tener 6 vértices. Este no es un ejemplo genérico sino la representación de una configuración cualquiera (un vértice, los vértices adyacentes, los otros vértices). Por otro lado, estos son los “puntos restantes” que este texto permite imaginar, y no D, C, B.

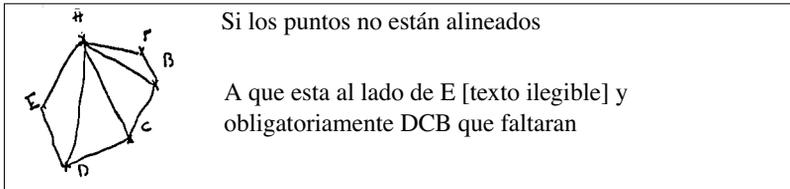


Figura N° 37.

Olivier y Stéphane presentan al observador los dos textos que se acaban de presentar. El observador, con respecto a una representación de  $P_8$ , manifiesta que estos textos no permiten calcular el número de diagonales de un polígono. Pero la representación de los estudiantes es tal que retoman el problema de la validación de  $s(n) = n - 3$ : “es difícil de explicar” (Sté 257). Refiriéndose a este caso de  $P_8$ , Stéphane explica de nuevo que: “A es el punto, que está en el extremo de los otros dos puntos, entonces no forma una diagonal” (Sté 257). Pero se trata de un caso particular y “es necesario hacerlo más general” (Sté 269). Con respecto a  $P_8$ , Olivier escribe la siguiente frase que describe el cálculo que fue hecho:

<p>Se toma el número de puntos y se restan 3 puntos</p>
---

Figura N° 38.

Además dice: “si tomas 10 puntos será igual, si tomas 50, lo mismo” (Oli 270). Lo anterior hace que Stéphane tome consciencia de la relación entre “X” y “Y”, incluidos en el texto inicial; “el número de las diagonales por punto será X-2 (Olivier: -3), X-3 con el punto que” (Sté 279-281, Oli 280). Pero esto no es más que la formulación de la relación, todavía falta “demostrar por qué se resta 3” (Oli 282).

Un nuevo intento de “prueba geométrica” análoga a la anterior también fracasa debido a que no conduce sino a la enumeración sistemática de las diagonales. Stéphane retoma el examen de  $P_8$ , sobre el cual formula una explicación de  $s(n) = n - 3$ : “se resta 3 al polígono porque hay el punto de partida y los dos puntos que los rodean [...] quedan 5 de éste punto de partida, se trazan 5 diagonales” (Sté 397). Esta es, de hecho, la descontextualización de esta explicación, la cual, después de la construcción de  $\zeta_n$  (ver § II.2.3.), conducirá al texto que reproducimos al comenzar esta sección (ver figura N° 34).

Esta explicación proporciona los fundamentos para  $s(n) = n - 3$ , como lo certifica Stéphane: “menos 3, ya sabes, es porque hay un punto y los otros dos puntos que se relacionan [...] esto prueba que es menos 3” (Sté 558-560). Tal explicación está basada en el conocimiento práctico de los objetos que están en juego en el problema, y por esto, evoca una experiencia mental, con el soporte eventual de ejemplos genéricos. Para alcanzar un nivel superior de validación, sería necesario que Olivier y Stéphane se basaran en las definiciones de polígono y diagonal, las cuales ni siquiera son percibidas. Este binomio tiene un modelo de acción que no se constituye en un modelo teórico (explícito).

**Bertrand y Christophe**

Presentamos en esta parte el procedimiento de prueba de Bertrand para

$$f(n) = \frac{n(n-3)}{2},$$

pero omitiremos el que Christophe formuló también al

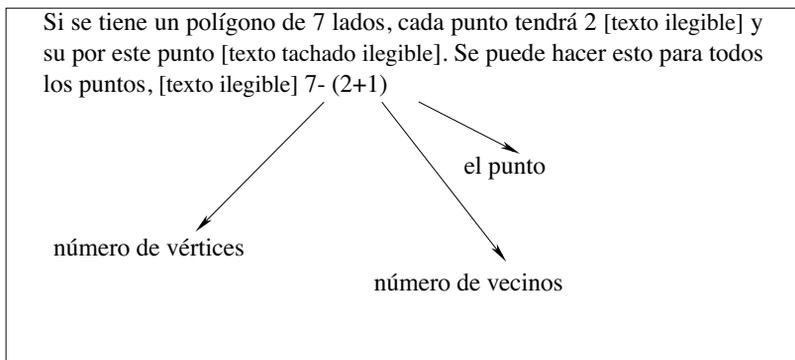
respecto (ver § II.2.1 y § II.2.2). Este procedimiento ilustra un estado intermedio entre las validaciones basadas en un ejemplo genérico o la experiencia mental y el nivel que denominamos cálculo sobre los enunciados (ver § II.3.2). Para mostrarlo, nos remitimos a su fuente, la construcción de la aserción.

Primera etapa:

Sabiendo el número de vértices de un polígono, el número de vértices partirá de cada punto (sus dos vecinos + él mismo).  
[texto tachado ilegible]

*Figura N° 39.*

Lo anterior fue obtenido al eliminar de la referencia a  $P_7$  en la formulación que citamos a continuación, producida inicialmente:



*Figura N° 40.*

Como se puede constatar, esta última aseercción fue elaborada en dos etapas:

Primero, apoyándose en las siguientes proposiciones:

- a. se pueden trazar las diagonales hasta cada vértice, a excepción de los que están al lado (Ber 35),
- b. cada punto tiene dos vecinos en un polígono, no importa cuál sea la figura (Ber 129).

Bertrand deduce de lo anterior: “se tiene un polígono de 7 lados, por ejemplo, cada punto tendrá 2 vecinos y habrá [...] 5 diagonales” (Ber 201-2...). En efecto, él no utiliza representación alguna de este polígono.  $P_7$  es un medio lingüístico en la explicación de  $s(n) = n - 2$  que se da a Christophe (( $n - 2$ ) puede verse para tal caso en el paso de 7 a 5).

En seguida, Christophe logra que  $P_7$  sea trazado. La aseercción  $s(n) = n - 2$  es refutada, pero Bertrand identifica el origen de tal refutación y modifica  $s(n) = n - 2$  en  $s(n) = n - 3$ :

- c. “se me olvidó, no se puede trazar una diagonal hasta sí misma” (Ber 222).

En el nuevo texto aparece cómo es calculado el número de las diagonales en un vértice.

Finalmente,  $f(n) = n(n - 3)$ , que aparece en el estado final del texto, es deducida por Bertrand a partir de una razón que hace explícita claramente:

- d. “multiplicar lo que se encuentra por el número de puntos, porque sería la misma cosa si se partiera de cada punto” (Ber 272).

La validación de esta conjetura se basa en razones de su condición de *propiedades* de los objetos en juego en el problema (proposición b), y en razones que constituyen la evocación de acciones específicas del problema (proposiciones a y c: trazado de las diagonales; proposición d: lo que se hace partiendo de cada punto). Esta validación, que es un análisis de la aseercción  $f(n) = n(n - 3)$ , se basa en la experiencia mental.

En el desarrollo de una verificación hecha por Christophe, esta aseercción es refutada por  $P_7$ . El análisis de la refutación hace que Bertrand descubra que “cada diagonal se cuenta 2 veces” (Ber 338). Con el fin de explicar esto a Christophe, retoma el trazado de las diagonales apoyándose en una representación de  $P_7$ , cuyos vértices fueron designados por medio de letras: “no contaste AF sino 2 veces... cuando trazas todas las diagonales para A, trazas todas las diagonales para F” (Ber 392).

La solución es modificada en  $f(n) = \frac{n(n - 3)}{2}$ . Su expresión (figura N° 41) hace que aparezcan elementos de validación.

Desde el punto de vista de Bertrand, esta aserción tiene las características de un teorema. Es analizada en sus razones. Sin embargo, las concepciones de polígono y diagonal están fundamentalmente ligadas a la experiencia práctica del trazado de estos *objetos* geométricos. Es por medio de esta práctica, y no de la teoría, que el polígono y la diagonal mantienen relaciones. Clasificamos este tipo de validación como experiencia mental.

Sabiendo el número de vértices de un polígono, el número de vértices partirá de cada punto (sus dos vecinos + él mismo).

[texto tachado ilegible]

Es necesario multiplicar lo que se encontró por el número de vértices (para cada vértice, sale el mismo número de diagonales).

PERO [texto tachado ilegible]

PERO uno cuenta cada diagonal dos veces.

*Figura N° 41.*

### **La experiencia mental: conclusiones**

La experiencia mental aparece como medio para fundamentar las soluciones propuestas en un esfuerzo de explicación. Se libera de las situaciones particulares. Como lo testifican Olivier y Stéphane, la descontextualización es el proceso esencial de la generalización. Los conceptos implícitos están esencialmente basados en la experiencia perceptiva y en la acción. Las razones desarrolladas están ligadas a *acciones*, eventualmente interiorizadas, y a *objetos*, como en el caso de Marie que se refiere a la deformación de los polígonos. La expresión de una experiencia mental requiere construcciones cognitivas y lingüísticas complejas.

En el plano lingüístico, la dificultad reside en expresar operaciones sobre un objeto abstracto (una clase de objeto). Esta formulación debe ser operatoria para permitir la construcción de una prueba. La eliminación de rasgos de lo particular constituye un proceso elemental de descontextualización. Pero como es notorio en el caso de Olivier y Stéphane, tal proceso no preserva necesariamente la expresión de las relaciones.

Los medios para expresar las propiedades de los objetos concernientes son indispensables para los estudiantes. El medio más frecuentemente utilizado sitúa a la experiencia mental como originaria del ejemplo genérico. Consiste en basarse en individuos (casos particulares), no como representantes de una clase de objetos, sino como herramientas en la expresión lingüística. De hecho, el polígono  $P_6$  trazado por Stéphane para su prueba geométrica, no es más que un ejemplo genérico de polígono. Significa polígono. Las dificultades lingüísticas son de hecho indisolubles de las dificultades que se presentan en las concepciones de los estudiantes.

La descontextualización requiere que la clase de objetos en juego sea designada y que las características operatorias sobre las cuales se apoya la ex-

periciencia mental sean formuladas. Para lo anterior, se necesita diferenciar los elementos pertinentes e identificar las operaciones que están en juego. La complejidad de esta estructuración constructiva de las concepciones en juego puede oponerse a las elaboraciones lingüísticas. De este modo, es difícil para Stéphane hacer explícito lo que distingue a un vértice de sus vecinos y de otros vértices sin recurrir a la ostensión (lo pertinente sería establecer la distinción entre lado y diagonal en los segmentos definidos para los dos vértices). Bertrand encuentra la misma dificultad cuando trata de hacer explícito que se cuenta dos veces una diagonal (la pertinencia de la distinción entre vértice y extremo), o cuando Christine trata de establecer una relación entre

$$f(n) = \frac{n}{2} \text{ y su definición de polígono.}$$

### *II.3.2. Cálculo sobre enunciados*

En esta sección consignaremos pruebas totalmente independientes de la experiencia. Estas son construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas de las nociones en juego en la solución de un problema. Estas pruebas aparecen como el resultado de un cálculo inferencial sobre enunciados. Se fundamentan en definiciones o en propiedades características explícitas.

Presentaremos a continuación los dos casos observados que se refieren a este tipo de prueba.

#### **Antoine y Damien**

La aserción que estos estudiantes defienden (figura N° 42) está basada en las definiciones adoptadas para polígono y diagonal: “todas las diagonales pasan por el mismo centro” (Ant 167) y “es necesario que los lados sean paralelos dos a dos” (Ant 175). Estos fundamentos se ponen de manifiesto al considerar el problema del dominio de validez en relación con la definición de la división por 2 en  $\mathbf{N}$ :

“sí, entonces si no es un número par, no funciona (Ant 220) no puede ser un número [im]par porque se dijo que los lados deberían ser paralelos 2 a 2” (Dam 221).

Damien piensa que “esto debe poderse demostrar [...] diciendo que cada lado, como parte una diagonal, y que cada lado está unido con otro lado esto puede demostrarse fácilmente” (Dam 246-248).

Sin embargo, debido a que la convicción de los estudiantes es adquirida, esta prueba no será presentada explícitamente.

Para calcular el número de las diagonales de un polígono cuando se conoce el número de sus vértices, se divide el número de los vértices por 2.

$$\frac{\text{vertices}}{2} = \text{número de diagonales.}$$

*Figura N° 42.*

### **Hamdi y Fabrice**

Los estudiantes trazan un polígono  $P_7$ , pero no sus diagonales. Están de acuerdo en el hecho de que para un vértice “[hay] tantas diagonales como vértices” (Fab 28), de lo que deducen que “es el cuadrado de los vértices” (Fab 50).

si se conoce el número de vértices, se toma [texto ilegible]  $x^2$  lo que es igual al número de diagonales.

*Figura N° 43.*

Esta no es una conjetura en la que la incertidumbre de los estudiantes esté relacionada con el cálculo que la produjo, sino con las dudas acerca de la definición de la diagonal que es utilizada. Ambos expresan su deseo de consultar documentos para buscar “información acerca del triángulo” (Fab 91) o “la definición de diagonal” (Ham 92). Sin embargo, esta conjetura es lo suficientemente sólida para que ellos lleguen a declarar, sin sorpresa alguna que para “4 lados hay 16 diagonales” (Ham 70-80. Notemos que  $P_4$  rechaza su conjetura cualquiera que sea la acepción de diagonal). La refutación resulta de la evocación y la verificación sobre el rectángulo (ver § III.2.4).

### **Cálculo sobre los enunciados: conclusión**

De la observación de estos dos casos podemos extraer dos elementos en cuanto a las razones que nos condujeron a relacionarlas con este tipo de prueba.

Antoine y Damien no alcanzan a explicitar completamente una demostración de su aserción; los fundamentos de su convicción residen en el análisis de sus definiciones de las propiedades que las originan. Su aserción tiene las características de un teorema.

En el caso de Hamdi y Fabrice el análisis es más complejo debido a que los índices explícitos son menos abundantes. No obstante, es claro que su conjetura no tiene elementos de la experiencia (los cuales la refutarían), sino que se origina de su definición de diagonal, de la cual resulta erróneamente

que  $s(n) = n$ : una diagonal une dos vértices, por lo tanto, de cada vértice parten tantas diagonales como vértices hayan (esto debería conducir a  $s(n) = n - 1$ , ya que no hay distinción entre lados y diagonales). La precisión de la evidencia es en este caso un obstáculo para la completa explicación de la prueba.

## II.4. CONCLUSIONES SOBRE LOS TIPOS DE PRUEBA

### II.4.1. El significado de los procesos de validación observados

Uno de los resultados esenciales de nuestro procedimiento es que los procedimientos de validación observados no caracterizan de manera intrínseca a los estudiantes. Ellos sólo adquieren significado con respecto a la naturaleza y el estado de sus conocimientos, en la perspectiva de las interacciones sociales en el binomio, y en su lectura de la situación.

Particularmente, más de la mitad de los binomios (8 de 14) defendieron una conjetura sin la base identificable de alguna validación al menos durante un tiempo. Cuatro binomios permanecieron en la misma posición en el transcurso de la primera parte de la observación. Sin embargo, este empiricismo ingenuo, evidente en la solución del problema, no es suficiente para juzgar la racionalidad de estos binomios. Por ejemplo, en el caso de Pierre y Mathieu, su empiricismo ingenuo cohabita con proyectos teóricos ambiciosos. Este empiricismo aparece esencialmente ligado a las interacciones sociales que pueden bloquear el surgimiento de procedimientos de prueba, como en el caso de Lydie y Marie, o en relación con el conocimiento mismo.

La inminencia de las relaciones entre una solución y las concepciones que le sirven de soporte, del orden de lo que Fishbein (1982, p. 11) denomina “tipo intrínseco de convicción”, puede constituir un obstáculo para la ejecución de procedimientos de validación. Puede parecer abusivo hablar de empiricismo ingenuo, por ejemplo en el caso de la solución  $f(n) = \frac{n}{2}$  basada sobre una concepción del poliedro regular par y de la diagonal como diámetro.

Por otro lado, tanto una solución sustentada por un binomio, como muchas soluciones sucesivamente consideradas pueden presentar comportamientos relevantes de diferentes niveles de prueba.

Lo anterior puede verse claramente en la transición del empiricismo ingenuo a la experiencia mental que ocurre en el caso de Evelyne y Christine para la solución  $f(n) = \frac{n}{2}$ , seguido de su apelación a la experiencia crucial y finalmente al análisis de las razones para fundamentar la extensión de su solución para los polígonos impares en el transcurso de la segunda parte de la observación:



Después de la refutación de su conjetura para  $P_5$  regular, Evelyne y Christine hacen explícitas sus definiciones de polígono y diagonal: “un polígono es una figura geométrica que puede tener cualquier número de vértices, pero cuyos lados deben ser iguales” (prot. p. 16)<sup>3</sup>, “una diagonal es una recta que pasa por un vértice de un polígono y que parte en dos la superficie de éste” (prot. p. 19). A continuación, ambas buscan una solución para los polígonos impares. Teniendo como base una configuración de  $P_5$  regular, identifican 5 diagonales (i.e. ejes de simetría), de las que se extrae la conjetura  $f(n) = n$  para los polígonos impares: “si es impar, el número de vértices es igual al número de diagonales” (prot. p. 28). Estas estudiantes se proponen recurrir a una experiencia crucial para establecer esta nueva conjetura: “vamos a verificar una vez más. Se toma por ejemplo la cosa de 17 lados” (Chr 477). No obstante, debido a que tal acción está por fuera de sus capacidades, utilizan  $P_{11}$ , sin haber hecho el dibujo, Christine concluye finalmente: “pero es evidente que hay 11 porque hay 1 en cada vértice” (Chr 524). Así, la segunda parte de la conjetura está basada en la razón.

Este es también el caso de Lionel y Laurent, quienes abandonan su solución  $f(n) = n$  (obtenida básicamente de la observación de  $P_5$ ) después de una refutación hecha por el observador, y formulan la nueva solución

$$f(n) = \frac{n(n-3)}{2} \text{ fundamentándola en el análisis de las razones.}$$

Después de que el observador refutara la prueba de Lionel y Laurent, estos estudiantes retoman la solución del problema. En primer lugar, se interesan por la situación en cada vértice y, a través de sus aseveraciones acerca de  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$  y  $P_7$  se dan cuenta de la ejecución de la siguiente regla: en cada vértice el número de diagonales de  $P_n$  es  $n-3$  “en uno de 7 lados, generalmente hay 4” (Lau 218). De lo anterior, deducen que el número de diagonales es  $f(n) = n \cdot s$  “2 por cada uno, como hay 5 puntos generalmente resultan 10 que parten” (Lau 248), lo que más tarde se convierte en

$$f(n) = \frac{n \cdot s(n)}{2}: \text{ “y como hay 5, y esto es dividido por 2” (Lau 250).}$$

Dicha conjetura es posteriormente confirmada sobre  $P_6$ . Una última verificación de  $P_7$  tiene el valor de experiencia crucial, a menos que “¿cómo se podría decir eso?”.

Los fundamentos de  $s(n) = n-3$ , no explícita sino presente en los ejemplos, permanecen *empíricos* aunque los estudiantes extraigan *las razo-*

---

3. La indicación “prot. p.” que sigue a la cita acerca de los estudiantes, indica la localización de lo extraído con respecto al protocolo de interacción. Los protocolos de interacción de los estudiantes dan cuenta con precisión de sus diálogos y están disponibles para cuando el autor los requiera.

nes del paso de  $n \cdot (n - 3)$  a  $\frac{n(n - 3)}{2}$ : “dado que dos diagonales unen dos puntos... dos diagonales serán confundidas” (Lau 428). Su conjetura tiene entonces fundamentos mezclados. Será necesario un gran trabajo para que alcancen la formulación: “para encontrar el número de diagonales partiendo de cada vértice, se sustrae 3 al número de vértices” (Lau 700).

#### *II.4.2. Aspectos lingüísticos y cognitivos*

En un primer análisis se advirtió que la ausencia de medios lingüísticos operatorios constituye un obstáculo para el surgimiento de pruebas en el estudiante. Así, la expresión de la experiencia mental para fundamentar una solución deberá de vez en cuando recurrir a ejemplos cuya función sea designar o mostrar objetos o relaciones. En su construcción, la experiencia mental permanece arraigada al lenguaje familiar. Al mismo tiempo, esto sitúa al ejemplo en su génesis.

El recurrir al ejemplo genérico evidencia la voluntad de fundamentar la solución propuesta por medio de la razón; sin embargo, esta voluntad es contraria a las dificultades de la expresión operatoria (calculable) de los objetos en juego y de sus relaciones (este es, por ejemplo, el caso de Lionel y Laurent citado a continuación). Notemos que no se trata de una complejidad estrictamente lingüística, sino también cognitiva. Los estudiantes tienen dificultades no solamente al expresar por medio de palabras las pruebas que realizan, sino al reconocer y hacer explícitos los conceptos en juego. El trabajo acerca de la definición, algunas veces asociado con niveles muy bajos de validación (como en el caso de Pierre y Mathieu), proporciona bases para confirmar que la complejidad es también de orden cognitivo.

De hecho, el proceso lingüístico y la construcción cognitiva interactúan dialécticamente en el transcurso de la solución del problema. Juntos constituyen un límite potencial del desarrollo de los procesos de prueba.

La expresión de la solución  $\sum \zeta_n$  muestra cómo la complejidad de la expresión lingüística puede hacer que los estudiantes recurran al ejemplo genérico, limitando así el nivel de la prueba. En efecto, para esta solución es necesario expresar una iteración y controlarla (número de pasos del cálculo y terminación) en un contexto lingüístico en el cual los estudiantes no dispongan de ninguna herramienta adaptada. El ejemplo genérico se convierte en un medio para *mostrar* el procedimiento de cálculo y sus fundamentos.

De la misma manera, la evolución de la experiencia mental con respecto al cálculo de los enunciados se realiza mediante un proceso simultáneo de construcción lingüística y cognitiva. La construcción cognitiva consiste esencialmente en la elaboración de proposiciones necesarias para el cálculo, y la construcción lingüística permite apartarse tanto de lo particular como de la acción.

### *II.4.3. La interacción social*

En las condiciones experimentales concebidas por nosotros la interacción social jugó un papel fundamental.

Sin duda alguna, esta interacción logró constituirse en un obstáculo para el desarrollo de los procedimientos de validación (como lo señalamos a propósito del empiricismo ingenuo) cuando la relación entre los estudiantes era tal que toda manifestación de imposición parecía apropiada.

Pero al mismo tiempo, esta interacción se consolidó como motor esencial de la evolución para ciertos binomios debido a que originó procesos de concientización, obligando a los estudiantes a justificar o hacer explícitas las decisiones tomadas por ellos.

En conclusión esta interacción social es la que le da significado a la experiencia crucial. Este tipo de validación se manifiesta en todo su apogeo en un conflicto acerca de la validez de un enunciado que no puede ser superado a través del paso a un nivel superior de prueba (como en el caso de  $\sum \zeta_n$  y en la construcción de la recurrencia). La experiencia crucial es entonces sometida a prueba (procedimiento de validación o invalidación), que es de hecho una respuesta pragmática a un conflicto social. Esta tiene también un gran significado en el plano cognitivo ya que corresponde a una apropiación del problema de la generalización bajo el punto de vista un poco particular de la existencia de las refutaciones potenciales. Bajo la presión de la duda, el conjunto de los posibles es tomado en cuenta por uno de los participantes.

Estas observaciones acerca de la experiencia crucial nos llevan a considerar tal experiencia como independiente de la demostración. Evidentemente, ésta se encuentra en una tentativa de jerarquización, en un nivel superior al del empiricismo ingenuo, pero en la génesis del ejemplo genérico. La experiencia crucial se situaría en una posición paralela. Determinada en su función por las interacciones sociales, puede aparecer “paralelamente” a otros tipos de prueba cuando la tensión entre los estudiantes no se minimiza en el terreno de las razones.

### *II.4.4. La exigencia explícita de la demostración*

En el contexto de una observación tal, se hubiera podido esperar que los estudiantes de 4º hubieran hecho la exigencia de una demostración como elemento constitutivo del contrato (didáctico o experimental) incorporado a la solución del problema. De hecho, las referencias de la demostración son poco numerosas: “[probablemente es necesario] hacer una demostración como se hace en clase” (Naï 118). “¿Es necesario explicar cómo lo hice?” (Sté 184). De este modo la demostración es apelada más como obligación ligada al contrato que como medio de prueba. Este es el estatuto jurídico que Bertrand explota en contra de Christophe, quien quiere imponer la conjetura  $f(n) = 2n$ : “no se demostró, no se tiene derecho a hacer eso” (Ber

307); Christophe dirá a regañadientes: “sí, yo sé, sí, uno no tiene derecho a inventar” (Chr 340).

Hubo muchas referencias a la demostración como herramienta de prueba, pero su desarrollo posterior fue nulo: “y uno qué sabe si son todos los triángulos... se necesita demostrarlo” (Eve-Chr 301; enseguida se pasa a otro aspecto); “se necesita demostrar por qué se restan 3 puntos” (Oli 282); “esto es fácilmente demostrable” (Dam 248, ver § II.3.2).

La exigencia de la demostración planteada a priori no aparece como un motor en el desarrollo de los procedimientos de validación. Como lo comprueba el texto precedente, la existencia de esta exigencia no es suficiente para afirmar que los estudiantes no sienten la necesidad de elaborar pruebas. Esta necesidad, cuando las cosas se aclaran, es satisfecha por otros medios; los estudiantes se sitúan en un nivel, por una parte coherente con su incertidumbre y las exigencias percibidas de la situación, y, por otra parte, compatible con las elaboraciones cognitivas y lingüísticas correspondientes.

### III. EL TRATAMIENTO DE LOS CONTRAEJEMPLOS

#### III.1. INTRODUCCIÓN

Las refutaciones fueron presentadas, de una parte, bajo la forma de contraejemplos producidos o reconocidos por los mismos estudiantes a lo largo de la primera fase de resolución del problema. Por otra parte, también se presentaron bajo la forma de contraejemplos propuestos por el observador a las soluciones expuestas por los estudiantes. En los dos casos consideramos que los contraejemplos son propuestos para contradecir lo que sería, al menos, una conjetura. Siendo simples especulaciones, diferenciamos la confrontación de proposiciones de las situaciones que las refutan. Estas últimas contradicciones, que serán eventualmente reconocidas por los estudiantes, tienen, en nuestra opinión, otro estatus tanto en el proceso de resolución de un problema, como en los procedimientos de validación.

El análisis de Lakatos nos conduce a esperar que, como consecuencia de una refutación, se obtenga una de las siguientes decisiones (Capítulo I, § V.3):

- un retorno a la conjetura, ya sea para su modificación, o para su rechazo global;
- un retorno a la resolución del problema o a la prueba que ya ha sido hecha explícita, principalmente con el propósito de encontrar el lema escondido que sería a continuación integrado a la conjetura bajo la forma de una condición. Este rechazo puede también provocar el rechazo de la conjetura misma, o hacer evidente la presencia de concepciones erróneas. Este análisis de los fundamentos de la conjetura puede conducir a la identificación

de la contradicción o el error fundamental de los que la refutación no es más que una consecuencia;

- un retorno a los conocimientos que subyacen el problema estudiado o a los fundamentos racionales de la conjetura;
- finalmente, la discusión del contraejemplo con el propósito de apartarlo o de inclusive negarle su estatus de contraejemplo.

## III.2. LOS TIPOS DE TRATAMIENTO DE UN CONTRAEJEMPLO

### III.2.1. Los tipos de tratamiento que se han registrado

Con base en las categorías que fueron producto del análisis epistemológico e histórico, hemos identificado los siguientes tipos de comportamiento de los estudiantes:

*Abandono de la conjetura.* Corresponde a aquellos casos en los que los estudiantes renuncian a su conjetura, ya sea para abandonar la resolución del problema (es, por ejemplo el caso de Pierre y Mathieu), o para regresar a la búsqueda de una solución en una dirección, en muchas ocasiones, radicalmente diferente a la dirección inicial (este es el caso típico de la conjetura  $f(n) = n$ ).

*Modificación de la conjetura.* Corresponde a un nuevo análisis de la situación. Este análisis se apoya en la conjetura que ha sido refutada o en el mismo contraejemplo (es el caso de la búsqueda de soluciones específicas a polígonos impares como consecuencia de la refutación de  $f(n) = \frac{n}{2}$  o del paso de  $f(n) = n(n-3)$  a la solución  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ ).

*Modificación ad hoc de la conjetura.* Se trata de una modificación de la conjetura como consecuencia de establecer una relación entre el resultado calculado a partir de la conjetura inicial y el resultado observado como consecuencia del contraejemplo. La modificación *ad hoc* es representativa del empiricismo ingenuo.

*La introducción de una condición.* De nuevo, se trata de una modificación de la conjetura. Pero esta modificación se basa en el análisis de su dominio de validez, ya sea a partir del análisis del contraejemplo (condición que apartará la clase de objetos de la cual él es un representante), o a partir del análisis de los fundamentos de la conjetura (volvemos a encontrar aquí el hecho de transformar en condición un lema refutado).

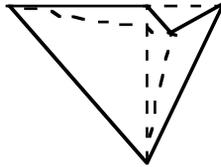
*Anotación de una excepción.* En este caso el contraejemplo se incorpora de alguna manera a la conjetura al asignarle un tratamiento específico. Tendremos también en cuenta el caso en el que el contraejemplo es rechazado en un proceso en el que se especifica su separación dentro de la formulación de

)+( , ( , )+ . □□ , □□□ , □ - □e-□ ,

74 6BA8GH E A8FB64BF8?6BA88-8□CB8F468C7B8A4A6DH8CBP :BAB

□□)62□ □ F1□A1 , 8 2C 78 7BF64BF8A 7BFDH84 CB7H66-SA78? 6BA88-8□CB6BA7H64 7BF8FH74A6F4IB18E4 6BA78E8E8JC76-4□8A 8 FH6BA6C6BAF F786-E 4;4 68E8JC76-4 HA478c A6-SA78 CB2BABB 7874:BA4? A8?F8:HA7B64FB 8F4 9BEH46-SA8 4FB64 8A:8 A84? 78A 6B78□ 8A8-8CEB7H67B4 4 DH8478 ?46 BA8GHE

□□□ 2() □□27□ .)0 3□ F8 GCB78 6BA86H8A64 68A8DH8I8E6BA 7BFFCH4-BAF5-8A7-88BA6F ) BEHA27B 7BF8FH74A6F4C4A8?6BA 68-8□CB 4?ABE6BAB8EB 6B□B 468C45?8 8A6 7BF6BA6C6FDH8FMA <A B H 647BF8A8?CB58□4 ) BE8?B6B 27B 8?BFCB7H6AHA <6HCB 46-SA4?78? 6NF <ABDH84 6BA :HE46-SA8A6A674 78-4 78 F8EHA6BA 68-8□CB CB8-8□CB 8A8?□B□8A6 8A8? DH878F6H58AHA47<4:BA4? 8F6BA748 A4E8CBFA66-SA78?4c :HE4□ Y



85 □ C

□4□DH8IAB4EDH88AAH8CB 8JC8B□8ACB 8?6BA68-8□CB AHA64 ; 4 : 8 A8E47BHA6HF8BA4□-8ACB 78 7BF9HA74□8ACBF46-BA4?8F78 24BH6-SACB CH8F4 4TA6HA7B NF4 ; 4 F?7B8?CB7H6CB 78 HA8□C46-4□B <A 8AFB ) BE B6B 27B 24FBCE4F6BAF86FA6-4FCBF5?8F78 HA 89H46-SA IP4C4B6-8EBA 54-B 74 8HF4F9BE□4F 8ACB 7BF; 86; BF B5F8H 47BF CBEABHCBF

5-0 ) 56 □□ 7□-21)6 □ 36□75 ( ) 81□ 9-6-A1 □2□ □ □□7 -71-9□ □6() □6-21)6720 □□ 325□26) 68(-□□)6 □4F94F8F□□□□78 24 B5I8H 46-SAAB68A8A8?□-4□B8F4GHF) BEHA27B 8? B5I8H 47BE4FH□S CBK6-BAF 7-88BA6F 8A 6474 HA478 24F 94F8F ) BE8? B6B 8? 68□CB787-647B 4 6474 HA478 8?BF9H87-88BA6 A 24 □87-74 8A 24 DH 8?5-AB□3B 6A8 45FB H6 258H47 C44 786-7-E8?□B□8A6 8A8?DH8 4645454 FH6454-B 78 BFBH6SA78?CB58□4 8F 786-E 8?□B□8A6 8A8? DH8B 6BA78E454 6B□B B8H8CB 8? 68□CBDH8DH8454 74CBA58 8A4 24 F8:HA7494F8 9H8□H□ 4E45?8 78 6<46B□-AH8F4 □874 ;BE4 □4F□-F □4F 6BA76-BAF □48E4?8F 78 24 8JC8E□8A66-SA □H□9E86H8A6□8A6 8A6 7BF6HEBFB 4 24 ;BE4 78?4□H8LB ABC8□-4A 24 AB84?446-SA78 247HE6-SA□CBE6 BARH-8A6 78?6 BAA 2B78?494F8□□

) 4E4 6474 HA478 24F7BF94F8F CBF8A□□BF4 6BA6AH6-SA 24 EBC4G6-SA 78 7BF6E4G□-8A6F78 7BF6BA88-8□CBFF8:TA8?GCB A 24 94F8 □4C4B68A FB 24 8A6 78 7BF 5-AB□BF□4 B9H46-SAABH:S HAC4C8?6B□B 4?

para cuatro de ellas: Lionel y Laurent, Martine y Laura, Naïma y Valérie, Pierre y Phillipe. Esto se debe a tres razones bien diferentes según el caso:

- los estudiantes presentaron una conjetura válida con respecto a sus concepciones de polígono y de diagonal, o generaron una convicción que apartaba el cuestionamiento (Martine y Laura, Lionel y Laurent);
- se apoyaron en el observador para resolver sus diferencias con respecto a una refutación (Naïma y Valérie);
- no identificaron ninguna contradicción en el curso de su actividad (Pierre y Phillipe, ver Capítulo III § 2.1. Los alumnos que sostienen que  $f(n) = n \cdot s(n)$  no imaginan ningún dibujo que pueda poner en evidencia la contradicción).

La tabla asociada a la fase II se completó haciendo aparecer para cada binomio (bajo la forma de un punto en el lugar conveniente) aquellos tipos de contraejemplos que aparecen en la tabla y que no vuelven a aparecer. Por otro lado, en el caso de Lydie y Marie, la información obtenida se pone entre paréntesis porque ellas no lograron ponerse de acuerdo acerca del tratamiento del contraejemplo que les fue propuesto. Lydie, que defendía la conjetura

$$f(n) = \frac{n}{2}$$

y que la defendió hasta el final, sugiere la introducción de una

condición. Por su parte, Marie desea que la conjetura sea rechazada en beneficio de una nueva tentativa de resolución.

	Ant Dam	Ber Chr	Bla Isa	Eve Chr	Geo Oli	Ham Fab	Lyd Mar	Nad Eli	Oli Sté	Pie Mat	T	n
Abandono de la conjetura		1	2		3	1	1		1	2	11	7
Modificación de la conjetura		3	1	1	1					2	8	5
Excepción					1						1	1
Condición				1			1	1	1		4	4
Regreso a la definición	1		2							1	4	3
Rechazo del contraejemplo	1			1			2	1		2	7	5

T: Número de ocurrencias de un tipo                      n: Número de binomios involucrados

Tabla N° 5. Tratamiento de contraejemplo en la fase I





De otra parte, las tablas anteriores ponen en evidencia la débil presencia del tratamiento de un contraejemplo como una excepción. Esto puede deberse a una concepción global de las matemáticas. Volveremos a este punto más adelante (ver § III. 2.5).

Dado que el número de contraejemplos tratados en ambas fases es grande, resulta interesante examinar la forma en que estos tratamientos se distribuyen de acuerdo con los diferentes tipos. Se identifican entonces dos categorías de binomios.

La primera categoría se refiere a la estabilidad en el tratamiento (pocas categorías diferentes): Bertrand y Christophe, Naïma y Valérie, Olivier y Stéphane. Aunque el origen de la estabilidad es diferente para cada uno de estos tres binomios, se puede identificar fácilmente.

Naïma y Valérie juegan el juego de la definición. Al enfrentar cada uno de los contraejemplos producidos por el observador, ellas enriquecen la definición con nuevas cláusulas, o formulan una condición (lo que para ellas procede de la misma estrategia).

Bertrand (y Christophe), con base en modificaciones sucesivas, hacen evolucionar la conjetura hacia  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ . El éxito local de estas modificaciones (fundamentado en un análisis de las fuentes de la refutación) conduce a los estudiantes a mantener este tratamiento.

Finalmente, Olivier y Stéphane, después del éxito, basado en la definición, de un primer rechazo de los contraejemplos que les propone el observador, deciden mantener esta táctica. Cuando esta estrategia deja de funcionar, ellos regresan a la definición, con el objetivo claro de rechazar el contraejemplo.

La estabilidad en la elección del tratamiento de un contraejemplo sugiere una razón de economía (relativa a una situación dada): la eficacia reconocida de las primeras decisiones les confiere un carácter dominante.

La segunda categoría se refiere a la diversidad en la naturaleza de las decisiones tomadas: Pierre y Mathieu, Evelyne y Christine y Mandi y Fabrice.

El origen de sus decisiones es demasiado complejo para ser comentado brevemente aquí. Un examen detallado de los casos de estos tres binomios se presentará más adelante ver § III.3).

Con el propósito de comprender los orígenes y los significados de las decisiones de los estudiantes, vamos a examinar a continuación las circunstancias de estas decisiones, para cada uno de los tipos de tratamiento.

### *III.2.3. El abandono de la conjetura*

La tabla N° 7 que se presenta a continuación da una visión de conjunto. Ella indica, para cada uno de los binomios involucrados, la conjetura en cuestión, el contraejemplo producido y la fase de observación durante la cual tuvo lugar el evento. Hay que anotar que los binomios Pierre y Mathieu y

Mandi y Fabrice regresaron, en la fase II, a una conjetura que ya había aparecido en la fase I ( $f(n) = n$  y  $f(n) = n^2$ , respectivamente). Para el primero de estos binomios, esto es una consecuencia de una evolución en su concepción inicial, lo que les permite regresar a su conjetura inicial (ver § III.3., y en lo que sigue, las partes a y b). El segundo binomio rechaza inicialmente la conjetura, para después ser considerada de nuevo y, dado que no había mas alternativas, ser presentada al observador (ver § III.3).

<b>Binomio</b>	<b>Conjetura</b>	<b>Contraejemplo</b>	<b>Fase</b>
(Ber) - Chr	$2n$	$P_8$	I
Bla - Isa	$\frac{n}{2}$	$P_9$	I
	$n(n-3)$	$P_7$	I
Geo - Oli	$2f(n-1)$	$P_7$	I
	$\left(\frac{n}{2}\right) \cdot s(n)$	$P_7$	I
(Geo) - Oli	$2n$	$P_6$	I
Ham - Fab	$n^2$	$P_4$	I
	$n^2$	$P_5$	II
Lio - Lau	$n$	$P_6$	II
	$\left[\frac{n(n-3)}{2}\right] - 1$	$P_9$	II
(Lyd) - Mar	Modelo lineal	$P_{12}$	I
Oli - Sté	$\frac{n}{2}$	$P_6$	I
(Pie) - Mat	$n$	$P_4$	I
	$\frac{n}{2}$ o $n-1$	$P_7$	I
	$n$	$P_5^*$	II
	$\frac{n}{2}$ o $n-2$	$P_6$	II

\*Se trata de  $P_5$  con puntos alineados (ver figura 38).

*Tabla N° 7.*

Un análisis más fino del abandono de la conjetura muestra que se producen dos tipos de circunstancias:

- un abandono inmediato, a partir de la producción del contraejemplo,
- un abandono posterior al análisis de las fuentes de la refutación.

*a) El abandono inmediato*

Esta decisión es frecuentemente tomada dentro de un contexto de empiricismo ingenuo. Esta actitud es coherente: la observación de algunos polígonos es suficiente para construir una conjetura y un solo contraejemplo provoca su abandono:

*Christophe.* El defiende la conjetura  $f(n) = 2n$  sobre el fundamento de un empiricismo ingenuo. Pero la conjetura es rechazada por Bernard con base en el caso de  $P_8$ . Al ser percibida por Christophe como el resultado de un experimento crucial (§ II.2.2), esta refutación provoca naturalmente el abandono de la conjetura.

*Olivier.* La misma conjetura que fue defendida por Olivier (del binomio Geo - Oli) con base en un empiricismo ingenuo es abandonada a partir de la refutación por  $P_6$ .

*Lionel y Laurent.* La conjetura de  $f(n) = n$  está fundamentada solamente en el caso  $P_5$  (ver § II.2.1). Ellos la abandonan cuando el observador les propone la refutación por  $P_6$ : “pues bien, nos equivocamos” (Lau 204-206). Enseguida, regresan a la resolución sobre nuevas bases que son independientes de aquellas que utilizaron inicialmente.

*Pierre y Mathieu.* Para este binomio, el empiricismo ingenuo se conjuga con una lectura de la situación como si fuese un juego de adivinanza (ver § II.2.1). El enunciado de conjeturas y su abandono van teniendo lugar a medida que aparecen ejemplos y contraejemplos. A esto se agrega su reticencia para considerar una conjetura que podría expresar fórmulas diferentes para diferentes clases de polígonos: “yo dudo porque no logro formular una para los dos; una *sola* que sea válida para los dos” (Mat 261-263).

De esta forma, la conjetura  $f(n) = \frac{n}{2}$  o  $f(n) = n - 1$ , que es defendida por Pierre, es refutada por una configuración de  $P_7$  sobre la cual Mathieu hace aparecer 7 diagonales. A partir de esta situación, Mathieu propone  $f(n) = n$  y Pierre la acepta inmediatamente, abandonando su conjetura inicial (“de hecho, ahora estoy seguro que hay tantas diagonales, como vértices”, Pie 293). El regresará a su conjetura inicial (modificándola un poco) en el momento en el que la última conjetura es refutada por el observador con un polígono  $P_5$  de puntos alineados y que presenta tres diago-

nales. Esta nueva conjetura es, a su turno, refutada por el observador y es finalmente abandonada. Mathieu tiene una posición diferente a la de Pierre. El busca soluciones que estén directamente relacionadas con el conjunto de polígonos que han sido sugeridos por los contraejemplos. Pero no tiene éxito y acepta las decisiones de Pierre.

Hay otros dos binomios que entran dentro de esta categoría. Sin embargo, su abandono de la conjetura es consecuencia de un procedimiento diferente. Su conjetura se *deduce* de una concepción, eventualmente implícita, y no de una simple observación. Sin embargo, esta conjetura está marcada por una incertidumbre fuerte que sugiere, al final, la verificación de la que surgirá el contraejemplo.

*Hamdi y Fabrice.* Ellos sugieren  $f(n) = n^2$  al observador. Al constatar el contraejemplo  $P_5$ , sugerido por este último, abandonan su conjetura: “entonces la segunda frase es válida” (Ham 258. Se trata de la afirmación “según el número de vértices del polígono, cada vértice sostiene una o más diagonales”). Este abandono es consecuencia de las incertidumbres iniciales ligadas a la conjetura y relacionadas con las concepciones de polígono y diagonal (ver más adelante).

*Marie (de l binomio Lyd y Mar).* Ella propone un modelo proporcional que “normalmente” (Mar 173-175) debería explicar las relaciones entre el número de vértices y el número de diagonales de un polígono. Ella solamente inicia una verificación bajo la presión de Lydie. El examen de un polígono  $P_{12}$  refuta su conjetura. Marie la abandona: “bueno, en todo caso, mi cosa era falsa” (Mar 274).

$P_6 \rightarrow 8 \text{ d}$ $6 \times 42 = \rightarrow 8 \times 42$ $2412 \rightarrow [\text{tachado}] 16$
--

*Figura N° 45.*

#### *b) Análisis y después abandono*

En los casos que se presentan a continuación, el abandono de la conjetura es el resultado de un análisis de los orígenes de la refutación. Como lo ilustran los ejemplos que siguen, este análisis provee las bases para la continuación de la resolución.

*Blandine e Isabel.* La refutación por  $P_9$  de  $f(n) = \frac{n}{2}$  hace aparecer un vértice que queda aislado (Isa 127). En ese momento, los estudiantes modifican explícitamente su concepción de diagonal y abandonan esta conjetura. Su nueva conjetura,  $f(n) = n(n-3)$ , se encuentra con el contraejemplo  $P_7$

de la figura N° 46. De nuevo, los estudiantes regresan al problema de la de-

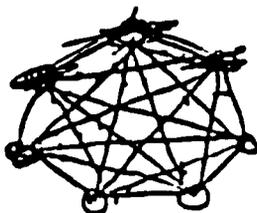


Figura N° 46.

finición de diagonal. El polígono  $P_4$  va a jugar un papel prototípico: “de cada punto parte solamente una diagonal” (Isa 70). La conjetura es entonces abandonada para regresar a la conjetura inicial (sugerida por  $P_4$ ) en la que el dominio de validez se limita, en este caso, a los polígonos pares. Los estudiantes se dedican a buscar una fórmula para los polígonos impares.

*Georges y Olivier.* Ellos inducen la conjetura  $f(n) = 2f(n-1)$  (ver § II.1.1). Pero, bajo la evidencia de  $P_7$ , ésta es abandonada. El análisis de las fuentes de esta refutación conduce a los estudiantes a la invarianza del número de diagonales en cada vértice de un polígono.

La nueva conjetura,  $f(n) = n \cdot s(n)$ , es examinada desde el punto de vista de su dominio de validez. Se modifica a  $f(n) = \left(\frac{n}{2}\right) \cdot s(n)$ , pero la división por 2 sugiere la refutación por  $P_7$ . La nueva conjetura es entonces abandonada. La búsqueda se vuelve a iniciar teniendo como guía el no contar dos veces las diagonales: “espera un segundo, porque es que ellas se cruzan. [...] hum, hay un problema” (Geo 198, 209).

*Hamdi y Fabrice.* Su conjetura inicial,  $f(n) = n^2$ , no se obtiene a partir de la experiencia, sino a partir de su concepción de polígono y diagonal (ver § II.3.2). La incertidumbre acerca de esas concepciones los lleva a buscar una confirmación en el examen de  $P_4$  que aparece en ese momento como un contraejemplo. La conjetura inicial es abandonada a cambio de un regreso a la resolución sobre la base de nuevas concepciones de los objetos en juego. Pero, de hecho, ellos regresarán (ver más adelante).

*Lionel y Laurent.* Después de que su conjetura,  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ , ha sido refutada por el observador ( $P_5$  con puntos alineados), ellos buscan una adaptación a la clase de objetos sugerida. Proponen entonces

$f(n) = \frac{n(n-3)}{2} - 1$ . Esta solución no les agrada porque ella no satisface

el principio de una solución única para el conjunto de los polígonos: “hay que encontrar algo que funcione en todos los casos” (Lio 965). Los estudiantes profundizan en el análisis de la refutación y hacen evidente que no puede haber una solución para los polígonos cóncavos: “aquí, yo no veo cómo podemos hacer ¿tú lo ves? No, porque es que depende de la forma” (Lau 970). Ellos abandonan esta aproximación a la conjetura.

*Olivier y Stéphane.* Ellos proponen la conjetura  $f(n) = \frac{n}{2}$  sobre la base de un análisis de la diagonal y su confirmación por  $P_4$  (Oli 8). Después de una verificación, la refutación por  $P_6$  hace evidente que esta conjetura “no funciona para todos” (Sté 11). El análisis de esta refutación provoca el abandono de la conjetura: “esta cosa no funciona” (Oli 41).

*Pierre y Mathieu.* Ellos asumen una aproximación esencialmente empírica. No obstante, el comienzo de su actividad está determinado por una interrogación, sobre todo de la parte de Mathieu, acerca de la definición de diagonal. Mathieu defiende la conjetura  $f(n) = n$  sobre la base de una conjetura errada de diagonal (eje de simetría de un polígono regular). Con base en su propia concepción, Pierre la rechaza y es finalmente abandonada al examinar un cuadrado. Este polígono, además de refutar la conjetura, conduce a considerar de nuevo la concepción subyacente de diagonal (Mat 110). Este cuestionamiento da lugar al abandono.

### III.2.4. La modificación de la conjetura

En las dos fases de la observación, la modificación de la conjetura aparece como una respuesta igualmente posible a la refutación. La tabla N° 8 da una visión global de acuerdo a los binomios involucrados.

<b>Binomio</b>	<b>Conjetura</b>	<b>Contraejemplo</b>	<b>Fase</b>
Ber–(Chr)	$s(n) = n - 2$	$P_7$	I
(Ber)–Chr	$n(n - 3)$	$P_7$	I
Bla–Isa	$\frac{n}{2}$	$P_{2n+1}$	I
Eve–Chr	$\frac{n}{2}$	$P_5$	II
Geo–Oli	$ns(n)$	$P_5$	I

Tabla N° 8.

Binomio	Conjetura	Contraejemplo	Fase
Ham–Fab	$n^2$	$P_4$	II
	$n(n-3)$	$P_6$	II
Lio–Lau	$\frac{n(n-3)}{2}$	$P_5$	II
	$\frac{n(n-3)}{2}$	$P_5$	II
Nad–Eli	$f(n) + a(n+1)$	$P_5$	II
Pie–Mat	$\frac{n}{2}$	$P_5$	I

Tabla N° 8.

Distinguimos tres tipos principales de modificación:

- Las modificaciones *ad hoc*, esencialmente empíricas. Estas consisten en una adaptación de la conjetura a algunas características superficiales del contraejemplo, que no están ligadas a un análisis con profundidad.
- Las modificaciones fundamentadas racionalmente y que son el resultado de un análisis de la refutación.
- Resaltamos, dentro de esta última categoría, aquellos casos de modificaciones de la conjetura que consisten en proponer una solución específica para la clase de objetos representados por el contraejemplo (teniendo en cuenta una característica que haya sido reconocida como pertinente).

*a) Las modificaciones ad hoc*

Estas modificaciones se apoyan en el reconocimiento de una relación entre el hecho esperado y un hecho que ha sido hecho explícito por el contraejemplo. Los estudiantes no profundizan en los orígenes mismos de la refutación. La conjetura se modifica de manera consecuente. La fuente de la nueva conjetura es el análisis de un caso, sin que tenga lugar el análisis de sus razones. Sus fundamentos son esencialmente los de un experimento crucial.

*Hamdi y Fabrice.* En el momento en el que la conjetura inicial,  $f(n) = n^2$ , es refutada por  $P_4$ , la primera sugerencia de Fabrice es que  $f(n)$  “es el número de vértices al cuadrado menos” (Fab 152), teniendo en cuenta que  $f(4)$  era superior al número de diagonales observado en  $P_4$ .

Para los mismos estudiantes, un poco más tarde, el paso de  $f(n) = n(n-3)$  a  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$  es una adaptación de la conjetura que tiene en cuenta directamente la relación evidente entre el número de diagonales calculado y aquel observado en  $P_6$ . Aún si se evoca aquello que podría constituirse en la razón, “las diagonales, ellas van en los dos sentidos” (Fab 440), no se establece una relación con la modificación de la conjetura. El mismo Fabrice duda: “yo creo que no es válido” (Fab 461). Es  $P_{16}$ , como experimento crucial, que le permite decidir: “tomemos otro, ¿cuántos quieres? Tomemos uno grande, hum..., hagámoslo con 16 lados” (Ham 462).

*Lionel y Laurent.* En este caso se manifiesta más claramente el carácter *ad hoc* de la adaptación de la conjetura  $f(n) = n(n-3)$  a su refutación por  $P_5$ . Esta adaptación es confirmada por  $P_6$  y después puesta a prueba con un experimento crucial con  $P_7$ : “ensaya con 7 [...] 28 dividido por 2, 14 normalmente... vamos a ensayar” (Lio 257, Lau 260-262). La verificación se hace sobre el dibujo.

El carácter *ad hoc* de esta modificación parece ser confirmado en la forma misma de una primera redacción del mensaje (figura N° 47).

En un polígono con 4 vértices sale una diagonal por vértice entonces 4 diagonales y como en un polígono 4 hay 2 diagonales entonces uno hace 4:2=2 diagonales.

En un polígono con 5 vértices parten 2 diagonales por vértice entonces 10 diagonales y como en un polígono con 5 hay 5 diagonales. 10:2=5.

Figura N° 47.

Esto confirma más aún las siguientes ideas:

“¿Por qué quieres dividir por 2,? Eso es lo que ellos no van a entender” (Lio 396).

“Hay que dividir por 2 porque creemos que con 4 funciona, y con 5 también, y con 6 también” (Lau 399).

#### b) Las modificaciones fundamentadas en la razón

Estas modificaciones son el resultado de un análisis de la refutación en relación con la conjetura y sus fundamentos:

*Bertrand y Christophe.* Este es un ejemplo banal porque su conjetura,  $s(n) = n-2$  se modifica a  $s(n) = n-3$  en el momento que ellos identifican que “lo hemos olvidado” (Ber 222, es decir, han olvidado el vértice desde el cual están contando las diagonales).

Otro caso observado en este binomio muestra el desarrollo de un análisis menos trivial. Los estudiantes sostienen  $f(n) = n(n-3)$  que es refutado por  $P_7$ . Bertrand se da cuenta de que esta refutación es consecuencia de que



las diagonales se cuentan dos veces: “tenemos que reducir el número de vértices de acuerdo con lo que hemos encontrado porque la diagonal AF es la misma que la diagonal FA” (Ber 287). Aquí surge una primera modificación a  $f(n) = n(n-3) - n$ . Esta propuesta, para la que la refutación se mantiene, es abandonada en beneficio de  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ , dado que “habrá diagonales que se cuentan dos veces” (Ber 384) y que “esto se reduce entonces a hacer la división por dos” (Chr 403).

*Georges y Olivier.* A partir de la observación de que el número de diagonales de un polígono es el mismo en cada vértice, ellos sostienen que  $f(n) = ns(n)$ . La refutación aportada por P<sub>5</sub> es la ocasión para un análisis que permite identificar que las diagonales están siendo contadas dos veces, “después ellas se cruzan [...] hay un problema” (Geo 198-209). Esta anotación conduce a conservar únicamente la mitad de las diagonales (figura N° 48). En el caso de P<sub>6</sub> esto corresponde a una interpretación geométrica de  $f(n) = \left(\frac{n}{2}\right)s(n)$  que no es permitida por P<sub>7</sub>. Esta solución también es abandonada.

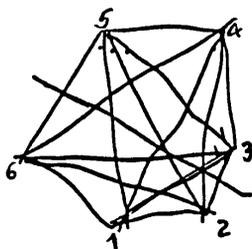


Figura N° 48.

*Hamdi y Fabrice.* Ellos sostienen que  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ , pero poniendo a un lado P<sub>4</sub> y P<sub>5</sub>. En el momento en el que el observador les muestra que esta relación es satisfecha por P<sub>4</sub>, los estudiantes se ven obligados a admitir este polígono dentro de su dominio de validez y a modificar en consecuencia su conjetura.

### c) Producción de soluciones específicas

Esta categoría de modificaciones de la conjetura refutada contiene los casos en los que el contraejemplo se tiene en cuenta como una información relevante para el dominio de validez de la conjetura. La conjetura se mantiene sobre un dominio que, en general, no es precisado. Para el dominio que ha

sido caracterizado (frecuentemente de manera implícita) por el contraejemplo, los estudiantes proponen una solución específica. Esta solución puede ser una adaptación local de la conjetura inicial, o una solución original para este dominio. Los fundamentos para esta modificación pueden ser empíricos o, por el contrario, pueden ser el fruto de análisis y de procedimientos de prueba sofisticados.

*Blandine e Isabel.* Ellas sostienen inicialmente que  $f(n) = \frac{n}{2}$ . Esta conjetura es refutada por los polígonos impares. Las estudiantes buscan entonces una solución específica para estos polígonos y obtienen  $f(n) = \frac{n}{2}$  o  $\frac{n-1}{2}$ , dependiendo de la paridad.

*Evelyne y Christine.* Ellas habían puesto a un lado los polígonos impares y sostenían que  $f(n) = \frac{n}{2}$ . Sin embargo, el contraejemplo  $P_5$ , propuesto por el observador, impone su autoridad (Chr 216).

Al tener en cuenta los polígonos impares, ellas se ven obligadas a considerar de nuevo su concepción de diagonal (eje de simetría que pasa por un vértice, ver figura N° 49). Sin embargo, esto reduce los polígonos a figuras regulares (debe haber una diagonal por vértice). Ellas deducen  $f(n) = n$  para los polígonos impares.

Una diagonal es una recta que pasa por un vértice de una ~~figura geométrica~~ ~~figura~~ y que corta la superficie de este último en dos.  
polígono

*Figura N° 49.*

*Pierre y Mathieu.* Ellos defienden esta misma conjetura,  $f(n) = \frac{n}{2}$ , pero sobre una base empírica. El contraejemplo de  $P_5$  es consecuencia de un análisis de las restricciones que existen para la división por 2 en  $\mathbf{N}$ . El tratamiento de esta refutación da lugar a un debate muy animado en el que aparecen las siguientes cuestiones:

- a. Rechazo de la conjetura (Mat 132).
- b. Tratamiento de  $P_5$  como una excepción (Pie 133).
- c. Rechazo de  $P_5$  en tanto que polígono (Mat 135).
- d. Extensión del concepto de diagonal (Pie 153).

Se toma finalmente la decisión de buscar una solución específica para los polígonos impares (Mat 168, Pie 169). Las alternativas anteriores se descartan por las razones siguientes:

- $f(n) = \frac{n}{2}$  es demasiado “convinciente” sobre los polígonos pares (asociación 2 a 2 de los vértices por diagonal) para ser descartada.
- El carácter poco aceptable del estatus de excepción en matemáticas, “en general, una teoría se aplica a todos los casos” (Mat 236).
- Análisis etimológico de polígono que no permite descartar  $P_5$ : “Poly: varios. Gono: lado” (Pie 2).
- Carácter demasiado *ad hoc* de la extensión propuesta para el concepto de diagonal (considerando las semi-diagonales).

No obstante, para Mathieu, esta solución va en contra del principio general de tener una solución única a un problema. Es decir, el principio de una fórmula única para el conjunto de todos los polígonos (Mat 236). La adaptación

escogida es *ad hoc* a la configuración expresada por  $P_5$ :  $f(n) = \frac{n}{2}$  o  $n - 1$ .

Tal decisión está de acuerdo con la figura N° 50 en el empiricismo ingenuo que domina la actividad de este binomio.

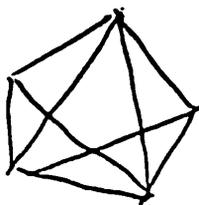


Figura N° 50.

*Lionel y Laurent.* Ellos buscan una modificación de su conjetura,

$$f(n) = \frac{n(n-3)}{2},$$

para la clase de objetos representada por el polígono

cóncavo producido por el observador. Su concepción de diagonal los lleva efectivamente a considerar este polígono como un contraejemplo. Pero la reticencia a aceptar una solución que no sería única los conduce a nuevos análisis que terminan en otra decisión (ver § III.2.3.b y III.2.6).

*Nadine y Elisabeth.* Por el contrario, estas dos estudiantes nunca se salen de la misma situación. Sobre la base de un experimento crucial, sostienen que  $f(n+1) = f(n) + a(n+1)$ . Esto contradice un  $P_5$  de puntos alineados producido por el observador. Ellas regresan entonces a la resolución para

esta clase de objetos: “[aquellos que tienen] un vértice hacia el interior” (Nad 175). Ellas buscan una solución que no hacen explícita completamente: “Tú marcas: entonces hay dos menos una figura con 5 lados sin vértices en su interior [...] entonces 3 de menos que una figura de 6 lados sin ninguno en su interior, después con 7, por consiguiente 4 de menos que una figura de 7 lados” (Nad 201). Pero, al considerar otros contraejemplos posibles, ellas se dan cuenta de que habría un número infinito de fórmulas. No terminan.

### III.2.5. El contraejemplo tratado como una excepción

La tabla N° 9 da una visión global de la repartición de este tipo de tratamiento entre los binomios ( $P_{><}$  denota el cuadrilátero cruzado):

Binomio	Conjetura	Contraejemplo	Fase
Bla-Isa	$\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$	$P_3$	II
Geo-Oli	$\sum \zeta_n$	$P_3$	II
		$P_5$	II
Ham-Fab	$n^2$	$P_4$	II
		$P_3$	II
	$\frac{n(n-3)}{2}$	$P_{><}$	II
Mar-Lau	$\sum \zeta_n$	$P_{><}$	II

Excepción versus rechazo:

Nai-Val	$\frac{n}{2}$	$P_5$	I
Pie-Mat	$\frac{n}{2}$	$P_5$	I

Tabla N° 9.

Este tipo de tratamiento de un contraejemplo es el más raro. De hecho, está prácticamente ausente en la primera fase de observación (un solo caso). Como veremos, esta característica puede ser interpretada como el signo de una concepción global de las matemáticas: una afirmación matemática no tiene excepciones.

*Blandine e Isabel.* Ellas consideran el triángulo que el observador les propone para contradecir su conjetura como un caso particular porque “no tiene diagonales” (Isa 184).

*Georges y Olivier.* Ellos descartan de la misma manera este contraejemplo. Pero ellos sienten alguna incomodidad y buscan una confirmación por parte

del observador: “un triángulo, ¿cuántas diagonales tiene?” (Geo 561). Este tratamiento del contraejemplo como una excepción, se traduce de hecho en la expresión de una condición que reduce el dominio de validez de la solución: “a partir de 4 los triángulos son casos particulares” (Geo 508-510).

Para este mismo binomio, el contraejemplo  $P_5$  con puntos alineados aparece en primera instancia como “de nuevo un caso particular” (Oli 625) y, en todo caso, “ésta puede ser la buena solución, aún si tiene excepciones” (Oli 645).

La conjetura defendida por Georges y Olivier está fundamentada a la vez sobre un ejemplo genérico y sobre un experimento crucial (ver § II.2.3 y II.2.3). Esto la convierte en una conjetura particularmente resistente a las refutaciones y favorece su tratamiento con base en excepciones. La duda no aparecerá efectivamente hasta el momento en el que los estudiantes consideren otros polígonos cóncavos. En todo caso permanecerán en el estatus de excepción, dado que no pueden encontrar una solución específica para estos nuevos objetos.

*Hamdi y Fabrice.* Ellos consideran la refutación por el triángulo y la descartan porque “un polígono dado no puede tener cero diagonales” (Ham 222). En el momento en el que el observador les propone  $P_4$ , ellos lo tratan como “un caso excepcional” (Fab 279). Estos polígonos mantendrán su estatus aún en el momento en que dejan de ser refutaciones para la conjetura en juego: “excepto los casos particulares los triángulos y los cuadriláteros”

(Ham 389, Fab 392; la conjetura es  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ ). Será necesario que

el observador les muestre que estos polígonos satisfacen la conjetura. En todo caso, Fabrice se resistirá a aceptar el triángulo puesto que “de todas formas en un triángulo no hay diagonales, no nos interesa” (Fab 553).

Estos estudiantes consideran de nuevo como excepciones las asociaciones polígonos que les propone el observador: “esto funciona para todos excepto para los [...] polígonos que tengan un punto en la mitad” (Ham 588, Fab 595). El hecho de que estos polígonos tengan un estatus de excepción no implica ninguna ambigüedad. Los estudiantes lo manifiestan claramente cuando interactúan con sus interlocutores: “ellos no saben cuáles son los casos excepcionales” (Fab 615). Finalmente, ellos expresarán esta situación en la forma de una condición que determina el dominio de validez de la conjetura: “esto no funciona cuando hay un vértice que une varias figuras a la vez” (Fab 692).

*Martine y Laura.* Al ser confrontadas por el observador con un  $P_{>4}$ , ellas buscan inicialmente una interpretación análoga a aquella que les permitió tratar el caso de  $P_5$  con puntos alineados: “de nuevo efecto perfecto del azar” (Lau 439) lo que “prueba que nuestra fórmula no funciona en todos los casos” (Lau 429). Ellas producirán finalmente una solución específica para es-

tos polígonos que han sido tratados, de hecho, como excepciones: “cuando la figura presentada ya tiene las diagonales de otra figura [...] Uno busca el número de diagonales de la otra figura” (Lau 533).

Los estudiantes de los dos binomios siguientes no logran ponerse de acuerdo acerca del estatus de excepción de un contraejemplo y prefieren considerar el dominio de validez de la conjetura que defienden ( $f(n) = \frac{n}{2}$ ).

*Naïma y Valérie.* Para ellas, “esto no va a funcionar para todos” (Naï 249). Ellas estudian  $P_5$ , pero no se ponen de acuerdo sobre este caso. Habría que descartarlo: “no es un polígono” (Val 264), o tratarlo como una excepción: “5, no es posible” (Naï 269). Las estudiantes buscan al observador para resolver sus diferencias. Este produce un nuevo polígono impar. Mientras que para Valérie “esto no existe” (Val 282), para Naïma, el observador impone su autoridad: “si él te lo da” (Naï 283). De hecho se enfrentan, por una parte, a la idea de una verdad que algunas veces no funciona, y, de otra parte, a la exigencia de una verdad sin fallas. Este último punto de vista terminará predominando, lo que las conduce a considerar el problema de la definición (ver Capítulo III § II.2.4).

*Pierre y Mathieu.* Ellos tienen una discusión muy animada sobre el tema de la refutación de  $f(n) = \frac{n}{2}$  por  $P_5$ . Para Pierre, “la cosa de 5 es una excepción a la regla” (Pie 133). Por su parte, Mathieu sugiere que, de pronto, “eso no existe, una cosa de 5” (Mat 135) (anotemos que esto permitiría tener una solución válida para todos los polígonos). Como ya lo mencionamos anteriormente, el estatus de excepción de  $P_5$  es descartado, porque si para Pierre “en matemáticas no hay excepciones” (Pie 239), para Mathieu, por su lado, “en matemáticas no hay” (Mat 238), o, al menos, “hay menos que en gramática” (Mat 240).

### III.2.6. La introducción de una condición

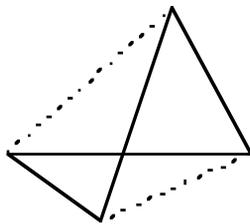
La introducción de una condición corresponde a dos problemáticas bien diferentes del tratamiento de la refutación. Para algunos, se trata de una estrategia para salvar la conjetura al descartar los objetos para los cuales el contraejemplo es un representante. Para los otros, se trata de encontrar, dentro del análisis de la solución, las fuentes de la refutación y de resolverla por medio de una condición.

)+. , 1 (□+ □□)□, □□,) (□! (□(, □

□□ □□	□ □□4 1□	□ 31□ □□□□□□	□□
24], 4	I B I ]	)	□□
I 8] ;E	I	)	□
		)	□□
□4□] 45	I I ]	)	□□
□8]□4H	I I ] ]	)	□□
□7]□ 4E	I	) A	□
□47] 2<	□ I □ I	)	□
□4Q 4?	I	)	□□
		)	□□
		)	□□
	6 I 6 B6-8A6	)	□

□□ □ C

□ 21(-□A148) □□25)□) □□-□-6-6() □□217□.)0 3□  
 □ (-□ □ -□ ?BF<A□B7H6AHA46BA76<SADH8BAF□8A78F64□E  
 24 624F8 78 B58□BFBC8F8A□7BFCBE4 c:HE□ □Y 4? 64□46□B□4E4 CBE  
 HA4CIBC8747 □J68C□4DH8BFDH8□8A8A 2□ HACHA□□87-□□□4□  
 45 F□ CBC8747 AB□8A8A<:HA4E246<SA6BA'BF9HA7□8A



□□ □ C

tos mismos de la conjetura. De hecho y como ya lo hemos mencionado, estos contraejemplos tienen un estatus de excepción.

*Lionel y Laurent.* Ellos acaban de abandonar una tentativa de adaptación de su conjetura cuando ésta fue refutada por el observador, al proponerles  $P_{><}$ . Sugieren entonces que no es un polígono (Lio 1015), y después hacen explícita una condición. Esta condición, expresada en términos vagos, significa que el dominio de validez de la conjetura debe ser reducido: “es necesario que no sean polígonos particulares” (Lio 1031).

*Nadine y Elisabeth.* Ellas rechazan las diagonales que no son interiores al polígono. Al ser confrontadas, por azar, con un  $P_7$  cóncavo, ellas rechazan este tipo de configuración: “se necesitaría sin ángulo” (Nad 74). Pero ellas no formulan esta condición dentro de su mensaje. Cuando el observador les presenta de nuevo un polígono cóncavo, ellas cambian de decisión y se orientan hacia la búsqueda de una solución específica (ver § III.2.4.c).

*Naïma y Valérie.* Ellas defienden su solución,  $f(n) = \frac{n}{2}$ , al producir condiciones *ad hoc* para cada uno de los contraejemplos propuestos por el observador. Esta es una estrategia de defensa que se construye durante la interacción en la segunda fase de la observación: “no me importa, yo respondo con condiciones” (Val 504). Estas condiciones aparecen en su mensaje como las cláusulas de una definición: “todos los lados de la misma longitud”, “sus lados deben estar dispuestos en círculo”, “de un vértice sale únicamente una recta”, como dice Valérie: “¡una condición adicional!” (Val 550).

#### *b) Condición que favorece el análisis de la conjetura*

*Blandine e Isabelle.* Su conjetura es refutada por el observador, al producir un polígono cóncavo. Isabelle rechaza las diagonales exteriores: “se necesita que sea al interior. Hum, habíamos dicho que se cortaba en un solo punto” (Isa 206). Ellas estudian diversas configuraciones sin lograr una solución para los polígonos cóncavos. Enuncian entonces la condición de convexidad, que salva la conjetura: “se necesita que sea convexo [...] eso es todo” (Bla 224). Esta condición está directamente relacionada con la definición que se ha hecho de diagonal, y no únicamente con una simple observación del contraejemplo.

*Evelyne.* Ella introduce una condición de paridad que reduce el dominio de validez de la conjetura a aquel de la división por 2 en  $\mathbb{N}$ : “entonces, está siempre dividido por 2 [...] Sí, pero entonces necesitamos que el número sea par” (Eve 85-86). No obstante, los estudiantes no aceptan esta condición fácilmente: “eso no debe ser eso, porque allí [en el enunciado] no dice nada que el polígono o los vértices sean pares” (Eve 140).

Esta lectura de la situación conduce a los estudiantes a formular su solución restringiéndose implícitamente a aquellos objetos que tienen un número par de vértices. Esta condición se hará explícita para responder a la



refutación del observador que implica aceptar los polígonos impares. Al sentirse insatisfechas con una solución que se encuentra limitada por una condición, Evelyne y Christine buscarán una solución específica para los polígonos impares (ver § III.2.4.c).

*Lydie y Marie.* Lydie le impone a Marie su solución:  $f(n) = \frac{n}{2}$  Después

expresa dudas acerca de una validez que ella había defendido hasta ese momento: es para todos los números pares que he hecho” (Lyd 338). De hecho, la expresión de esta restricción, que se relaciona con el reconocimiento del dominio de definición de la división por 2 en  $\mathbb{N}$ , es una invitación que ella le hace a Marie para continuar la búsqueda de una solución para la clase de los polígonos impares.

*Olivier y Stéphane.* Ellos sostienen que el número de diagonales de un polígono aumenta, a medida que el número de vértices aumenta. La verificación sobre una configuración de  $P_7$  que presenta los puntos alineados refuta esta conjetura. Al identificar la fuente de esta refutación, los estudiantes introducen una condición: “hay que decir eso: si los puntos no están alineados” (Sté 77). Esta condición jugará a continuación un papel central para enfrentar los contraejemplos propuestos por el observador.

III.2.7. Los retornos a la definición

Binomio	Conjetura	Contraejemplo	Fase
Ant–Dam	$n$	$P_4$	I
	$\frac{n}{2}$	$P_8$	II
Bla–Isa	$\frac{n}{2}$	$P_9$	I
	$n(n - 3)$	$P_7$	I
Eve–Chr	$\frac{n}{2}$	$P_5$	II
	$\frac{n}{2}$ o $n$	$P_8$	II
		$P_{\text{cóncavo}}$	II
Naï–Val	$\frac{n}{2}$	$P_7$	II
		$P_8$	II
Oli–Sté	$\sum \zeta n$	$P_{><}$	II
(Pie)–Mat	$\frac{n}{2}$	$P_5$	I

Tabla N° 11.

Regresaremos más tarde y de manera global sobre “el problema de la definición” (ver Capítulo III), tanto en su relación con la resolución del problema, como con la evolución de las concepciones subyacentes de los estudiantes. Aquí nos interesa únicamente el regreso a la definición dentro de un contexto de refutación. En la mayor parte de los casos (5 de 7) este problema de la definición fue abordado inmediatamente por los estudiantes.

*Antoine y Damien.* Su incertidumbre inicial los condujo a enfrentar energicamente el problema de la definición: “podemos ir a buscar lejos, de esta forma [...] si no tenemos los datos exactos” (Dam 75-77). La definición que ellos obtienen para un  $P_8$  regular prototípico les permite descartar los polígonos impares: “no puede ser un número impar, puesto que dijimos que los lados deben ser paralelos dos a dos” (Dam 221). Cuando se enfrentan con un  $P_8$  cóncavo, propuesto por el observador, ellos enriquecen su definición, adicionando una cláusula *ad hoc* a la configuración presentada: “[las diagonales] se cortan en un solo punto” (Dam 342) y además se requiere que “esté en la mitad de la figura” (Ant 343, Dam 356). Este predominio de la definición es consecuencia de la lectura que los estudiantes hacen de la definición: “la regla del juego dice que nosotros somos el profesor. Ellos mismos [los adultos que estaban presentes durante el experimento] lo dijeron ... un polígono ... un polígono es lo que nosotros le hemos dado y él [el observador] debe decidir si nuestra definición es válida” (Ant-Dam 383).

*Blandine e Isabelle.* Ellas se enfrentan de inmediato al problema de saber qué es un polígono y qué es una diagonal. El primer contraejemplo,  $P_9$ , a su conjetura,  $f(n) = \frac{n}{2}$ , las conduce a precisar el concepto de diagonal: “[ellas] unen dos a dos [los vértices]” (Blan 18) y unen un vértice al vértice opuesto (“es al lado opuesto, escucha, la diagonal de esto”, Isa 75). La nueva conjetura,  $f(n) = n(n-3)$ , es, a su turno, refutada por  $P_7$ , lo que conduce a precisar aun más la definición con respecto al cuadrilátero: “de cada punto parte una sola diagonal” (Isa 70). La conjetura,  $f(n) = \frac{n}{2}$ , ahora sólidamente fundamentada, es considerada de nuevo con base en esta nueva definición.

*Evelyne y Christine.* Ellas consideran el problema de la definición como consecuencia de la refutación, de su conjetura por el triángulo,  $f(n) = \frac{n}{2}$ : “un polígono es [...] una figura geométrica que tiene [...] por lo menos 4 lados” y “que tiene un número par de vértices, porque el triángulo no tiene diagonales” (Chr 110-113, Eve 112). Pero ellas abandonan esta definición porque es demasiado *ad hoc* o restrictiva (Eve 1400). En lo que sigue, se tomará al paralelogramo como el prototipo de polígono: “decimos que un po-

lígono es algo que tiene sus lados siempre paralelos 2 a 2” (Chr 201). La selección de una definición es consecuencia de un imperativo metodológico: “si no, no podemos hacer nada” (Eve 535). El contraejemplo  $P_5$ , propuesto por el observador, cuestiona inmediatamente esta selección: “no sabemos qué es un polígono” (Chr 245) y finalmente “para un polígono, no importa cuántos lados tenga pero es regular” (Chr 270). Un nuevo contraejemplo,  $P_8$  cóncavo, será descartado porque no se adapta a esta definición. La definición será expresada explícitamente en el texto del mensaje. Las refutaciones que el observador les propone adquieren significado solamente en relación con este problema: “tendríamos, ahora sí, que saber qué es un polígono, una diagonal, exactamente la definición” (Chr 696).

*Naïma y Valérie.* Ellas defienden la conjetura  $f(n) = \frac{n}{2}$ . Al ser refutada

por el observador, Valérie resalta inmediatamente el problema de la definición como un prerequisite: “tendríamos tal vez que conocer la definición de un polígono” (Val 285). La lectura que ellas hacen de la situación se centra en la búsqueda de la definición: “él no te la va a dar tienes que intentar encontrarla” (Naï 289-291), puesto que “la definición de polígono nos será absolutamente necesaria” (Val 331). Al enfrentar nuevas refutaciones, ellas harán explícita una definición que evolucionará por medio de cláusulas *ad hoc* (ver § III.2.6.a). Las estudiantes no se preocupan de que “[ellas no sepan] ni siquiera la definición de un polígono” (Val 442). Sencillamente, la definición propuesta “es lo que uno piensa” (Naï 353). No obstante, una estrategia diferente las va a incitar ya sea, a aceptar excepciones, o a diferenciar las soluciones de acuerdo a los tipos de polígonos.

*Olivier y Stéphane.* Ellos tienen algunas dudas con respecto al contraejemplo  $P_{>4}$ . Se dirigen al observador para preguntar: “la definición de un polígono, ¿qué es?” (Sté 791) porque “si no sabemos qué es un polígono, esto no va a funcionar” (Sté 795). Sin esta definición, les será difícil defenderse de los contraejemplos, especialmente para saber si son legítimos, “de todas formas, [el observador] encontrará siempre algo diferente” (Sté 801).

*Pierre y Mathieu.* Ellos tuvieron desde el comienzo de la resolución de este problema diferencias acerca de sus concepciones mutuas de polígono y de

diagonal. Al enfrentarse a la refutación por  $P_5$  de su conjetura  $f(n) = \frac{n}{2}$ ,

ellos regresan a este debate sobre la concepción, buscando hacer explícitas sus definiciones respectivas. Se trata, para ellos, de comprender este contraejemplo (que ha sido reconocido como tal), de tal forma que se puedan encontrar los medios para una nueva solución sobre la base de una concepción compartida (ver Capítulo III § II.2.2).

### III.2.8. El rechazo del contraejemplo

Este tipo de tratamiento de la refutación fue el más común dentro de nuestras observaciones. Apareció por lo menos una vez en la actividad de once de los catorce binomios. De hecho, su presencia es un poco más fuerte en la fase II de la observación porque en esta fase era necesario que los estudiantes reaccionaran a las refutaciones que les proponía el observador.

Binomio	Conjetura	Contraejemplo	Fase
Ant-Dam	$\frac{n}{2}$	$P_{2n+1}$	I
Ber-Chr	$\frac{n(n-3)}{2}$	$P_5$	II
		$P_{><}$	II
Eve-Chr	$\frac{n}{2}$	$P_3$	I
	$\frac{n}{2}$ o $n$	$P_3$	I
Ham-Fab	$\frac{n(n-3)}{2}$	$P_3$	II
Lyd-(mar)	$\frac{n}{2}$	$P_{127}$	I
Lyd-Mar	$\frac{n}{2}$	$P_7$	I
Mar-Lau	$\sum \zeta_n$	$P_5$	II
Nad-Eli	$f(n) + a(n+1)$	$P_3$	I
Oli-Sté	$\sum \zeta_n$	$P_6$	II
		$P_5$	II
		$P_{><}$	II
Pie-Mat	$\frac{n}{2}$	$P_5$	I
	$\frac{n}{2}$ o $n-1$	$P_5$	I
Pie-Phi	$ns(n)$	$P_{10}$	II

Tabla N° 12.

No es posible poner todos los rechazos de un contraejemplo en un mismo plano. Distinguímos tres categorías principales:

- El contraejemplo se rechaza porque, a partir de su análisis, se deduce que no refuta la conjetura, y que, de hecho, se basa en

una interpretación errada. Esta posibilidad aparecía con el  $P_5$  de puntos alineados propuesto por el observador.

- El contraejemplo se rechaza con referencia a una concepción precisa de polígono que ha sido eventualmente formulada como una definición.
- El contraejemplo se rechaza porque se considera como un caso patológico, aún si no hay ningún debate de concepción y, menos aun, de definición.

*a) Aparición de una interpretación errónea*

*Bertrand y Christophe.* Ellos descubren la diagonal que se encuentra escondida en la configuración de  $P_5$  con puntos alineados que les fue dibujada por el observador. Ellos mencionan que sería bueno destacar a los interlocutores que este tipo de configuración es posible. Ellos adoptan esta misma actitud (sin éxito) cuando enfrentan la refutación por  $P_{>2}$  (los estudiantes no tienen suficiente tiempo para considerar otras alternativas).

*Martine y Laura.* Ellas rechazan igualmente el contraejemplo después de haber descubierto la diagonal escondida (y se mantienen en esta posición, aun cuando el observador les muestra insistentemente que, de esa forma, la diagonal pasa por 3 vértices y no sólo por 2).

*Olivier y Stéphane.* Ellas también rechazan el  $P_5$  con puntos alineados al descubrir las diagonales que hacen falta. Hay que recordar que estos estudiantes habían introducido muy rápidamente una condición que descartaba las configuraciones con puntos alineados (§ III.2.6.b).

*b) Rechazo con referencia a las concepciones de polígonos y diagonales*

*Antoine y Damien.* Ellos fundamentan racionalmente su conjetura,

$$f(n) = \frac{n}{2},$$

al adoptar una definición para polígono (ver § III.2.7). Las refutaciones potenciales, que podrían generarse con base en el dominio de definición de la división por 2 en  $\mathbf{N}$ , son descartadas a partir de esta definición.

Las refutaciones potenciales, que podrían generarse con base en el dominio de definición de la división por 2 en  $\mathbf{N}$ , son descartadas a partir de esta definición.

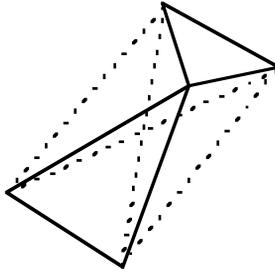
*Pierre y Mathieu.* Ellos descartan una primera configuración de  $P_5$  porque no corresponde a la de un polígono regular: “los lados no son exactamente iguales” (Math 63). Al examinar de nuevo  $P_5$ , Mathieu sugiere que “de pronto no existe una cosa de 5” (Mat 135) pero “eso sería demasiado bonito” (Pie 136). Por lo tanto, no es posible descartarlo. Las dificultades con este contraejemplo se resolverán cuando se vuelva a considerar la definición de diagonal (ver Cap III § II.2.2).

*Olivier y Stéphane.* Ellos rechazan una primera configuración de  $P_5$  al requerir que los polígonos no tengan vértices alineados. Los otros contraejemplos producidos por el observador son analizados como ensamblaje de figuras: “No es un polígono” (Oli 768). “Espera, un polígono es algo, hay

)+( , ( , )+ . □□, □□□, □ - □e-□ ,

HA46B4 2E 8FC AB8FHACBEBAB FBA7BF FBA7BFCMA:HB 8JCBRB  
7858E4 ;4 58EBGB □MF 24? B5I8H 47BB □8FC □BFHACBEBAB □ , GN

) 4E4 8A9BAE8FCBF6BAE8-8 □CBF c:HE4 □Y 7BF8H74A6FF8 I 8A  
B52: 47BF4 6BA78EIE8? CB58 □4 78 74 78c A6-SA I 8E□□□□ ?BF78  
6-78A E6;4 L4E 7F6BAE8-8 □CBF54F47BF8A 74 78c A6-SA □ABF8 CH88  
DH88 F78HACHA 7E7E F4: 4A □MF 78 7BFCHABF < 8EBA6H □ , GN



85 □ C

□□ )□□ 2() □□217□ .) 3□□ □216(-) 5□□□20 2□6 23□ 2□4□□

9)□□ □ ,5-67I) ?4F 78F64E4A 8? CMA:HB 6B □B 6BAE8-8 □CB 4 FH  
6BA8GH □ I <sup>I</sup> CBDH8CHACMA:HB ABC8A87<:BA4□ ;E

, 8 2? 4A4 6BA6AH4SA4 7FCBEBABFC4EF H4A7BF8 IH8I 8 4 6BAF  
78EIE8? CMA:HB 6B □B HA6BAE8-8 □CB 8?4F 7B 78F64E4A 78c A6 4 □8A  
8 □? CMA:HB AB8FHACBEBAB □ ;E F8 E6;4 LB <A64 □8A6  
E746-BA7B 6BA8? □CB58 □4 78? 68E □I 8E□□□□ CB7H6 c A4 □8A6HA  
6HFCBA □ <A6 468E6478 ?4F6 BA6C6BA8FH5E68A6F

□ (-□ □ -□ ?BF□□5 <ACBA8 4 HA27B8? CMA:HB 4HA6H4A7B8?  
B5I8H 47BE8F;4 □ <A7647BDH86B □B C4E 8?6H4E7B 8FC CBEBABF4  
GF468 74 6BA8GH □ 78 □ 74F 9E □4F 2E 6B □B 8A8? CMA:HB AB;4 □7 <  
:BA48F 8A6A6F ABABF <A6EF4 □ 45 □B B5E4A6 □4 □7 < FA  
<A6A6E <CBABF8 ABG8A8 74 □ < □4 BC <A8A □BF 9HA6BA4C4E □ 7B □  
□4 □

□-) □ □-) ?4F8A8A7-8EBA64FCB9HA7#6BAEFC86B4 74 FB H6SA  
78? CB58 □4 CBCHFCBCEI7 < 8 I 8E□□□ □7 < 8 ;4 47BC47B 8? E6;4  
LB78 7BF6BAE8-8 □CBF6B □CBF6-SA78 CEA6CB 8 8FC 9E □4 HA

CBCHFCB C4E B9HCE □ I <sup>I</sup> 8FE6;4 L47B CBDH8CF4F 6BIF 78

74BFAB8J <FA □□□ ?4 ?8: 4 4? 8JCB □B 78 CB CBAB8 4 □ 4E8 HA  
E6 □ <GH □ 8 7B □HFCBF E 8FC □7 <CH8G 4 6E8K8 □ □ ?8A  
9BA6E7BF <H <A6F 6BAE8-8 □CBF 8?4 CB 7H6 EFC66-BA87 □ , 2□ ) 4E4

$P_7$ : “normalmente eso tiene sólo una cosa, una diagonal” (Lyd 144, i.e., una sola diagonal por vértice). Para  $P_{12}$ : “no es posible que haya más diagonales que vértices, dices cualquier cosa” (Lyd 262).

*Nadine y Elisabeth.* Ellas descartan el triángulo desde el comienzo porque no tiene diagonales: “solamente podemos comenzar a partir de 4 lados porque, con 3 lados, no hay diagonales, porque eso produce un triángulo” (Nad 131). En este caso, no se está haciendo un tratamiento del contraejemplo, sino que se está considerando el problema de la extensión del procedimiento  $f(n+1) = f(n) + a(n+1)$  a las condiciones límites. Pero, como el triángulo no tiene diagonal, éste no puede servir de punto de partida para la recursión.

*Naïma y Valérie.* Ellas descartan  $P_5$  como contraejemplo a su conjetura: “no es un polígono” (Val 256). Pero Naïma no está de acuerdo con esta decisión: “quién te dice que no es un polígono” (Naï 256). Ellas se ponen de acuerdo al limitar el dominio de validez de su solución,  $f(n) = \frac{n}{2}$ , a los polígonos pares. Para una de ellas, ésta es una restricción a un subconjunto de los polígonos. Para la otra, solamente aquellas figuras que tienen un número par de vértices son polígonos (ver Capítulo III § II.2.4).

### III.3. DINÁMICA DE LA REFUTACIÓN:

#### TRES ESTUDIOS DE CASO

Después de esta revisión detallada del tratamiento de una refutación, nos proponemos examinar el papel que estos tratamientos juegan en el proceso de resolución del problema. Hemos escogido los tres casos en los que se percibe mayor diversidad en los tipos de tratamiento.

Dado el número de contraejemplos tratados por los estudiantes y que hay un número pequeño de tipos de tratamientos diferentes, hemos asumido la hipótesis de un principio de economía que induce a los estudiantes a retener aquel tratamiento que ha tenido algún éxito. Para los tres casos que presentaremos enseguida, nuestro propósito es identificar los principios que fundamentan los procedimientos de los estudiantes.

#### Evelyne y Christine

Estas estudiantes construyen y defienden la solución  $f(n) = \frac{n}{2}$ . Lo hacen inicialmente sobre la base de un empiricismo ingenuo. Y después utilizan un experimento mental (ver § II.4.1). Este último tipo de validación se apoya de manera esencial en la definición de polígono. Esta definición aparece con motivo de la discusión de la refutación de su solución por  $P_7$ .

Hay dos puntos de vista que se oponen. Por un lado, aquel de la introducción de una condición y, por el otro, el del regreso a la definición. Esta

última posición se adopta a partir de la mención que Evelyne hace de una cláusula del contrato experimental. Según ella, si fuera necesario formular una condición, esto habría sido mencionado en el enunciado del problema. En otras palabras, los estudiantes no pueden reducir el conjunto de polígonos. Ellos deben saber qué son los polígonos y producir una solución que sea válida para todos.

Sin embargo, la solución que ellas adoptan reduce, de hecho, el conjunto de polígonos a aquellos para los cuales  $f(n) = \frac{n}{2}$  es válida: “si decimos que un polígono es una cosa en la que los lados son siempre paralelos dos a dos, bueno, no hay necesidad de precisar. Solamente hay que dividir por dos” (Chr 201).

El tratamiento de la refutación del triángulo no hace referencia a la definición. El triángulo es rechazado como polígono porque no tiene diagonales. Las estudiantes le asignan al triángulo un carácter patológico que determina su decisión.

El contraejemplo  $P_5$  se impone como polígono, dado que fue producido por el observador. La definición inicial es descartada y se adopta una nueva definición: “un polígono puede tener cualquier número de lados. Seguro pero es regular” (Chr 270). Para salvar la conjetura, es necesario introducir una condición. No obstante, puesto que los polígonos impares siguen siendo polígonos reconocidos, los estudiantes buscan una solución para el número de sus diagonales.

Esta solución está fundamentada en una acepción de diagonal como “eje de simetría” que conduce a la configuración de la figura para un  $P_5$  regular.

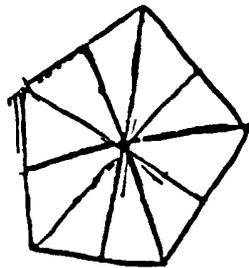
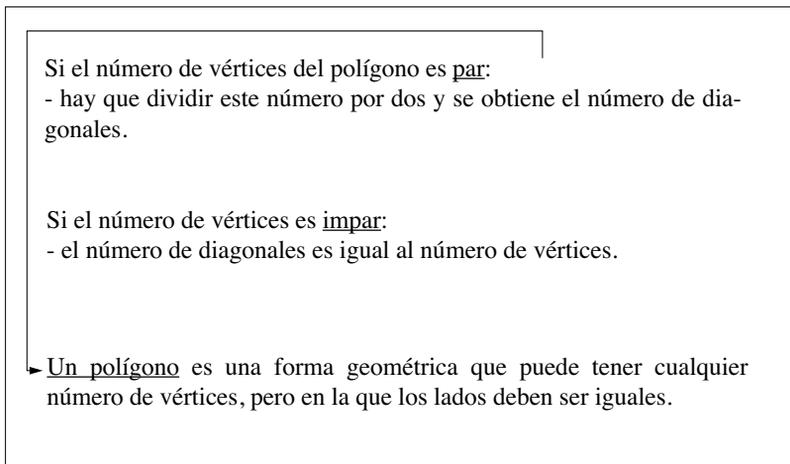


Figura N° 53.

Se retiene, entonces, la solución  $f(n) = n$ , que fue fundamentada inicialmente en un experimento mental (figura N° 53) y después de manera racional (cálculo sobre los enunciados, ver § II.4). Sin embargo, continúa



existiendo una incertidumbre acerca de las premisas: las definiciones de polígono y de diagonal. Los contraejemplos que el observador produce a continuación son tratados dentro del terreno de las definiciones. Esta definición se hará explícita dentro del mensaje (figura N° 54):



*Figura N° 54.*

Para Evelyne y Christine, el tratamiento de un contraejemplo está subordinado a una problemática global de la definición. Se llegó a esta problemática como consecuencia del primer contraejemplo, dentro del contexto de una lectura del contrato experimental (que excluía la introducción de condiciones). El triángulo es la única figura que se escapa a esta problemática, dado su carácter fuertemente patológico. Al ser tratado como un monstruo (en el sentido de Lakatos), es rechazado.

### **Hamdi y Fabrice**

Con base en su concepción de polígono y diagonal, los estudiantes defienden la conjetura  $f(n) = n^2$ . Al ser refutada por  $P_4$ , ellos intentan, en primera instancia, modificar esta conjetura, para después proponerla, sin modificaciones, al observador. El contraejemplo  $P_5$ , producido por este último, provoca el abandono de la conjetura. El efecto de estas dos refutaciones es un cuestionamiento acerca de lo que es un polígono: “al menos habría podido darnos una definición” (Ham 228).

Al regresar a la resolución del problema, ellos se basan en una concepción general y aparentemente correcta de polígono (convexo). Esto conduce a  $f(n) = n(n-3)$ . Esta conjetura, al ser presentada al observador, es refutada por  $P_6$ . Hamdi y Fabrice la modifican en  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ . Esta

modificación es corroborada con  $P_5$  y, en seguida, es sometida a un experimento crucial con  $P_{16}$ : “yo creo que no funciona” (Fab 461), “escoge otro diferente. ¿Cuántos quieres? Escojamos uno grande, hagámoslo con 16 lados” (Ham 462). Sin embargo, no habrá una confrontación del cálculo con aquel de un experimento que, de hecho, no se realiza. El mensaje de los estudiantes en este momento se reproduce en la figura N° 55.

Un polígono cualquiera tiene siempre 3 diagonales menos que la suma de los vértices del polígono cuando se multiplica por el número de vértices y se divide por dos.

Excepto para los triángulos y cuadriláteros.

Figura N° 55.

Fabrice insiste en que los cuadriláteros se mantengan aparte. El cambia de opinión solamente cuando el observador le muestra que la conjetura es válida para un trapecio. No obstante, Fabrice se niega a volver a considerar el estatus del triángulo como contraejemplo. Recordemos su posición: “el triángulo, como no tiene diagonales, no nos interesa” (Fab 553).

La figura N° 56 muestra los ensamblajes de polígonos que el observador propone a continuación como contraejemplos:



Figura N° 56.

Inicialmente, Fabrice los rechaza como polígonos. Sin embargo, Hamdi los trata como excepciones. Después ellos recuerdan: “esto es una cosa cruzada” (Ham 566). En este momento, los contraejemplos se aceptan como polígonos. Los estudiantes se ponen entonces en la tarea de formular una condición que los descarte: “esto no funciona para aquellos que tienen un punto en la mitad” (Fab 682). Esta condición no tiene ninguna relación con los fundamentos iniciales de la conjetura (que justificaron  $s(n) = n - 3$ ), pero es una adaptación *ad hoc* (y particularmente exitosa) para los contraejemplos.

Hamdi y Fabrice abandonan su conjetura inicial porque tienen dudas acerca de las concepciones que fundamentan esta solución. El problema de la definición surge a partir de esta incertidumbre.

La modificación de  $f(n) = n(n-3)$  es necesaria porque el contraejemplo  $P_6$  no puede ser puesto en duda como polígono. Pero esta modificación es *ad hoc*. No obstante, los contraejemplos que el observador produce a continuación no generan nuevas modificaciones. Ellos son descartados. De hecho, el tratamiento que ellos les dan, a través de una condición, es equivalente a un rechazo en la medida en que su contenido está determinado de manera *ad hoc* y sin ninguna relación con los fundamentos de la conjetura.

El tratamiento de los objetos (referencia o retorno a las concepciones) impone el tratamiento de las refutaciones en detrimento, tal vez, del análisis de los fundamentos de la conjetura. Es decir, de una problemática de la prueba.

### Pierre y Mathieu

Estos dos estudiantes tienen posiciones claramente opuestas acerca de sus concepciones de polígono y de diagonal. Para Pierre, “polígono” debe entenderse en su acepción general (poli - gono), pero “diagonal” significa oblicuo o, al menos, debe excluir las diagonales que son paralelas a un lado del polígono. Para Mathieu, “polígono” se limita al polígono regular y “diagonal” a diámetro (sobre las concepciones de Pierre y Mathieu ver Capítulo III § II.2.2). En algún momento, Mathieu consideró como diagonales los ejes de simetría de un polígono regular. Esto defendía la conjetura  $f(n) = n$ . Esta propuesta fue rechazada por Pierre con base en su propia concepción y después fue abandonada al examinar un cuadrado.

La primera conjetura defendida por los estudiantes,  $f(n) = \frac{n}{2}$ , fue refutada por  $P_5$ . Como se mostró anteriormente (§ III.2.4.c), el tratamiento de esta refutación fue objeto de un debate que tenía múltiples componentes. Este debate estuvo compuesto, al mismo tiempo, por consideraciones de contenido (qué es y qué no es un polígono y una diagonal), de oportunidad y de principio.

El debate de principio gira en dos dimensiones: aceptar o rechazar las excepciones, y aceptar una fórmula que no podría ser descrita en una expresión algebraica única. Este debate juega un papel importante en las decisiones de los estudiantes. Por un lado, motiva a Mathieu para buscar una solución común para los polígonos pares e impares, rechazando la propuesta de Pierre ( $f(n) = \frac{n}{2}$  o  $n-1$ ). Por el otro lado, Pierre regresa a la definición clásica de diagonal, proponiendo la solución  $f(n) = n$ , para la cual Mathieu produce las configuraciones  $P_7$  y  $P_5$  de la figura N° 57. Sin explicar por qué ha cambiado de opinión, Pierre defiende esta última fórmula para todo tipo de polígono (Pie 293).

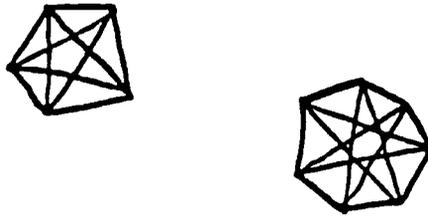


Figura N° 57.

Aunque los estudiantes tienen muchas dudas, ellos no inician ningún procedimiento de prueba. Pierre sugiere que se considere que la situación es un juego de adivinanza: “[a los observadores] bueno, entonces dénos la respuesta” (Pie 337), “como es un juego entonces vale la pena hacer intentos” (Mat 338), “Sí, pero si intentamos con cualquier cosa también” (Pie 339), “Bueno, y si intentamos con cualquier cosa, pues nos equivocamos, ¿no? No es una montaña” (Mat 340). “No, yo quisiera conocer la respuesta [...] a mí no me gustan los problemas sin respuesta” (Pie 341-343), “bueno, ¡después nos la darán!” (Mat 344).

En el momento en el que el observador refuta  $f(n) = n$  con el polígono  $P_5$  de puntos alineados, Mathieu duda inicialmente de que se trate de un polígono, y, después, comienza a trabajar en la búsqueda de una solución específica para esta categoría de objetos. Por su parte, Pierre, manteniendo su lectura de la situación, abandona  $f(n) = n$ , para regresar a su propuesta inicial. Una nueva refutación con  $P_6$  no convexo lo lleva a un abandono definitivo. Mathieu continuará analizando los contraejemplos durante un tiempo para efectos de encontrar una solución.

El conflicto entre las concepciones de Pierre y Mathieu favorece un debate de definición que privilegia el tratamiento de los contraejemplos a través de un regreso a la definición. Ellos logran ponerse de acuerdo sobre tres cuestiones: primero, sobre el problema de las concepciones; segundo, sobre los principios generales de la actividad matemática (no hay excepciones, hay una solución única); y, tercero, sobre la idea de que un problema matemático siempre tiene solución. Estos acuerdos los inducen, en primera instancia, a intentar resolver las refutaciones por medio de soluciones específicas y, después, a buscar una solución que se exprese en una fórmula común para el conjunto de todos los polígonos.

El principio de no descartar ningún polígono, empuja a Mathieu a buscar una solución, aun si ésta debe ser específica para los polígonos cóncavos. La sucesión de abandonos de sus conjeturas por parte de Pierre es consecuencia de su concepción de la situación como un “juego de adivinanza”. Estos abandonos son producto de un empiricismo ingenuo (de circunstancia) que fue identificado cuando analizamos los procedimientos de prueba (ver § II.2.1).

### III.4. CONCLUSIONES

La selección de los tipos de tratamiento que los estudiantes utilizan para las refutaciones está determinada por tres factores.

El *análisis con referencia al problema mismo* destaca la discusión sobre los objetos en juego dentro de la resolución del problema. Este análisis parte de la definición y puede conducir a cada uno de los tipos de tratamiento que hemos estudiado. El análisis no privilegia un tratamiento en particular. La selección de los tratamientos se puede comprender a partir de las condiciones locales o específicas de las concepciones de los individuos. La naturaleza de esta selección puede evolucionar a lo largo de la resolución. Inicialmente se regresa a la definición, para después buscar condiciones o adaptar la conjetura refutada, en el caso de que las concepciones se hayan estabilizado.

La selección entre la introducción de una condición, la búsqueda de una solución específica y la modificación de la conjetura tiene orígenes que no son triviales. Sin embargo, la información que hemos recogido no es suficiente para estudiar estos orígenes. La introducción de una condición tendría un significado profundo si ella fuera la consecuencia de un análisis de los fundamentos de la conjetura. Pero ésta no fue la situación común que nosotros observamos. Por el contrario, parece que, si la condición descarta un conjunto muy grande de los polígonos (en el sentido de las concepciones de los estudiantes), entonces se prefiere buscar una modificación de la conjetura (extensión a los polígonos impares de la conjetura  $f(n) = \frac{n}{2}$ , búsqueda de una solución para los polígonos no convexos).

El *análisis con referencia a una concepción global de las matemáticas* puede inhibir algunos tratamientos de las refutaciones: se rechaza el estatus de excepción y puede haber alguna reticencia hacia una solución que se exprese en una fórmula única.

El *análisis con referencia a la situación* juega un papel análogo al precedente. Sin embargo, este análisis depende de las características de la situación e integra notablemente la lectura, por parte de los estudiantes, del contrato experimental. Esto pudo haber privilegiado ciertos tipos de tratamientos de las refutaciones en algunos binomios (juego de la definición, abandonos sucesivos en un “juego de adivinanza”). También pudo haber inhibido otros tipos de tratamiento (negativa a introducir una condición que no haya sido sugerida por el enunciado).

No hay que sobre-estimar el papel que pudo haber jugado el contrato experimental. Destaquemos que los resultados obtenidos en la fase II, que muestran el carácter dominante del tratamiento del contraejemplo como una excepción (o de su rechazo), confirman resultados obtenidos en otros estudios (Burke, 1984; Galbraith, 1979). Estos resultados muestran que, en general, un solo contraejemplo no es suficiente para que los estudiantes

renuncien a una conjetura. El hecho de que, en nuestro estudio, encontremos un comportamiento que ha sido identificado en otros contextos experimentales sugiere que este tipo de tratamiento no es una consecuencia del contrato experimental, como se habría podido sospechar. De hecho, los otros tipos de tratamiento aparecen de manera sensiblemente igual en las dos fases.

La selección de un tipo de tratamiento está determinado por el carácter dominante de uno de estos tres análisis. La concepción de las matemáticas y la lectura de la situación juegan un papel dominante y pueden privilegiar o inhibir radicalmente algunos tratamientos. Sin embargo, en el momento en que la situación aparece aislada del observador y que el análisis se hace de manera intrínseca al problema, no parece haber ningún tipo de tratamiento que sea privilegiado a priori. Anotemos, en todo caso, que, en nuestra situación, la atención que se le da a los objetos, y por tanto a la definición, es una consecuencia natural de la naturaleza combinatoria del problema seleccionado.

La naturaleza de la conjetura podría, a priori, determinar el conjunto de tratamientos posibles para una eventual refutación. Se podría partir de la hipótesis de que, si la conjetura es falsa, entonces su abandono, su modificación o el regreso a una definición serían finalmente preponderantes. Y si la conjetura es válida, entonces el rechazo del contraejemplo debería ser dominante. En este caso, el contraejemplo podría ser, de alguna manera, el producto de una interpretación errada.

Se puede efectivamente constatar que conjeturas como  $f(n) = n$  o  $f(n) = 2n$  se abandonan como consecuencia de sus refutaciones. De hecho, estas conjeturas son particularmente frágiles en la medida en que son corroboradas por un solo polígono. La situación es diferente cuando la conjetura es corroborada por un conjunto importante de polígonos. Este es el caso de la conjetura  $f(n) = \frac{n}{2}$ . Los orígenes de esta conjetura (implícitos o explícitos) son la concepción de polígono como polígono regular que tiene un número par de vértices y de diagonal como diámetro. El paralelogramo es un ejemplo prototípico de estas concepciones.

La tabla N° 13 permite relacionar los tipos de validación y los tipos de tratamiento de la conjetura  $f(n) = \frac{n}{2}$ . Esta conjetura fue defendida por la mitad de los binomios. La lectura de esta tabla no sugiere que haya un tipo de tratamiento privilegiado o que las validaciones se inclinen por el empiricismo ingenuo o por el experimento mental.

Validación	Binomio	Fase	Tratamiento
Empiricismo ingenuo	Lyd–Mar	1	Rechazo del contraejemplo
		2	Condición
	Nai–Val	1	Excepción vs. rechazo
		2	Regreso a la definición
		2	Condición
	Oli–Sté	1	Abandono de la conjetura
	Pie–Mat	1	Rechazo del contraejemplo
		1	Regreso a la definición
		1	Excepción vs. rechazo
		1	Modificación de la conjetura
1/2		Abandono de la conjetura	
Experimento mental	Bla–Isa	1	Abandono de la conjetura
		1	Regreso a la definición
		1	Modificación <i>ad hoc</i>
		2	Excepción
		2	Condición
	Eve–Chr	1	Condición
		1	Rechazo del contraejemplo
		2	Regreso a la definición
2		Modificación de la conjetura	
Cálculo sobre los enunciados	Ant–Dam	1	Rechazo del contraejemplo
		1/2	Regreso a la definición

Tabla N° 13.

Queda por examinar qué sucede con una conjetura “válida”, si, además, ella hace referencia a priori a una concepción aceptable de polígono. Se trata, dentro de nuestra observación, de las siguientes conjeturas:

$$f(n) = \frac{n(n-3)}{2}, \quad f(n) = \sum \zeta_n \quad \text{y} \quad f(n) = f(n) + a(n+1).$$

Estas conjeturas fueron defendidas por la mitad de los binomios.

Validación	Binomio	Conjetura	Fase	Tratamiento
Empiricismo ingenuo	Ham-Fab	$\frac{n(n-3)}{2}$	2	Condición
			2	Excepción
			2	Rechazo del contraejemplo
Experimento crucial	Nad-Eli	$f(n) + a(n+1)$	2	Modificación de la conjetura
			2	Rechazo del contraejemplo
	Geo-Oli	$\sum \zeta n$	2	Excepción ( $P_3$ )
	Mar-Lau	$\sum \zeta n$	2	Excepción ( $P_{><}$ )
Ejemplo genérico	Oli-Sté	$\sum \zeta n$	2	Regreso a la definición
			2	Rechazo del contraejemplo
Experimento mental	Ber-Chr	$\frac{n(n-3)}{2}$	2	Rechazo del contraejemplo
Cálculo de los enunciados	Lio-Lau	$\frac{n(n-3)}{2}$	2	Modificación <i>ad hoc</i>
			2	Modificación de la conjetura

Tabla N° 14.

Estas conjeturas son el resultado de un proceso que ocupó toda la primera fase de la observación. Estas conjeturas fueron construidas, ya sea, deductivamente o como resultado de una interacción entre conjeturas sucesivas y sus refutaciones. La confrontación con los contraejemplos tiene lugar principalmente en la segunda fase de la observación. Estos contraejemplos son objetos producidos por el observador (configuración que esconde una diagonal, objeto no polígono, etc.).



Un primer tratamiento dominante es el rechazo del contraejemplo (de triángulo, o de  $P_5$  con puntos alineados, que exigía que se descubriera la diagonal escondida). Este tratamiento se basaba en un análisis de la refutación en relación con las concepciones de los estudiantes.

Otra forma de tratamiento dominante consiste en darle al contraejemplo un estatus de excepción o en introducir una condición. Una expresión de esta última forma consiste en apartar situaciones particulares (como fue el caso para Hamdi y Fabrice y para Lionel y Laurent).

Es entonces evidente que hay menos diversidad de tratamientos, que para el caso de la conjetura  $f(n) = \frac{n}{2}$ . Independientemente de los niveles de validación (que aparentemente no juegan un papel determinante), se puede pensar que la solidez de las concepciones subyacentes y la existencia de un dominio de validación de tamaño significativo, conducen a privilegiar un tratamiento específico: el apartar los contraejemplos eventuales, considerándolos como más o menos patológicos. Por otro lado, hemos notado que, en el caso de  $f(n) = \frac{n}{2}$ , la limitación a los polígonos pares está asociada a una situación de fuerte incertidumbre sobre la definición. Esta definición es cuestionada frecuentemente como consecuencia de las refutaciones.



## ACERCA DEL PROBLEMA DE LA DEFINICIÓN: REGRESO A “LOS POLÍGONOS”

### I. INTRODUCCIÓN

En el estudio que se acaba de presentar adoptamos, por razones teóricas (Capítulo II, § I.1), la posición de observar la resolución de un problema por los estudiantes, sin que ellos dispusieran de medios documentales. Se trataba particularmente de ubicarse en las mejores condiciones para un estudio de las tesis de Lakatos dentro el contexto de la resolución de problemas. Las numerosas soluciones constatadas del tipo  $f(n) = \frac{n}{2}$  al problema de la enumeración de las diagonales de un polígono hacen pensar, de manera natural, que, si los estudiantes hubiesen tenido a su disposición una definición de “polígono” y de “diagonal”, sus producciones habrían sido diferentes. En particular, es muy posible que las soluciones falsas no se hubiesen producido.

Varios binomios pertenecientes a nuestro primer experimento destacaron la cuestión de la definición de “polígono” y de “diagonal”. Analizamos a continuación la manera como estos estudiantes se aproximaron a esta problemática y la manera como esta problemática evolucionó a lo largo de la resolución del problema. En seguida, nos proponemos comparar estos comportamientos con los comportamientos que fueron observados en una nueva situación en la que se modificó el dispositivo inicial. Esta modificación consistió en poner a disposición de los estudiantes un documento que contenía (principalmente) las definiciones de polígono y de diagonal.

En este estudio no consideramos el problema fundamental de la definición en matemáticas “porque esto exigiría la producción de una exposición crítica del conjunto de la ciencia matemática, para lo que serían necesarios numerosos volúmenes, bajo el supuesto que uno pueda encontrar un autor que tenga las competencias suficientes para escribirlos” (Borel, 1948, p. 25). Tampoco consideraremos, en toda su generalidad, el problema de la definición en la enseñanza de las matemáticas, puesto que esta cuestión va más allá de los límites de nuestro trabajo. Nos restringiremos, dentro del contexto de nuestra aproximación experimental, a dos cuestiones: al problema de la enumeración de las diagonales de un polígono y al examen del papel de la definición o de una problemática de la definición tanto en el establecimiento de una conjetura, como en su eventual prueba. La emergencia de este tipo de problemática, su evolución y su contenido son fenómenos cuyo análisis hace parte de un estudio de los procesos de prueba.

Tomamos aquí la noción de definición en el sentido ingenuo, por oposición a una acepción formal en la que la definición es una abreviatura que permite un ahorro de palabras. Una definición será para nosotros aquí un discurso; esto es, un texto que busca aclarar y fijar el significado de una palabra. Este punto de vista es coherente con aquello que aparece de manera inmediata en los comportamientos observados en el primer experimento: los estudiantes regresan a la definición porque quieren resolver el problema del significado de una palabra. Es también coherente con la función de la definición en los estudiantes de matemáticas que ha sido destacada por Vinner (1976). Para la mayoría de ellos, una definición tiene un valor lexical. Ella explica, con palabras, el significado de otras palabras. Finalmente, este punto de vista es coherente con el uso práctico que los matemáticos hacen de la definición. Ella permite que dos interlocutores logren comprenderse apropiadamente. Es decir, que hablen acerca de la misma cosa (Borel, 1948).

## II. PRIMERA OBSERVACIÓN.

### LA GÉNESIS DE UNA PROBLEMÁTICA DE LA DEFINICIÓN

#### II.1. GÉNESIS DE UNA PROBLEMÁTICA DE LA DEFINICIÓN

##### II.1.1. Resumen

Seis de los trece binomios que fueron estudiados durante nuestro primer experimento no entraron en ningún momento en la problemática de la definición. Por otra parte, los estudiantes pertenecientes a otro grupo de seis binomios se enfrentaron desde un comienzo al problema de saber qué es un polígono y una diagonal. Finalmente, los otros dos binomios mencionaron tan sólo el problema de la definición sin entrar a considerarlo. Agrupamos estos dos binomios con los de la primera categoría con los que además comparten el hecho de defender una solución correcta.

##### II.1.2. Ausencia de una problemática de la definición

Los seis binomios que no se aproximan en ningún momento a la problemática de la definición y que, además, no hacen explícita una definición de “polígono” y de “diagonal” tienen en común el hecho de defender una solución correcta al problema propuesto (tabla N° 15).

Binomio	Conjetura	Tipo de prueba
Bertrand y Christophe	$\frac{n(n-3)}{2}$	Experimento mental
Georges y Olivier	$\sum \zeta n$	Ejemplo genérico

Tabla N° 15.

<b>Binomio</b>	<b>Conjetura</b>	<b>Tipo de prueba</b>
Laurent y Lionel	$\frac{n(n-3)}{2}$ (parte II)	Cálculo de los enunciados
Martine y Laura	$\sum \zeta n$	Ejemplo genérico
Nadine y Elisabeth	$f(n-1) + a(n)$	Experimento crucial
Pierre y Phillippe	$n.s(n)$	Empiricismo ingenuo

Tabla N° 15.

Hay que destacar que todos los tipos de prueba se encuentran representados. Por consiguiente, esa no es una razón que permita explicar la ausencia de una problemática de la definición. Vamos entonces a examinar las concepciones de polígono y de diagonal que fueron puestas en juego por los estudiantes.

Todos estos binomios comparten una concepción clásica de polígono y de diagonal, en lo que respecta a los polígonos convexos. Cuando se presenta un polígono cóncavo, algunos de ellos descartan la diagonal exterior, arreglando su solución con una condición de convexidad (Geo–Oli, Lau–Lio, Nad–Eli).

Es posible que en algunos binomios se haya dado una discusión sobre las concepciones y particularmente sobre la noción de diagonal. Pero esta discusión nunca llegó a considerar el problema de la expresión de una definición. Todo sucedió como si los estudiantes tuvieran concepciones suficientemente sólidas y compartidas como para que no fuera necesario hacerlas explícitas.

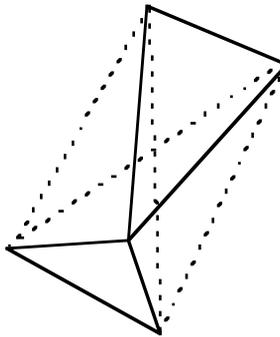
Un solo binomio, el de Hamdi y Fabrice, se aproximó al problema de la definición. Ellos defienden, con base en un experimento crucial, una solución “correcta”,  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$  (elaborada durante la segunda fase).

Este binomio había defendido inicialmente una conjetura particularmente frágil ( $f(n) = n^2$ ). Esta defensa estaba basada en una concepción combinatorial de polígono que no distinguía entre “lado” y “diagonal”. Al ser refutada por el cuadrado, y teniendo en cuenta la incertidumbre en el caso del triángulo, los estudiantes se hacen conscientes de las deficiencias de sus concepciones y culpan al contrato experimental: “él nos habría podido dar una definición” (Ham 228). No obstante, el problema de la definición no volverá a ser mencionado en el futuro. Los estudiantes logran salirse de esta situación apoyándose en una nueva concepción. Una vez que se han diferenciado “lado” y “diagonal” (“el lado no sirve dentro de la diagonal”, Fab 127), esta es una concepción clásica de polígono y diagonal. El tratamiento

□□ \*□\* □, □□□\* □□□\* □ + □□+ \*

56 ⇒ DCG7FE4:76 D?□A(□:ECL4F6DEZ C⇒D474 6A476 D21□:252D2 ⇒  
 IEF4:R? D6 D6G:LAZ 56D42C2C4ZE C26;6□A□ □AZ :?K6F4 :CF?2  
 4Z5: 4:R?

:?2=□6?E E(□3?:□□:□ 6=56 □=G6CI \*INA926 BF656□6?56? ⇒  
 4□ 6FC ∑ ξ. □6?4:Z □ 56D56 6=4□ :6?J□56 ⇒ 6IEF4:R? ⇒ 4F6D  
 ER? 56 D236CBFN6DF? A□8□ I 56DAF□ F?2 5:28Z = \*?: 6□328□  
 6=□ ?□6?E? C2=□6?E 6? ⇒ A□= 6□LE42 56 ⇒ 56□:4:R? 2F?BF62=□?2=  
 56 ⇒ D64F6?4:2 6=□ 7□□F⇒? 6=A□= 6□2 □ DIE □ D ?□D236□□ BFN6D  
 F? A□8□ 6DE?□G 2 7?4:Z □ \*IN \*6 K2E □LD3:6? F?2 :?5:  
 424:R?56 56D6A□24:R? 4F2?5□E6?6? BF64ZD :56C2C4Z 6FC2D4Z 42C4  
 E□□E42DA2ER8:42DBF66=□ BFD6C? 56D42C2C4□ □A□8□□ □8FC  
 □□ □□□6DF? A□8□ □ D 5□ ECL?8F=□ ] \*IN ? ⇒ D68F?52



□52□ A

72D ⇒ 56□:4:R? =6DA(□:ECL6IEC6C6DE DHF24:R? 6? ⇒ BF66=ED 6CC  
 5□A2G46E6?6C5Z =2=:36C25A2C2D6=644:Z G=□ 4 ZE C26;6□A□

□- 5,□□□□ . □□□□ ,02□ □ □ , □ E□□□□  
 \*6:D3:□ :□ 7□□F⇒□ 56D56 6=4□ :6?J□56 ⇒ 6IEF4:R? 6=A□= 6□2  
 ⇒ 4F6DER? 56 D236CBFN6DF? A□8□ I BFN6DF?2 5:28Z = D2 4F6D  
 ER? 56 ⇒ 56□:4:R? ;F8RF? A2A6=6D?4:2=E?H□6? ⇒ 6IEF4:R? 56=A□  
 3=□24 □ □ ?6 =A□ 65:□:6?E6 G2=524:R?

5:4:Z ⇒ □6?E 6D□ D6:D3:□ :□ =682? 2 ⇒ □:D□ 2 IEF4:R? =□  
 56□6?56? ⇒ 4□ 6FC AZ ⇒ □ A□8□ 4□ F? ?S□6□AZ56

GNE46DI 28G82? F?2 IEF4:R? 6DA6(□42 2 6DE 4□ 6FC AZ ⇒ □ A□8□  
 ?□ 4□ F? ?S□6□:□AZ56 GNE46D ? 6D6 42D□□3: N 92I F?2 8C? C  
 C6525 56 EA□ 56 C2=524:R? □□ ED E?E ?□ A□8□ FAZ6□□ 2  
 4ZE :?F24:R? A□6=2?L=DD56 ⇒D474 6A476 DI 56 IF 6DEFD□□ 6D□  
 3:□ :□ ⇒ A□8F?E ??:4:2=D6 K2?D□□2 6? F?2 C6G256C A□= 6□LE42  
 56 ⇒ 56□:4:R? DE6D 6=□ ?□IE2□6?E D6 7□□F⇒? ⇒ A□8F?E 56 ⇒

<b>Binomio</b>	<b>Conjetura</b>	<b>Tipo de prueba</b>
Antoine y Damien	$\frac{n}{2}$	Cálculo de los enunciados
Blandine e Isabelle	$\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$	Experimento mental
Evelyne y Christine	$\frac{n}{2}$ o $n$	Experimento mental
Lydie y Marie	$\frac{n}{2}$	Empiricismo ingenuo
Naima y Valérie	$\frac{n}{2}$	Empiricismo ingenuo
Pierre y Mathieu	$\frac{n}{2}$ o $n-2$	Empiricismo ingenuo

*Tabla N° 16.*

definición, sino que también se hacen preguntas más amplias acerca de su función. Esta problemática tiene lugar en el contexto de una serie de conflictos que los estudiantes no logran resolver.

*Conflicto entre las concepciones de “polígono” y de “diagonal”.* El análisis, por parte de algunos binomios, de la etimología de la palabra “polígono” los conduce a la concepción clásica (es decir, a aquella que es coherente con la definición habitual en matemáticas). Esta concepción entra en conflicto con una concepción de “diagonal” que es consecuencia del ejemplo prototípico del paralelogramo (del cuadrado o del rectángulo) en la que se atribuye a las diagonales la propiedad de cortarse en la mitad, o, al menos, de ser concurrentes (Ant–Dam, Pie–Mat, Bla–Isa).

*Conflicto de concepción entre los estudiantes.* (Lyd–Mar, Pie–Mat).

*Conflicto generado por una refutación.* Para salvar su conjetura, los estudiantes se ubican en el terreno de la definición y buscan caracterizar los objetos para los cuales ella es válida (Eve–Chr, Nai–Val).

El carácter dominante de esta problemática es reforzado en algunas ocasiones por una concepción global del papel de la definición en la actividad matemática y por la lectura del contrato experimental por parte de los estudiantes.

*La definición fija bases comunes para la resolución del problema.* “Tenemos que explicarles lo que es un polígono [...] porque para ellos un polígono podría ser esto ... heu ... yo no se qué” (Dam 275-277). “Primero habría que buscar qué es un polígono” (Pie 167). “La definición de un polígono nos es absolutamente necesaria” (Val 331). “Demos primero las definiciones” (Lyd 59). “No conocemos exactamente las definiciones, no ... podemos ha-

cer nada...” (Chr 866). “Si hubiéramos sabido la definición de diagonal y de polígono, no habríamos tenido necesidad de buscarla. Así habríamos podido encontrar más rápidamente la pregunta que nos hacen” (Eve 867). “Si uno hace algún cambio en la definición, eso cambia todo” (Chr 868).

*La situación se lee como un juego de la definición.* “La regla del juego dice que nosotros somos el profesor. Debemos decirles [al observador y otra persona que estaba presente durante la observación] ... que un polígono es lo que nosotros hemos propuesto y él [el observador] debe decidir si nuestra definición es válida” (Dam 509). Naïma le dice a Valérie: “Él no te la va a dar [la definición] ... tú tienes que tratar de encontrarla” (Naï 289-291). Para resolver las refutaciones propuestas por el observador, ellas agregan nuevas cláusulas a la definición o condiciones de definición. Cuando lo han hecho, ellos retan al observador: “Ahora usted no puede hacer nada, ¿ve?” (Val 440).

## II.2. Los tipos de definición y las concepciones

### II.2.1. Fundamentos endógenos y exógenos

El tipo de selección y de tratamiento de la información que los estudiantes hacen en algunos de sus desarrollos pueden dar alguna idea de las concepciones que ellos ponen en juego durante la resolución del problema. No obstante, solamente los binomios que entran en la problemática de la definición generan este tipo de desarrollo. Para los otros binomios, la concepción de polígono y de diagonal se hacen presentes *en acto* dentro de la resolución del problema. Se trata de una concepción clásica de polígono convexo. Para la concepción de la diagonal algunos binomios excluyen las diagonales “exteriores” a los polígonos cóncavos (propuestos como contraejemplo por el observador). Esto lo hacen de manera explícita, con una condición que los descarta, o buscando, para estos polígonos, una solución específica (Geo–Oli 623, Li–Lau 1031, Nad–Eli 102).

En los binomios en los que las definiciones son explícitas, éstas asumen un carácter de institucionalización. Ellas fijan el estatus de las concepciones con respecto a la resolución del problema. La búsqueda del contenido de la definición puede tener dos tipos de fundamento.

*Los fundamentos endógenos.* En este caso, los estudiantes tratan de hacer explícita una concepción de polígono y de diagonal relacionada principalmente con las exigencias de los fundamentos de la conjetura.

*Los fundamentos exógenos.* Los estudiantes buscan reconstruir referencias que son reconocidas ya sea culturalmente, o con respecto al saber escolar. Es la definición que se “debería” conocer.

Los principales descriptores de los fundamentos exógenos son el apoyo en la etimología (Ant–Dam 21, Eve–Chr 24, Pie–Mat 2) y el apoyo en el ejem-



plo prototípico (Ant–Dam 65 y 70, Bla–Isa 67, Eve–Chr 706, Naï–Val 10, Pie–Mat 15). En este último caso se busca consolidar la concepción de diagonal. El paralelogramo (y eventualmente el rectángulo o el cuadrado) es el ejemplo prototípico más frecuentemente utilizado.

El apoyo en la etimología debería conducir a una concepción clásica de polígono. De hecho, en la situación que observamos, esto no sucede. El prototipo de paralelogramo conduce, para la diagonal, a tener en cuenta la restricción: “Es necesario que ellas pasen por el punto medio. Por el mismo punto medio” (Ant 70). Esto promueve una concepción cuasi–regular y eventualmente regular: “Creíamos que esto hacía una especie de rueda, simplemente con los vértices” (Eve 847).

Aún si no se hace completamente explícito, los fundamentos endógenos muestran el predominio del modelo prototípico de paralelogramo: “Una recta ... que salga de un vértice ... y bien ... y que vaya a un vértice opuesto” (Lyd 30), “Vamos a tomar cada vértice ... y unirlo con el vértice que está enfrente” (Naï 21). Y, más adelante, “en general, se cortan en el punto de la mitad” (Val 65). “Es necesario que pasen siempre por el mismo lugar [las diagonales]” (Mat 15).

Tanto las concepciones, como las definiciones formuladas por los estudiantes no permanecen fijas después de su primera formulación. Concepciones y definiciones evolucionan a lo largo de la resolución del problema como consecuencia principalmente de dos tipos de presiones. La que es producto de los conflictos de concepciones entre compañeros y la que es consecuencia de las refutaciones que ellos tienen que enfrentar en ambas fases. Ya hemos discutido este tipo de tratamiento de las refutaciones por medio del “regreso a la definición” (Capítulo II, § III.2.7). Aquí vamos a analizar tres casos especialmente representativos de la manera como, en el contexto de la problemática de la definición, evolucionan algunos de los estudiantes que hemos observado. Destacaremos principalmente la forma como sus decisiones dependen de la identificación de un modelo de polígono que sea aceptado por fuera del contexto de la pareja.

### *II.2.2. Un conflicto de concepciones entre compañeros (Pierre y Mathieu)*

La inquietud acerca de saber qué es un polígono aparece desde el comienzo de la resolución del problema. Pierre menciona una referencia etimológica. Esto hace pensar en una concepción clásica: “una cara que tiene varios lados. Gono: lados, Poli: varios” (Pie 2). En seguida, Pierre dibuja un polígono cóncavo cualquiera (figura N° 59). “Una cara que tiene varios lados ... esto puede ser en cualquier dirección” (Pie 4). De hecho, la concepción muy fuerte que Pierre tiene de diagonal limita considerablemente el dominio de los objetos considerados. Para él, “diagonal” es sinónimo de “oblicuo”. El utiliza un significado bastante común e inclusive reconocido (“*En diagonal*. Atravesar una calle en diagonal: sesgadamente, oblicuamente”).

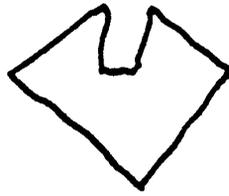


Figura N° 59.

Este es el segundo significado de diagonal presentado por el diccionario Robert, 1977).

Mathieu no asume una posición acerca de la concepción de polígono propuesta por Pierre. Sin embargo, él se restringe al tratamiento de polígono convexos regulares. Su concepción de diagonal para este problema es, al mismo tiempo, la de diámetro y la de eje de simetría. “Tiene que pasar siempre por el mismo lugar” (Mat 15) y “Que los dos lados puedan ponerse uno encima del otro” (Mat 20).

Pierre identifica que una de las dificultades para la resolución común del problema radica en las diferentes concepciones que ellos tienen: “Es casi la misma [idea] excepto que las diagonales no son la misma cosa” (Pie 77).

Mathieu, basado en su concepción de diagonal que tiene en cuenta los ejes de simetría, enumera tantas diagonales como vértices para los polígonos regulares  $P_4$ ,  $P_6$  y  $P_8$  (figura N° 60).

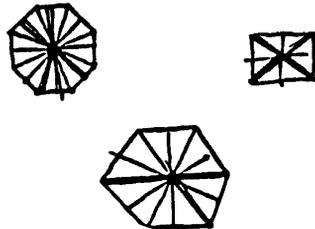


Figura N° 60.

Siguiendo su propia concepción, Pierre rechaza estas configuraciones. Es decir, él rechaza las rectas verticales y horizontales. Ante esta propuesta, Mathieu revisa su conteo, lo descarta y se sitúa en el contexto del prototipo de cuadrado que tiene únicamente dos diagonales.

En este momento de conflicto se formula el problema de la definición: “Yo creo que lo que quiere decir diagonal es que une dos puntos opuestos” (Pie 111). Pero la concepción de Pierre es aún más fuerte. El afirma, al mismo tiempo que dibuja una línea vertical por fuera de todo polígono: “pero

esto no es una diagonal” (Pie 119). Mathieu se queja entonces de que eso no tiene sentido. Al dibujar una representación de  $P_5$ : “Todas son diagonales” (Mat 128), dice, al notar que la verticalidad no se conserva si uno mueve la hoja (figura N° 61). Pierre no está de acuerdo: “No, esto [...] esto será siem-

esto no es una diagonal

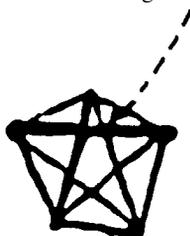


Figura N° 61.

pre una línea recta ... puedes ponerlas en todos los sentidos ... pero no me podrás decir que esto es una diagonal” (Pie 129). En este momento él ha cambiado el significado que le da “diagonal”. Su significado ha pasado de “oblicua” a “no paralela a un lado de la figura”. De esta forma,  $P_5$  continúa siendo un contraejemplo para la conjetura defendida por este binomio

$f(n) = \frac{n}{2}$ . Pierre propone entonces extender el concepto de diagonal para

que incluya las semidiagonales. Mathieu protesta: “Porque tú quieres encontrarte con una semidiagonal” (Mat 147). Pierre confirma su intención y da a la definición su estatus lógico (al fijar un significado relativo a una problemática): “Exactamente, no hay ninguna razón. Es mi derecho” (Pie 152).

En este momento de la resolución del problema, el conflicto de concepciones entre los estudiantes está claramente abierto. La decisión acerca de una definición será un medio aceptado para resolverlo: “Pero tendríamos primero que buscar qué es un polígono” (Pie 167). Los estudiantes llegan inclusive a pensar en descartar  $P_5$  (motivo principal de su conflicto). Mathieu mencionó esta posibilidad: “de pronto, eso no existe, una cosa de 5” (Mat 135).

Al volver a considerar la configuración  $P_5$ , Pierre constata que, si él mantiene su criterio de definición (es decir, el rechazo de las diagonales que son paralelas a un lado de la figura): “en ese caso todo el mundo es un línea recta” (Pie 276). En este momento renuncia a la concepción que ha tenido hasta ahora. Sin dar más explicaciones, adopta la concepción de Mathieu, defendiendo la conjetura  $f(n) = n$ .

Ninguno de los dos estudiantes percibe que haya contradicción entre el significado aceptado de diagonal para  $P_5$  y el significado de “eje de simetría” que Mathieu ha defendido hasta ahora.

Al haber resuelto localmente el conflicto, el problema de la definición no será mencionado cuando se enfrenten a las nuevas refutaciones. Pierre y Mathieu modificarán o rechazarán la conjetura (ver § II.2.1 y III.3).

### *II.2.3. La búsqueda de la buena definición (Evelyne y Christine)*

Evelyne y Christine se formulan de inmediato la pregunta: “¿Qué es un polígono? ¿Tú sabes? ...” (Eve 21). Enseguida, buscan al observador. Su aproximación etimológica genera una concepción clásica de polígono. Sin embargo, ellas adoptan una concepción de diagonal como “diámetro y eje de simetría”. Esta concepción limita la búsqueda a los polígonos regulares pares. La concepción que ellas defienden es  $f(n) = \frac{n}{2}$ . No obstante, hay

una gran incertidumbre: “Tenemos que estar seguras que lo que estamos dibujando son diagonales” (Eve 107). Por consiguiente, el propósito es el de encontrar la “buena definición” de polígono y de diagonal.

El paralelogramo es la referencia dominante. A esto hay que agregar el requisito de que un polígono tenga diagonales. De esta forma se rechaza el triángulo: “un número de vértices que sea par, porque el triángulo no tiene diagonales” (Chr 113). Además, la restricción: “los lados son paralelos dos a dos” (Chr 168), descarta los polígonos impares. Y estos son los contraejemplos importantes a su conjetura: “Porque, mira, cuando tiene 7 lados, bueno, habrá siempre uno que será paralelo ... a otro ... porque estará enfrente” (Chr 168, después) y “Por consiguiente, se necesita que sea par” (Eve 200).

Las estudiantes son conscientes que tienen dificultades: “Si al menos supiéramos qué es una diagonal y un polígono” (Chr 203). Las decisiones que ellas tomaron tenían como propósito asegurar la coherencia del sistema conjetura–concepción, al apoyarse en una definición adaptada y plausible. Pero, cuando el observador les propone el contraejemplo  $P_5$ , Evelyne y Christine cuestionan inmediatamente sus concepciones: “Bueno, yo pienso que un polígono ... eso no importa cuántos vértices tenga” (Chr 251) pero cuasiregulares: “Se necesita que los lados sean iguales, ¿no?” (Eve 265). Para efectos de conservar una coherencia con las diagonales de los polígonos pares que se han considerado hasta ahora, el concepto de diagonal va a ser estirado (en el sentido de Lakatos, 1976, p. 126): “Se necesita que la diagonal salga de un vértice y vaya derecho delante de ella ... que ella parta el ángulo ... la figura en dos” (Eve 390-393). Para los polígonos impares, su conjetura se convierte en  $f(n) = n$ . Los triángulos y los trapecios se descartan puesto que no son necesariamente regulares (Chr 457-458).

Las estudiantes se ponen de acuerdo acerca de su solución porque “partimos del principio que un polígono es una figura geométrica que puede tener cualquier número de vértices, pero en la que los lados deben ser iguales” (Chr 568) “y en el momento que son iguales, él es regular” (Eve 570).

Pero aun en este momento, ellas son conscientes de que su definición es incierta: “Bueno, tendríamos que saber qué es ... un polígono ... una diagonal. Exactamente la definición” (Chr 696). En cierta medida, ellas consideran que los contraejemplos propuestos por el observador no son legítimos y los manejan como pueden “a partir de la definición que tenemos” (Chr 698).

Christine y Evelyne consideran que, para resolver un problema de matemáticas, es necesario conocer la definición. La búsqueda de una definición está guiada por la necesidad de fundamentar la conjetura. Ellas intentan construir un significado de polígono y diagonal que esté acorde con el saber aceptado: “Las diagonales están hechas para encontrar el centro de la figura” (Chr 722).

#### II.2.4. El juego de la definición (Naïma y Valérie)

Las estudiantes se aproximan al problema partiendo del ejemplo prototípico del hexágono: “Un polígono tiene 6 lados” (Naï 10). Ellas tiene dificultades para dibujar las diagonales que deben unir un vértice con el “vértice de enfrente” (Naï 21). Ellas descubren la configuración de la figura N° 62. Esta dificultad se acentúa cuando tienen en cuenta la restricción pro-

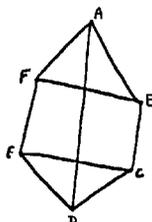


Figura N° 62.

totípica del paralelogramo (que es reforzada por el caso del cuadrado): “Sí, pero en general se deben cortar en el punto de la mitad” (Val 65), “[en un cuadrado] eso se corta en un punto” (Val 71). Se menciona y se explora la concepción clásica de diagonal: “Sí, es posible que las rectas deban salir de un vértice” (Val 75). Sin embargo, esta concepción genera en  $P_6$  una figura compleja que hace reír a las estudiantes. Las diagonales son demasiado numerosas. A partir de este punto, la concepción será aquella de diagonal-diámetro.

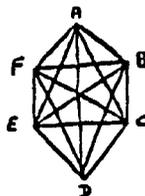


Figura N° 63.

Ellas proponen entonces un mensaje en el que se explica cómo se dibujan las diagonales de un polígono, pero que no da indicaciones para su cálculo. El observador les hace caer en la cuenta de este punto. Ellas regresan a la resolución del problema, pero continúan teniendo dudas con respecto al significado de diagonal. Una manera de resolver su indeterminación consiste en inscribir las diagonales dentro de cuadriláteros (“cuadrados”, Naï 208), como el cuadrilátero “1-2-5-6” representado en la figura N° 64.

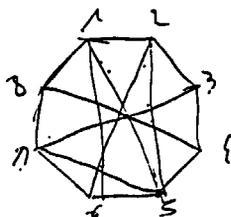


Figura N° 64.

Naïma y Valérie defienden la conjetura  $f(n) = \frac{n}{2}$ . Sin embargo, ellas descubren de inmediato la refutación por  $P_5$ . Valérie sugiere que “no es un polígono” (Val 256). Pero Naïma protesta: “quién te dice que no es un polígono” (Naï 257). Las estudiantes no resuelven sus diferencias y se dirigen al observador. Es en este momento en el que aparece una problemática de la definición como medio para resolver la dificultad. La situación se convierte en un juego de adivinanza: “Habría tal vez que conocer la definición de polígono” (Val 285), pero “él no te la va a dar [...] debes intentar encontrarla” (Naï 289-291).

Una referencia a la etimología: “Poli quiere decir varios y Gono quiere decir vértices: varios vértices” (Naï 298) les impide satisfacer la tentación de rechazar los polígonos impares: “Si de pronto esto no fuera [uno]” (Val 374 con respecto a  $P_7$ ).

La primera idea que ellas tienen para asegurar la validez de la conjetura consiste en agregar una condición: “esto no funciona sino para los polígonos que tienen un número par de vértices” (prot. p. 13). Pero, como ellas reconocen que deben encontrar una solución para todos los polígonos: “hay que encontrar algo para todos los polígonos” (Naï 353), esta situación se resuelve con una definición de polígono que se restringe al dominio de validez de la conjetura. Esta conducta será mantenida a continuación, al enfrentar cada uno de los contraejemplos producidos por el observador (figura N° 65). De hecho, esta lectura del contrato experimental (se debe adivinar la definición) se hace a la luz de una concepción global de lo que puede ser la solución de un problema matemático: un enunciado verdadero para un dominio de vali-

dez que no tiene ninguna restricción, todos los objetos del universo en cuestión son aceptados.

Para hallar el número de diagonales en un polígono basta con dividir el número de vértices por dos.

Polígono que tiene 6 vértices:

$6:2=3$  diagonales

ejemplo



Polígono que tiene 8 vértices

$8:2=4$  diagonales



Los polígonos son figuras que tienen un número par de vértices.

- \* Que tienen todos sus lados de la misma longitud.
- \* Sus lados se deben disponer en círculo.
- \* De un vértice sólo sale una recta.

*Figura N° 65.*

### II.3. Conclusión

La aparición de una problemática de la definición parece estar más relacionada con la solidez de las concepciones de los estudiantes, que con la naturaleza de los fundamentos racionales de la resolución del problema. Es por ello que, al apoyarse en concepciones de polígono y diagonal reconocidas como clásicas, la mitad de los estudiantes no considerará la cuestión de la definición. Por el contrario, todos aquellos que se apoyan en una concepción “frágil” de diagonal–diámetro (asociada o no a un polígono regular) enfrentarán el problema de la definición. Esto es una consecuencia de un conflicto de concepción entre los estudiantes o de refutaciones fuertes (de

$$f(n) = \frac{n}{2} \text{ para los polígonos impares.}$$

Esta problemática se desarrolla dentro de un sistema de restricciones a saber: las concepciones de los estudiantes, la conjetura en cuestión y la existencia de un saber o de prácticas matemáticas de referencia.

El origen dominante de una u otra de estas restricciones se escapa al análisis que pudimos hacer. Se puede formular la hipótesis de un principio de mínimo riesgo que conduce a privilegiar la restricción menos amenazada: necesidad de una concepción común en el caso de Pierre y Mathieu; reten-

ción de la conjetura en el caso de Naïma y Valérie; y acuerdo con un saber de referencia en el caso de Evelyne y Christine.

Pero más allá de lo que parece ser una misma problemática de la definición, nosotros observamos que las situaciones pueden ser muy diferentes. Lydie y Marie se enfrentan a un problema de concepción. Pero, al contrario de lo que sucede con Pierre y Mathieu, ellas no logran llegar a un consenso, aún cuando el problema se encuentra claramente formulado: “Las diagonales de ella no son las mismas que las mías. Entonces hay un problema” (Mat 325). Los binomios de Blandine e Isabel y de Evelyne y Christine formulan la pregunta de saber qué es un polígono, pero resuelven este problema gracias a una extensión *ad hoc* del concepto de diagonal que les permite retener la conjetura, adaptándola a los polígonos impares (De cada vértice sale únicamente una diagonal que termina en el vértice opuesto en el sentido de una simetría. Los polígonos impares tienen un vértice que no tiene opuesto. Las estudiantes no se dan cuenta que lo anterior es válido únicamente en el caso de la figura que han examinado).

### **III. SEGUNDA OBSERVACIÓN. LA UTILIZACIÓN DE UNA INFORMACIÓN DE REFERENCIA**

El estudio que vamos a presentar a continuación fue realizado por un equipo de investigadores en educación matemática (C. Laborde, M. Guillerault, M. Dupraz) y de lingüistas (R. Bouchard, J. Lachcar) que colaboraron en un proyecto de investigación acerca de la lectura de los textos matemáticos. Este proyecto se realizó dentro del marco de una “Acción temática programada” del CNRS. El objetivo general del proyecto era el de “distinguir las especificidades de los textos escritos y orales que son consecuencia del contenido matemático e identificar los problemas que surgen en la transferencia y adquisición de los conocimientos matemáticos en una situación escolar o universitaria”.

Dentro de este contexto, nosotros nos interesamos en el papel del texto en una actividad de resolución de problemas.

#### **III.1. LA CONSTRUCCIÓN DE UN TEXTO DE REFERENCIA**

##### *III.1.1. La elección de una definición de “polígono” y de “diagonal”*

Antes de proceder a la construcción del texto, investigamos en varios libros de texto escolares (de sexto, quinto y cuarto) las definiciones de polígono y de diagonal que podrían ser propuestas a los estudiantes. Pudimos constatar, aún a partir de una documentación limitada, que existe una gran hetero-



) □□□□ □ □ b□ ) ) \*□ □□\* □□□ □□□\*

86?6:525 6? 6D2D 56□:4:76 D I 6? DF A6D6?E4:R? 246□□ 2  
4ZE :?F24:R?F?2 A6D6?E4:R?86 ?6C=56 2 -8F?□ 56 6 D□ E6HE

6=642G6 5 □ 2E92?□

, ?2 -Q62 A□8Z =6DF?2 DF46DR?56 D68□6?H□ 4ZD 64FEC□ 56=  
A2?□0 10 □ 0 □□  
, ?2=Q62A□:8Z =46C252D6=2□2A□(8Z) □  
, ?D68□6?HEF6 F?6 5□ GNE46D?H □D 64FEC□ 6 DF?2 5: 28Z =

+9:CEH 5□ 28?2G□

□ ?DZAF?E □ 56 =A-2?□ ∅ . ≥  
?□ 6DL? 2=?625□ -□:□□BF6 □ ?

? ?  
=A□8Z□ □ ? 6D6=4□:F?E□ 1U 1U□ U  
? 10 □  
F2?5□ F? A□8Z□ ?□ 6DL 4CFJ25□ ⇒ A223C A□8Z□ 56D8?2  
E□3:ℕ ⇒ DFA□4:6 =□:E52 A□0 1U 1U□ U ? 1

\*F49I □6= 5 +649?:BF6 E-F-82CDEZ□

□ Q62A□:8Z = □ Q62BF63C252

\*6 ⇒2□2 -Q62 A□8Z = □ -Q62 BF6C252 2 H□ DF46DR? 56 D68  
□6?H□ E=BF65□ D68□6?H□ 4ZD 64FEC□ E?82? F? 6HE□□4□  
□S?I?E 6?82?6 =□ :□□ □□ H□ □

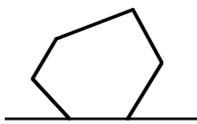
□□8Z□

\*6=2□2A□(8Z) H□ =Q62A□:8Z =4 6C252  
□□ 6HE?DR? E□3:ℕ D6 ⇒2□2 A□8Z□ 2 ⇒ A□4:R?56=A2?□BF6  
D6 ?4F6?E256 =□:E52A□F?2 =Q62A□:8Z =□ □

\*6 ⇒2□2 5:28Z =56 F? A□8Z□ 2 H□ D68□6?H□(64HE)BF6F?6 5□  
GNE46D?H □D 64FEC□

8?25□ 5□ 2 2AH6=□

□□BF□□ □A6D6?E F?2 -Q62 BF6C252I 46C252  
D=6F?:R?56=□ D68□6?H□ 0 10 10 10 10 11 0 1  
□256 D8?2□□ A□□



□52□ A

□□ -Q62 □6DE=BF65□ D68□6?H□ 4ZD 64FEC□ E6?6? IE2□6?E  
F? AF?E6? 4□ S? I 5□ D68□6?H□ ?□4ZD 64FEC□ ?□E6?6? AF?

tos en común.

Los puntos que no se encuentran en  $L$  se reparten en dos subconjuntos del plano  $E_1$  y  $E_2$ . Estos subconjuntos tienen a  $L$  como frontera común. La unión de  $E_1$  y  $L$  se llama polígono.

Los puntos  $A, B, C, D, E$ , y  $F$  son los vértices del polígono.

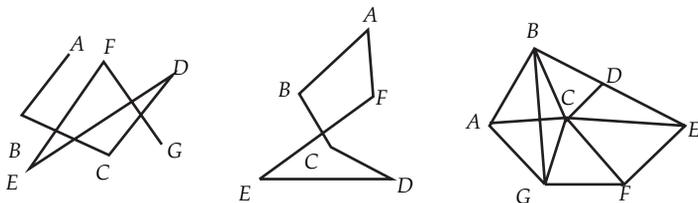
Los segmentos  $[AB], [BC], [CD], [DE], [EF]$  y  $[FA]$  son los lados del polígono. Hay tantos lados como vértices.

Todo segmento recto que une dos vértices no consecutivos es una diagonal del polígono: por ejemplo,  $[AC]$  es una diagonal. [...]

Anotación 1) en algunas ocasiones se llama polígono a la línea quebrada cerrada que constituye la frontera del polígono.

(Deledicq et Lassave, Ed. CEDIC, 6°, 1981)

Definición: "dos segmentos son adyacentes" significa que un extremo de uno es también el extremo del otro y su intersección se reduce al extremo común.



Línea quebrada abierta

Línea quebrada cerrada =

polígono

Figura N° 67.

Definición: el conjunto constituido por la sucesión de segmentos adyacentes es una línea quebrada. Una línea quebrada puede ser abierta o cerrada. Una línea quebrada cerrada es un polígono. [...]

Definición: en el polígono ABCDEFG que se muestra en la figura N° 67:

- $[AB]$  es un lado (hay 7)
- $D$  es un vértice
- $B$  y  $C$  son dos vértices consecutivos
- $[DF]$  es una diagonal,  $[BD]$  también lo es.

Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos.

Las diferencias entre estos textos se sitúan en varios niveles.

*La naturaleza de los conceptos en cuestión.* Un polígono puede ser una región del plano (Agnado) o el borde de esta región. En el segundo caso, se trata ya sea de una línea quebrada cerrada (Bellecave, Deledicq), o de la unión de segmentos que satisfacen ciertas propiedades (Thirioux). La noción de diagonal no se presenta de manera sistemática junto con la noción de polígono. Esto se debe probablemente a que algunas de estas lecciones

no son preliminares para el estudio de polígonos particulares, principalmente el paralelogramo. Cuando se define la palabra diagonal, se trata siempre de un segmento que une dos vértices no consecutivos.

*El lenguaje.* En efecto, estos textos utilizan en proporciones diferentes el lenguaje simbólico y el lenguaje natural. De hecho, pudimos constatar que el lenguaje natural es claramente dominante (con excepción, por ejemplo, de la obra de Thirioux presentada anteriormente). Las representaciones gráficas de los polígonos se utilizan ya sea como ilustración de la definición o como elementos de su formulación (Bellecave, Agnado). En este último caso, los polígonos representados tienen el estatus de ejemplos prototípicos. Algunos textos recurren a las representaciones gráficas con los dos tipos de utilización (Deledicq).

*El co-texto.* Esto se refiere al conjunto de elementos de tipografía y de diagramación: negritas, itálicas, texto subrayado, cuadros, etc.

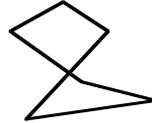
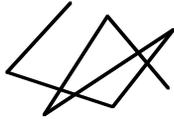
Después de examinar algunos libros de texto escolares, decidimos concebir un texto que no se limitara a las definiciones de polígono y de diagonal. De-seábamos que esta información se encontrara junto con otras, en particular aquellas que se refieren a los diferentes tipos de polígono (convexo, cóncavo, cruzado), dado que los estudiantes observados en el primer experimento se formularon preguntas con respecto a estos polígonos. Por otra parte, buscamos construir un texto que no le diera a los estudiantes la sensación de ser particularmente original. De alguna manera, un texto que representara lo que nos aparecía como un modelo dominante. Determinamos los siguientes principios:

- definir un polígono como una línea quebrada cerrada;
- caracterizar la diagonal a partir del hecho de que es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono;
- caracterizar los polígonos convexos, cóncavos y cruzados;
- dar una definición de vértice que permita resolver el problema de la naturaleza de la intersección de dos lados de un polígono cruzado por fuera de sus puntos extremos;
- poner en el texto información adicional a aquella que es útil para la resolución del problema;
- privilegiar el lenguaje natural;
- utilizar las representaciones gráficas tanto para efectos de ilustración como para presentar ejemplos prototípicos.

□□ □

4 □ F?H □ D EF:5A□ F?2 DF46DR?56D68□6?H□ 2 5I246?E6D DF? 2  
=Q62BF63C252

, ?2=O62BF63C252AF656D6C 3:6C□□ 6C252□ □6 ;6□A□

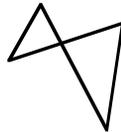


□□□□D6=2□2A□□□□ F?2 =O62BF63C2524 6C252

□□ A□□□ BF6D64 □E?6 ?AF?H□ BF6?□ □6 H□□□D6=2□2?

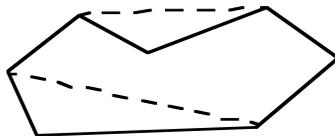
A□□□ 4 □FJ25□ □BF□ \* 65: DE?8F6?E2□3:N=□ A□□□ 4 □G6H□

□BF□ I= □ A□□□ ?□ □ G6H□ □BF□



□□D68□6?H□ BF64 □D EF16?F?A□ □□ 6=2□2?=25□ =AF?H□ H□□□  
BF6 □ □ S?2 5□ =25□ 2 5I246?E6D6=2□2GNE46

□□?□ 3□□?A □□□ 6=652 ? □ 3□62 4 252F?□ DF□GNE46D F2?5□ 6  
?□ 3□ 4□ =2 DF46DR?56 ?□ 3□6D56 DF□GNE46D6?F□6C25□ 6? 6=□56? 6? BF6  
D□64□□?□ □6 ;6□A□ =D:8F:6?E6 D□ =A□□□ □BF□



:8

?6 D□A□□□ 16 DF?= 25□ 6 DF?GN□E46I I D□□ GNE46D  
4□□ 64FE□□

□□□□ \*6 =2□2 5:28□ =2 F? D68□6?H□BF6F?6 5□ GNE46D?□4□□ 64FE□□

□□6 ;6□A□ ?6 =A□□□ 6 =D68□6?H□ 16 DF?2 5: 28□ =  
IO IE2□3:N?

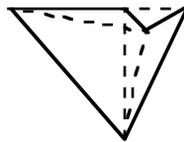
?F?A□ □□BF6 ?□ 624 □FJ25□ 692 3=256 =□L?8F=□ ? 56 =A□□□  
D□L?8F=□ D□2=6?E□ :6?E2□BF66 =L?8F=□ ? 56 =A□□□ D□ ?E2?E  
2IBF62 ?E2□BF66 ?F?A □□□ □ G6HE□□ =□L?8F=□ D□ 2=6?E□D

) □□□□ □ □ □ □ ) \*□ □□\* □□□ □□□\*

? ⇒ A18:22 2?E6C□ 96□□ A6D6?E25□6=EHHEIBF6G524E□□ 6 29□2  
6? 256=2?E6=□:56?E□42C□□ 4□ □6=+6HEI 2I BF62?E2CBF6 6? 6=+6H  
E□ ⇒D56□?:4:Z6 DAC?4:A2=6D AE8□□ 5:28□□ = D6 56D242? FE⇒J2?5□6=  
E□?:?□□6□?:4:R?] 6? ?68C2D AX2: ?K6F4 :G2D □□ E□□ E□□?:?□ BF6  
D6 56□6? D6 :56?E□42? S?:42□6?E6 A□ 6=9649□56 6D2CF3Q2I5□ \*6  
8F:□□ 2BF□?2 AC4E42 BF66D4□ S? 6? -D ⇒3□□ 56 EHHEI6DHE2C6D 6  
9649□ 5636□□ C64□52CBF6D6 K2E2 6? 6D6 42D□ 4F2□E 56 C64□52C⇒D  
56□?:4:Z6 D

□ 30E□47□ 70□□□ □4□8 3 505□34□ .02 □4□□

=5:DAD:EC□6HA6□6?E2=AX2 6D6 6DF5:□E6?6 ⇒D□:ID2D42C4E6CDE  
42D 86?6C2=6D 56 2BF6= BF6 7F6 FE⇒J25□ 6? 6= 6DF5:□ A64656?E6  
2A□E=□ U □□ S?:42 5:76G?4:2 C2:42 6? BF6 6? 6D2 ?F6C□□E  
⇒525 6=+6HEIBF624232□□ 56 A6D6?E2C7F6 AF6□□ 2 5:DAD:4:R? 56 -D  
6DF5:2?E6D D6 +6HEID6 6?K68R D? 4□ 6?E2C□ AX24F=2C6D ;F?E□4□  
6=6?F?4:25□56=A6E= 6□2 6? ⇒D□:ID2D4Z6: 4:Z6 D56=A□□6C6HA6  
□6?E□ □□ ED 6C24:R? 6DF□□4□ AF6□ 56 5□ 72D6 =ED 6C25□ :?E6C  
C6?Q 6? ⇒ D68F?52 72D6 A6D6?E2?5□ 4ZE C26;6□A6 □□ AFHE□ 56  
24F6C□AX2 A6D6?E2C2 -D 6DF5:2?E6D6=42D□56=KCL?8F=□ 56=A6H8□□  
4Z6N C646D2=?625□ □BF□□ □ I56 F?4 F25C=HE6□ □FJ25□



□□2□ A

? -□BF66DA64E 2=2?L⇒DD2 A□□: 56=42□A□4Z4 6AE2=I 56 -D A□ 6  
5=:6?E□ AD:3=6D6?G2□□ 2=-64H□ 2=42A□E=□A64656?E6 2A□E=□  
U I □ 6D2 ?F6C□□E ⇒525 ?□E□□ 6DA□□32□□ BF66=  
+6HEI:□A5:6C2 ⇒ FE⇒J24:R? 56 4Z4 6A4Z6 D56=EA□□A68□□C 68F=2Q  
I □:28□□ ⇒5: I□6□□ I BF6 A□4ZD :8F:6?E6 56D2AX64:6C? ⇒DIEF4:□  
?6D □. BF67F6□□ ED 6C252D6? 6=□2C□56 ⇒ A□□6C□□E ⇒525

D□:ID□ 6=+6HEI5636C□ 4Z6F4 :C2 -D 6DF5:2?E6D2 246AEC⇒D5:28□□  
=6D6HEC□□DI 2 E6?6C6? 4F6?E2 -D AE8□□ 4R?42□□ □4CFJ25□ □6?DL  
32□□ BF6 -D 6DF5:2?E6D 7□□F=2C□? 6= A6E= 6□2 56 ⇒ C2=56J 56 DF  
IEF4:R? AX2 F? F?:C6□□56 AE8□□ □2D4□ A6;□ 4Z C6H□ 4R?42□□  
4CFJ25□ IBF6 ⇒DE:AD56 AC632D6C□?56 F??: C6=□ ID6 =C25□

□□ ED 6C24:R? D6 C62=JR6? 6=4E68:□56 □6?4 6? ;F?:□56 4□  
-D 6DF5:2?E6D56 F?2 4⇒D6 56 4F2□E □□6D6?E□□ 2 4ZE :?F24:R? ⇒ =D2

de los binomios observados, junto con el nombre del miembro de nuestro equipo que hizo la observación propiamente dicha.

<b>Binomio</b>	<b>Observador</b>
Béatrice y Sylvie	Claire Margolinas
Bénédicte y Sandra	Mireille Dupraz
Cécile y Emmanuelle	Jean-François Bonneville
Loïc y Marc	Maria Paulo
Mabouba y Sihem	Nicolas Balacheff
Rémi y Christophe	Michel Guillerault
Sandrine y Carine	Maria Paulo
Stéphanie y Julie	Mireille Dupraz

*Tabla N° 17.*

La observación se realizó en dos etapas. Para las dos etapas los estudiantes se reunieron en un mismo salón de clase. En algunas ocasiones, esta situación tuvo como efecto la creación de una “emulación” que se expresó en comentarios de los estudiantes que se preguntaban si sus compañeros ya habían encontrado una solución o que informaban con curiosidad que ellos “ya” habían terminado. No hemos realizado un análisis fino de estos comentarios y comportamientos en la medida en que ellos no parecen haber jugado un papel determinante con relación a los fenómenos estudiados.

## **III.2. La resolución del problema**

### *III.2.1. Las soluciones, sus fundamentos y sus formulaciones*

#### *a) Los datos generales*

La tabla N° 18 presenta las soluciones producidas por los 11 binomios observados. Presentamos tanto las soluciones que se encontraron en la primera parte, como las obtenidas en la segunda parte como consecuencia de la interacción con el observador.

<b>Binomio</b>	<b>Primera parte</b>	<b>Segunda parte</b>
Isabelle y Juliette	$\frac{n(n-3)}{2}$	
Bénédicte y Sandra	$\frac{n \cdot s(n)}{2}$	

*Tabla N° 18.*

<b>Binomio</b>	<b>Primera parte</b>	<b>Segunda parte</b>
Laurence y Anne-Laure	$n(n-3)$	
Mabouba y Sihem	$n$ o $n \cdot s(n)$	
Cécile y Emmanuelle	$f(n+1) = f(n) + a(n+1)$	
Stéphanie y Julie	$2n$	$f(n+1) = f(n) + a(n+1)$
Rémi y Christophe	$\sum \zeta n$	
Loïc y Marc	$(n+3) + (n-3) + (n+4) +$ $(n-4) + (n-p) + (n-p) + \dots$	Solución de la primera parte o $\sum \zeta n$
Christophe y Olivier	$n(n-1)$	El número de lados opuestos
Béatrice y Sylvie		
Sandrine y Carine		

Tabla N° 18.

En esta tabla se destacan dos hechos.

Por una parte, las soluciones del tipo  $f(n) = \frac{n}{2}$  desaparecen. Estas soluciones fueron numerosas en el primer experimento, al estar relacionadas con la concepción polígono–regular o diagonal–diámetro. Aquí se ve la marca de la nueva modalidad experimental. La definición de diagonal, al hacer referencia al carácter consecutivo de los vértices, descarta la concepción diagonal–diámetro. En cuanto a la noción de polígono, los ejemplos presentados impiden una reducción a los polígonos regulares o convexos.

Por otra parte, hay dos binomios que no logran producir una solución, reconociendo su incapacidad. En el caso de Béatrice y Sylvie, este fracaso se relaciona con la exigencia, reconocida por ellas, de dar una fórmula:

“[resolver] de una manera general es difícil” (Béa 243)

“... porque eso cambia cada vez” (Syl 244)

“no hay ningún punto de referencia ... cada vez es diferente ... a veces es menos, a veces es más, a veces es lo mismo. En fin, nunca es lo mismo” (Béa 250)

“porque cada vez el número aumenta, el número de diagonales aumenta” (Syl 257)

“sí, pero con intervalos regulares” (Béa 258)

Sandrine y Carine tampoco logran encontrar una fórmula que convenga al conjunto de polígonos: “no logré encontrar una solución porque el método  $X \times 2 + 2$  no funciona con los polígonos que tienen más de 9 vértices” (mensaje).

En el caso de los otros binomios, no hay hechos notables. Las soluciones propuestas son del mismo tipo de aquellas observadas durante el primer experimento. Para aquellos binomios que produjeron una solución, la tabla N° 19 muestra los tipos de validación identificados a lo largo de la primera parte del experimento tanto para la solución final, como para soluciones intermedias.

	<b>Empiricismo ingenuo</b>	<b>Experimento crucial</b>	<b>Ejemplo genérico</b>
Sté-Jul	$2n$		
Rém-Chr	$\zeta n$		
Loi-Mar	$\frac{n}{2}$ o $n - 1$ $\zeta n$		
Chr-Oli	$n(n - 1)$		
Ben-San	$\frac{n \cdot s(n)}{2}$		
Mab-Sih	$n$ o $n \cdot s(n)$	$\leftarrow$	$n \cdot s(n)$
Cec-Emm			$f(n + 1) = f(n) + a(n + 1)$
Isa-Jul			$\frac{n(n - 3)}{2}$
Ann-Lau			$n(n - 3)$

Tabla N° 19.



*b) El empiricismo ingenuo y el experimento crucial*

*Stéphanie y Julie.* El empiricismo ingenuo de Stéphanie y Julie es típico. Está relacionado con la dificultad que ellas tienen para manejar la relación “ser el doble de ...” o “ser la mitad de ...”. Esta relación es necesaria para llegar a  $f(n) = 2n$  al comienzo de la resolución. Después de un intento con el polígono  $P_8$  convexo, las estudiantes regresan a  $P_4$  y concluyen:

“tenemos 4, eso nos da 2. Si tenemos 6...” (Sté 61)

“espera vamos a verificar” (Jul 62)

“entonces esto da 10, por lo tanto para 5 ... para 5 da 10” (Sté 81)

“tú duplicas: el número de diagonales es igual al doble del número de vértices” (Jul 83)

“no, mira ... el número de diagonales, si hay 2, es igual al doble” (Sté 84)

“bueno, 2 diagonales, es lo que hay para 4 vértices, bueno...” (Jul 89)

“10 diagonales, ¡hay 10! (Sté 90)

“¡5!” (Jul 91)

“es que el número de diagonales es igual al doble del número de vértices” (Jul 97)

“hemos encontrado algo, no sabemos si está bien” (Sté 102)

No de vértices = 2 x No de diagonales

No de diagonales = 2x

el No de diagonales es igual al doble del No de vértices

*Figura N° 69.*

Ellas sólo harán consciencia de su error de formulación más tarde, durante la segunda parte de la observación (ver § III.2.2.b). La rapidez con la que se produce esta solución puede sugerir un empiricismo de circunstancia. Este puede estar relacionado con la lectura de la situación como una situación de adivinanza. En nuestra opinión, las raíces son más profundas, como lo sugiere el siguiente diálogo:

“son buenas las soluciones [de los otros] y nosotras, son buenas” (Sté 114)

“en toda caso yo creo que está bien” (Jul 129)

“a partir de los dos casos que hemos hecho” (Sté 130)

Este empiricismo ingenuo se confirma con su tratamiento de las refutaciones y con sus procedimientos de resolución a lo largo de la segunda parte de la observación.

*Loïc y Marc.* Ellos formulan una conjetura con base en sus primeras observaciones de un polígono  $P_4$  y de los polígonos  $P_5$  convexo y cóncavo que están representados en las figuras 4 y 5 del Texto. Para estos polígonos ellos encuentran cuatro diagonales: “si es un número par, divides por 2 para encontrar las diagonales, si es un número impar quitas uno: eso puede funcionar, la única forma de saber es ... dibuja las diagonales” (Loï 67).

Esta solución es refutada por el polígono  $P_7$  que está representado en la figura 6 del Texto. Estos estudiantes hacen explícito el hecho de que solamente perciben un tipo de validación pragmática: “la única forma de saber es ... dibuja las diagonales” (Loï 67). La solución que será propuesta proviene de estudiar en  $P_5$  el recorrido de un polígono en un sentido determinado y constatar que, para los tres primeros vértices, el número de diagonales es (5-3), (5-3) y después (5-4). Ellos extienden esta afirmación con (5-4) para el cuarto vértice. La validan con  $P_4$ :  $(4-3) + (4-3) + (4-4) + (4-4) = 2$ : “¡esto funciona, esto funciona! Bien, lo encontramos” (Mar 513). No se constata ninguna contradicción con lo que ya se había obtenido para  $P_5$  (4 diagonales, ver § III.2.2.b a este respecto): “para los dos primeros ángulos, tú quitas 3, para los dos siguientes tú quitas uno de más, y así con lo que sigue” (Mar 481).

El texto que ellos presentan (figura N° 70) expresa de la misma manera este procedimiento de cálculo. No se advierte ningún problema de formulación, en particular, aquel que podría estar relacionado con el número de pasos de esta iteración. Marc se sorprende: “lo que me parece extraño es que una solución sea tan complicada” (Mar 479). Aparentemente, este empiricismo ingenuo es reforzado por la manera como las figuras del Texto adquieren un carácter prototípico. Ellas constituyen lo esencial de los ejemplos considerados por los estudiantes. Esto también es el caso con  $P_4$ . Los estudiantes consideran un experimento crucial con un polígono  $P_8$  cóncavo, pero no son capaces de controlar la enumeración de sus diagonales.

En polígono para hallar el número de diagonales que salen del primer vértice, uno quita al número total de vértices, el vértice mismo y los vértices consecutivos.

Para el segundo vértice uno hace lo mismo, pero para el tercero uno quita una diagonal adicional y para el cuarto uno hace lo mismo y así se sigue para todos los vértices que queden.

*Figura N° 70.*

*Mabouba y Sihem.* En este binomio, el papel prototípico de los ejemplos del Texto es mucho más claro. Al examinar el polígono  $P_7$  cóncavo, que se presenta en la figura 6 del Texto, ellos obtienen  $f(n) = n \cdot s(n)$ . Para Sihem,

toda verificación, como la solicitada por Mabouba, es inútil: “tú tomas una cosa de 20 lados, encontrarás lo mismo, tú escoges un vértice, miras cuántas diagonales hay y multiplicas el número de diagonales por el número de vértices” (Sih 58).

Ante la resistencia de Mabouba, Sihem propone que se considere un experimento crucial sobre “cualquier ejemplo” (Sih 64). El dibuja un polígono  $P_{11}$  cóncavo. Sin embargo, los estudiantes solamente examinarán la situación de un vértice: “ $8 \times 11$ , 88. Bueno, es bien esto” (Sih 66). “¿Es eso? Está bien, entonces vamos a hacer la regla” (Mab 67). Las 88 diagonales no se enumeran efectivamente. La función de este experimento crucial consiste en resolver un conflicto entre los dos estudiantes y no excluye nuevas tentativas de prueba o de verificación. Hay que anotar que un nuevo ensayo con un polígono  $P_5$  refuta esta solución. Los estudiantes se proponen entonces “verificar para todas las cosas” (Sih 119), es decir, para todas las figuras del Texto. No obstante, ellos no logran terminar con los polígonos cruzados (figura 3 del Texto) y ofrecen su solución (figura N° 71):  $f(n) =$  si el polígono es convexo, entonces  $n$ , sino  $n \cdot s(n)$ .

Una nueva verificación con el polígono  $P_4$  refuta esta solución, pero, en esta ocasión, los estudiantes se vuelven hacia el observador. En esta circunstancia, las ilustraciones del Texto, que tenían como propósito mostrar lo que significan “polígono convexo” y “polígono cruzado”, pudieron haber jugado un papel de prototipo, constituyéndose en un obstáculo para sobrepasar el empiricismo ingenuo.

Polígono convexo:

En un polígono convexo, uno cuenta el número de vértices que hay y uno obtiene obligatoriamente el número de diagonales.

Polígono no convexo:

En un polígono no convexo, cada vértice tiene el mismo número de diagonales.

Ex: En un polígono no convexo para hallar el número de diagonales hay que multiplicar el número de diagonales de un vértice por el número de vértices del polígono.

*Figura N° 71.*

*Cécile y Emmanuelle.* Ellas construyen una solución con base en las figuras del Texto, en particular la figura 6 (polígono con 7 vértices). Al comienzo, ellas tienen dudas acerca del carácter prototípico de este polígono:

“hay una confusión” (Emm 102)

“no es obligatorio, si eso hubiese estado allí, no habría habido confusión. Es por azar que está ahí” (Céc 103)

“¡pero no hay ningún otro!” (Emm 106)

“mira, imagina, si este punto estuviese aquí [...] uno habría podido dibujar y aquí también. Bueno, es el azar que esté...” (Céc 107-109)

El debate para decidir si se debe tener en cuenta la propiedad de convexidad es del mismo orden. Esto muestra cómo las estudiantes tienen en cuenta una de las intenciones de los autores con respecto de la resolución del problema: “él subrayó no convexo, por consiguiente eso quiere decir algo, ¿no?” (Emm 164).

Se elabora la solución propuesta,  $f(n) = f(n+1) + a(n+1)$ , y se valida con los ejemplos del Texto. En particular, las estudiantes se aseguran que la convexidad no interviene en el cálculo del número de diagonales. El cálculo con esta solución para el polígono  $P_8$  parece ser más una verificación de la factibilidad del procedimiento propuesto, y menos una validación con un experimento crucial: “lo que pasa es que si tienes muchos lados, te va tocar hacer todo esto” (Céc 533), “a ese número le agregas ... para el siguiente, yo sé que cuando haya 8, bueno, allí ... estábamos en 5, debe haber 6. Esto debe dar 20, ¡te apuesto! Espera, vas a ver, vamos a verificar...” (Emm 534).

Este procedimiento de Emmanuelle se podría relacionar, más bien, con una forma primitiva de la recursividad (ver Capítulo II, § II.2.1), pero el contexto de interacción puede evocar un experimento crucial. Esto es lo que nosotros hemos destacado, al tener en cuenta que, antes de esta nueva verificación, Emmanuelle ya está segura de la solución. Pero estas estudiantes no lograrán formular su solución: “lo encontramos, pero no sabemos cómo explicarlo” (Emm 817). De hecho, estas estudiantes no consideran que su procedimiento de cálculo sea una solución aceptable “hay que conocer el anterior para poder hacer [...] y se puede dar que uno no lo conozca. No nos lo van a decir [...] si decimos 18 así y tú conoces el 17, entonces puedes hacer esto así” (Céc 642-4-6). Su objetivo (herencia de una lectura del contrato experimental) es encontrar una fórmula: “de todas maneras, tiene que haber algo, si no, no nos lo habrían dado de esta forma” (Céc 1013).

*Rémi y Christophe.* Ellos enuncian dos propiedades basados en el Texto. Después examinan el polígono  $P_7$  cóncavo (representado en la figura 6 del Texto): “normalmente debe haber ... 2 diagonales menos que vértices cuando se parte de cada punto [...] hay dos vértices consecutivos” (Rémi 23-5-7). “Si hay una diagonal que pase por aquí, entonces es la misma que pasa por allá, por este punto” (Rémi 27), “entonces vamos a contar [en  $P_7$ ] todas las diagonales ... no hay que contar dos veces la misma...” (Rémi 43).

Los estudiantes desearían encontrar una fórmula que relacione el número de vértices con el número de diagonales válidas para todo polígono. Sin embargo, con base en las parejas (7,14) y (5,5), ellos concluyen que no hay una regularidad: “entonces no es para nada lo mismo ... aquí encontramos el doble de diagonales que de vértices [...] y aquí el mismo número. Enton-

ces habría que intentar con 6. Sólo que nos arriesgamos a encontrar cada vez ... algo diferente” (Rém 136-142).

Este problema aumenta con el hecho de que, con un polígono  $P_6$  convexo (que perciben como un polígono con 7 vértices), ellos encuentran 9 diagonales: “lo que pasa, no encontramos nunca los mismo resultados” (Rém 196), “¡no! Bueno, [  $f(n) = 2n$  ] era una coincidencia, yo creo” (Chr 197).

Su solución consiste en la construcción de la sucesión  $\zeta_n$ . Su fundamento es principalmente empírico, aunque ellos formulan algunos de los elementos de una posible prueba: “para todos nuestros ejemplos, esto nos ha mostrado que está bien” (Rém 675).

En la expresión de su solución (figura N° 72), la iteración está implícita cuando dicen “contando cada vez un vértice de más...”. Se alcanza a percibir la condición de parada, pero ésta no se hace explícita: “entonces, cuando llegamos a O, bueno uno para, eso es, ya está. Hemos terminado” (Rém 488). Esta condición debió haberse “visto” en el ejemplo que se da de  $P_6$ .

- A partir de un vértice A de un polígono, hay tantas diagonales como hay vértices no consecutivos de A.

- A partir de un vértice B consecutivo de A, hay tantas diagonales como con A.

- Al contar cada vez un vértice de más, hay una diagonal menos que el número de diagonales contadas anteriormente.

ex: si hay 6 vértices y 6 lados en un polígono ABCDEF

3 diagonales pasan por A

3 diagonales pasan por B

2 diagonales pasan por C

1 diagonal pasa por D

Las otras diagonales ya se contaron

(por dos puntos pasa una sola recta).

Figura N° 72.

*Bénédicte y Sandra.* Después de leer el Texto, ellas examinan los polígonos  $P_7$  y  $P_5$  representados respectivamente en las figura 6 y figura 5 del Texto. Ellas enuncian la invarianza del número de diagonales en cada vértice de un polígono, sin proponer, en todo caso, un medio para calcularlo: “no tienen todos las mismas ... esto me enfurece” (San 196). Enseguida, ellas proponen el modelo multiplicativo,  $f(n) = (n \cdot s)(n)$ , con base en el caso de  $P_7$ . Después hacen una modificación relacionada con el comentario de que las diagonales se “confunden”:

“28 diagonales, ¡no es posible!” (Bén 207)

“Bueno, ¡sí! Si para cada vértice hay 4” (San 208)

“Sí, pero ellas se confunden ... si dices que DF es una diagonal, FD es una diagonal” (Bén 209)

“mira, en un cuadrado como éste ... digamos que es un cuadrado, tú tienes 2 diagonales y tú no dices que tienes 4 porque tienes ésta y ésta que son las mismas” (Bén 242)

“Sí, bueno, entonces 28 dividido por 2” (San 243)

El mensaje (figura N° 73) muestra un procedimiento de cálculo para el caso de  $P_7$ . No obstante, nos parece que lo que se tiene en cuenta es el valor prototípico de  $P_7$  y no su valor como ejemplo genérico. Las estudiantes tienen muchas dudas: “esto es extraño” (San 255). “Pues sí, pero no hemos encontrado nada más” (Bén 256). “En todo caso, con seguridad lo tenemos mal” (San 280).

Uno multiplica el número de diagonales que pasan por un vértice por el número total de vértices.

ex. polígono (7 lados, 7 vértices)

Por un vértice pasan 4 diagonales que uno las multiplica por el número total de vértices.

B tiene 4 diagonales que uno multiplica por 7.

Uno divide por 2 para hallar el número exacto porque hay algunas que se confunden.

ex:  $BF = FB$ .

*Figura N° 73.*

*Christophe y Olivier.* Con base en el polígono  $P_7$  cóncavo, representado en la figura 6 del Texto, ellos hacen una enumeración de las diagonales que parten de un vértice. Ellos concluyen: “es obligatorio, el número de diagonales desde A es el número de lados menos uno” (Oli). Aun habiendo leído el Texto, ellos no distinguen entre lados y diagonales. De hecho, la palabra lado es utilizada con el significado de vértice.

- Para hallar el número de diagonales toca: ~~número de vértices x 1 por cada punto~~

multiplicar el número de vértices por el número de lados al resultado se resta el número de vértices

*Figura N° 74.*

Los estudiantes llegan a una solución (figura N° 74) y se proponen hacer una verificación que, al final, no realizan: “hay que multiplicar el número de vértices por el número de lados menos 1 ... o mira si esto funciona en todas partes, con todos los polígonos” (Oli). Los polígonos en cuestión son aquellos utilizados como ilustración en el Texto.

c) *El ejemplo genérico*

*Isabelle y Juliette.* Ellas construyen una solución que se apoya principalmente en el polígono  $P_6$ . Con respecto a este polígono, ellas hacen explícitas las definiciones y las relaciones entre los diferentes elementos que están involucrados en la resolución del problema.

“bueno, de acuerdo con la regla” (Jul 113)

“uno llama diagonal a un segmento que une dos vértices no consecutivos” (Isa 114)

“entonces, hay 3 diagonales que salen de un vértice” (Jul 117)

“cada vez habrá lo mismo” (Isa 118)

“sí, pero si hacemos un polígono, eso depende de si es cóncavo o convexo” (Jul 142)

“Sí, ¡es mejor hacer los dos!” (Isa 151)

“pero, mira: uno llama diagonal a un segmento que une dos lados no consecutivos” (Jul 154)

“está bien ... está bien ..., no porque yo no había leído eso. No, porque aquí también se tiene una diagonal [figura 6]” (Jul 156)

“de todas maneras, es siempre la misma cosa ... cada vez que uno toma un vértice, habrá 3 diagonales que saldrán de ese vértice [...] es cierto que si uno toma el punto E, él tendrá como vértices consecutivos F y D, entonces ña” (Jul 178-90)

El trabajo con  $P_6$  refuta una primera propuesta ( $f(6) = 6 \times 3$ ) y conduce, con base en una corrección *ad hoc*, a  $f(6) = \frac{6 \times 3}{2}$ : “hay 6 vértices,  $6 \times 3$  ... 18, hay tres diagonales por vértices y dividimos por 2 [...] porque la mitad de las diagonales son idénticas” (Jul 368-84).

Pero las estudiantes reconocen que “esto funciona sólo cuando tiene 6 vértices” (Isa 427) y que “hay que hacer el caso general” (Jul 428). Con base en el examen de  $P_4$ ,  $P_5$  y  $P_6$ , ellas deducen que  $s(n) = n - 3$  y lo verifican con  $P_7$ :

“esto hace el espacio de 3 cada vez,  $3+3$  es 6 ...  $2+3$ , 5 ...  $1+3$ , 4 cada vez. ¿Viste? Uno agrega 3 para ... encontrar el número, 2 y 3: 5; 1 y 3: 4; 3 y 3: 6” (Isa 467)

“vamos a ver con 7 ... 7 lados” (Jul 468)

“4 diagonales” (Isa 473)

“cada vez esto aumenta en 3” (Isa 477)

Enseguida ellas redactan la solución (figura N° 75), borrando todas las referencias al ejemplo que sirvió para su elaboración, para “hacerlo en el caso general” (Isa 493).

Para encontrar el número de diagonales de 1 polígono que tiene  $x$  vértices uno disminuye el número de vértices de ese polígono por 3 y uno obtiene el número de diagonales para 1 vértice. ~~Para hallar el número de diagonales en total, uno multiplica el número de vértices por el número de diagonales que salen de cada vértice, después uno divide el resultado obtenido por 2.~~

*Figura N° 75.*

En este binomio se destaca, al mismo tiempo, un procedimiento deliberado de generalización que se manifiesta notablemente en la redacción de la solución, y un empiricismo ingenuo con base en el cual las estudiantes parecen confirmar su solución a partir de algunos ejemplos. Esta contradicción se resuelve si se le atribuye un valor genérico al polígono  $P_6$  sobre el cual las estudiantes construyeron la solución y que fue la base para un “razonamiento” evidente. Como ya lo mencionamos (Capítulo II, § II.2.3), dentro de un contexto de interacción social, la validación con un ejemplo genérico no excluye la verificación.

*Laurence y Anne-Lise.* Teniendo como referencia la definición de diagonal, ellas examinan las figuras 3, 4 y 5 del Texto. Después, en el caso de  $P_7$ , ellas enumeran las diagonales en cada vértice de un polígono. El deseo de generalización es muy fuerte y exige la eliminación de toda referencia a un número preciso.

“tú tomas el número de vértices, bueno, quitas el vértice que tomas, entonces eso te da 6. Quitas los 2 consecutivos y sabes que pasarán 4. Es así con cada vértice” (Ann 159)

“hay que poner -3 porque...” (Ann 159)

“pero de hecho no se debe poner un número” (Lau 170)

“bueno, sí podemos poner números” (Ann 171)

“pues no, porque sería un ejemplo, eso no sería un contraejemplo” (Lau 172)

“sí, no sería un ejemplo generalizado” (Ann 179)

“hay siempre dos ángulos que son consecutivos, es obligatorio entonces” (Ann 192)



Sin embargo, como lo acabamos de recordar, la prueba fundamentada en un ejemplo genérico se acompaña con verificaciones o experimentos cruciales destinados a convencer a un compañero que duda. Después de redactar la primera parte del texto (figura N° 76), Anne-Laure expresa sus dudas: “sí, pero esto no nos dice si está bien” (Ann 443), “veamos si está bien en este caso” (Ann 455, en el polígono  $P_6$ ), “en estos no hay problema. Está bien con los convexos” (Ann 455).

Al número de vértices de un polígono, hay que restarle el número de lados consecutivo de un vértice y él mismo para calcular el número de diagonales que pasan por ese vértice después para tener el número total de diagonales el número de vértices por el número de diagonales de un vértice por todos los vértice de la figura dada.

*Figura N° 76.*

Ellas hacen otra verificación con un polígono  $P_6$  no convexo “y en los no convexos funciona. ¡Está bien! Falta saber si está bien en los cruzados” (Ann 467). Ellas no consideran este problema. Las estudiantes expresan el modelo multiplicativo: “para tener el número de diagonales uno multiplica por todos los vértices” (Lau 533). Se hace una nueva verificación con un  $P_8$  cóncavo. Sin embargo, se trata más bien en este caso de constatar en el dibujo que las relaciones utilizadas se confirman, sin que esto lleve al final de la verificación. Ellas constatan que las diagonales se cuentan dos veces y lo aceptan; se trata de diagonales confundidas: “esto es una diagonal y la otra ... bueno la otra es así, bueno hay 2, eh: se tiene una y dos” (Lau 611).

### *III.2.2. El tratamiento de los contraejemplos*

#### *a) Los datos generales*

Para este análisis hemos utilizado las mismas categorías que se utilizaron en el capítulo anterior. Las tablas que se presentan a continuación muestran cómo se reparten los tratamientos y las refutaciones a lo largo de las dos fases de la observación.

#### **Primera parte de la observación <sup>a</sup>**

	Sté	Rém	Chr	Ben	Loï	Mab	Cec	Isa	Ann
	Jul	Chr	Oli	San	Mar	Sih	Emm	Jul	Lau
Abandono de la conjetura			1						
Modificación de la conjetura				1		1			
Excepción			1						

a. Nota: la introducción de una condición, el regreso a la definición y el rechazo del contraejemplo no aparecen en esta primera fase

### Segunda parte de la observación

	Sté	Rém	Chr	Ben	Loï	Mab	Cec	Isa	Ann
	Jul	Chr	Oli	San	Mar	Sih	Emm	Jul	Lau
Abandono de la conjetura	2	•							
Modificación de la conjetura				•	1	•			
Excepción	1	1		1	1	1		1	
Condición	1	•							
Definición									
Rechazo del contraejemplo	1	1	1	2		1		2	3

Hay dos hechos evidentes.

Por una parte, aparecen muy pocos contraejemplos en la primera fase, al contrario de lo que observamos en la primera modalidad (Capítulo II, § III.2.2). Esto es evidentemente una consecuencia de que todas las soluciones son correctas, aunque tengan fundamentos empíricos. Vemos aquí un efecto esencial del Texto que condujo a la desaparición de concepciones que eran el origen de conjeturas “frágiles”.

Por otra parte, las refutaciones que se encontraron en las dos fases no implican un regreso a las definiciones. Recordemos que, en el primer experimento, el problema de la definición aparecía inmediatamente tan pronto como los estudiantes enfrentaban una refutación. Por el contrario, en este experimento los estudiantes leyeron primero el Texto que se les entregó. Esto pudo ser suficiente para fijar sus concepciones de polígono y diagonal, al menos durante el transcurso de la resolución del problema.

Finalmente se constata que, de la misma forma que sucedió en el primer experimento, los abandonos y las modificaciones de la conjetura dominan la primera fase, mientras que las excepciones y el rechazo del contraejemplo dominan la segunda. Dado que el rechazo corresponde al descubrimiento de la “diagonal escondida”, aquí se percibe la presencia del triángulo y del pentágono con vértices alineados.

#### b) El abandono de la conjetura

*Stéphanie y Julie.* Ellas defienden inicialmente la conjetura  $f(n) = 2n$

(aunque pensaron primero en  $f(n) = \frac{n}{2}$ ). Al enfrentar los contraejemplos

del observador, ellas se defienden de manera *ad hoc* (ver § III.2.2.e), reduciendo su solución a los polígonos convexos. Sólo cuando reconocen su error de formulación (ellas escriben primero “No de vértices =  $2 \times$  No de diagonales” y después “el número de diagonales es igual al doble del número de vértices”, ver figura N° 69) y porque se formulan la pregunta de una solución común para todos los polígonos convexos y no convexos, ellas se

comprometen con la búsqueda de una nueva solución. “no, es igual a la mitad del número de vértices” (Jul 221), “¡nos equivocamos!” (Sté 228).

Sin embargo, esta renuncia a una solución que ha sido cuestionada, aunque aparece como legítima en este ejemplo, debe mirarse como la expresión de un comportamiento empírico (“abandono inmediato”, Capítulo II, § III.2.3.a). De hecho, estas estudiantes llegan a  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ , sin formularla completamente (aunque la verifican con los polígonos  $P_7$ ,  $P_6$  y  $P_5$ ). No obstante, ellas abandonan esta solución porque les parece que es refutada por  $P_4$ : “sí, pero mira también, como habíamos encontrado 2 [en  $P_4$ ] no vamos a encontrar una, porque...” (Sté 389), “sí, pero mira que para 4, ¡esto no funciona!” (Sté 391).

Estas dos estudiantes habían encontrado inicialmente dos diagonales para  $P_4$ . Esto es obvio sin necesidad de hacer una enumeración. Pero, como ellas reconocieron tener “todo mal” en los primeros casos estudiados, les parece que también deberían dividir por 2 la primera enumeración que hicieron para  $P_4$ . Esto resultaría en una sola diagonal, lo que sería evidentemente falso. Las estudiantes considerarán una nueva solución:  $f(n+1) = f(n) + a(n+1)$ .

*Christophe y Olivier*. Ellos comienzan analizando el contraejemplo que el observador les propone a su solución  $f(n) = n(n-1)$ . Elaboran una nueva solución: “sí, pero en el triángulo, todos los lados son consecutivos todo el tiempo”. Esto los lleva, después de haber leído de nuevo el Texto, a distinguir entre lado y diagonal. Después de examinar los polígonos  $P_5$  y  $P_6$  convexos, ellos proponen: “el número de diagonales es el número de lados opuestos dentro de un polígono”. Esta solución es cuanto más satisfactoria dado que permite resolver el problema del triángulo: “no hay lados opuestos, no hay diagonal”.

*Loïc y Marc*. Ellos también abandonan su conjetura después de haber sido refutada. Pero esto se convierte en el centro de un debate intenso, en el que la renuncia a una solución se considera como algo costoso. La adición de condiciones *ad hoc* es la evidencia de una negociación. Con motivo de un  $P_5$  cóncavo propuesto por el observador, los estudiantes calculan  $(5-3) + (5-3) + (5-4) + (5-4)$ , es decir, 6 diagonales, hecho que está en contradicción con lo que ellos enumeraron en la figura. Marc, que defendía principalmente esta solución, va a continuar defendiéndola, al proponer una explicación *ad hoc*: “yo creo que es para los ángulos entrantes que esto no funciona” (Mar 648), “a partir de 5 la teoría no funciona” (Loïc 663).

En efecto, la conjetura había sido validada con  $P_4$ :  $(4-3) + (4-3) + (4-4) + (4-4) = 2$ . Por su parte, Loïc defiende  $\sum \zeta_n$ . Las dos soluciones se confrontan con el caso de  $P_6$ . Aunque su solución es refutada, Marc insiste: “y

¿por qué hay un cambio tan brusco? ¿Por qué eso se cae de un solo golpe?” (Mar 714).

Aunque la solución  $\sum \zeta_n$  le parece fundamentada, Marc se queja de un tratamiento aparentemente particular para sus dos primeros términos.

“¡la teoría está bien en todo caso! Mira ... es normal que quites 3 en todo ... mira ... si tienes el tuyo, entonces tienes aquel sobre el que estamos hablando” (Mar 803)

“y los lados consecutivos” (Loi 804).

“después al segundo [...] es la misma cosa porque [...] son consecutivos [...] el tercero, tú quitas 1, porque está el de adelante [...] el cuarto es lo mismo” (Mar 807-13, 817).

“¡No! ¡El cuarto tú quitas 2!” (Loi 819)

“No, pero oh ... yo te digo aquí, las cosas impares” (Mar 819)

“Sí, pero mira ... para el cuarto ... digamos que el cuarto es D [en P<sub>7</sub>] ya habíamos ... como hay un lado consecutivo para ... un segmento, con un segmento ... hay un lado consecutivo para éste ... por lo tanto, lo quitamos, de hecho, lo vamos a quitar” (Loi 822)

Pero Loïc no logra terminar su explicación. Marc se impacienta. Loïc valida concretamente su solución en un P<sub>5</sub>. Este adquiere aparentemente el estatus de un ejemplo genérico: “Oh, bueno, entonces es lo mismo [...] es lo mismo para los impares ... y, ¿para los pares?” (Mar 839-840).

### c) Modificaciones de la conjetura

Hubo pocos casos de modificación de la conjetura. Todos ellos fueron coherentes con los procedimientos de validación empírica que dominaron los comportamientos de los estudiantes observados en este experimento. Se trata de una modificación *ad hoc* que busca borrar los efectos indeseables de las refutaciones.

Es el caso por ejemplo de Marc, en la situación anterior, quien, para salir de una contradicción (su procedimiento conduce a afirmar que un vértice, en el caso de un polígono impar, tendría -1 diagonales), propone dejar a un lado un vértice en el caso de los polígonos impares. En efecto, en el caso del triángulo se obtiene  $f(3) = (3 - 3) + (3 - 3) = 0$ .

Sucede lo mismo en el caso de Mabouba y Sihem. Ellos modifican su conjetura inicial, “ $f(n) = n \cdot s(n)$ ” en la conjetura “ $f(n) =$  si el polígono es convexo, entonces  $n$ , si no  $s(n)$ ”. Esto les permite resolver la contradicción expuesta con P<sub>5</sub> convexo.

Estos arreglos *ad hoc* podrían parecerse a lo que serían las razones, aunque los estudiantes no se apoyan en ellas. Es el caso de Bénédicte y Sandra,

quienes transforman su conjetura  $f(n) = n \cdot s(n)$  en  $f(n) = \frac{n \cdot s(n)}{2}$ .

La referencia que ellas hacen al cuadrado destaca el carácter adaptado de esta transformación.

“28 diagonales, ¡no es posible!” (Bén 207)

“Bueno, ¡sí! Si para cada vértice hay 4” (San 208)

“Sí, pero ellas se confunden ... si dices que DF es una diagonal, FD es una diagonal” (Bén 209)

“mira, en un cuadrado como éste ... digamos que es un cuadrado, tú tienes 2 diagonales y tú no dices que tienes 4 porque tienes ésta y ésta que son las mismas” (Bén 242)

“Sí, bueno, entonces 28 dividido por 2” (San 243)

#### d) *El estatus de excepción y la introducción de una condición*

En esta sección queremos considerar al mismo tiempo el tratamiento de un contraejemplo como una excepción y la introducción de una condición. Para darle sentido a esta aproximación, comenzaremos con un ejemplo. Marc busca descartar el triángulo: “¡pero es con polígonos! Ah, bueno, sí, es un polígono” (Mar 525), “pues bien, esto no funciona [...] porque uno llega a -1 [...] ¡es un caso particular! ¡Es la excepción que confirma la regla! [...] se necesita que sea superior a 3 ángulos” (Mar 333 - Loï 342).

De hecho, con excepción de un caso que presentaremos al final de esta sección, la introducción de una condición es una consecuencia del caso del triángulo. Al contrario de lo que observamos en la primera modalidad, el triángulo no se rechaza como contraejemplo, dado que el Texto lo impone como un polígono auténtico. Se le considera como un caso particular. Su situación se resuelve ya sea con la introducción de una condición o con una restricción *ad hoc* al dominio de validez de la conjetura. En el caso de Stéphanie y Julie: “entonces no hay diagonales [...] entonces la regla se aplica a las figuras que tengan más de 4 vértices ... entonces que tengan al menos 4 vértices” (Jul 148, Sté 153). Y para Rémi y Christophe: “esto no funciona porque no se pueden dibujar diagonales en un triángulo, entonces hay que identificar un polígono, bueno ... por encima [...] un polígono que tiene 3 lados” (Rém 696, Chr 697).

Este último binomio había manejado de manera análoga el caso de  $P_4$ . Este manejo fue consecuencia del hecho de que ellos reconocieron inmediatamente que  $P_4$  tiene dos diagonales. Y este hecho se oponía curiosamente a la aplicación de su solución ( $\sum \zeta_n$ ): “vamos a hacerlo por encima de 4 lados, porque con 4 lados sabemos que hay siempre 2 diagonales” (Rém 268).

La posición de Bénédicte y Sandra es similar: “pero no hay diagonales [...] en un triángulo [...] al menos de que haya 4 lados por lo menos [...] tendría que ser una figura que tenga 4 lados” (Ben 282, San 290).

Mabouba y Sihem (Mab 543, Sih 554) se quejan de que el triángulo no tenga diagonales porque “estas cosas son todas consecutivas” y ellas reducen el dominio de validez de su solución: “lo que yo quiero decir es ... comenzamos solamente a partir de ... 4 vértices” (Sih 554).

Isabelle y Julie reducen también el dominio de validez de su solución. Consideran que polígonos de 1 o 2 vértices estarían excluidos: “comenzamos los polígonos a partir de 4. Los que están por debajo de 4 son ... no es posible” (Isa 637). “¿No puede haber figuras que tengan 2?” (Jul 650), “no, no es posible ... bueno, un 1, es obligatorio, obviamente” (Isa 651).

Además de los casos de tratamiento del triángulo que acabamos de citar, el único caso de introducción de una condición es el de Stéphanie y Julie. Estas estudiantes quieren defender su conjetura, sin tener que volverla a cuestionar. La condición que se introduce tiene un carácter completamente *ad hoc*. Esto es coherente con el empiricismo ingenuo que fundamentó la solución  $f(n) = 2n$  propuesta por estas estudiantes: “lo que he dicho es falso” (Jul 167), “lo que habíamos dicho era para las figuras convexas” (Sté 168).

#### e) El rechazo del contraejemplo

Este tratamiento de una refutación fue observado únicamente en la segunda parte de la observación. Tiene que ver principalmente con un polígono  $P_5$  en una configuración “que esconde la diagonal” y con un polígono cruzado  $P_4$  cuya representación se encuentra en la figura 3 del Texto.

Para dos de los binomios, este rechazo expresa un comportamiento que busca evitar el cuestionamiento de su solución con motivo de un polígono  $P_4$  cruzado. Es el caso de Stéphanie y Julie: “no funciona, vamos a eliminar éste” (Sté 641). Y de Christophe y Olivier para el caso del triángulo: “sí, pero en el triángulo, todos los lados son consecutivos al mismo tiempo” (Oli).

Para los otros binomios el rechazo se fundamenta en un análisis del contraejemplo y en el reconocimiento de una interpretación errada (diagonal escondida o interpretación de un punto de cruce del polígono cruzado). Para dos de ellos este análisis se desarrolla con referencia a su concepción de diagonal que distingue la diagonal AB de la diagonal BA. Esta distinción se hace explícita en las decisiones que toman los estudiantes.

Para Mabouba y Sihem esta concepción tiene un carácter problemático que ellas no quieren descartar, aún cuando enfrentan el contraejemplo  $P_4$  su conjetura  $f(n) = n \cdot s(n)$ : “¡Sólo hay dos! No puede haber 4 porque están confundidas...” (Mab 533). Mantienen su posición aún cuando el observador les propone un  $P_5$  con puntos alineados:

“bueno todos los vértices tienen diagonal además ésta aquí está confundida, mira...” (Mab 595)

“sí, bueno ¡es por eso!” (Sih 596)

“...la diagonal del vértice B, está confundida con la diagonal de D; la de C, ella está confundida con la de E” (Mab 597)

“bueno, sí, hay algunas que están confundidas...” (Sih 598)

Anne y Laurence expresan esta concepción cuando construyen su solución  $f(n) = n(n-3)$ . La confirman cuando enfrentan el cuadrilátero que el observador les propone como contraejemplo: “las contamos, de hecho si tú miras así, no ves sino dos” (Ann 662), “pero están confundidas” (Lau 663), “cuando uno mira así uno ve solamente 2, pero encontramos 4. Encontramos la que pasa por aquí y la que pasa por aquí” (Ann 670).

El tratamiento que Isabelle y Juliette hacen de los contraejemplos va más lejos, en la medida en que está relacionado con los fundamentos de su solución. Estos fundamentos no se hacen explícitos. Recordemos que esta solución,  $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ , se apoya principalmente en un ejemplo genérico.

Por esa razón, el polígono  $P_5$  con vértices alineados es rechazado después de un nuevo examen del procedimiento de cálculo.

“nos equivocamos en alguna parte ... bueno espera” (Isa 673)

“pero aquí, esto funcionaba en todo caso aquí” (Jul 674)

“espera vamos a volver a hacer otro de 5 vértices” (Jul 678)

“5, entonces es parecido a esto, y aquí multiplicamos por 2, ¿por qué? Porque había ... en cada vértice” (Jul 688)

“2 diagonales” (Isa 689)

“y después dividimos por 2 ... es igual a 10 ... y después ... dividimos por 2, esto hace 5, ...” (Jul 692)

“hay: 1 - 2 - 3 - 4 ... y faltaría una” (Jul 720)

Un procedimiento parecido conduce al rechazo de un  $P_4$  cruzado. El problema es el de la interpretación del “cruce”: “nos equivocamos” (Isa 743), “para los polígonos cruzados, bueno esto no funciona” (Jul 754). Después aparece la pregunta de saber si “¿es esto un vértice? [...] porque si fuera un vértice, esto funcionaría” (Jul 782-792), “bueno, sí, pero esto no es un vértice ... porque es la [figura] número 4” (Isa 806).

No creemos que, en este último caso, haya realmente un regreso a la definición, puesto que el problema considerado tiene un carácter muy local. Se trata de la interpretación de una configuración. No se trata del cuestionamiento de las concepciones de los estudiantes durante la resolución del problema.

### III.3. Las funciones del Texto

Todos los binomios comenzaron la resolución del problema después de una lectura previa del Texto. Este comportamiento puede ser interpretado como un efecto del contrato experimental. El Texto tiene que servir puesto que ha sido entregado por el observador. Hemos identificado afirmaciones de los estudiantes que van claramente en ese sentido: “si nos lo dieron, es porque hay algo ... entonces, espera, vamos a volverlo a leer” (Stéphanie y Julie, Sté 244).

La utilización del Texto durante la resolución el problema tiene dos tipos de origen: exógeno y endógeno. Esto es similar a lo que identificamos, en el experimento anterior, para la entrada en una problemática de la definición. Los orígenes endógenos corresponden a una utilización del Texto como consecuencia de preguntas que aparecen en la resolución del problema. Esto tiene que ver principalmente con la definición de diagonal. En algunas ocasiones, poco numerosas, tuvo que ver con los conflictos de interpretación entre los estudiantes. Los orígenes exógenos, al hacer parte del contrato experimental, le atribuyen al Texto un propósito con respecto a la resolución del problema. Organizamos nuestro análisis alrededor de estos dos tipos de origen.

#### III.3.1. El Texto como portador de intención

Algunos estudiantes buscaron en el Texto evidencias de una intención de los autores directamente relacionada con la resolución del problema. Como lo resalta Stéphanie, en la cita presentada anteriormente, el Texto debe servir para algo. Los estudiantes pueden entonces interpretar la diagramación, el uso de las itálicas y las negritas, la tipografía, como indicios: “sí, pero mira, él subrayó aquí: convexo ... se resalta también polígonos...” (Emm 164).

Esto explica el valor prototípico que los estudiantes le asignaron a los ejemplos que se presentaron anteriormente con relación a los procedimientos empíricos. En el binomio de Stéphanie y Julie aparece otra indicación. Después de que su conjetura ha sido refutada por el cuadrilátero cruzado, ellas buscan extender su solución: “¡y ellos verán cómo se las arreglan si se cruzan más de una vez! No, pero, si nos dieron un ejemplo aquí y se cruzan una vez, esto debería estar bien, ¿no?” (Sté 767).

Por otra parte, la mayoría de los binomios utilizan el polígono  $P_7$  cóncavo de la figura 6 del Texto como un polígono “típico” en cierta forma. Esto lo mencionamos cuando se estudiaron las soluciones propuestas y sus fundamentos. Este polígono adquiere este estatus como consecuencia de su fun-



ción: “mostrar” los diferentes elementos de un polígono (vértices, lado, diagonal). Recordemos que en el primer experimento este papel fue asumido por  $P_4$  (especialmente el cuadrado y el paralelogramo) y los polígonos  $P_5$  y  $P_6$ .

Esta utilización de la figura 6 del Texto podía incitar a los estudiantes a no distinguir entre el caso de los polígonos convexos y el caso de los polígonos cóncavos. Esto podía suceder al menos porque las diagonales exteriores no se admitían explícitamente: “el segmento AF es una diagonal, AD también. Ah sí, entonces también puede ser exterior” (Rém 15).

Sin embargo, estas distinciones tiene lugar repetidamente como consecuencia de las distinciones que, a nivel de las definiciones, aparecen en el Texto. Después de leer el texto, Stéphanie y Julie se preguntan: “¿el polígono es convexo o no?” (Jul 13-15). Ellas consideran, en una primera instancia, solamente los convexos: “vamos primero a intentar con los convexos” (Syl 342). Pero, cuando su solución es refutada:

“es para todos los convexos, pero no para éste mira, es la figura 3”  
(Jul 646)

“!pues ahí está!” (Sté 647)

“¿es un polígono cruzado!” (Jul 648)

“Ah sí, no es para los polígonos cruzados ... ahí tienes” (Sté 649)

Este papel de las representaciones gráficas utilizadas en el Texto se ilustra bien con la resolución del problema que realizan Mabouba y Sihem. Con motivo de la lectura del Texto y después del ejemplo de la figura 6, ellas afirman: “no sé si he entendido bien, pero, mira, 7 vértices, yo creo que tienes 7 diagonales, pero no estoy segura, porque...” (Mab 22). De hecho, ellas producirán  $f(n) + n \cdot s(n)$ , con base en el examen de  $P_7$ . Y, después de la refutación por el polígono convexo  $P_5$  de la figura 4, ellas buscan “hacer el caso para todas las cosas” (Sih 119). No obstante, renuncian a este propósito porque no comprenden la figura 3: “no es fácil, pero cruzado. ¡No entiendo nada!” (Mab 132). Entonces, ellas defienden  $f(n) = n$  para los polígonos convexos y  $f(n) = n \cdot s(n)$  para los polígonos cóncavos. Seguramente no examinan la figura 5 (un  $P_5$  cóncavo) porque ésta hace parte de la misma clase de objetos de  $P_7$ . Pero, no se ha resuelto todo: “no hemos terminado: los polígonos cruzados” (Sih 477). Sin embargo, ellas evitan este caso y Mabouba produce un argumento *ad hoc*: “tomamos polígono en general. No vamos a considerar cada caso, ¿no?” (Mab 478). Pero, por otro lado, su solución distingue al menos dos casos: convexo y cóncavo.

### III.3.2. El Texto y las preguntas de definición

En el aspecto de la definición, la primera función del Texto consiste en ofrecer un punto de partida para la resolución del problema: “dos minutos, ¡voy a leer esto ya! Esto nos puede ayudar...” (Loi 185), “sí, es eso ... esto es importante, sí” (Mar 192), “es lo que yo estaba diciendo, es una historia de lados consecutivos” (Mar 194).

Para la mayoría de los binomios, la resolución se desarrolla bajo el control de la definición (Rémi y Christophe, Loïc y Marc, Christophe y Olivier, Bénédicte y Sandra, Cécile y Emmanuelle, Isabelle y Juliette, Anne y Laurence, Béatrice y Sylvie). La definición lleva a los estudiantes a analizar lo que sucede en el vértice de un polígono. El caso de Isabelle y Juliette es un buen ejemplo: “vamos entonces a hacer las diagonales [...] tenemos entonces que proceder por vértice, o tomar un vértice...” (Jul 11-15). Después ellas regresan a la definición: “mira, uno llama diagonal a un segmento que une dos segmentos no consecutivos” (Jul 55). Enseguida, ellas buscan las diagonales bajo el control de esta definición:

“bueno, de acuerdo con la regla” (Jul 113)

“uno llama diagonal a un segmento que une dos vértices no consecutivos” (Isa 114)

“entonces, definición de una diagonal ... entonces AE, AD, AC, son diagonales” (Jul 115)

“entonces hay 3 diagonales que salen de un vértice” (Jul 117)

“cada vez habrá lo mismo” (Isa 118)

Y, lo mismo para otro binomio: “a partir de un vértice A [...] de un polígono, hay tantas diagonales como vértices no consecutivos en el vértice A” (Rém 479-481).

Esta aproximación a la resolución explica que la mitad de las soluciones observadas sean del tipo  $f(n) = n \cdot s(n)$ . Varios binomios se apartan de esta dirección porque se enfrentan al problema de contar una sola vez cada diagonal. Este problema aparece sobretodo bajo la forma del problema de las “diagonales confundidas”. Y a este respecto, como dice Olivier, “ellos [los autores] no dicen nada”. Dado que en el Texto no hay elementos que permitan tomar una decisión, varios binomios aceptarán el doble conteo de las diagonales (Mabouba y Olivier, Anne y Laurence). Otros binomios no resolverán este problema (Christophe y Olivier, Cécile y Emmanuelle). Presentamos a continuación el diálogo entre Cécile y Emmanuelle, quienes identificaron, en la figura 6, diagonales que tienen más de un punto de intersección. A continuación tienen que enfrentarse a la figura 5 en la que solamente encuentran 3 diagonales:

“sí, pero está confundida de pronto esa cuenta también” (Céc 147)

“¡Pues no!” (Emm 148)

“eso puede contar, pero...” (Emm 150)

“uno llama diagonal a un segmento que une dos vértices consecutivos” (Céc 151)

“de pronto es un caso particular” (Emm 156)

En el registro de la definición, la segunda función del Texto consiste en ser un elemento de referencia para las preguntas de interpretación que son consecuencia de las refutaciones o de los conflictos entre los estudiantes. De hecho, esta utilización será poco frecuente porque las principales fuentes de dificultad que se identificaron en el primer experimento (las definiciones de diagonal y polígono) parecen haber desaparecido con motivo de la existencia de un texto desde el comienzo de la resolución del problema.

El tratamiento del caso del triángulo es la principal razón para regresar al Texto en un problema de definición. En el primer experimento se cuestionó repetidamente el hecho de que el triángulo fuera un polígono, dado que no tenía diagonales. En estos casos se rechazaba o se trataba como una excepción. Sin embargo, en esta observación, la ausencia de diagonales se explica con base en la definición que ofrece el Texto: “cuando hay un triángulo ... no hay diagonales porque los lados son todos consecutivos” (Rémi 500). Este tipo de explicación es propuesta por Rémi y Christophe, Loïc y Marc, Anne y Laurence, Christophe y Olivier, Mabouba y Sihem. Esto descarta claramente el tratamiento del triángulo con su rechazo como polígono. El triángulo será descartado al ser considerado como una excepción o al introducirse una condición (§ III.2.2.d).

Hay unas pocas ocasiones adicionales en las que se regresa al Texto por problemas de definición. Las presentamos a continuación.

*Loïc y Marc.* Después de considerar las refutaciones propuestas por el observador, ellos se formulan el problema del caso del segmento:

“un segmento, con un segmento no hay lado [de hecho: vértice] consecutivo a éste” (Loïc 842).

“¡No! Pero, ¡un segmento no es una figura!” (Mar 8443)

“Es un polígono, ¡tiene 2 ángulos!” (Loïc 844)

“¿Entonces? Un polígono es a partir de 3 ángulos” (Mar 845)

“mira el papel que nos entregaron” (Loïc 848)



) □□□□ □ □ □□□□ ) \*□ □□□□□□□□□□

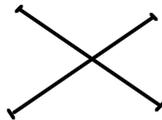
□Y DEE IF?GNCE462 BFQ N4

□DA□□ AE□□□ □ AE□□□ BF6E6?6? ⇒25□ BF6D6 4□E? 6?  
F? ⇒82C5:76□?E 56 IFD6H□□□ D6 ⇒□□? AE□□□ 4CFJ25□  
+2□3:№ D6 5:76□?4:2? ⇒□ AE□□□ □ 6DA□:3=6 BF6D62 F? GNC  
E46] □□

□=6H□□□□4□ S? 56 5□ ⇒25□ 251246?E6DD6 ⇒□□2 GNE46 D□  
?□□□ ⇒25□ 251246?E6D□ 6DA□□ 6D6□□□ 2BFC6□□□ 6D6 6D6=  
⇒25□E6 5: ;□□ +56 DE D6 DF?= 25□ D66 DE □  
N4

□ ?□□□ 251246?E6D 6?E□ 6D?□6DF? GNE46 I 2BFC□□:□□  
N4

□□□?□□ 92 □DF6=□ ⇒ AC68F?E :?:4:2= ⇒2D686D? 2 6DE A68F?E 4□  
□E:□□ =24 □□ 8FC4:R?BF6D6A□□?E6 ?=2□8FC□□



□52□ A

□A□□□ □□ D68□6?H□ □ AF□□□BF6□□ D68□6?H□ 4□D 64F  
E□□ □□ A□6:6□A□6□□□□4CFJ2 I 6□□ D68□6?H□ BF6D6 4CF  
J2? □□ 3F6?□ 6□□ 6□□ 7□□2CL F? D68□6?H□ I 6□□E□3:№]  
□□

□A□□□ N6 D4□ □ 2□□ ?E□□ 2□□ N4

□□ A6□□6?H□ 6D6? 6D6 □□ 6?H□2BFC□□5□□□ □9 I□ ?□  
4□□ □□9□ N4

□□ AE□□□ BF6E6?6? ⇒25□ BF6D6 4□E? 6? ⇒82C5:76□?  
E□□ DF□□ H□□□□□D6⇒□□?AE□□□ 4 CFJ25□□ □□

□=6H□□□□4□ S? 2 ⇒25□ 251246?E6DD6 ⇒□□2 GNE46 Y□□6DF?  
6H□□□ □:□ □:□ YBFO =6H□□□ 5:46? 6=□ 6=6H□□□  
4□ S? □ 6□□?□6DF? 6H□□□ X□□□□ ?E□ 6D?□6DF? GNC  
E46X □□ 6D] N4

□= 6H□□□□ 4□ S? 56 ⇒25□ D6 ⇒□□2 GNE46 \*O Y□ E6?6D  
□JR? ] N4

□ 6?E□ 6D6? AC?4:A□ 3F6?□□ 4□ GNE46D92I 06? ⇒□BF□  
1 □ □□

*Anne y Laurence.* Ellas hacen un análisis muy fino del Texto para efectos de decidir lo que es un polígono cualquiera:

“es en general, ah” (Lau 349)

“ah sí, estos dos son polígonos [figuras 4 y 5 del Texto] (Ann 350)

“justamente, hay que hacerlo en función de un polígono” (Lau 351)

“pues no, justamente, de un polígono normal puesto que a estos ellos los llaman ... si hubieran puesto ... no deberían ni siquiera haber puesto un polígono ... cuando ellos hablan de un polígono, es no es necesariamente uno convexo dado que ellos llaman polígonos convexos ... ellos no dicen todo el tiempo convexo [...] polígono convexo, mira, polígono cruzado: ese es el nombre [...] mientras que si ellos pusieran un polígono, pues bien, es un polígono cualquiera, si no ellos habrían puesto polígono cruzado puesto que aquí ... entonces es un polígono que no es ... no es así” (Ann 352, 354-5)

“un polígono cualquiera, ¿es qué? Es una línea quebrada cerrada, mira ...” (Ann 362)

“si los vértices son salientes habrá menos [diagonales] que si los vértices no son salientes” (Lau 365)

“5 vértices, cuando quitas 2, esto hace  $5 - 4 - 3$  normalmente deberían pasar 3 diagonales por un solo vértice” (Ann 374)

“pero si de pronto tú quitaras 3, los 2 lados consecutivos y éste, bueno, entonces éste [el cruzado] sería falso ... tú no puedes dibujar una línea que salga de un vértice porque lo quitaste” (Lau 375)

“es como un polígono cualquiera” (Ann 384)

“son estos los que son particulares, son estos 2 [figuras 4 y 5 del Texto] que son particulares y de hecho ... porque una línea quebrada cerrada ¡es esto! En general es esto ... y los 2 ... particulares son estos 2. Este es particular y éste también” (Ann 397)

“Pero este, porque lo hicieron cruzado, pero él habría podido no hacerlo cruzado” (Lau 402)

“pero lo hicieron cruzado, es claro que lo hicieron a propósito, eso quiere decir que estos 2 son particulares y que éste es cualquiera ... ¡es eso porque está escrito! Esto es una línea quebrada cerrada, bueno ... estos 2 son cualquiera: es decir, una línea quebrada cerrada pero convexa y no convexa y éste es...” (Ann 403)

“pero una línea quebrada es éste por ejemplo, la línea está quebrada, está cerrada, no es obligatorio que sea cruzada” (Lau 404)

“bueno si ella no está cruzada, ella es particular entonces” (Ann 405)

“bueno, no, no dicen cruzado aquí, dicen quebrada” (Lau 406)

“pues bien una línea quebrada cerrada, ¡es eso!” (Ann 407)

“no necesariamente” (Lau 408)

“sí, son 2 particulares ... sí ... pero particulares” (Ann 409)

“sí, pero también líneas quebradas” (Lau 410)

“sí” (Ann 411)

“yo te digo que la línea esta quebrada ... ellos habrían dicho cruzado ... línea cruzada quebrada” (Lau 412)

“que no, quebrada y cerrada, en general es así. Normalmente es eso, los 2 particulares son estos” (Ann 413)

“¿y por qué?” (Lau 414)

“bueno, porque los ponen; pero yo no sé ... entonces si te metes ahí, ¡no sabremos nunca! Entonces, esto hace.” (Ann 415)

Este análisis muy preciso del Texto responde a una necesidad producto de la resolución del problema (origen endógeno): se trata de identificar los objetos a los que se refiere el problema. Sin embargo, hay que destacar que este análisis tiene muy en cuenta a los autores como un sistema cognitivo que produce un texto al que le atribuyen una coherencia.

#### IV. CONCLUSIÓN

Este estudio sobre la resolución del problema de la enumeración de las diagonales de un polígono utilizó dos modalidades experimentales. Estas modalidades presentan contrastes importantes en los procedimientos que los estudiantes utilizaron en la validación.

La segunda modalidad, en la que los estudiantes disponen de un texto de referencia, está dominada por aproximaciones empíricas (7 de los 11 binomios observados). No hay ningún tipo de prueba intelectual de alto nivel. Este refuerzo del empiricismo parece ser consecuencia de la forma como se utilizan representaciones gráficas en el Texto. En el caso de muchos binomios, los ejemplos que se dan adquieren un carácter prototípico. Este es especialmente el caso de la figura 6 que representa un polígono cóncavo  $P_7$  con algunas de sus diagonales. Las figuras 3, 4 y 5 juegan un papel análogo.

Las refutaciones prácticamente no existen en la primera parte de la observación de la segunda modalidad. Este no es el caso de la primera parte de la primera modalidad. Allí las refutaciones tenían que ver con conjeturas que

se apoyaban en una concepción de tipo diagonal–diámetro y que eran refutadas con polígonos impares. Las definiciones dadas en el Texto descartaban este tipo de concepción. Por otra parte, para ambas modalidades, la segunda parte de la observación estuvo dominada por el tratamiento de los contraejemplos como excepción o por su rechazo. El triángulo se trata de manera análoga en ambas modalidades en el sentido de que los estudiantes reconocen que no tiene diagonales, sin caer en la cuenta que el número de sus diagonales es cero. Las definiciones dadas por el Texto en la segunda modalidad descartan la posibilidad de rechazar el triángulo como polígono. Se le considera como excepción o se introduce una condición que reduce el dominio de validez de la conjetura.

El problema de la definición se formula de manera muy diferente en las dos modalidades. En la primera, aparece claramente una problemática de la definición en varios binomios. Este fenómeno está más relacionado con la falta de solidez de las concepciones de los estudiantes y menos con los fundamentos racionales de la resolución del problema. La mitad de los binomios no enfrentará el problema de la definición, al apoyarse en definiciones de polígono y de diagonal que son reconocidas como clásicas. Por el contrario, todos aquellos que se apoyan en una concepción “frágil” de diagonal–diámetro (asociada o no a un polígono regular) enfrentarán el problema de la definición. Esto es una consecuencia de un conflicto de concepción entre

los estudiantes o de refutaciones fuertes (de  $f(n) = \frac{n}{2}$  para los polígonos impares). Como lo mencionamos anteriormente (§ II.4), el problema de la definición, y su eventual resolución, toma forma dentro de un sistema de restricciones: las concepciones de los estudiantes, la conjetura en cuestión, la existencia de un saber o de prácticas matemáticas de referencia.

En la segunda, las definiciones que se dieron juegan un papel determinante. No se evidencia ninguna huella de las concepciones erróneas de polígono y de diagonal que fueron tan frecuentes en la primera modalidad. Aparecen entonces conflictos de concepción: por ejemplo, sobre lo que es un polígono cualquiera, sobre la naturaleza del cruce por fuera de los extremos de dos lados de un polígono cruzado, etc. No obstante, estos conflictos no conducen a un verdadero problema de la definición: la definición está dada y no se cuestiona. Por el contrario, aparecen algunos problemas de interpretación del Texto que pueden generar diferencias entre los dos estudiantes de un binomio, e inclusive hacer aparecer un tercero: el autor del Texto. En efecto, en una primera fase y para efectos de resolver un conflicto de concepción o una cuestión de interpretación producto de la resolución del problema, los estudiantes parecen seguir lo que podríamos llamar “la letra del texto”. Esto se podría explicar diciendo que los estudiantes buscan comprender el texto o, inclusive, ajustar sus concepciones a un significado del texto que existiría por sí mismo y que los estudiantes pretenden reconstruir. Si hay



suficiente presión (por ejemplo, porque los estudiantes no logran llegar a un acuerdo acerca del significado del texto), entonces se utilizan las intenciones del autor para efectos de defender o atacar una interpretación dada.

Podemos concluir, al contrario de lo que se habría podido esperar en un comienzo, que el hecho de proveer una información de referencia no contribuye a una mejora del nivel de los procesos de prueba utilizados en la resolución del problema. Al tener esta información adicional, los estudiantes mejoran sensiblemente sus “actuaciones” con respecto a las soluciones propuestas. Sin embargo, también hemos visto que la presencia del Texto refuerza la existencia de pruebas empíricas y el carácter prototípico de los ejemplos que éste presenta.

Futuras investigaciones deberían tener en cuenta dos tipos de fenómenos que nosotros hemos observado, pero sobre los cuales, al no tener información suficiente, no podemos concluir de manera general:

- la evolución de la visión que los estudiantes tienen del texto: desde una visión del texto como portador de un significado “objetivo” hasta una visión del texto como reflejo de las concepciones de su autor. Y aún una evolución de una problemática que se puede traducir en la pregunta “¿qué quiere decir esto?”, hacia una problemática que expresaría la pregunta “¿qué es lo que el autor quiere decir?”.
- la percepción del texto como portador de indicaciones acerca de las intenciones del autor o de la persona que entrega el papel, intenciones éstas que tiene que ver con el problema propuesto o con la situación en la que tiene lugar la resolución.

Hay una hipótesis que parece estar corroborada en este experimento: la construcción del significado de un texto (la lectura) depende de la finalidad que éste tenga. No habría entonces un significado a priori de un texto matemático cuando éste se encuentra involucrado en una relación didáctica. Hay, más bien, un significado que es específico tanto a las concepciones del lector, como las características de la situación de lectura (particularmente en el sentido del contrato didáctico).



## CONCLUSIONES

### I. PROCESOS DE VALIDACIÓN EN LOS ALUMNOS DE COLEGIO

#### I.1. LOS TIPOS DE PRUEBA: JERARQUÍA Y FILIACIÓN

Los resultados de nuestro trabajo, de los que hemos presentado una síntesis aquí, tratan sobre la génesis de la prueba en la resolución de un problema en matemáticas. Esto es lo que en psicología se designa como microgénesis. Esto significa que nos hemos limitado al estudio de procesos de corta duración en contraposición con aquello que se requiere para un verdadero aprendizaje. Los sujetos de nuestro estudio fueron estudiantes entre los 12 y los 15 años.

Los cuatro tipos principales de prueba (empirismo ingenuo, experiencia crucial, ejemplo genérico y experiencia mental) que hemos retenido, nos permitieron diferenciar y analizar los procesos de validación utilizados por los estudiantes que observamos. Como los mostramos en el capítulo II, estos tipos no caracterizan intrínsecamente lo que se podría llamar la racionalidad de los estudiantes. En particular, dentro de un mismo proceso de resolución de un problema, se han podido observar diferentes niveles de prueba para un mismo binomio de estudiantes.

El significado de estos procesos de validación no se puede comprender sin un examen profundo del significado de las concepciones puestas en juego por los estudiantes y de la lectura que ellos hicieron de la situación en la que se encuentran. Por lo tanto, nuestro estudio corrobora la hipótesis propuesta sobre el papel de la situación como determinante esencial del nivel de las pruebas. Por otra parte, la imagen global que los estudiantes tienen de las matemáticas (aquello que es lícito y aquello que no lo es) juega un papel importante, especialmente en el tratamiento de las refutaciones.

Hemos podido mostrar que el análisis de las características de las expresiones del lenguaje de las pruebas no es suficiente para precisar el nivel. En particular, la experiencia mental, dado que ella puede recurrir en su formulación a un lenguaje familiar, utilizando en una forma primitiva los “nombre propios” (por ejemplo, el nombre de un polígono particular), puede aparentar síntomas de un nivel de prueba inferior: el ejemplo genérico. El conocimiento del proceso de producción de la prueba es el que permite tomar una decisión sobre su validez y su nivel. Este es el caso también de la distinción entre el empirismo ingenuo y la utilización del ejemplo prototípico. Finalmente, el significado de la experiencia crucial será muy diferente dependiendo de que ella sea un medio para decidir la validez de una afirmación o un medio para resolver un conflicto entre los estudiantes.

La hipótesis que propusimos acerca de una jerarquía entre los tipos de prueba también se corroboró. Pero el análisis de los procesos de validación observados permite ir más lejos al evidenciar una ruptura entre, por un lado, el empirismo ingenuo y la experiencia crucial, y por el otro, el ejemplo genérico y la experiencia mental. Esta ruptura se puede caracterizar como aquella del paso de una verdad formulada sobre la base de la constatación de un hecho a aquella de una verdad fundada en la razón. Se trata de un verdadero cambio de problemática. Es decir, de la manera misma en que se ve y se formula el problema de la validez de una afirmación. La fuente de este cambio puede residir en el deseo de eliminar una incertidumbre. No obstante, un obstáculo frecuente a su realización efectiva proviene de la naturaleza de las concepciones de las que disponen los estudiantes sobre las nociones matemáticas en juego, o, también, de los medios de lenguaje que ellos pueden construir (o de los que disponen).

Reconocemos además una filiación entre el empirismo ingenuo y la experiencia crucial, cuando ésta se utiliza para los propósitos de la prueba. El paso del primero al segundo tipo de prueba corresponde a la toma de conciencia de la exigencia de asegurar la generalidad de la conjetura propuesta. Sin embargo, estos dos tipos provienen de una misma racionalidad empírica (e.g., salida de la experiencia) según la cual la acumulación de hechos consolida la convicción en la validez de una afirmación (Fishbein 1982, p. 17). Otra filiación es aquella del ejemplo genérico y la experiencia mental. El paso del primer al segundo tipo de prueba se basa en una construcción de lenguaje que implica el reconocimiento y la diferenciación de los objetos y de las relaciones en juego en la resolución del problema. Es decir, es una construcción cognitiva. El ejemplo genérico constituye un estado transitorio en el paso de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales, en la medida en la que requiere siempre de una negociación sobre el carácter genérico del ejemplo utilizado. Esta fragilidad incita a una evolución hacia la experiencia mental que se separa de lo particular.

Hemos encontrado en nuestras observaciones referencias a la demostración. Pero esto tiene que ver, en general, con la evocación de la obligación de principio de producir una prueba “matemática”. Más exactamente, con referencia a la actividad en curso, de marcar la exigencia de una formulación que sería reconocida como matemática. Las tentativas de algunos alumnos de establecer una prueba al restituir herramientas matemáticas se encuentran con la dificultad de darles un significado dentro del dominio específico del problema a resolver.

## **I.2. EL EMPIRISMO INGENUO**

Las fuentes del empirismo ingenuo, tal y como lo hemos podido observar, tienen que ver con dos tipos de fenómenos diferentes: la evidencia de los hechos y la evidencia de la razón.

En el primer caso, hemos de considerar que se trata de una manifestación de pragmatismo empírico según la cual los estudiantes “se satisfacen” efectivamente con la observación. Este comportamiento puede estar favorecido por algunas lecturas de la situación (por ejemplo como “juego de adivinanza”) o por los conflictos entre los alumnos que pueden conducirlos a dirigirse hacia el observador (o el profesor), más que a comprometerse en un proceso más elaborado de validación.

El caso es completamente diferente cuando la fuente del empirismo ingenuo es la evidencia de la razón. No se trata entonces de un simple pragmatismo empírico, sino de una convicción en la validez de una afirmación, que, aunque proveniente de la observación, su análisis está fundado en unas concepciones que no se hacen explícitas y que no son analizadas por el sujeto mismo (cf, el caso de  $f(n) = \frac{n}{2}$ ). Esto es lo que Fishbein llama “creencia cognitiva”.

La distinción entre estas dos formas de empirismo no se puede hacer a partir únicamente del examen de las producciones de los alumnos. Para ello es necesario el análisis de los procesos de producción. Solamente este análisis puede mostrar los orígenes del empirismo observado.

También debemos distinguir el empirismo ingenuo del reconocimiento por parte del alumno del valor prototípico de un ejemplo. Esta distinción no puede, tampoco, hacerse a partir de las solas producciones de los alumnos, quienes, en los dos casos parecen fundarse sobre algunos ejemplos de la validez de su afirmación. Pero el valor del ejemplo prototípico es radicalmente diferente en la medida en que el problema de la generalización se tiene en cuenta efectivamente por parte del alumno que lo resuelve, al producir la hipótesis de que el ejemplo propuesto por un documento entregado, o dado con el problema, es una representación fiel de los objetos a los que se refiere la afirmación en cuestión. Se trata, en este caso, de un fenómeno esencial desde el punto de vista didáctico. Esta situación cuestiona la utilización de los ejemplos para propósitos de enseñanza y el significado para los alumnos. Es cierto que estos ejemplos permiten mostrar algunas propiedades. Pero ellos reciben también la condición de hecho. Esto puede ser un obstáculo para el desarrollo de procesos de prueba más elaborados.

De esta manera se formula el problema didáctico de la utilización de las definiciones por ostensión. Falta estudiar las implicaciones en relación con las concepciones que los estudiantes desarrollan sobre el procedimiento mismo y su validez.

### **I.3. LA EXPERIENCIA CRUCIAL**

La experiencia crucial marca una etapa importante en la toma de consciencia de la validez de una afirmación, al formular el problema de la generalización. Ella es una respuesta empírica que fundamenta la convicción de

algunos alumnos. Su origen puede ser la toma de consciencia de la insuficiencia de la verificación inicial sobre algunos ejemplos y la imposibilidad, en términos cognitivos o de lenguaje, de ir más allá a partir del lugar en el que se encuentran los alumnos. Un ejemplo significativo es el caso de las soluciones por “recurrencia”, observados en la resolución del problema de la enumeración de las diagonales de un polígono.

Pero, mientras que el empirismo ingenuo desaparece cuando se ponen en juego las pruebas intelectuales, la experiencia crucial subsiste como un procedimiento último para asegurar la convicción, notablemente cuando la afirmación ha sido fundamentada en un ejemplo genérico. Encontramos aquí un ejemplo de cohabitación operacional entre el pragmatismo empírico y el racionalismo lógico que ha sido puesto en evidencia por Fishbein (1982). Él considera que se trata de dos tipos de racionalidad de orden y de validez práctica diferente en la medida en que el pragmatismo empírico mantiene su funcionalidad en la práctica cotidiana, exterior a las matemáticas.

Como lo describimos arriba, la experiencia crucial toma un significado diferente en la interacción social en la que ella se convierte en un medio para resolver conflictos acerca de la validez de una afirmación o sobre la elección entre dos conjeturas. Por lo tanto, no la consideramos verdaderamente como un medio de prueba, excepto cuando se constituye de hecho en la refutación de una afirmación. Por el otro lado, ella aporta un sustento a una de las soluciones propuestas, aún sin validarla. Su función esencial es entonces la de permitir la defensa contra una oposición. Se puede notar precisamente en estas circunstancias que hay disponibles otras explicaciones de la validez de la afirmación (Georges contra Olivier, Bertrand contra Christophe).

#### **I.4. EL EJEMPLO GENÉRICO Y LA EXPERIENCIA MENTAL**

Hemos mostrado como concebimos las relaciones de filiación entre el ejemplo genérico y la experiencia crucial. La segunda se puede relacionar con el primero en un proceso de descontextualización que requiere notablemente de la eliminación de marcas de lo particular. Insistimos sobre el hecho de que este proceso, que puede aparecer en un primer análisis como esencialmente de lenguaje, requiere de construcciones cognitivas complejas para determinar los objetos y las relaciones que se ponen en juego en la prueba. Esta complejidad explica en parte que hayamos observado en la construcción de una experiencia mental que ciertas proposiciones intermedias tienen fundamentos más primitivos (ejemplo genérico, inclusive empirismo ingenuo).

A partir de la experiencia mental, los procesos de descontextualización, destemporalización y despersonalización pueden continuar, permitiendo la expresión de pruebas que consisten en un “cálculo sobre enunciados”, marcando el paso de acciones interiorizadas y designadas a un cálculo sobre relaciones. No obstante, este proceso fue observado muy pocas veces. Un fenómeno de este orden pudo ser observado con motivo de los problemas so-

bre el área y el perímetro de un rectángulo en el paso al cuadro numérico que permite una expresión y un cálculo sobre relaciones. No obstante, los alumnos se enfrentan al problema de la construcción del significado de los símbolos que ellos manipulan en referencia con el problema que están tratando. Esto confirma de nuevo nuestra hipótesis de la unidad de aspectos de lenguaje y cognitivos.

Estos análisis nos llevan a sugerir la hipótesis de que el paso de la experiencia mental al cálculo de enunciados requiere no solamente de los procesos mencionados aquí, sino también de la constitución de una teoría de las concepciones puestas en juego por los estudiantes. Teoría, ésta, que ella sola, permitiría un verdadero cálculo. Debemos anotar aquí que la duración relativamente corta de las situaciones que observamos se opone seguramente a construcciones con este nivel de complejidad.

### **1.5. EL TRATAMIENTO DE LAS REFUTACIONES**

La mayor parte de las posibilidades que produjimos con base en el análisis propuesto por Lakatos (1978) fueron encontradas en el análisis del tratamiento de las refutaciones a las que se enfrentaron los alumnos en el curso de la resolución del problema o que les fueron propuestas por el observador. El punto importante es el de los criterios de selección entre las cuestiones producto de una refutación. Lakatos no propone ninguna respuesta en su estudio. Él se limita a dar cuenta de su aparición. En lo que concierne a los alumnos, nosotros hemos puesto en evidencia esencialmente dos factores: la concepción global que ellos tienen de las matemáticas y su lectura de la situación. Estos dos factores pueden inhibir o favorecer ciertos tratamientos en lugar de otros. Por el otro lado, cuando el análisis de la refutación tiene lugar con referencia a un problema, la selección aparece muy abierta. Con base en nuestras observaciones y en los medios teóricos disponibles en la actualidad, no podemos dar indicaciones generales sobre aquello que conduce a un alumno a preferir modificar una conjetura, introducir una condición o, por ejemplo, reconsiderar el dominio de validez, e, inclusive, la definición de los objetos en cuestión.

El único punto sobre el que creemos que podemos sugerir una hipótesis tiene que ver con el papel jugado por “robustez” de las concepciones movilizadas por los alumnos. Cuando se conjuga con un dominio de validez de “talla” significativa de la conjetura en cuestión, esta robustez conduce a privilegiar los tratamientos que tiene que ver con la eliminación del contraejemplo: excepción, exclusión del dominio de validez de los objetos para los que el contraejemplo parece ser un representante, entre otros.

El tratamiento de una refutación no conduce necesariamente a un cuestionamiento de los fundamentos de la conjetura como uno habría podido pensar a priori, sobretodo si ella se encuentra fundamentada en un empirismo ingenuo. En efecto, lo que le corresponde a este tipo de fundamento es lo que nosotros hemos llamado un tratamiento *ad hoc* del contraejemplo.

Este consiste en tener en cuenta dentro del contraejemplo las características que no se relacionan con aquello que fundamenta la conjetura. Hemos identificado especialmente: el abandono inmediato de la conjetura, las modificaciones *ad hoc* de la conjetura, y el rechazo del contraejemplo considerado como patológico. Estos tratamientos buscan de cierta manera la eliminación de hecho de la contradicción sin explorar aquellos que podría constituir los orígenes dentro del proceso de resolución del problema. El hecho de entrar en una dialéctica de la validación no es suficiente por el mismo para permitir una evolución de los procesos de prueba puestos en juego. Un estudio complementario al presentado aquí muestra que el progreso puede provenir únicamente de una problematización del significado de la contradicción, e inclusive de un cuestionamiento o de una reorganización de las concepciones de los alumnos. Este cuestionamiento y esta reorganización no son automáticos.

## **II. ELEMENTOS DE LA COMPLEJIDAD DEL PROBLEMA DE LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN**

Con motivo de los trabajos sobre los procesos de prueba en situación de resolución de problemas, hemos tratado la cuestión de las características de una ingeniería didáctica susceptible de favorecer la introducción de una problemática de la prueba al comienzo del aprendizaje. Estos trabajos no se presentan en este libro. No obstante, presentamos aquí sus conclusiones dado que ellas permiten mostrar la pertinencia de nuestra aproximación para la enseñanza y lo que uno puede esperar desde el punto de vista práctico (Para una introducción general a la ingeniería didáctica, ver (Artigue et al., 1995) en un libro de esta misma colección).

### **II.1. EL PAPEL DE LA INTERACCIÓN SOCIAL: DEMOSTRACIÓN Y ARGUMENTACIÓN**

La interacción social juega un papel central en nuestra aproximación a los problemas de la enseñanza de la demostración. Por un lado, nuestro análisis de la demostración ha puesto en evidencia la necesidad del contexto social para construir su significado como un medio de prueba. En efecto, ella se caracteriza dentro de la comunidad matemática, no solamente por su estructura específica, sino también por el hecho de que ella es el medio privilegiado de validación y de comunicación. Por el otro lado, nosotros hemos retenido la hipótesis del papel motor de la interacción social en el desarrollo de los procesos de validación.

Este punto de vista no es contradictorio con nuestros trabajos experimentales. Ellos muestran la complejidad de los fenómenos que se encuentran ligados a las situaciones en las que se concibe su adopción. Claro está que la interacción social ha favorecido el desarrollo de procesos de valida-



ción. Los alumnos que resuelven un problema común deben explicar o justificar sus actuaciones a los compañeros. Pero hemos observado que todo emparejamiento de alumnos, o toda situación de debate no genera necesariamente interacciones favorables. Por el contrario, en ciertos casos la interacción social se pudo constituir en un obstáculo cuando los alumnos, como consecuencia de su compromiso como personas, o de su incapacidad de coordinar sus puntos de vista, no lograron superar el conflicto. Estas interacciones pudieron favorecer especialmente el empirismo ingenuo o justificar el recurso a la experiencia crucial como medio de obtener la adhesión del compañero en detrimento de la utilización de medios de prueba de un nivel más elevado y que se encontraban disponibles.

Se podría sugerir aquí que se trata de un efecto de la interacción social que habría podido ser resuelto con una ingeniería didáctica más fina (por un emparejamiento adecuado de los alumnos, o un juego sobre las restricciones de la situación). Se trata de un problema complejo que debe ser estudiado. Por el otro lado, apareció un obstáculo de una naturaleza completamente diferente y que es específico a la interacción social. Se trata de las actividades de argumentación: “actividad por medio de la cual una persona —o un grupo— buscan llevar a un auditorio a adoptar una posición con base en representaciones —argumentos— que buscan mostrar la validez o el buen fundamento” (Oléron, 1983, p. 4). La argumentación se convierte en un elemento constitutivo de los procesos de validación puestos en juego dentro del contexto social. Pero, regresando a la distinción propuesta por Moeschler (1985) y la nuestra, no consideramos que la argumentación se identifique con la prueba. Como lo nota Oléron, el objeto de la argumentación es el de obtener la adhesión del interlocutor al buen fundamento de lo que se sostiene. Esto no genera ningún problema con respecto a su verdad. La argumentación como acto social se caracteriza por el carácter abierto de los medios a los que recurre: “mientras que la demostración, en su forma más perfecta, es una sucesión de estructuras y de formas en las que no se puede cambiar su desarrollo, la argumentación tiene un carácter no restrictivo. Ella le permite al autor la duda, la libertad de elección. Inclusive cuando ella propone soluciones racionales, ella no tiene seguridad absoluta” (Perelman, 1970, p.41).

En el nivel que nos interesa, el del alumno, esta preeminencia de la argumentación en el proceso de validación dentro de un contexto social, tiene que ver con su anterioridad en el desarrollo del niño. Ella está relacionada de manera operacional con su socialización. A lo largo de esta socialización hay diversas situaciones de interacción (no solamente escolares, por supuesto) que le permiten desarrollar y verificar formas de discurso y estrategias argumentativas eficaces. Se trata de modelos que serán movilizados en primera instancia en las situaciones de validación que hemos utilizado (en nuestra investigaciones, más precisamente en los procesos didácticos puestos en práctica con propósitos de investigación o de enseñanza). Hemos ob-

servado cómo las conductas que corresponden a estos modelos se constituyen en un obstáculo esencial para la entrada de los alumnos en las actividades de prueba específicas a las matemáticas, para las que los “argumentos” utilizados y las reglas de inferencia sólo pueden ser consideradas en un conjunto bien preciso sobre el que existe un consenso de la comunidad en cuestión.

Esta importancia de las actividades argumentativas naturales nos sugiere que el tratamiento *ad hoc* de una refutación puede, además de tener un significado específico para la actividad matemática, corresponder a una conducta en la que prima la eliminación de lo que podría ser visto como una objeción y que no sería considerado como una refutación significativa de una contradicción. Lo que se cuestionaría no sería la racionalidad aún contextualizada (i.e. en situación) de los alumnos, sino una referencia implícita a un modo de interacción.

Estos análisis aclaran de una nueva manera la complejidad del problema de la enseñanza de la demostración. No se trata de formularla en términos de construcción cognitiva, sino de tener en cuenta la negociación de entrada de los alumnos en un juego de interacción social que tiene reglas específicas. En efecto, las actividades argumentativas tienen su validez y su eficiencia tanto en los dominios de la vida social (como las negociaciones políticas o aquellas del medio familiar, para citar solamente dos ejemplos) donde ellas respetan “condiciones mínimas para la ejecución del discurso, directamente relacionadas con la representación de ‘exigencias funcionales’ de la situación” (Esperet et al., 1987, p.21). El carácter funcional y adaptado a estas otras situaciones nos conduce a sostener que el problema no es el de obtener el rechazo, por parte de los alumnos, de los modelos que corresponden al beneficio del modelo matemático de la prueba (lo que demostraría un “voluntarismo cientifista” que habría, al menos, que discutir), sino de precisar el dominio operatorio.

## II.2. EL PROBLEMA DE LA DEVOLUCIÓN

Hay una segunda hipótesis importante que surge de nuestro trabajo. Se trata de una transferencia necesaria de lo verdadero en la clase, del profesor hacia los alumnos. Esta transferencia es necesaria para que la demostración pueda ser reconocida y vivida por los alumnos como un verdadero medio de prueba. Hemos buscado obtener esta devolución en dos contextos: aquel de la construcción de una conjetura (sobre la suma de los ángulos de un triángulo) y aquella de la resolución de un problema en una circunstancia particular (búsqueda de un medio de cálculo del perímetro de un triángulo truncado). Estas situaciones, utilizadas dentro del marco de un proceso didáctico, tienen dos finalidades particulares: una finalidad de primer orden relacionada con la resolución por parte de los alumnos de un problema determinado, y una finalidad de segundo orden asignada por el organizador de la situación en términos de objetivo de enseñanza (objetivo a un plazo

más o menos largo, Laborde, 1986). Nosotros utilizaremos esta distinción para analizar los fenómenos relacionados con la devolución.

El propósito del proceso de devolución es lograr que los comportamientos, las elecciones y las decisiones de los alumnos estén motivadas por finalidades de primer orden. Esto no se puede obtener, a menos de que el alumno entre en el “juego” que le propone el profesor. Si él acepta, explícitamente o no, ignorar las finalidades de segundo orden, que, por la naturaleza de los procesos didácticos, existen necesariamente. Las actividades organizadas dentro del marco de la enseñanza tienen, primero que todo, una finalidad de aprendizaje. Más allá de las dificultades para obtener la devolución (ver a este respecto Brousseau, 1986, pp. 314-325), nuestros trabajos permiten poner en evidencia dos restricciones para asegurar el mantenimiento del contrato realizado de hecho entre los alumnos y el profesor:

- la situación debe permitir la autonomía de los alumnos para administrar y controlar ellos mismos su actividad. Si éste no es el caso, ellos buscarán, en el análisis de las finalidades de segundo orden, los medios para desbloquear su situación. Ya sea, ellos buscan indicaciones sobre lo que se quiere de ellos, o ellos se dirigen hacia el profesor.
- el profesor debe tener garantías a priori sobre la compatibilidad de la duración de la actividad de los alumnos con la organización del tiempo impuesto por el sistema didáctico. Él debe también tener garantías sobre la naturaleza de sus actividades. Es decir la naturaleza de las soluciones que ellos producen para el problema propuesto. Esto hace parte de su responsabilidad como profesor de matemáticas (Arsac et al., 1992; Balacheff, 1991b). Cuando no es el caso, él se ve obligado a realizar intervenciones que cuestionan el significado mismo de la situación y terminan el contrato acordado localmente con los alumnos. Cuando el comportamiento de los alumnos es de hecho coherente y pertinente en relación con una lectura legítima, pero posiblemente no esperada de la situación, entonces toda intervención del profesor conduce a la pérdida de la posibilidad de lograr las finalidades de segundo orden. Esto es posible solamente si el logro de las finalidades de primer orden se encuentra sustentado por una actividad “verdadera” de los alumnos (pp. 315-6).

Por otro lado, las secuencias didácticas que hemos construido y puesto en práctica pertenecen, desde el punto de vista de la devolución, a dos grandes clases: la primera busca provocar y especificar un conflicto socio-cognitivo (Doise y Mugny, 1981) en la clase, con motivo de una conjetura cuyo significado profundo es un cuestionamiento de las concepciones de los alumnos (Balacheff, 1991a); la segunda consiste en construir una ficción, un “juego”

acerca de un problema que hay que resolver. El centro del debate de validación es la validez de las soluciones propuestas sin que, sin embargo, se cuestionen las concepciones de los alumnos.

Estas dos clases de situaciones tienen que ver con problemas distintos desde el punto de vista de la prueba: en el primer caso, dado que el problema tiene que ver con el rigor, se formula el problema del saber; en el segundo caso, dado que el problema tiene que ver con la eficiencia, se formula el problema del hacer. Hemos discutido esta oposición en nuestro análisis de la prueba en relación con un problema global de aprendizaje. Esta distinción se impone aquí al nivel local de las situaciones.

En la segunda clase de situación, la validación tiene que ver tanto con el problema de verdad, como también con aquel de la eficiencia y de la comunicabilidad de las soluciones propuestas. De esta forma, se movilizan varios registros de validación que favorecen el desarrollo de actividades argumentativas. Estas actividades son requeridas por la dimensión social de estas situaciones y no solamente por la prueba. Estos registros, al no tener a priori una jerarquía para los alumnos, pueden mantener a un lado los problemas de prueba que uno desea generar. La utilización de este tipo de situaciones tiene como objetivo obtener la devolución, al finalizar la resolución de un problema con relación a las parejas y no al profesor. Cuando uno reconoce que las instrucciones del tipo “mostrar que...” o “encontrar que...” implican que los alumnos buscarán primero que todo descubrir aquellos que el profesor ha “escondido”, este camino hacia la ficción del juego es legítimo.

Pero este tipo de situaciones sitúan de alguna manera las actividades de validación matemática en competencia con otras herramientas, disponibles y legítimas. Es por ello que convendría distinguirlas en la medida en la que la finalidad de segundo orden es el aprendizaje de la prueba, ver de la demostración. Ellas parecen, por lo tanto, estar mal adaptadas puesto que aumentan la complejidad de la enseñanza y pueden constituirse eventualmente en un obstáculo para el logro del objetivo buscado. Uno puede, no obstante, formular el problema de la existencia de un juego de restricciones que permitiría privilegiar las actividades de prueba matemática y mantener a un lado los otros aspectos de la validación (eficiencia, eficacia, comunicabilidad, etcétera).

### **II.3. UN PROBLEMA DIDÁCTICO: LA CONSTRUCCIÓN DE SITUACIONES DE DEBATE SOBRE LA PRUEBA**

El análisis que presentamos en el último párrafo pone en evidencia un hecho que habíamos tenido en cuenta inicialmente: la construcción de pruebas en matemáticas es constitutiva de la construcción de conocimiento. Esto constituye una parte de su especificidad: la producción de los matemáticos es ante todo la del saber. Ella exige una elaboración teórica para la cual la demostración es una herramienta privilegiada. Ella permite, de un

lado, validar un saber nuevo, y, de otro lado, participa en la reorganización de los saberes antiguos que lo reciben al mostrar cómo se establecen los enlaces. De esta manera, nosotros proponemos que el aprendizaje de la demostración debe hacerse en el mismo momento que el de las matemáticas mismas. No se puede “aislar” para propósitos de enseñanza, como puede ser el caso para otras nociones. Una herramienta didáctica específica a este aprendizaje serían entonces las situaciones de conflicto socio-cognitivo.

El problema que aparece es que aunque disponemos de medios teóricos para abordar la construcción de estas situaciones (Brousseau, 1986), se trata, de hecho, de situaciones de validación con respecto a la solución de un problema determinado. Por el otro lado, ellas no constituyen situaciones de acción (en el sentido de Brousseau, 1986) si uno asume el punto de vista de la prueba en matemáticas. En efecto, para retomar la distinción entre herramienta y objeto propuesta por Douady (1984), los medios de prueba utilizados por los alumnos en estas situaciones funcionan como herramientas y no como objetos en el sentido en el que los alumnos los ponen en práctica sin considerarlos explícitamente, ni cuestionarlos. En efecto, independientemente de la presión que ejerza el debate de validación, ver refutaciones, los alumnos que observamos no cuestionan las reglas de validación movilizadas para fundamentar su posición. Pero el proceso didáctico no puede evitar la explicitación de los conocimientos que él desea lograr en los alumnos y la constitución de un saber. En efecto, para que se pueda institucionalizar una construcción intelectual propia a un individuo (adquirir un carácter social) “es necesario, ante todo, que ella funcione como tal en los debates científicos y en las discusiones entre los alumnos” (Brousseau, 1981, pp. 51-52 — lo que estamos resaltando—, ver también a este respecto Douady, 1984, pp. 14-17).

La complejidad del aprendizaje de la demostración aparece de tal forma que nosotros no pretendemos construir situaciones que le permitan al alumno sólo construir la herramienta de prueba que es la demostración. El problema consiste en construir situaciones que lo problematicen. La demostración, como objeto técnico propuesto por el profesor, de manera adecuada, tomaría entonces todo su significado. La construcción de situaciones que permitirían los debates sobre la prueba, la determinación de sus características y de sus restricciones son problemas abiertos para la investigación didáctica.



## REFERENCIAS

- Arsac, G. y Mante, M. (1983). Des «problèmes ouverts» dans nos classes du premier cycle. *Petit X*, 2, 5-33.
- Arsac, G., Balacheff, N., Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 5-29.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.) (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Audibert, G. (1982). *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane*. Thèse d'état, Université des Sciences et Techniques du Languedoc.
- Balacheff, N. (1978). Une utilisation et une étude de la classification proposée par A.W. Bell pour l'étude des preuves formulées par des élèves. *Séminaire de pédagogie des mathématiques I*. Grenoble: Institut IMAG.
- Balacheff, N. (1979). Quelques aspects du sens donné à une explication en mathématiques par des élèves de 10-11 ans. *Séminaire de pédagogie des mathématiques 7*. Grenoble: Institut IMAG.
- Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3 (3), 261-304.
- Balacheff, N. y Laborde, C. (1985). Langage symbolique et preuves dans l'enseignement mathématique: une approche socio-cognitive. En G. Mugny. *Psychologie sociale du développement cognitif*. Berne: Ed. Peter Lang.
- Balacheff, N. y Laborde, C. (1985b). Social interactions for experimental studies of pupil's conceptions: its relevance for research in didactics of mathematics. En H. G. Steiner y A. Vermandel (Eds.), *Proceedings of the second TME-conference on "Foundation and Methodology of the Discipline Mathematics Education"* (pp. 189-195). Bielefeld: IDM Bielefeld.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18 (2), 147-176.
- Balacheff, N. (1988). Le contrat et la coutume. Deux registres des interactions didactiques. En C. Laborde (Ed.), *Actes du Premier Colloques Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique* (pp. 15-26). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Balacheff, N. (1991a). Construction et analyse d'une situation didactique: Le cas de "la somme des angles d'un triangle." *Journal für Mathematik-Didaktik*, 12 (2/3), 199-264.
- Balacheff, N. (1991b). The benefits and limits of social interaction: The case of teaching mathematical proof. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. Van Dormolen

- (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer.
- Bareil H. y Zehren C. (1986). *Mathématiques 6°*. Paris: Editions Hachette.
- Bassis, O. (1984). *Mathématique: les enfants prennent le pouvoir*. Paris: Fernand Nathan, coll. Education.
- Bell, A. (1976). *The learning of general mathematical strategies*. Ph. D. Université de Nottingham.
- Bezouth, 1832.
- Blanché, R. (1973). *Le raisonnement*. Paris: P.U.F.
- Bodin, A. (1980). *Mise au point d'un questionnaire. Observation. Entretiens de binômes et individuels*. DEA de Didactique des mathématiques. Université de Strasbourg.
- Borel, E. (1948). La définition en mathématiques. En F. Le Lyonnais. *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris: Cahiers du sud.
- Borenson, H. (1986). Teaching the Process of Mathematical Investigation. *Arithmetic Teacher*, 33 (8), 36-38.
- Bourbaki, N. (1948). L'architecture des mathématiques. En F. Le Lyonnais. *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris: Cahiers du sud.
- Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris: Ed. de Minuit.
- Brousseau, G. (1975). *Etude de l'influence des conditions de validation sur l'apprentissage d'un algorithme*. IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1977). L'étude des processus d'apprentissage en situations scolaires. *Cahier IREM* 18. IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2 (1).
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.
- Burke, M. J. (1984). *The use of counterexample logic by adolescent*. Ph. D., The University of Wisconsin – Madison.
- Cauchy, A. L. (1821). Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. Oeuvres, ser. 2, Vol. 3. Paris: Gauthier-Villars, 1987.
- Cavaillès, J. (1962). *Philosophie des mathématiques*. Paris: Hermann.
- Chevallard, Y. y Tonnelle, J. (1982). Evidence et démonstration. *Actes de la III° Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Orléans: Ed. A. Rouchie.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage (Nouvelle édition augmentée 1991).
- Dahan-Delmedico, A. y Peiffer, J. (1982). *Routes et dédales*. Paris: Etudes vivantes.



- Dieudonné, J. (1980). Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques. *Séminaire de philosophie des mathématiques*. IREM de Paris Nord.
- Dieudonné, J. (1984). Préhistoire de la topologie algébrique. *Sans tambour ni trompette* (pp. 9-10). IREM de Lyon.
- Doise, W. y Mugny, G. (1981). *Le développement social de l'intelligence*. Paris: Interédition.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état, Université de Paris VII.
- Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Bernes: Peter Lang.
- ERMEL (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*. tome 1. Paris: OCDL.
- Espéret, E., Coirier, P., Coquin, D. y Passerault, J. M. (1987). L'implication du locuteur dans son discours: discours argumentatif formel et naturel. *Argumentation*. Bruxelles.
- Fishbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 3 (2), 9-18 et 24.
- Bacon, F. (1620). *Novum Organum*.
- Freudenthal, H. (1980). *Weeding and sowing: preface to a science of mathematical education*. Dordrecht: Reidel Publ. Co.
- Galbraith, P. L. (1979). *Pupils proving*. Shell Centre for Mathematics Education, Université de Nottingham.
- Gaud, D. & Guichard J. P. (1984). Apprentissage de la démonstration, *Petit X*, 4, 5-25.
- Glaeser, G. (1986). *La didactique expérimentale des mathématiques*, 2° partie: la conception génétique. Université Louis Pasteur, IREM, Strasbourg.
- Gras, R. (1983). Instrumentation de notions mathématiques. Un exemple: la symétrie, *Petit X*, 1.
- Guersho, H. y Sowde r, L. (1998). *Students' Proof Shemes: Results from Exploratory Studies*. MAA.
- Halbwachs, F. (1981). Significations et raisons dans la pensée scientifique. *Archives de Psychologie XLIX*, 190, 199-229.
- Hanna, G. (1983). Rigorous proof in mathematics education. *Curriculum Series* 48, The Ontario Institut for Studies in Education.
- Kayas, G. J. (1978). *Les éléments d'Euclide*. Paris: Editions du CNRS.
- Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique*. Thèse d'état, Université de Grenoble I.
- Laborde, C. (1986). Divers aspects de la dimension sociale dans les recherches en didactique des mathématiques. *Colloque franco-allemand de didactique des*

- mathématiques et de l'informatique*. Marseille-Luminy. Eds. Université 1 de Grenoble
- Lakatos, I. (1976). *Preuves et réfutations*. Paris: Hermann Ed., 1985.
- Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. La Lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza Universidad.
- Mejias, B. (1985). *Difficultés conceptuelles dans l'écriture d'algorithmes itératifs chez des élèves de Collège*. Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Grenoble 1.
- Meray, C. (1874). *Nouveaux éléments de géométrie*. Paris: F. Savy, Editeur-Libraire.
- Miéville, D. (1981). Explication et discours didactique de la mathématique. *Revue européenne des sciences sociales et Cahiers Vilfredo*. Pareto XIX, 56, pp.115-152.
- Moeschler, J. (1985). *Argumentation et conversation*. Paris: Hatier-Crédif
- Oléron, P. (1983). *L'argumentation*. Paris: PUF
- Paquelier, Y. (1985). Argumentation et démonstration: analyses de quelques phénomènes de persuasion dans l'enseignement mathématique. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 70. Grenoble: Université.
- Perelman, Ch. (1970). *Le champ de l'argumentation*. Bruxelles: Presses universitaires.
- Petit, B. (1986). L'évidence. *Revue trimestrielle de droit civil* 3, pp. 486-503.
- Piaget, J. et al. (1970). *L'explication dans les sciences*. Paris: Flammarion.
- Piaget, J. (1974). *Recherches sur la contradiction*, Vol. 2: les relations entre affirmations et négations. Paris: P.U.F.
- Piaget, J. (1975). L'équilibration des structures cognitives. *Etudes d'épistémologie cognitive* Vol. XXXIII, Paris: P.U.F.
- Piaget, J. (1978). Recherches sur la généralisation. *Etudes d'épistémologie cognitive* Vol. XXXVI, Paris: P.U.F.
- Piaget, J. (1983). *Le possible et le nécessaire*, Vol.2: l'évolution du nécessaire chez l'enfant. Paris: P.U.F.
- Piaget, J. y Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.
- Popper, K. R. (1972), *La connaissance objective*. Bruxelles: Ed. Complexe, 1978.
- Robert, (1977). Le petit Robert, dictionnaire de la langue française.
- Robert, A. (1982). *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*. Thèse d'état, Université de Paris VII.
- Reynolds, J. (1967). *The development of the concept of proof in grammar school pupils*. Ph. D. University of Nottingham, School of Education.

- Sémadéni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the learning of mathematics*, 4 (1), 32-4.
- Senk, S. (1985). How well do students write proofs? *Mathematics teacher*.
- Stein, M. (1981). Bibliography on proof in mathematics teaching ZDM.
- Swart, E. R. (1980). The philosophical implications of the four-color problem. *The American Mathematical Monthly*, 87 (9), 697-707.
- Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Actes du V<sup>o</sup> colloque du groupe Psychology of Mathematics Education*, Grenoble: IMAG.
- Vertes, R.N. (1983). Diagonals of a Polygon. *Mathematics Teaching*, 12, 17-19.
- Vinner, S. (1983). The notion of proof—some aspects of student's views at the senior high level. *Actes du VII<sup>o</sup> colloque du groupe Psychology of Mathematics Education*, Ed. R. HersHKovitz, Weismann Institut of Science Rehovot.



## ¿A DÓNDE VA LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA PRUEBA?

PATRICIO G. HERBST<sup>1</sup>

THE UNIVERSITY OF MICHIGAN, ANN ARBOR

La traducción de la tesis de Nicolás Balacheff al castellano es un hecho que debe celebrarse, particularmente por lo que esta obra significa para quienes nos interesamos en investigar la problemática de la validación de los conocimientos matemáticos en la clase. Como resulta evidente de la lectura del libro, el trabajo reconoce tres filiaciones intelectuales importantes. Hay una filiación epistemológica con las obras de Imre Lakatos (1976, 1978), de quien Balacheff obtiene la noción fundamental de que pruebas y refutaciones están necesariamente ligadas a las concepciones de los objetos matemáticos —las pruebas sirven a la construcción de objetos matemáticos (véanse también Balacheff, 1991a y Balacheff, en preparación) y por lo tanto son irreducibles a la lógica formal. Hay una filiación antropológica con la obra de Pierre Bourdieu (1990), que le permite a Balacheff establecer una relación fundamental entre la prueba y las prácticas matemáticas de los alumnos —las pruebas se adaptan a las necesidades de gestión de los objetos matemáticos dentro de una cierta práctica de los conocimientos (o una racionalidad). Y fundamentalmente, hay una filiación didáctica con la obra de Guy Brousseau (1997) de quien Balacheff toma la noción de *situación de validación* como modelo para pensar en situaciones donde la producción de pruebas y refutaciones constituya el sentido de la demostración matemática (que se vuelve la solución óptima a un problema de producir una prueba).

### I. RELACIONES ENTRE PRUEBA Y DEMOSTRACIÓN

Vale la pena citar nuevamente las definiciones de *prueba* y *demonstración* propuestas por Balacheff (véase también Balacheff, 1987),

El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad. Esta posi-

---

1. Agradezco los comentarios de Humberto Alagia, Nicolás Balacheff, y Pedro Gómez a una versión preliminar de este documento.

ción no es definitiva; con el tiempo puede evolucionar [...]. Por otro lado, una prueba puede ser aceptada por una comunidad, pero también puede ser rechazada por otra. [...] El tipo de prueba dominante en matemáticas tiene una forma particular. Se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas. De aquí en adelante llamaremos *demostración* a estas pruebas. (pp. 12-13)

Es posible dar una lectura jerárquica a esas definiciones (la *demostración* es un estadio más desarrollado que la *prueba*) o inclusiva (la *demostración* es un tipo de *prueba*). Sin embargo, me parece importante recalcar que la *demostración* y la *prueba* están además en relación dialéctica en línea con la distinción, clásica en la didáctica francesa, entre *saber* y *conocimiento*: Una explicación — un cierto discurso de validación — puede tener en un momento dado el estatus cultural de demostración o no, sus condiciones de producción pueden darle o no el significado de prueba. Leyendo entre líneas (pues el texto ciertamente da una impresión distinta), yo diría entonces que la noción de *demostración* que nos ha legado Balacheff no necesariamente abreva en la imagen formalista o logicista, sino que refiere a la organización de los saberes matemáticos de los que dispone el observador (o el docente). Pero más importante que lo que las palabras significan por sí solas, lo importante es la relación, la distinción, que Balacheff establece entre esas palabras, *prueba* y *demostración*, como conceptos de la didáctica — es importante no perder de vista esa distinción.

Tal distinción ha sido crucial para plantear una nueva problemática para la investigación de las condiciones de existencia de la demostración en las matemáticas escolares. En efecto, esta problemática didáctica se diferencia de la problemática epistemológica clásica en educación matemática, cuyo exponente más visible es Gila Hanna (Hanna, 1983, 1989, 1991, 1995 y Hanna y Jahnke, 1996), que se dedica a analizar el funcionamiento de la demostración en las prácticas de los matemáticos y a utilizar sus conclusiones para elaborar recomendaciones sobre el funcionamiento de la demostración en la escuela. La problemática didáctica, en contraste, se plantea el problema de conocer cuáles son las condiciones de posibilidad para que el aprendizaje de la demostración en la escuela se acompañe de la construcción de la prueba como significado de la demostración. La tesis de Balacheff, en particular, la distinción entre prueba y demostración, ha hecho posible el desarrollo de esta problemática didáctica.

Los tipos de prueba estudiados por Balacheff (el *empirismo ingenuo*, la *experiencia crucial*, el *ejemplo genérico*, la *experiencia mental*) deben leerse en el contexto de las filiaciones con los trabajos de Brousseau, Bourdieu, y Lakatos, y como candidatos a la constitución del significado de la demostración. Son el producto de una teorización sobre la prueba en la clase, donde el comportamiento de los alumnos es el dato empírico pero no el objeto

de estudio. Es una teorización que busca los orígenes cognitivos de la demostración pero que, sin embargo, entiende lo cognitivo no tanto en relación a la cognición individual sino más bien en relación a las prácticas humanas asociadas con el funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la clase. En tal sentido la diferencia con los trabajos de Guershon Harel (Harel y Sowder, 1998; Martin y Harel, 1989; Sowder y Harel, 1998), orientados hacia la prueba como instrumento de la cognición individual, no podría ser más marcada. Los trabajos de Harel se mantienen dentro de una problemática de la psicología aplicada: atribuyen las respuestas de los alumnos al funcionamiento de esquemas generales de la cognición cuya diferenciación se proponen comprender. El trabajo de Balacheff, por el contrario, propone como objeto de estudio la microgénesis de la prueba en el contexto de situaciones que son propias de un objeto de conocimiento y que son creadas para estudiar la constitución del sentido de la demostración.

Este trabajo de Nicolás Balacheff, parte de su *Thèse d'Etat*, fue publicado en 1986 y, como he ilustrado, ha sido crucial para plantear una problemática didáctica sobre la demostración. Es decir, esta tesis ha proporcionado una propuesta alternativa a la reducción psicológica o lógica del aprendizaje de la demostración.

## II. LA VALIDACIÓN Y EL PAPEL DEL DOCENTE

Desde 1986 hasta ahora muchos trabajos han hecho uso de la tesis de Balacheff para hacer progresar la investigación sobre el aprendizaje de la demostración. Por otra parte, las cuestiones relativas al papel del docente en la gestión de los conocimientos se han vuelto un tema central de trabajo a ambos lados del Atlántico (Ball, 1993; Lampert, 1990; Margolinas, 1992). Comprender aquella gestión en relación al problema de la validación de los conocimientos en la clase se ha vuelto un tema prioritario sobre el cual el trabajo de Balacheff nos ayuda a pensar (Arsac, Balacheff y Mante, 1992; Ball y Bass, 2000; Herbst, en preparación; Margolinas, 1993).

Concentro el resto de mi comentario en un momento en el que la conclusión del libro sugiere que la argumentación es un posible obstáculo epistemológico de origen didáctico (véase también Balacheff, 1991b). Balacheff nos dice,

[...] en ciertos casos la interacción social se pudo constituir en un obstáculo cuando los alumnos, como consecuencia de su compromiso como personas, o de su incapacidad de coordinar sus puntos de vista, no lograron superar el conflicto. Estas interacciones pudieron favorecer especialmente el empirismo ingenuo o justificar el recurso a la experiencia crucial como medio de obtener la adhesión del compañero en detrimento de la utilización de medios de prueba de un ni-

vel más elevado y que se encontraban disponibles. [...] el objeto de la argumentación es el de obtener la adhesión del interlocutor al buen fundamento de lo que se sostiene. Esto no genera ningún problema con respecto a su verdad. La argumentación como acto social se caracteriza por el carácter abierto de los medios a los que recurre: “mientras que la demostración, en su forma más perfecta, es una sucesión de estructuras y de formas en las que no se puede cambiar su desarrollo, la argumentación tiene un carácter no restrictivo. Ella le permite al autor la duda, la libertad de elección. Inclusive cuando ella propone soluciones racionales, ella no tiene seguridad absoluta” (Perelman, 1970, p.41). (p. 179, el subrayado es mío).

La cita presenta elementos fundamentales para estudiar el problema del docente<sup>2</sup>. Por una parte se ha visto que la devolución de una situación de prueba se hace posible mediante el establecimiento de ciertas reglas de interacción social (convencer, llegar a un acuerdo con el compañero). Por otra parte se ha observado que a la vez que la interacción social requiere el común acuerdo de los participantes, el hecho de que la necesidad de la interacción social ha sido impuesta por el docente puede legitimar que aquel acuerdo se consiga a toda costa: lo que era una posible condición necesaria para construir una prueba se puede volver una condición suficiente para dejar de lado el trabajo de encontrar la mejor prueba posible y en su lugar aceptar la mínima prueba disponible en la que haya un acuerdo. Aquellas reglas de interacción, si bien importantes para la devolución de una situación de prueba pueden por tanto mantener la noción de prueba dentro de un dominio limitado, o volverse obstáculos para el aprendizaje de la demostración. Hasta allí el argumento de Balacheff.

El problema del papel del docente puede formularse, en este contexto, como el problema de comprender *la situación del docente* enfrentado a la ambigüedad de una situación de prueba: la situación como posible portadora del significado de la demostración, pero también la situación como posible sustituto de la prueba. Uno puede imaginarse algunas escenas posibles en las que tal ambigüedad se pone de manifiesto: el docente rompe el contrato didáctico al sugerir qué tipo de acuerdo deberían preferir los participantes (cuáles argumentos son retóricos o cuáles son los argumentos matemáticos disponibles). Puede ocurrir que la situación se actúe, pero que pierda su significado como situación de prueba.

Tal comportamiento por parte del docente no es sencillamente una falla logística en la implementación del contrato experimental. Es decir, no se trata de que la situación no funcionó como debía porque el docente no hizo lo que tenía que hacer. Una situación experimental no solamente crea un contexto para observar el funcionamiento de ciertos conocimientos, también produce una perturbación de las condiciones normales de trabajo (en parti-

2. Véase otras posibilidades relacionadas con la argumentación en Chazan y Ball (1999).



cular del docente) y permite así la observación de ciertos fenómenos (Herbst, 1999). Comprender el papel del docente requiere buscar los elementos teóricos que permitan pensar a tales hechos como respuestas más o menos adaptadas a las perturbaciones experimentadas por el funcionamiento de la situación. Este “axioma” del trabajo teórico no es específico de la prueba pero permite pensar la situación del docente enfrentado a la ambigüedad de una situación de prueba.

Cuando el interés del observador se centra en el trabajo del alumno (como en el trabajo de Balacheff), el papel del docente es el de gestionar el contrato didáctico para que la situación de prueba funcione como tal. Cuando el interés del observador se centra en el trabajo del docente, hay aspectos más generales de la relación didáctica, previos y posteriores a una situación de prueba que deben considerarse, por cuanto ellos regulan —hacen posible y limitan— aquel trabajo de gestión<sup>3</sup>. Una situación de prueba ocupa un lugar en el tiempo de la clase, y establece relaciones espontáneas con otros elementos del curso de estudios: el docente es responsable de darle un significado, de reconstruir aquellas relaciones (independientemente del significado que la situación por sí misma produzca).

Por ejemplo, el curso avanzado de geometría en noveno grado de la escolaridad estadounidense incluye el que los estudiantes hagan demostraciones; uno de mis alumnos (de pregrado universitario) apuntó, sin embargo, “nosotros hacíamos demostraciones en la escuela, pero nunca demostrábamos nada”<sup>4</sup>. En efecto, que las pruebas hechas por los alumnos ocupen un lugar accesorio en relación a los saberes estudiados (en particular, que las pruebas o los resultados probados por los alumnos jamás sean usados como referencia en lo que sigue del curso, tal como ocurre en los Estados Unidos<sup>5</sup>) parece ser la manera como el sistema enseñante concilia el imperativo de que los estudiantes demuestren con la posibilidad de que los estudiantes no puedan demostrar<sup>6</sup>. Por otra parte, el trabajo de Paolo Boero (Boero et al., 1996) con el contexto experiencial de la proyección de sombras nos deja ver

3. Claire Margolinas (1995) ha proporcionado elementos teóricos que permiten analizar esto.

4. La expresión en inglés es “We did proofs in school but we never proved anything.” Interrogado sobre qué es lo que quería decir con tal comentario, aparentemente contradictorio, este alumno agregó que por ejemplo se les requería demostrar que dos triángulos dados eran congruentes pero que jamás se les requirió demostrar la validez de alguno de los criterios de congruencia de triángulos.

5. El divorcio señalado por Alan Schoenfeld (1988) entre problemas que requieren una demostración y problemas que requieren una construcción en el curso de geometría es sintomático del aislamiento de los problemas de prueba con respecto al resto de los conocimientos en juego. Daniel Chazan (1993) documenta asimismo que estudiantes que juzgan una prueba correcta y completa aún consideran que aquella solamente es válida para el caso particular de los objetos dados en el diagrama adjunto.

6. Los alumnos realizan ejercicios de demostración, pero lo que funciona como prueba para controlar la validez de los conocimientos bien puede ser otra cosa, por ejemplo la percepción de la figura (véase Herbst, 1998).

otra posibilidad: que las pruebas hechas por los alumnos estén íntegramente ligadas al manejo de los objetos “matemáticos” dentro de cierto contexto, y que por lo tanto su eficiencia dependa de que existan como pruebas fundamentalmente dentro de tal contexto. Se crea así una subcultura de teoremas alrededor de objetos pseudo-matemáticos pero se presenta el problema docente de encuadrar tal subcultura dentro de la cultura en sentido amplio (el curso de estudios): por ejemplo, el docente debe buscar maneras de “reescribir” aquellas pruebas contextuales para que sean válidas en otros contextos. Ambos ejemplos, el de la demostración en Estados Unidos y el de los experimentos de Boero, ilustran el mismo problema: independientemente del buen funcionamiento de una situación de prueba, la inserción de tal situación en el tiempo de la clase no es solamente un acto administrativo. Nos debemos preguntar, ¿de qué recursos dispone el docente para gestionar esta inserción? Esto me conduce nuevamente al uso de la argumentación en la enseñanza.

La noción de que el conflicto socio-cognitivo y la argumentación permiten construir situaciones de prueba que den significado a la demostración es importante de explorar desde el punto de vista del docente. Promover una confrontación de puntos de vista entre los alumnos, estimularlos a encontrar un discurso que los convenza mantiene abiertos los medios para llegar a un acuerdo. El hecho de que los alumnos puedan llegar a un acuerdo a pesar de no haber encontrado la mejor prueba posible (a veces mediante un mero juego social) todavía deja al docente la oportunidad de convertir la experiencia vivida en una oportunidad de aprendizaje (si bien lo que se aprende puede no tener mucho que ver con lo que estaba en juego). Así, por ejemplo una discusión que termina por acordar en una prueba de menor valor que lo disponible todavía puede ser usada por el docente como análogo social de cómo funciona la demostración dentro de la comunidad de los matemáticos, tal vez no como significado de la demostración lograda pero sí como emblema de la demostración buscada. En contraste con aquella posibilidad, circunscribir explícitamente los medios disponibles para llegar a un acuerdo, por ejemplo alienando el funcionamiento social o argumentativo, hace que la existencia de una prueba matemática sea dependiente de que la situación de prueba funcione bien (lo cual es, de cierta manera, contingente). Esto requiere que en el peor de los casos (si la situación de prueba no funciona bien), el docente deba negociar explícitamente las condiciones para que la clase acepte el fracaso de la situación. Así, si no se ha producido una prueba, el docente se ve obligado a indicar qué deberían haber hecho los alumnos para producir una prueba: la situación deviene una especie de trampa puesta para que los alumnos caigan en ella y el significado de la situación está en cómo salir de la trampa — las razones por las que la trampa se puso en el camino no siempre están a la vista.

Una cosa está clara de ambas posibilidades, el tiempo que la clase y, en particular, el docente, ha dedicado a la gestión de la situación de prueba debe

ser interpretado e incorporado dentro de la historia cognitiva de la clase. Las dos posibilidades sugeridas en el párrafo anterior representan casos extremos donde tal interpretación o bien da un sentido totalmente distinto del que la situación tenía o bien convierte la situación misma en un objeto de estudio. Preguntas que vale la pena plantearse son, entonces,

- ¿Cuáles son los elementos de los que dispone el docente para elegir situaciones de prueba que mantendrán esos extremos a cierta distancia?
- ¿Cuáles son los elementos de esas situaciones que le permitirán al docente sacar el mejor partido de su presente (en relación con el antes y el después)?

Por una parte, comparto con Balacheff que la *argumentación* puede ser un obstáculo cognitivo para la *prueba*<sup>7</sup>. Por otra parte, sugiero que hacer uso de tal ambigüedad parece ser conveniente para la enseñanza, y no sólo porque la argumentación es una fuente de heurísticas para generar situaciones que puedan ser condiciones necesarias para a la demostración<sup>8</sup>. Sino además porque la misma apertura de medios que caracteriza a la argumentación puede ser usada por el docente para ‘hacerse el alumno,’ mostrándoles en los hechos que lo que no se les ocurrió pensar bien podría haberseles ocurrido, construyendo la búsqueda de una prueba posible<sup>9</sup>.

Las situaciones de validación surgen en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau como un modelo didáctico para estudiar la construcción del significado de una teoría matemática. La prueba y la refutación son los elementos que movilizan el proceso dialéctico de construcción de una teoría. La sucesión de pruebas y refutaciones le dan sentido a una demostración dentro del contexto de la producción de una teoría. Desde la posición del docente la construcción de una teoría matemática es una elección que tiene un costo y un riesgo. El uso de la argumentación, con sus reglas abiertas, es un ejemplo de como el docente mantiene abiertas sus posibilidades de que la inversión del tiempo de la clase en una situación de prueba produzca resultados que puedan integrarse a la historia cognitiva de la clase. Una manera de contestar la pregunta de adónde va la prueba, para el caso de la investigación sobre el papel del docente, es decir que la investigación se dirige a comprender en qué condiciones puede el docente proponer, gestionar, mantener, e incorporar a la historia de la clase un proyecto teórico —la construcción de una teoría matemática— que contenga a la demostración y a su significado.

7. Raymond Duval (1991, 1992) ha explicado bien la distinción conceptual entre argumentación y demostración.

8. Véase el trabajo de Boero citado anteriormente y también el de Mariotti et al. (1997).

9. Véase en Schoenfeld (1994) algunas características del trabajo del docente ‘haciéndose el alumno’ en un curso de resolución de problemas.

### III. REFERENCIAS

- Arsac, G., Balacheff, N. y Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 5-29.
- Ball, D. y Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. En D. Phillips (Ed.), *Constructivism in education: Yearbook of the National Society for the Study of Education*. Chicago: University of Chicago Press.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.
- Balacheff, N. (1991a). Construction et analyse d'une situation didactique: Le cas de "la somme des angles d'un triangle." *Journal fur Matematikdidaktik*, 12, 199-264.
- Balacheff, N. (1991b). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen, y J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Balacheff, N. (en preparación). *Meaning: a property of the learner-milieu system*.
- Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 93, 373-397.
- Boero, P. et al. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20<sup>th</sup> conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Volume 2* (pp. 113-120). Universidad de Valencia, España.
- Bourdieu, P. (1990). *The logic of practice*. Stanford: Stanford University Press.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathématiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, y V. Warfield, Eds.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 359-387.
- Chazan, D. y Ball, D. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics*, 19 (2), 2-10.
- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.
- Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31, 37-61.
- Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: OISE.
- Hanna, G. (1991). "Mathematical proof". En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9 (1), 20-23.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15 (3), 42-49.
- Hanna, G. y Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schonfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*. (Issues in Mathematics Education, Volume 7, pp. 234-282), American Mathematical Society.
- Herbst, P. (1998). What works as proof in the mathematics class. (Tesis doctoral) *Dissertation Abstracts International* 59, 10A. (University of Georgia, Athens Microfilms No. 3764).
- Herbst, P. (1999). On devolving a voice to the participants of the mathematics classroom culture: a methodological critique. *Educational Review*, 51, 183-190.
- Herbst, P. (Manuscrito en preparación). *Giving diagrams and getting students to prove: The role of the teacher*.
- Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. Cambridge University Press.
- Lakatos, I. (1978). A rennaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics. En I. Lakatos, *Mathematics, science, and epistemology. Volume 2*, Cambridge University Press.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29-63.
- Margolinas, C. (1992). Elements pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 113- 158.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. En C. Margolinas (Ed.), *Les débats en didactique des mathématiques* (pp. 89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F. y Garutti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. En E. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21<sup>st</sup> conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Volume I* (pp. 180-195). Helsinki: University of Helsinki.
- Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (1), 41-51.

- Schoenfeld, A. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of “well-taught” mathematics courses. *Educational Psychologist*, 23 (2), 145-166).
- Schoenfeld, A.(1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.53-70). Erlbaum.
- Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher*, 91 (8), 670-675.

*Patricio G. Herbst*  
*The University of Michigan, Ann Arbor*  
*Dirección postal: 4204E School of Education*  
*610 East University Avenue, Ann Arbor, MI 48109-1259*  
*USA*  
*E-mail: pgherbst@umich.edu.*