HAL
open science

Sur le topos infinitésimal p-adique d'un schéma lisse I

Alberto Arabia, Zoghman Mebkhout

To cite this version:

Alberto Arabia, Zoghman Mebkhout. Sur le topos infinitésimal p-adique d'un schéma lisse I. 2007. hal-00517945

HAL Id: hal-00517945

https://hal.science/hal-00517945

Preprint submitted on 16 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LE TOPOS INFINITÉSIMAL p-ADIQUE D'UN SCHÉMA LISSE I (*)

par Alberto ARABIA et Zoghman MEBKHOUT

dédié à Alexandre Grothendieck
à l'occasion de son quatre-vingtième anniversaire

Résumé. Afin de disposer des opérations cohomologiques aussi souples que possible pour la cohomologie de de Rham p-adique à coefficients, le but principal de ce mémoire est de résoudre intrinsèquement *du point de vue cohomologique* le problème des *relèvements des schémas lisses et de leurs morphismes de la caractéristique* $p > 0$ *à la caractéristique nulle* ce qui a été l'une des difficultés centrales de la théorie de la cohomologie de de Rham des schémas algébriques en caractéristique positive depuis le début. Nous montrons que, bien que les schémas lisses et leurs morphismes ne se relèvent pas en général du point de vue géométrique, tout se passe comme si c'était bien le cas du point de vue cohomologique, ce qui est conforme à la Théorie des Motifs de Grothendieck. On en déduit la factorisation p-adique de la fonction Zêta d'une variété algébrique lisse sur un corps fini, éventuellement ouverte, qui est le résultat test de nos méthodes.

Soit V un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(p, 0)$ de corps résiduel k et de corps de fractions K. On définit la cohomologie de de Rham p-adique d'un schéma lisse sur k, à coefficients qui sont des espaces vectoriels sur K et on définit les opérations cohomologiques pour un morphisme de schémas lisses sur k. On montre que l'on obtient en particulier un foncteur contravariant entre la catégorie de tous les schémas lisses et séparés sur k et la catégorie dérivée de la catégorie des espaces vectoriels sur K. On montre la suite exacte de Gysin pour tout couple de schémas lisses, ce qui permet en particulier de définir la classe de cohomologie d'un cycle dans le cas d'un corps de base parfait. On montre le lemme de Poincaré-Künneth sur une base lisse.

(*) À paraître dans les Annales de l'Institut Fourier nro. **60** fascicule 6. Manuscrit soumis le 10 octobre 2007, révisé le 18 juin 2009, accepté le 21 juillet 2009.

Mots-clés : algèbres dag-adiques, cohomologie de de Rham p-adique, complexe de de Rham p-adique, équations différentielles p-adiques, factorisation p-adique de la fonction Zéta, fonctorialité, groupe des automorphismes, module de transfert, module spécial, opérateurs différentiels p-adiques, opérations cohomologiques, relèvements plats, schémas dag-adiques, site infinitésimal, suite de Gysin, topos infinitésimal.

Classification math. : 11E95, 12H25, 13Dxx, 13Fxx, 13Jxx, 13N10, 14Axx, 14Fxx, 16Exx, 18Fxx, 18Gxx.

Infinitésimal p-adic topos of a smooth scheme I

Abstract. In order to have cohomological operations for de Rham p-adic cohomology with coefficients as manageable as possible, the main purpose of this paper is to solve intrinsically and *from a cohomological point of view the lifting problem of smooth schemes and their morphisms from characteristic $p > 0$ to characteristic zero* which has been one of the fundamental difficulties in the theory of de Rham cohomology of algebraic schemes in positive characteristic since the beginning. We show that although smooth schemes and morphisms fail to lift geometrically, it is as if this was the case within the cohomological point of view, which is consistent with the theory of Grothendieck Motives. We deduce the p-adic factorization of the Zeta function of a smooth algebraic variety, possibly open, over a finite field, which is a key testing result of our methods.

Let V be a complete discrete valuation ring of unequal characteristics $(p, 0)$ with residue field k and fraction field K. We define the p-adic de Rham cohomology of smooth scheme over k with coefficients which are vector spaces over K, and we define cohomological operations for morphisms of smooth schemes over k. We show that we obtain in particular a contravariant functor between the category of all separated smooth schemes over k and the derived category of the category of vector spaces over K. We give the Gysin exact sequence for every pair of smooth schemes, allowing in particular to define the cohomology class of a cycle in the case of a perfect base field. We prove the Poincaré-Künneth lemma for smooth base.

Table des matières

1. Introduction 4
2. Notations, conventions et rappels 20
2.1. Faisceau donné localement sur un espace topologique 23
2.2. Schémas †-adiques, critère d'affinité †-adique, produits fibrés 23
2.3. Algèbres †-adiques lisses et schémas †-adiques lisses 26
2.4. Le théorème du symbole total d'un opérateur différentiel p-adique 28
3. Le site infinitésimal †-adique $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et son topos 30
3.1. Le site infinitésimal †-adique 30
3.2. Le topos infinitésimal †-adique 32
3.3. Le site infinitésimal †-adique affine 36
4. Le faisceau $\mathcal{G}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$ des automorphismes du faisceau structural qui se réduisent à l'identité modulo I 38
4.1. Le faisceau d'ensembles de transfert $\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\to\mathscr{X}^{\dagger}}$ 38
4.2. La catégorie $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$-Mod des $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$-modules à gauche sur le site †-adique 40
4.3. Le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}}(\mathcal{F}_{1\,\mathrm{inf}}, \mathcal{F}_{2\,\mathrm{inf}})$ de deux $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$-modules à gauche 45
4.4. Le faisceau $\mathcal{F}_{1\,\mathrm{inf}} \otimes_{\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}} \mathcal{F}_{2\,\mathrm{inf}}$ d'un $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$-module à gauche et d'un $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$-module à droite 45
4.5. Les foncteurs de prolongement et de restriction 46
5. L'inclusion $\mathcal{G}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}$ 47

6. La catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod des Modules à gauche spéciaux sur le site infinitésimal et la cohomologie de de Rham †-adique 50
6.1. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R}$ pour une immersion ouverte 50
6.2. La catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod 52
6.3. La catégorie des modules spéciaux a suffisamment d'objets injectifs 59
6.4. La cohomologie de de Rham †-adique 60
6.5. Le foncteur de de Rham †-adique local 62
6.6. Le théorème de finitude des nombres de Betti p-adiques d'une variété algébrique lisse 66
6.7. La fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adiques pour les schémas affines 67
6.8. Le théorème de comparaison dans le cas d'un relèvement propre et lisse 72
7. La catégorie des modules à gauche spéciaux et la cohomologie de de Rham p-adique $H^\bullet_{DR,h}(X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V)$ d'échelon $h \geqslant 0$ 73
7.1. La filtration par les échelons du faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ 73
7.2. La cohomologie de de Rham p-adique $H^\bullet_{DR,h}(X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V)$ d'échelon $h \geqslant 0$ 78
8. La cohomologie infinitésimale et la cohomologie de de Rham p-adiques 80
8.1. La cohomologie infinitésimale †-adique des complexes de la catégorie $D^+(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$ 80
8.2. La cohomologie infinitésimale en degré zéro à valeurs dans le faisceau structural fournit le bon nombre de Betti 82
8.3. La cohomologie infinitésimale en degré un à valeurs dans le faisceau structural *n*e fournit pas le bon nombre de Betti 83
8.4. Le foncteur de de Rham infinitésimal local 88
9. La catégorie Mod-$(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$ des Modules à droite spéciaux sur le site infinitésimal 93
9.1. La structure de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à droite du fibré des formes différentielles de degré maximum 93
9.2. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/V}$ pour une immersion ouverte 96
9.3. La catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à *d*roite spéciaux Mod-$(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$ 97
10. Le foncteur image inverse dans la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ 98
10.1. La catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod a suffisamment d'objets plats 99
10.2. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/R}$ pour une immersion fermée 100
10.3. Le foncteur image inverse dans la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ pour une immersion 105
10.4. Le foncteur image inverse dans la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ pour une projection 107
10.5. Le foncteur image inverse dans le cas général 110
10.6. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$ 115
10.7. Le foncteur image inverse dans la catégorie $D^-(\text{Mod-}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp}))$ 117

11. Le foncteur image directe dans la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ 117
11.1. La platitude du module de transfert pour une immersion fermée 118
11.2. Le théorème de changement de base pour une immersion fermée 120
11.3. Le foncteur image directe dans le cas d'une immersion fermée 124
11.4. Le foncteur image directe dans le cas d'une projection 126
11.5. Le foncteur image directe dans le cas général 130
11.6. Le foncteur image directe pour les modules à droite spéciaux 141
12. Le foncteur de cohomologie locale et ses compatibilités avec les foncteurs images directe et inverse 142
12.1. Le foncteur de cohomologie locale dans le cas des faisceaux 142
12.2. Le foncteur de cohomologie locale dans le cas des modules spéciaux 143
12.3. Le théorème de pureté pour un couple lisse 144
12.4. La comparaison entre la cohomologie locale et l'image directe dans le cas d'une immersion fermée. Le morphisme de foncteurs Adj^i_* 148
12.5. La comparaison entre la cohomologie locale et l'image directe dans le cas d'une immersion fermée. Le morphisme de foncteurs Adj^*_i 160
13. La fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adique et le foncteur de dualité 164
13.1. La compatibilité des foncteurs image inverse topologique et différentielle 164
13.2. Le foncteur dualité et le théorème de dualité pour une immersion fermée 165
13.3. La fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adique 174
13.4. Le théorème de factorisation p-adique de la fonction Zêta d'une variété algébrique lisse sur un corps fini 177
14. La suite exacte de Gysin en cohomologie de de Rham p-adique et la classe de cohomologie d'un cycle 181
14.1. La compatibilité des foncteurs images directes topologique et différentielle 181
14.2. La suite exacte de Gysin en cohomologie de de Rham p-adique 184
14.3. La classe de cohomologie d'un cycle 186
15. Le lemme de Poincaré et la formule de Künneth pour l'espace affine 187
Liste des notations 191

1. Introduction

Cet article est le premier d'une série d'articles qui s'inscrivent dans la recherche d'une théorie cohomologique des coefficients p-adiques pour la catégorie des variétés algébriques en dimensions supérieures. Cette théorie est loin d'avoir atteint son but malgré d'intenses efforts ; seul le cas des courbes est bien compris, grâce à la théorie des équations différentielles p-adiques ([C-M$_1$], [C-M$_2$], [C-M$_3$], [C-M$_4$]).

1.1. Afin de disposer des opérations cohomologiques aussi souples que possible, le but principal de ce mémoire est de résoudre intrinsèquement *du point de vue cohomologique le problème des relèvements des schémas lisses*

et de leurs morphismes de la caractéristique $p > 0$ à la caractéristique nulle ce qui a été l'une des difficultés centrales de la théorie depuis qu'elle existe. Nous allons montrer que, bien que les schémas lisses et leurs morphismes ne se relèvent pas en général du point de vue géométrique, tout se passe comme si c'était bien le cas du point de vue cohomologique ce qui est conforme à la Théorie des Motifs de Grothendieck.

Nous rappelons rapidement pour la commodité du lecteur la situation de la théorie pour situer ce mémoire.

1.2. Le point de départ de la théorie de de Rham p-adique est la démonstration de B. Dwork [D] de la rationalité de la fonction Zêta d'une variété algébrique sur un corps fini, par des méthodes p-adiques non cohomologiques. P. Monsky et G. Washnitzer ont obtenu ([M-W_0], [M-W], [M_1], [M_2]) une expression cohomologique de cette fonction pour les variétés algébriques affines lisses par voie p-adique, parallèle à celle obtenue par A. Grothendieck par voie ℓ-adique pour toutes les variétés algébriques sur les corps finis ([G_2]), en construisant une théorie cohomologique de type de de Rham ([M-W]) en passant de la caractéristique $p > 0$ à la caractéristique zéro à l'aide de la théorie des schémas formels affines de Grothendieck ([EGA I]). En retour, leurs travaux ont inspiré à Grothendieck la construction du site Infinitésimal et du site Cristallin d'un schéma au-dessus d'un autre ([G_3], [G_4]). De plus, Grothendieck a montré que pour une variété algébrique lisse sur un corps de caractéristique nulle la cohomologie de son site infinitésimal à valeurs dans le faisceau structural est canoniquement isomorphe à sa cohomologie de de Rham ([G_4]), ce qui constitue une idée très très originale dans le calcul différentiel algébrique.

1.3. P. Monsky et G. Washnitzer ont laissé ouvert le problème de l'extension du foncteur de de Rham p-adique à la catégorie des variétés algébriques éventuellement non affines. Cette problématique a déjà été discutée par Monsky dans son exposé au congrès de Nice de 1970 ([M_3]). P. Berthelot a proposé une théorie cohomologique pour toutes les variétés algébriques via la géométrie analytique rigide ([B_3]). Cette construction est de nature globale et fait intervenir une compactification, ce qui présente de sérieux inconvénients à ce stade ; par exemple, il n'est pas du tout clair que cette définition soit fonctorielle. [1a]

1. Note du rapporteur : "*In order to get the functoriality, another construction is necessary. There is some recent, unpublished work of Le Stum in this direction.*"

1.4. Dans l'article fondamental de recherche [M-N$_1$], qui a servi de transition, on a proposé de revenir au point de vue originel, de nature **locale et algébrique pour la topologie de Zariski en caractéristique** $p > 0$, en définissant la cohomologie de de Rham p-adique pour les variétés algébriques lisses admettant un relèvement plat comme schéma formel faible au sens de Meredith ([Mr]) via la théorie des $\mathscr{D}^\dagger$-modules sur un tel schéma ([M-N$_1$], [M-N$_2$]). Cette définition considérée sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques coïncide canoniquement avec la définition de Monsky-Washnitzer pour les variétés **affines** lisses.

1.5. Mais il n'était pas établi que ces espaces sont indépendants du relèvement pour les variétés **non affines** ni que cette définition se prolonge à la catégorie de toutes les variétés algébriques lisses sur un corps de caractéristique $p > 0$. Cependant, ce point de vue, qui s'est avéré être le bon, nous a conduits à la théorie des équations différentielles p-adiques, qui a prise sur les questions de la monodromie arithmétique et dépasse de loin la seule question de la cohomologie des variétés algébriques ([C-M$_1$], [C-M$_2$], [C-M$_3$], [C-M$_4$]).

1.6. Le but de cet article est, d'une part, de montrer qu'effectivement ces espaces sont indépendants à isomorphisme **canonique** près du relèvement et que leur définition se prolonge à la catégorie de **tous** les schémas lisses et, d'autre part, de définir **les opérations cohomologiques pour la cohomologie de de Rham p-adique à coefficients** pour un morphisme de schémas lisses sur un corps de caractéristique positive, mais sans **aucune hypothèse restrictive** sur les morphismes pour en déduire en particulier la **fonctorialité** de la cohomologie de de Rham p-adique et l'expression cohomologique p-adique de la fonction Zêta d'une variété algébrique lisse sur un corps fini.

1.7. La théorie de de Rham en caractéristique nulle et ses nombreuses applications nous enseignent que la situation précédente d'un morphisme qui n'est soumis à aucune restriction, de lissité, de platitude ou de propreté, entre schémas lisses sur le corps de base sur lesquels on dispose du calcul différentiel et du calcul infinitésimal sur le corps des nombres complexes, est la situation essentielle même pour le cas singulier et donne lieu aux problèmes les plus intéressants. Le cas des courbes, sur lequel nous disposons aujourd'hui des résultats les plus complets grâce précisément à la monodromie p-adique, montre déjà que la théorie de de Rham arithmétique

est hautement non triviale comparée aux autres théories cohomologiques existantes, ce qui explique en partie son retard. Il était évident qu'on ne pouvait pas espérer un progrès significatif dans la théorie des coefficients p-adiques sans la structure complète de la monodromie locale d'un point singulier d'une équation différentielle p-adique d'ordre supérieure ([C-M$_3$], Introduction).

1.8. Nous allons décrire les différentes étapes qui nous ont conduits à ce résultat. Soit V un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(p, 0)$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel k et corps de fractions K. Soit X/k un schéma lisse sur k, on définit naturellement son site infinitésimal p-adique $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ comme la catégorie, munie de sa topologie de Zariski naturelle, dont les objets sont les schémas †-adiques $\mathcal{U}^\dagger := (U, \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V})$, au sens de Meredith ([Mr]), **plats** sur V, où U est un ouvert de l'espace topologique X. L'hypothèse de lissité sur k assure que le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ a beaucoup d'ouverts et de morphismes. Le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est naturellement annelé par le faisceau de V-algèbres $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ et le faisceau de K-algèbres $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} := \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \otimes_V K$. La cohomologie infinitésimale $H^\bullet_{\mathrm{inf}}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ à valeurs dans le faisceau structural $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ est un invariant intrinsèque du schéma X et une question à laquelle nous avons cru pendant longtemps est qu'elle fournisse les bons nombres de Betti p-adiques, ce qui a retardé d'autant notre compréhension du problème. En fait il n'en est rien, contrastant vivement avec le cas de la caractéristique nulle. Pour voir ceci, supposons pour simplifier que X est une variété affine lisse sur le corps k et soit $A^\dagger$ une V-algèbre faiblement complète de type fini au sens de Monsky-Washnitzer ([M-W]) plate sur V qui relève l'algèbre des fonctions de X et $\mathscr{X}^\dagger := (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ son schéma †-adique affine associé ([Mr]). On peut considérer le groupe $G_{A^\dagger}$ des **automorphismes** de V-algèbre de $A^\dagger$ qui se réduisent à l'identité modulo $\mathfrak{m}$. Ce groupe se localise en un faisceau de groupes $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ sur X. Nous montrons dans le théorème 8.1.3 que la cohomologie infinitésimale $H^\bullet_{\mathrm{inf}}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ s'identifie canoniquement à la cohomologie de groupe $H^\bullet(\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$ du $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$-module $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ qui est donc de nature galoisienne, ce qui donne un moyen de calcul. Or, nous construisons dans le théorème 8.3.1 pour l'espace affine $X = \mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n])$, un cocycle qui n'est pas un cobord et donc une classe de cohomologie non triviale de $H^1(\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$, montrant que le lemme de Poincaré n'a pas lieu pour cette cohomologie. La cohomologie infinitésimale p-adique d'une variété affine lisse à valeurs dans le faisceau structural *ne coïncide pas* avec sa cohomologie de de Rham p-adique et son invariance par rapport au relèvement n'est d'aucun secours pour le problème qui nous concerne ici.

1.9. Nous revenons alors au point de vue introduit dans l'article de recherche [M-N$_1$]. Soient R un anneau commutatif noethérien, I un idéal et $R_1 := R/I$. Dans les articles [M-N$_1$] et [M-N$_2$], on a défini le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ des opérateurs différentiels sur un schéma †-adique $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ par réduction modulo les puissances de l'idéal I en imposant une condition de croissance du type † sur l'ordre des opérateurs différentiels. Par construction, le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ opère à gauche sur le faisceau $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ et on peut donc considérer les modules de cohomologie de de Rham †-adiques $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ définis comme foncteurs dérivés du foncteur covariant exact à gauche :

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger})$$

dans la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-modules à gauche $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-Mod et la cohomologie globale apparaît naturellement comme l'hypercohomologie **d'un complexe de Zariski**.

1.10. En particulier, si R est l'anneau V on peut considérer le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$, le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K} := \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R} \otimes_V K$ et les K-espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$. Il est montré dans [M-N$_1$] que ces derniers espaces vectoriels coïncident canoniquement avec les espaces de cohomologie définis par Monsky-Washnitzer dans le cas d'un relèvement plat d'une variété *affine* lisse et en vertu de leur théorème ([M-W], Thm. 5.6) ils sont donc indépendants du relèvement à isomorphisme canonique près. On disposait dès le départ de nombreuses indications notamment grâce aux foncteurs de cohomologie locale pour espérer que ces espaces soient indépendants à isomorphisme canonique près du relèvement d'une variété algébrique lisse sur k quand il existe.

1.11. Sur un schéma †-adique $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ on peut considérer le faisceau $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ des endomorphismes de R-**algèbres** du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ qui se réduisent à l'identité modulo I. Il se trouve de façon tout à fait remarquable (Thm. 5.0.4) que le faisceau $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ est un sous-faisceau de semi-groupes pour la structure **multiplicative** du faisceau d'anneaux $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$, autrement dit un élément g du semi-groupe précédent est un opérateur *différentiel d'un type très particulier*. Si le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ est R-plat, le faisceau $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ est un faisceau de groupes. C'est là le lien essentiel entre la géométrie algébrique en caractéristique $p > 0$ et le calcul différentiel en caractéristique zéro. Par exemple, c'est ce plongement qui nous a permis de construire une classe de cohomologie non triviale dans

la cohomologie infinitésimale p-adique de l'espace affine à valeurs dans le faisceau structural.

1.12. Sur le site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ d'un R_1-schéma lisse, défini comme dans 1.5, et qui a aussi beaucoup d'ouverts et de morphismes, le faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ des automorphismes du faisceau structural qui se réduisent à l'identité modulo I est aussi défini, ainsi que le faisceau d'algèbres $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ des opérateurs différentiels, et l'on a une inclusion $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ pour la structure multiplicative. Un faisceau de $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est muni par construction d'une action **géométrique à gauche** ($\sharp$) du faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ (Prop. 4.1.7). En particulier, le faisceau $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ opère sur le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ par automorphismes intérieurs (Coro. 5.0.7). On dispose de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-Mod des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche sur le site infinitésimal. Par construction, un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche sur le site $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est muni de **deux actions** à gauche du faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$, l'action géométrique ($\sharp$) et l'action **différentielle à gauche** ($\diamond$) qui se fait à travers $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$. Nous arrivons à la notion essentielle et centrale de **module spécial**.

Définition (6.2.5). — *Nous dirons qu'un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sur le site infinitésimal $\dagger$-adique $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est* **spécial** *si l'action géométrique ($\sharp$) du faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ sur $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$* **se fait à travers** $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$.

Autrement dit, sur un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche **spécial** les deux actions à gauche du faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$, géométrique ($\sharp$) et différentielle ($\diamond$), **coïncident**. Ainsi, le $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ *est spécial* par construction, mais le $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ *n'est pas spécial* parce que l'action géométrique ($\sharp$) est $(g, P) \mapsto gPg^{-1}$ et que l'action différentielle ($\diamond$) est $(g, P) \mapsto gP$.

On note $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Nous démontrons le théorème suivant, qui légitime cette notion.

Théorème (6.2.11). — *Soit $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement $\dagger$-adique plat d'un R_1-schéma lisse X. Alors, il existe un foncteur* **canonique de prolongement** *:*

$$P_{\mathscr{X}^\dagger} : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}\text{-Mod} \to (\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}\,,$$

qui est une équivalence de catégories et un inverse **canonique** *au foncteur image inverse naturel de restriction* $R_{\mathscr{X}^\dagger}$.

Ainsi, un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module à gauche se *propage canoniquement* en un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche *spécial* et, réciproquement, un module $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ à gauche *spécial* se restreint canoniquement en un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module à gauche. Dans sa lettre [G_3] Grothendieck écrivait : « *Un Cristal possède deux propriétés caractéristiques : la rigidité, et la faculté de croître dans un voisinage approprié* ». L'isomorphisme canonique ($\diamond$) de restriction du théorème 6.2.7 des modules spéciaux correspond à la rigidité des cristaux et la propagation sur le site infinitésimal du théorème 6.2.11 des modules spéciaux correspond à la croissance des cristaux dans un voisinage approprié. Mais alors que la catégorie des cristaux ne semble fournir une bonne théorie que pour les variétés algébriques propres et lisses sur k, la catégorie des modules spéciaux semble fournir une bonne théorie pour les variétés **ouvertes**, comme l'illustre le théorème 13.4.7 de l'expression cohomologique p-adique de la fonction Zêta d'une variété algébrique lisse sur un corps fini.

Corollaire (6.2.13). — *La catégorie de* $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$*-modules à gauche ne dépend pas à équivalence* **canonique** *près du relèvement plat* $\mathscr{X}^\dagger$ *du schéma* X *lisse sur* R_1 *quand il existe.*

Ce théorème résout pour les besoins de la théorie des coefficients p-adiques le problème des relèvements des *schémas lisses* parce que la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche **spéciaux** $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod est définie pour tout R_1-schéma X lisse et qu'elle en est un **invariant intrinsèque**.

1.13. Nous montrons que la catégorie des modules à gauche spéciaux $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod est une sous-catégorie pleine, abélienne de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-Mod des modules à gauche (Prop. 6.2.14), admet suffisamment d'objets injectifs (Thm. 6.3.1) d'objets plats (Thm. 10.1.2) et est un champ (Thm. 6.2.20) bien que ce n'est pas une catégorie de modules. Le théorème qui suit est corollaire de l'équivalence de catégories précédente.

Théorème (6.4.2). — *Soit* $\mathscr{X}^\dagger$ *un relèvement* $\dagger$*-adique plat d'un* R_1*-schéma* X *lisse. Alors, il existe des isomorphismes* **canoniques** *de* R*-modules :*

$$\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}) \simeq \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}).$$

Les modules de droite sont définis comme les foncteurs dérivés dans la catégorie abélienne $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod du foncteur covariant exact à gauche :

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

des morphismes $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-linéaires. Les modules précédents apparaissent donc comme les modules de cohomologie du complexe :

$$DR(X/R, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) := \boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}).$$

L'isomorphisme du théorème précédent montre, d'une part, que la cohomologie de de Rham †-adique d'un relèvement ne dépend pas à isomorphisme *canonique* près du relèvement et, d'autre part, que la cohomologie de de Rham †-adique du site infinitésimal prolonge le foncteur de de Rham sur X à tous les schémas lisses, **sans hypothèse d'existence de relèvement**.

1.14. La catégorie $\mathrm{Mod}(R_X)$ des faisceaux de R-modules sur X pour la **topologie de Zariski** apparaît naturellement comme une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{Mod}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$ des $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules sur le site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, à savoir la catégorie des faisceaux de $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module sur lesquels l'action géométrique ($\sharp$) du groupe $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est *triviale* (Thm. 6.5.1). Or par construction, si $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sont deux $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche **spéciaux**, l'action géométrique du groupe $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ sur le faisceau (Prop. 4.3.1) de $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

est **triviale** (Coro. 6.5.3) et ce faisceau est donc un faisceau pour la *topologie de Zariski* de X. En particulier, le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ des sections horizontales de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un faisceau de Zariski. Il en résulte le foncteur exact de de Rham local de catégories triangulées

$$dR(X/R, -) : \qquad D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) \to D^+(\mathrm{Mod}(R_X))$$

qui à $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ associe son complexe de de Rham †-adique local :

$$dR(X/R, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) := \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}).$$

On déduit alors le caractère **local pour la topologie de Zariski** de la définition de la cohomologie de de Rham p-adique.

Théorème (6.5.7). — *La cohomologie de de Rham †-adique d'un complexe spécial $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est l'hypercohomologie du complexe :*

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

de Zariski.

De plus, pour tout fermé Z de l'espace topologique X la cohomologie de de Rham †-adique à support dans Z est définie comme d'habitude comme l'hypercohomologie du complexe de cohomologie locale à support dans Z. Cela ramène de nombreuses questions concernant la cohomologie de de Rham p-adique à des questions de nature locale pour la *topologie de Zariski* qui est finalement le point de vue classique et qui justifie s'il en est encore besoin celui des schémas †-adiques. En tout état de cause, cette localisation pour la topologie de Zariski apparaît comme un point essentiel dans notre théorie.

1.15. Pour aller plus loin il nous faut considérer une situation un peu plus générale. Soit $R \to S$ une extension d'anneaux commutatifs ; on peut considérer les faisceaux d'anneaux sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ obtenus par changement de base :

$$\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S} := \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R} \otimes_R S, \qquad \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S} := \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R} \otimes_R S$$

sur lesquels le faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ agit tout aussi bien. On a alors la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}$-modules à gauche $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}$-Mod et sa sous-catégorie abélienne pleine $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S},\mathrm{Sp})$-Mod des modules à gauche spéciaux. Tous les résultats précédents restent valables dans cette situation. Nous notons $D^*((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S},\mathrm{Sp})\text{-Mod})$ la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}$-modules à gauche spéciaux $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S},\mathrm{Sp})$-Mod. Si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un est complexe de la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S},\mathrm{Sp})\text{-Mod})$, on définit « la cohomologie de de Rham †-adique de X à coefficients dans $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ », et nous notons pour simplifier $H^\bullet_{DR}(X/S,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$, la cohomologie du complexe

$$DR(X/S,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) := \boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

qui consiste en des S-modules. On a donc par définition :

$$H^\bullet_{DR}(X/S,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) := \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}).$$

En particulier, on peut considérer l'extension $V \to K$. Nous appelons alors « cohomologie de de Rham p-adique de X », que nous notons pour simplifier $H^\bullet_{DR}(X/K)$, la cohomologie $H^\bullet_{DR}(X/K,\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$. Nous appelons

« i-ème nombre de Betti p-adique de X », et nous le notons $B_{p,i}(X)$, la dimension du K-espace vectoriel $H^i_{DR}(X/K)$. La suite spectrale locale-globale (Thm. 6.5.8) ramène la finitude des nombres $B_{p,i}(X)$ d'une variété algébrique, schéma séparé de type fini sur k, lisse sur k, au théorème de finitude des nombres de Betti p-adiques des variétés algébriques affines lisses sur k [Me$_2$], ce qui montre qu'on est enfin sur la bonne voie qui est en même temps le point de départ des opérations cohomologiques.

1.16. C'est pour la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod des modules spéciaux qu'on dispose intrinsèquement des opérations cohomologiques pour un morphisme et nous construisons dans cet article les trois opérations fondamentales et le foncteur de dualité $\mathbb{D}^\vee_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}(-)$ (Def. 13.2.5), à partir desquels l'on peut construire toutes les autres.

Théorème (12.2.2). — *Soient Z un fermé de l'espace topologique X et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe borné à gauche de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}$-modules à gauche spéciaux. Alors, on a un triangle distingué de la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$:*

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Z(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \boldsymbol{R}j^{\mathrm{inf}}_* j^{-1}_{\mathrm{inf}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to ,$$

qui se restreint au triangle usuel sur tout ouvert du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Théorème (10.5.5). — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses sur k. Il existe un foncteur image inverse qui est un foncteur exact de catégorie triangulées :*

$$f^*_{\mathrm{diff}} : \qquad D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) \to D^-((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}).$$

Le foncteur image inverse se définit aussi sur l'extension $V \to K$.

Pour le foncteur image directe nous faisons pour simplifier dans cet article la restriction de séparation sur la base, et nous définissons le foncteur image directe sur le corps des fractions K.

Théorème (11.5.1). — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses sur k tel que X est séparé sur k. Il existe un foncteur image directe qui est un foncteur exact de catégorie triangulées :*

$$f^{\mathrm{diff}}_* : \qquad D^+((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp}))\text{-Mod} \to D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}).$$

Ainsi, si la base est un point et Y est une variété algébrique lisse sur k, l'image directe $f^{\mathrm{diff}}_* \mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ est un complexe de $D^+(K)$ dont la cohomologie est la cohomologie de de Rham p-adique de la source. Le théorème de finitude [Me$_2$] montre alors que ce complexe est à cohomologie

de dimension **finie**. Dans le cas général, si f est un morphisme de variétés algébriques lisses sur k, **le complexe spécial** $f_*^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ sur X est l'analogue p-adique du complexe de Gauss-Manin d'un morphisme entre variétés algébriques lisses sur un corps de caractéristique nulle, dont on s'attend naturellement à ses propriétés de finitude. Si par exemple le morphisme f est propre et lisse, on s'attend à ce que ses faisceaux de cohomologie soient des fibrés p-adiques dont les rangs sont donnés par les nombres de Betti p-adiques des fibres, et **alors et seulement alors**, si X est une courbe, la théorie des équations différentielles p-adiques ([C-M$_1$], [C-M$_2$], [C-M$_3$], [C-M$_4$]) définit leurs monodromies aux points à l'infini.

Le foncteur image directe i_*^{diff} est défini sur V pour toute immersion fermée $i : Y \to X$ de schémas lisses sur k. Pour définir le morphisme de Gysin et le morphisme classe de cohomologie d'un cycle nous étudions les compatibilités entre les foncteurs $i_*^{\mathrm{diff}}, i^*_{\mathrm{diff}}, \boldsymbol{R}\Gamma_Y$.

Théorème (12.4.12,12.4.14,12.5.4). — *Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k. Il existe un morphisme de foncteurs de la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$:*

$$\mathrm{Adj}^{\mathrm{i}}_* : \qquad i_*^{\mathrm{diff}}\, i^*_{\mathrm{diff}} \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y[\mathrm{codim}_X Y]$$

et un morphisme de foncteurs de la catégorie $D((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ qui est un isomorphisme :

$$\mathrm{Adj}^*_{\mathrm{i}} : \qquad Id \simeq i^*_{\mathrm{diff}}\, i_*^{\mathrm{diff}}\,[-\mathrm{codim}_X Y]$$

où Id est le foncteur identique. De plus le foncteur $\mathrm{Adj}^{\mathrm{i}}_*$ induit des isomorphismes $\mathrm{Adj}^{\mathrm{i}}_*(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/\mathrm{V}})$ de la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$:

$$i_*^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \simeq i_*^{\mathrm{diff}}\, i^*_{\mathrm{diff}}\,(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})[\mathrm{codim}_X Y].$$

1.17. Ces foncteurs coïncident avec les foncteurs qu'on peut construire chaque fois qu'on peut relever le triplet (Y, X, f). Cela est plutôt rare, même pour un morphisme de courbes propres et lisses. Ces théorèmes résolvent, du point de vue cohomologique, le problème des relèvements des *morphismes quelconques entre schémas lisses*, parce que les foncteurs f^*_{diff} et f_*^{diff} sont des **invariants intrinsèques** du morphisme f. Ces foncteurs sont munis de morphismes de compatibilités avec les foncteurs images inverse et directe topologiques agissant sur les complexes de de Rham locaux (Thm. 13.1.1, Thm. 14.1.1). Le foncteur dualité est compatible avec le foncteur image directe pour une immersion fermée (Thm. 13.2.7) et avec

le foncteur image inverse pour une projection (Thm. 13.2.12). En particulier, toute construction géométrique en caractéristique $p > 0$ se relève **intrinsèquement** du point de vue cohomologique en caractéristique zéro.

1.18. Un autre intérêt de la théorie précédente est de fournir des invariants sur l'anneau des entiers V et pas seulement sur le corps des fractions K, bien qu'il faille modifier la définition du foncteur image directe, ce que les méthodes de la géométrie analytique rigide ne peuvent pas faire. Cependant, les méthodes de cet article fournissent déjà une bonne théorie pour la cohomologie de de Rham p-adique d'échelon nul dans le cas où l'indice de ramification e de V est strictement plus petite que $p-1$. Cela permet de redémontrer, comme test, que si $e < p-1$, la cohomologie de de Rham algébrique d'un relèvement propre et lisse sur V d'une variété propre et lisse sur k est indépendante du relèvement à isomorphisme canonique près (Coro. 7.2.3). De même, les méthodes de cet article montrent la fonctorialité sur V de la cohomologie de de Rham p-adique d'échelon nul sur V d'une variété algébrique lisse sur k, toujours sous la condition $e < p-1$ (Thm. 13.3.5).

1.19. Pour illustrer nos méthodes on démontre les théorèmes suivants, qui sont autant de tests pour une théorie cohomologique des schémas algébriques :

Théorème (13.3.3). — *Soit* $\mathrm{Sms}(k)$ *la catégorie des schémas lisses et séparés sur* k *alors la correspondance* $DR(-/K)$

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Sms}(k) & \rightsquigarrow & D^+(K) \\ X & \rightsquigarrow & DR(X/K) := \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^!_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \end{array}$$

est un **foncteur contravariant** *qui étend le foncteur de Monsky-Washnitzer* [M-W] *et qui induit un isomorphisme* $DR(f/K)$ *dans le cas où le morphisme* f *de schémas est la projection de l'espace affine* $A^n_k \times_k X$ *de base* X *sur* X.

Comme application de la formule locale des traces de Monsky [M_2], du théorème de finitude des nombres de Betti p-adiques [Me_2] et de la fonctorialité précédente on trouve la factorisation p-adique de la fonction Zêta d'un variété algébrique non singulière sur un corps fini, qui nous a servi de guide, de test et qui justifie nos méthodes :

Théorème (13.4.7). — *Supposons que k est un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments et que $f = fr$ est le morphisme de Frobenius relatif à $\mathbb{F}_q$ d'une variété algébrique X lisse purement de dimension* $\dim X$. *Les endomorphismes de Frobenius $\boldsymbol{F}^\bullet$ de la cohomologie de de Rham p-adique $H^\bullet_{DR}(X/K)$ définis par la fonctorialité du théorème précédent sont* bijectifs, *et l'on a la factorisation p-adique de la fonction Zêta de X :*

$$Z(X,t) = \prod_{i,impair} P_{p,i}(X) / \prod_{i,pair} P_{p,i}(X),$$

où $P_{p,i}(X) := \det(1 - q^{\dim X}(\boldsymbol{F}^i)^{-1}t) \in K[t]$, $0 \leqslant i \leqslant 2\dim X$, est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $q^{\dim X}(\boldsymbol{F}^i)^{-1}$ agissant sur $H^i_{DR}(X/K)$.

Cela fournit la première démonstration, à notre connaissance, de l'expression cohomologique p-adique de la fonction Zêta d'une variété algébrique non singulière sur un corps fini par des polynômes, sans restriction sur les singularités à l'infini ou de relèvement (par exemple, pour toutes les variétés quasi-projectives lisses à distance finie). Auparavant, on connaissait, d'une part, le cas affine [M_2], complété de façon essentielle par le théorème de finitude [Me_2] où intervient déjà de façon cruciale la théorie des équations différentielles p-adiques (parce que les variétés affines et leurs morphismes se relèvent) et, d'autre part, le cas propre et lisse par la théorie cristalline [B_2] (parce qu'il n'y pas de singularités du tout ni à distance finie ni à l'infini).

Théorème (14.2.1). — *Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas lisses et séparés sur k de complémentaire $j : U \to X$. Alors, on a la suite exacte de Gysin :*

$$\cdots \to H^{\bullet-2\mathrm{codim}_X Y}_{DR}(Y/K) \to H^\bullet_{DR}(X/K) \to H^\bullet_{DR}(U/K) \to \cdots,$$

qui étend la suite de Gysin de l'article [Me_2] *dans le cas affine. En particulier, la classe $c\ell(Y)$ de cohomologie de Y est bien définie comme un élément de $H^{2\mathrm{codim}_X Y}_{DR}(X/K)$ dont la restriction à U est nulle. On en déduit lorsque le corps de base est parfait un morphisme « classe de cohomologie » gradué :*

$$c\ell : \qquad C^\bullet(X) \to H^{2\bullet}_{DR}(X/K)$$

entre le groupe gradué par la codimension des cycles de X, et le K-espace gradué de cohomologie de de Rham p-adique de X.

Cela fournit, à notre connaissance, la première construction du morphisme « classe de cohomologie d'un cycle » en théorie de de Rham p-adique sans restriction sur les singularités dans le cas d'un corps de base parfait et

donne donc lieu aux problèmes classiques des rapports entre classes de cohomologie et cycles d'autant plus que la cohomologie de de Rham p-adique est munie de l'action de Frobenius. Rappelons que la théorie cristalline fournit un morphisme classe de cohomologie pour les cycles non singuliers [B_2].

1.20. C'est à l'intérieur de la catégorie $D^*((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ qu'on pourra définir à l'aide des foncteurs f^*_{diff}, f^{diff}_*, $\boldsymbol{R}\Gamma_Z$, $\boldsymbol{R}j^{\mathrm{inf}}_* j^{-1}_{\mathrm{inf}}$ des catégories pleines de coefficients ayant les bonnes propriétés de finitude, mais nous n'aborderons pas cette question dans le présent article. Le cas des courbes nous indique clairement où se trouvent les difficultés et est en même temps un guide précieux. On dispose déjà de la catégorie de base des fibrés p-adiques $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ à savoir la sous-catégorie pleine de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}$ des modules à gauche spéciaux qui sont localement libres de type fini sur le faisceau $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ introduite dans [Me_2] dans le cas d'un relèvement.

1.21. Si X est une courbe lisse, nous avons défini dans [C-M_1], [C-M_2], [C-M_3] et [C-M_4] la **monodromie** des objets de la catégorie $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ en un point singulier à l'infini, en particulier nous avons défini leurs exposants p-adiques et leur polygone de Newton p-adique. C'est là le fond du problème et le progrès décisif dans la théorie p-adique. Nous avons en particulier résolu dans l'article fondamental [C-M_2] le problème du prolongement analytique multiforme des solutions locales des équations différentielles sur le plan p-adique qui est totalement discontinu sans lequel rien n'est possible comme nous l'avons mis en évidence dans ([M-N_1], introduction). Dans l'article [C-M_4] nous avons montré la formule d'Euler-Poincaré globale pour les fibrés p-adiques appartenant à une sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ en imposant des restrictions sur leurs exposants p-adiques et aux exposants p-adiques de leur module des endomorphismes aux points à l'infini, ce qui montre que c'est le bon point de vue : ces restrictions sont satisfaites pour les fibrés p-adiques qui proviennent de la géométrie, ce qui donne lieu à la théorie p-adique des fonctions L sur les corps finis [C-M_4].

1.22. Dans la théorie p-adique les propriétés de finitude sont des questions hautement non triviales, comme l'illustrent le théorème de finitude des nombres de Betti [Me_2] et la formule d'Euler-Poincaré ([C-M_1], [C-M_4]). Pour démontrer ces théorèmes on a été amené à développer en profondeur la

théorie des équations différentielles p-adiques ([C-M$_1$], [C-M$_2$], [C-M$_3$], [C-M$_4$]), qui est de toute façon au coeur de la théorie des coefficients p-adiques et qu'on ne pourra pas éviter par des considérations formelles. La théorie des équations différentielles p-adiques permet de définir la catégorie des coefficients p-adiques sur les courbes et surtout de définir leurs monodromies aux points singuliers, qui sont à la base de leurs propriétés de finitude, en particulier de leur stabilité pour une **immersion ouverte** ([M-N$_1$], Thm. 4.5.4, [C-M$_1$], [C-M$_2$], [C-M$_3$], [C-M$_4$]). Les trois premiers article montrent le théorème de l'indice et le dernier article montre l'existence d'un réseau. La théorie des coefficients p-adiques sur les courbes a déjà de nombreuses applications ([Me$_2$]).

1.23. Il nous reste à étendre ces résultats en dimensions supérieures. Pour attaquer ce problème on dispose maintenant du couple $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ qui est le cadre naturel de la géométrie différentielle en inégales caractéristiques. En surmontant intrinsèquement les difficultés liées aux relèvements aussi bien pour les variétés que pour leurs morphismes, ce couple permet de raisonner géométriquement pour la topologie de Zariski des schémas en caractéristiques positives. C'est un des outils de base pour traiter ces questions, les foncteurs f^*_{diff}, f^{diff}_*, $\boldsymbol{R}\Gamma_Z$, $\boldsymbol{R}j^{\mathrm{inf}}_* j^{-1}_{\mathrm{inf}}$ qu'il définit jouant un rôle essentiel et la théorie trouve un cadre vraiment naturel permettant de formuler les bons énoncés.

1.24. On peut considérer le site $X^\wedge_{\mathrm{inf}}$ infinitésimal formel dont les objets $\mathcal{U}^\wedge = (U, \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\wedge/R})$ sont les relèvements formels R-plats d'ouverts de X qui est annelé par le faisceau des fonctions formelles $\mathcal{O}_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}/R}$. On définit de même le faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}}$ des automorphismes d'algèbres qui se réduisent à l'identité modulo I. Localement, un élément de ce groupe est un opérateur différentiel à coefficients formels défini de même par réduction modulo les puissances de I en imposant une condition de croissance de type $\dagger$ sur l'ordre des opérateurs différentiels et le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}/R}$ des opérateurs différentiels à coefficients formels garde un sens sur le site infinitésimal formel $X^\wedge_{\mathrm{inf}}$ et l'on a un plongement $\mathcal{G}_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^\dagger_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}/R}$ pour la structure multiplicative. On définit alors la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux qui est canoniquement équivalente à la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\wedge/R}$-modules à gauche d'un relèvement formel plat

lorsqu'il existe. La cohomologie de de Rham p-adique

$$H^{\bullet}_{DR}(X/K, \mathcal{O}_{X^{\wedge}_{\mathrm{inf}}/K}) := \mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\wedge}_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^{\wedge}_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^{\wedge}_{\mathrm{inf}}/K})$$

du site infinitésimal formel d'une variété algébrique X lisse sur k doit être canoniquement isomorphe à la cohomologie cristalline de X sur K de façon fonctorielle prolongeant l'isomorphisme de comparaison de Berthelot-Ogus [B-O] dans le cas d'un relèvement lisse. Tous les développements qui ne font pas intervenir des propriétés de finitude de cet article se transposent avec des démonstrations plus simples en remplaçant le couple $\mathcal{G}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}$ par le couple $\mathcal{G}_{X^{\wedge}_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\wedge}_{\mathrm{inf}}/R}$. Le lecteur non averti prendra garde à ce que la cohomologie de de Rham p-adique du site infinitésimal formel, tout comme celle du site cristallin, ne fournit pas les bons nombres de Betti p-adiques pour les variétés **ouvertes**, ce qui explique la nécessité du passage du site infinitésimal formel au site infinitésimal †-adique précisément. D'autre part, on dispose d'un foncteur naturel exact de la catégorie $(\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod vers la catégorie $(\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\wedge}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod, ce qui induit un morphisme de comparaison de la cohomologie de de Rham p-adique du site †-adique à la cohomologie de de Rham p-adique du site formel. On prendra garde aussi à ce que la suite exacte de Gysin n'a pas lieu dans le cas formel.

1.25. Comme le lecteur peut le constater cette théorie de nature essentiellement algébro-géométrique est un cadre naturel si l'on veut développer une théorie des coefficients p-adiques pour les variétés algébriques. On peut penser et espérer qu'à terme elle fournira une théorie cohomologique des coefficients p-adiques disposant de tous ses outils essentiels, ce qui est déjà le cas pour les courbes grâce à la théorie des équations différentielles p-adiques ([C-M$_1$], [C-M$_2$], [C-M$_3$], [C-M$_4$]). Nous avons maintenant de nombreuses indications allant dans ce sens en dimensions supérieures. Elle soulève de nombreuses questions et ouvre de nouveaux horizons. Elle provient de trois courants d'idées dont elle est la synthèse. La notion d'algèbre faiblement complète [M-W] et sa localisation [Mr], la théorie du site infinitésimal [G$_4$] et bien entendu la théorie des $\mathscr{D}_X$-modules des années dix-neuf cent soixante-dix comme théorie des Coefficients de de Rham en Géométrie Algébrique au sens de Grothendieck, qui a fourni la bonne théorie en caractéristique zéro [Me$_1$]. Ces trois courants ont historiquement des motivations bien distinctes, mais se complètent harmonieusement dans cette théorie.

1.26. Nous n'utilisons dans le présent article aucun résultat des articles fondateurs du point de vue conceptuel et technique ([M-W], [M$_1$]), dont les

résultats les plus importants apparaissent ici comme des cas particuliers. En particulier, nous retrouvons avec nos méthodes comme test préliminaire (Coro. 6.7.6) la fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adique des variétés affines lisses de l'article [M-W] qui est le point clef de la théorie de ces auteurs.

1.27. La Table des matières donne une idée du contenu de notre article qui comporte deux parties. Les chapitres 1 à 9 développent les fondements de la théorie des modules spéciaux sur le site infinitésimal †-adique d'un schéma lisse et de la cohomologie de de Rham †-adique. Les chapitres 10 à 15 développent les opérations cohomologiques pour les catégories des modules spéciaux sur les sites infinitésimaux p-adiques et les propriétés de fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adique. Les résultats de cet article reposent sur les propriétés de **finitude** des opérateurs différentiels p-adiques ([M-N$_1$], [M-N$_2$], [M-N$_3$], [Me$_3$]), sur le théorème des relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes [A] et sur le critère d'affinité †-adique [A-M$_2$].

1.28. À l'occasion de cet article, nous souhaitons remercier Alexandre Grothendieck, qui a incité avec force en mai 1983 le deuxième auteur à travailler dans le sujet. Nous espérons que nous avons contribué à la promotion de ses idées parmi les nouvelles générations. Tout particulièrement son idée de Cristal en tout genre trouve son aboutissement pour les variétés éventuellement ouvertes dans la notion de Module Spécial sur le Site Infinitésimal p-adique d'un schéma, bien que comme nous l'avons déjà signalé la théorie des Cristaux et la théorie des $\mathscr{D}_X$-modules ont au départ des motivations complètement indépendantes. Nous remercions aussi nos collègues Gilles Christol et Luis Narvaez pour leurs contributions respectives qui ont fait progresser le sujet et l'ont rendu crédible. Les résultats de cet article ont été présentés à la Conférence Satellite de Géométrie Algébrique du C.I.M. de Madrid 2006, Segovia (Espagne) 16-19 août 2006.

2. Notations, conventions et rappels

Une difficulté dans ce domaine est la cohérence des notations et de la terminologie. Nous avons essayé d'être aussi soigneux et simples que possible, autant du point de vue des notations que de la terminologie. En particulier, nous dirons de façon générique « cohomologie de de Rham †-adique » pour cohomologie de type de de Rham que nous considérons dans cet article et

plus spécialement « cohomologie de de Rham p-adique » lorsque l'anneau de base est de valuation d'inégales caractéristiques $p > 0$, étant entendu que tous les espaces de cohomologie de type de Rham naturels et intéressants doivent être canoniquement isomorphes par des théorèmes de comparaison convenables. Afin d'éviter des répétitions, nous utiliserons dans tout cet article les notations suivantes.

Notation 2.0.1. — 1) R anneau commutatif ayant un élément unité, I idéal de R, $R_s := R/I^s, s \geqslant 1$; en particulier $R_1 := R/I$.

2) $V, \mathfrak{m}, k, K, e$ anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(p, 0)$ d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel k et de corps de fractions K et d'indice de ramification absolu $e := v_{\mathfrak{m}}(p)$.

3) X/R schéma sur R.

4) De façon générale, si $f : Y \to X$ est un morphisme d'espaces annelés sur R, nous notons $\mathscr{D}_{Y \to X/R}$ le faisceau des opérateur différentiels défini par récurrence sur l'ordre dans ([EGA IV$_4$], §16) et noté $\mathscr{D}\mathit{iff}_R(f^{-1}\mathcal{O}_{X/R}, \mathcal{O}_{Y/R})$. Les notations $\mathscr{D}_{Y \to X/R}$, $\mathscr{D}_{X/R} := \mathscr{D}\mathit{iff}_R(\mathcal{O}_{X/R}) := \mathscr{D}\mathit{iff}_R(\mathcal{O}_{X/R}, \mathcal{O}_{X/R})$ et leurs variantes sont aujourd'hui universelles.

4) Si X/R est un schéma lisse sur R, un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ est constitué de sections locales du faisceau $\mathcal{O}_{X/R}$ telles que leurs différentielles forment une base locale du fibré des R-formes différentielles ([EGA IV$_4$], §16).

5) $\alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\binom{\alpha}{\beta} := \alpha!/\beta!(\alpha - \beta)!$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

6) $\Delta^\alpha := \Delta_x^\alpha := \Delta_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \Delta_{x_n}^{\alpha_n} := \Delta_1^{\alpha_1} \cdots \Delta_n^{\alpha_n}$ la suite des opérateurs différentiels associés à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et à $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$; ces opérateurs sont caractérisés par $\Delta^\alpha(x^\beta) = \binom{\beta}{\alpha} x^{\beta - \alpha}$ ([EGA IV$_4$], Thm. 16.11.2).

7) $i : Y \hookrightarrow X$ immersion fermée de complémentaire $j : U \hookrightarrow X$, $p : Y \times X \to X$ projection du produit sur le second facteur et $q : Y \times X \to Y$ projection du produit sur le premier facteur, $f : Y \to X$ morphisme de Y dans X.

8) $r := r_{W,U} : W \hookrightarrow U$ l'inclusion d'un ouvert dans un autre ; nous noterons r pour $r_{W,U}$ quand il n'y a pas de risque de confusion.

9) Si $f : Y \to X$ est un morphisme, nous notons par f_*, f^{-1} les images directe et inverse topologiques usuelles, par f_*^{diff} une image directe différentielle et par f_{diff}^* une image inverse différentielle.

10) Si R est noethérien et A est une R-algèbre, on note $A^\dagger$ son complété †-adique (complété faible) pour la topologie I-adique de R [M-W], c'est donc par construction une algèbre sur le complété séparé $\hat{R} = R^\dagger$ de R qui est séparée pour la topologie I-adique. On appelera « R-algèbre †-adique » une algèbre qui coïncide avec son complété †-adique. On pose $A_s := A/I^s$.

11) Si $A^\dagger$ est une R-algèbre †-adique, on note $\Omega_{A^\dagger/R} := \Omega^{sep}_{A^\dagger/R}$ le $A^\dagger$-module des formes différentielles **séparées** de $A^\dagger$.

12) Si $\mathcal{A}_X$ est un faisceau d'anneaux sur un espace topologique X, on note $\mathcal{A}_X$-Mod la catégorie des $\mathcal{A}_X$-modules à gauche et Mod-$\mathcal{A}_X$ la catégorie des $\mathcal{A}_X$-modules à droite. Mais si $\mathcal{A}_X$ est commutatif, on note $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}_X)$ la catégorie des $\mathcal{A}_X$-modules.

13) Si Ab est une catégorie abélienne, on note $D^*(\mathrm{Ab})$ sa catégorie dérivée (le signe $*$ pouvant être vide ou prendre les valeurs $+, -, b$ [V]). Mais nous notons $D^*(\mathcal{A}_X)$ au lieu de $D^*(\mathrm{Mod}(\mathcal{A}_X))$ dans le cas d'un faisceau d'anneaux commutatifs.

Nous compléterons cette liste de notations au fur et à mesure et nous dressons leur liste dans l'index des notations.

Comme le lecteur pourra le constater, la théorie de la catégorie homotopique K^* est insuffisante pour le présent article, alors que la théorie de la catégorie dérivée D^* [V] est essentielle aussi bien pour les résultats que pour les démonstrations.

Définition 2.0.2. — *Nous rappelons qu'un complexe de modules sur un faisceau d'anneaux sur un espace topologique ou sur un site est* parfait, *selon Grothendieck, (relativement à la catégorie des modules localement libres de rang fini) si localement il admet une résolution de longueur finie dont les termes sont des modules libres de rang fini.*

Nous utilisons le critère de platitude locale sous la forme suivante ([EGA III_1], Chap. 0, 10.2.1), ([Bo], Bourbaki, *Alg. comm.*, Chap. III, §5, n° 2, Thm. 1).

Proposition 2.0.3. — *Soient deux V-algèbres noethériennes D et D', telles que l'idéal $\mathfrak{m}$ est contenu dans le radical de D'. Si M est un (D, D')-bimodule qui est un D'-module de type fini et que les réductions modulo $\mathfrak{m}^s$ de M sont D_s-plates pour tout $s \geqslant 1$, alors M est un D-module à gauche* **plat**.

Par définition d'une V-algèbre, V est contenu dans le centre de D. Les hypothèses de la proposition entraînent que M est D-idéalement séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, c'est-à-dire pour tout idéal J à droite de D le D'-module à droite $J \otimes_D M$ est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

2.1. Faisceau donné localement sur un espace topologique

Si X est un espace topologique, rappelons qu'un faisceau d'ensembles donné localement est la donnée d'un recouvrement de X par des ouverts U_i, $i \in J$, d'un faisceau d'ensembles $\mathcal{F}_i$ sur chaque ouvert, d'un isomorphisme $\alpha_{ij} : \mathcal{F}_i|U_{ij} \simeq \mathcal{F}_j|U_{ij}$ satisfaisant aux conditions de cocycles $\alpha_{ik} = \alpha_{ij} \circ \alpha_{jk}$ sur $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$. On rappelle le théorème classique qui pour Grothendieck est le cas le plus simple de la méthode de la descente.

Théorème 2.1.1. — *Soit U_i, $i \in J$ un recouvrement de X. Il existe un foncteur* canonique *de la catégorie des faisceaux d'ensembles donnés localement sur le recouvrement U_i, $i \in J$ dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X qui est un inverse canonique au foncteur de restriction.*

Nous utilisons de façon essentielle le critère d'affinité d'un schéma faiblement complet [A-M$_2$] et le théorème du symbole total des opérateurs différentiels p-adiques ([M-N$_1$], [M-N$_3$]), que nous allons rappeler rapidement pour la commodité du lecteur.

2.2. Schémas †-adiques, critère d'affinité †-adique, produits fibrés

Soit R un anneau commutatif noethérien muni de la topologie définie par un idéal I. La notion de schéma faiblement complet pour la topologie I-adique de R a été définie par D. Meredith [Mr]. Rappelons que c'est un espace annelé $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ localement isomorphe à un schéma †-adique affine de type fini. Un schéma †-adique affine se construit ([Mr]) à partir d'une R-algèbre $A^\dagger$ faiblement complète de type fini, qui est noethérienne en vertu du théorème de Fulton, exactement comme se construit un schéma formel affine adique noethérien à partir d'un anneau adique noethérien [EGA I]. Par construction, si $(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ est un schéma faiblement complet, c'est un espace localement annelé dont le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ est cohérent et sa réduction $(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}/I) := (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R} \otimes_{R_X} R_{1X})$

est un R_1-schéma localement de type fini. En particulier, l'espace topologique X est localement noethérien. On dira que $\mathscr{X}^\dagger := (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ est un relèvement †-adique de sa réduction. Nous utilisons systématiquement la terminologie schéma **†-adique** au lieu de schéma **faiblement complet** qui peut prêter à confusion puisque complet n'implique pas faiblement complet, le couple $R \supset I$ étant sous-entendu quand il n'y a pas de risque de confusion précisément.

Dans l'article [A-M$_2$] nous avons démontré le critère d'affinité †-adique :

Théorème 2.2.1. — *Un schéma †-adique $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ est affine* **si et seulement si** *le R_1-schéma $(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}/I)$ est affine.*

Ce critère admet de nombreux corollaires importants et permet de raisonner avec la topologie de Zariski.

Corollaire 2.2.2. — *L'espace localement annelé induit sur un ouvert affine par un schéma †-adique est un schéma †-adique affine.*

Ce corollaire produit beaucoup d'ouverts affines du site infinitésimal †-adique en remplaçant l'hypothèse « *être un ouvert affine †-adique* » par l'hypothèse plus pratique et plus souple « *être un ouvert affine* » au sens de la théorie des schémas.

Notation 2.2.3. — Si $\mathcal{U}^\dagger$ est un schéma †-adique et W est un ouvert de l'espace topologique U, on note $\mathcal{U}^\dagger|W$ le schéma †-adique induit par $\mathcal{U}^\dagger$ sur W.

Corollaire 2.2.4. — *Soient $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ un schéma †-adique et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module cohérent. Si U est un ouvert affine, la cohomologie $H^i(U, \mathcal{F})$ est nulle pour $i > 0$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du critère d'affinité et du théorème d'acyclicité ([A-M$_2$], Thm. 4.2.2), qui étend au-dessus de R le théorème d'acyclicité de Meredith [Mr]. En particulier, si X est séparé, un recouvrement par des ouverts affines est un recouvrement de Leray pour tout $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module cohérent. ■

On en déduit le critère cohomologique suivant.

Corollaire 2.2.5. — *Soit un schéma †-adique $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *le schéma $\mathscr{X}^\dagger$ est †-adique affine,*

2) *sa réduction est un schéma affine,*
3) *pour tout $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module cohérent $\mathcal{F}$, le module $H^i(X,\mathcal{F})$ est nul pour $i>0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que 3) implique 1). Mais un $\mathcal{O}_{X/R_1}$-module cohérent $\mathcal{F}_1$ est aussi un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module cohérent et est donc cohomologiquement trivial par hypothèse. En vertu du critère d'affinité algébrique de Serre, le schéma $(X,\mathcal{O}_{X/R_1})$ est affine, et en vertu du critère d'affinité †-adique, le schéma $\mathscr{X}^\dagger$ est †-adique affine. ■

Remarque 2.2.6. — La méthode de l'article [A-M$_2$] montre aussi le critère d'affinité dans le cas des schémas formels et donc l'analogue du critère cohomologique précédent. Nous ignorons si ce résultat, qui ne semble pas figurer dans [EGA], était connu auparavant.

Dans le même article, nous utilisons le critère d'affinité uniquement pour les ouverts affines déjà contenus dans les ouverts †-adiques affines pour démontrer l'existence de produits fibrés ([A-M$_2$], Thm. 6.2.3) :

THÉORÈME 2.2.7. — *La catégorie des schémas †-adiques sur un anneau noethérien R muni d'une topologie définie par un idéal I admet des produits fibrés.*

L'existence du produit fibré dans le cas des schémas formels est démontré dans [EGA I]. Nous utilisons aussi le résultat suivant démontré dans ([A-M$_2$], 3.3.7).

THÉORÈME 2.2.8. — *La catégorie des schémas †-adiques affines est équivalente à la catégorie des R-algèbres †-adiques de type fini.*

En particulier, un morphisme de schémas †-adiques affines provient d'un morphisme des algèbres associées.

Nous ne considérons dans le présent article que les algèbres †-adiques (topologiquement) **de type fini**. Nous dirons algèbre †-adique pour algèbre †-adique topologiquement de type fini et schéma †-adique pour schéma †-adique localement topologiquement de type fini. Nous rappelons le théorème ([M-W], Thm. 3.2) :

THÉORÈME 2.2.9. — *Soit $u^\dagger : A^\dagger \to B^\dagger$ un morphisme de R-algèbres †-adiques.*

1) *Si la réduction modulo I de $u^\dagger$ est surjective, alors $u^\dagger$ est surjective.*
2) *Si $B^\dagger$ une R-algèbre †-adique* plate *et si la réduction modulo I de $u^\dagger$ est un isomorphisme, alors $u^\dagger$ est un isomorphisme.*

Nous en déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME 2.2.10. — *Soient $\mathscr{X}_1^\dagger$ et $\mathscr{X}_2^\dagger$ deux schémas †-adiques et $f^\dagger$ un morphisme $\mathscr{X}_1^\dagger \to \mathscr{X}_2^\dagger$ dont la réduction f modulo I est un isomorphisme. Si $\mathscr{X}_1^\dagger$ est R-plat, le morphisme $f^\dagger$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que le morphisme de faisceaux R-algèbres $f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}_2^\dagger/R} \to \mathcal{O}_{\mathscr{X}_1^\dagger/R}$ est un isomorphisme. La question est donc locale. On peut donc supposer que X_1 et X_2 sont affines. En vertu du critère d'affinité 2.2.1, les schémas †-adiques, $\mathscr{X}_1^\dagger$ et $\mathscr{X}_2^\dagger$ sont donc affines d'algèbres $A_1^\dagger$ et $A_2^\dagger$; de plus, $A_1^\dagger$ est plate sur R. En vertu de l'équivalence 2.2.8, le morphisme $f^\dagger$ provient d'un morphisme d'algèbres $A_2^\dagger \to A_1^\dagger$ dont la réduction est un isomorphisme. D'après le théorème 2.2.9, ce morphisme d'algèbres est un isomorphisme. Enfin, en vertu de l'équivalence 2.2.8, le morphisme $f^\dagger$ est un isomorphisme. ■

Remarque 2.2.11. — Le critère d'affinité dans la démonstration du théorème précédent n'est pas nécessaire si on se rappelle que, sur un schéma †-adique affine, l'espace annelé induit sur un ouvert principal est lui-même un schéma †-affine et que les ouverts principaux forment une base de la topologie.

2.3. Algèbres †-adiques lisses et schémas †-adiques lisses

Nous rappelons les propriétés essentielles de R-lissité [A]. On dit qu'une R-algèbre A est lisse si le morphisme structural $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} R$ est lisse au sens de la théorie des schémas ([EGA IV$_4$], §17) ; c'est une condition locale à la source qui implique que $\operatorname{Spec} A$ est localement de présentation finie sur $\operatorname{Spec} R$, donc A est de présentation finie sur R. Dans le théorème des relèvements algébriques on ne fait *aucune hypothèse* sur le couple $I \subset R$.

THÉORÈME 2.3.1. — *Si R est un anneau commutatif avec élément unité, $I \subset R$ un idéal et A_1 une R_1-algèbre lisse, alors A_1 admet un relèvement* **lisse** *A sur R.*

Le premier résultat dans cette direction est dû à Grothendieck dans le cas d'un idéal I nilpotent qui est aussi l'un des tous premiers succès de la théorie des schémas et des éléments nilpotents. Le cas d'un couple $I \subset R$ hensélien est dû à R. Elkik. On rencontre bien entendu naturellement des couples $I \subset R$ non henséliens où R est le plus souvent noethérien.

Supposons maintenant que R est noethérien.

THÉORÈME 2.3.2. — *Soient $f_1 : A_1 \to B_1$ un morphisme de R_1-algèbres de type fini, $B^\dagger$,$A^\dagger$ des relèvements $\dagger$-adiques de B_1, A_1. Supposons que A_1 est lisse sur R_1 et que $A^\dagger$ est plate sur R.*

1) *Le morphisme f_1 admet alors un relèvement $f^\dagger : A^\dagger \to B^\dagger$.*
2) *Soient $f^\dagger : A^\dagger \to C^\dagger$ un morphisme de R-algèbres, $v^\dagger : B^\dagger \to C^\dagger$ un morphisme de R-algèbres* surjectif *et u_1 un morphisme de R_1-algèbres $A_1 \to B_1$ qui factorise f_1 : $f_1 = v_1 \circ u_1$. Il existe alors un morphisme de R-algèbres $u^\dagger : A^\dagger \to B^\dagger$ qui se réduit modulo I à u_1 et qui factorise $f^\dagger$: $f^\dagger = v^\dagger \circ u^\dagger$.*

La propriété 2) dans le théorème précédent exprime que l'algèbre $A^\dagger$ est très lisse dans la terminologie de Monsky-Washnitzer [M-W].

DÉFINITION 2.3.3. — *Nous dirons qu'une algèbre $\dagger$-adique $A^\dagger$ est une algèbre $\dagger$-adique lisse sur R, sous-entendu pour la topologie I-adique, si l'une des conditions suivantes et équivalentes a lieu :*

1) *l'algèbre $A^\dagger$ est plate sur R et sa réduction A_1 est lisse sur R_1,*
2) *l'algèbre A_s est lisse sur R_s pour tout $s \geqslant 1$,*
3) *l'algèbre $A^\dagger$ est très lisse.*

Grothendieck dit formellement lisse pour la condition 2) et Monsky-Washnitzer disent très lisse pour la condition 3). Comme toutes ces définitions sont équivalentes, il est légitime d'appeler une telle algèbre $\dagger$-adique lisse ou même simplement lisse, quand il n'y a pas de risque de confusion. Le complété $\dagger$-adique $A^\dagger$ d'un relèvement algébrique lisse A d'une R_1-algèbre lisse A_1 est donc une algèbre $\dagger$-adique lisse.

Nous rappelons qu'on dit qu'un schéma est non singulier, ou est régulier, si tous ses anneaux locaux sont réguliers. Un schéma lisse sur un corps k est non singulier ; de plus, si le corps de base est parfait, un schéma non singulier localement de type fini sur k est lisse sur k ([EGA IV$_4$], §17.15).

Nous rappelons que si $A^\dagger$ est une R-algèbre $\dagger$-adique, le $A^\dagger$-module $\Omega_{A^\dagger/R}$ des formes différentielles **séparées** est de type fini ([M-W], Thm. 4.5), et que si $A^\dagger$ est $\dagger$-adique lisse, c'est un $A^\dagger$-module projectif ([M-W], Thm. 4.6). De plus, la réduction modulo I de $\Omega_{A^\dagger/R}$ est canoniquement isomorphe à Ω_{A_1/R_1} ([M-W], Thm. 4.4).

DÉFINITION 2.3.4. — *On dit qu'un schéma $\dagger$-adique $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ est « $\dagger$-adique lisse » si son faisceau structural est plat sur R et que sa réduction $X_1 := (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}/I)$ est lisse sur R_1.*

En utilisant le corollaire 2.2.4, on voit qu'un schéma †-adique $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ est †-adique lisse si et seulement si son algèbre au-dessus de tout ouvert affine est une algèbre †-adique lisse. Un schéma †-adique lisse est plat, mais si la réduction est lisse un schéma †-adique plat est †-adique lisse. Quand on sait à l'avance que **la réduction est lisse**, comme c'est souvent le cas dans cet article, il vaut mieux dire « plat » au lieu de †-adique « lisse » pour les schémas †-adiques pour être précis et éviter toute confusion.

Si $\mathscr{X}^\dagger$ est un schéma †-adique, le $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module $\Omega_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ des formes différentielles séparées est cohérent ; et si $\mathscr{X}^\dagger$ est †-adique lisse, c'est un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module localement libre de type fini.

Dans cet article nous dirons pour abréger relèvement au lieu relèvement †-adique, et donc relèvement plat au lieu de relèvement †-adique plat.

2.4. Le théorème du symbole total d'un opérateur différentiel p-adique

Soit $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ un schéma †-adique (non nécessairement lisse), on définit le faisceau des opérateurs différentiels $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ ([M-N$_1$], [M-N$_2$]) :

Définition 2.4.1. — *Le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ des opérateurs différentiels †-adiques est le sous-faisceau du faisceau des endomorphismes du faisceau structural $\mathcal{E}nd_R(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ des sections P telles que pour tout $s \geqslant 1$ leur réduction modulo I^s est un opérateur différentiel sur le R_s-schéma $X_s := (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}/I^s)$ dont l'ordre est localement borné par une fonction linéaire en s.*

Par définition, le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ contient comme sous-faisceau d'algèbres le faisceau $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ des opérateurs différentiels d'ordre localement fini, défini par récurrence sur l'ordre comme le faisceau des opérateurs différentiels de l'espace annelé $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ [M-N$_2$]. Si $\mathscr{X}^\dagger$ est †-adique, lisse le faisceau $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ est une $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-algèbre filtrée par des $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-modules localement libres de type fini ([M-N$_2$], appendice A). On peut étendre ce résultat au faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ dans le cas d'un couple $(V, \mathfrak{m})$. Si $A^\dagger$ est une algèbre †-adique, on note $D^\dagger_{A^\dagger/R}$ l'anneau des sections globales des opérateurs différentiels du schéma †-adique affine associé. Dans l'article [M-N$_3$] qui complète l'article de recherche [M-N$_1$] on démontre le théorème du symbole total en deux parties (Thm. 5.0.2, Thm. 6.0.7), la première partie définit le morphisme symbole total qui est alors injectif, la seconde partie montre qu'il est surjectif :

THÉORÈME 2.4.2. — *Soient $\mathscr{X}^\dagger$ un schéma †-adique lisse sur V et U un ouvert affine de X d'algèbre †-adique $A^\dagger$ munie d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ dont les différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$ forment une base du module des formes différentielles* **séparées** *$\Omega_{A^\dagger/V}$. Soient P un opérateur différentiel de l'anneau $D^\dagger_{A^\dagger/V} := \Gamma(U, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ et a_α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la suite d'éléments de $A^\dagger$ définis par :*

$$a_\alpha := \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-x)^\beta P(x^{\alpha-\beta}).$$

Alors, l'opérateur P est égal à la série :

$$P(x, \Delta_x) := \sum_\alpha a_\alpha \Delta_x^\alpha.$$

De plus, l'application « symbole total » qui à un opérateur différentiel P associe son symbole total :

$$P \mapsto \sigma_P(x, \xi) := \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$$

est un isomorphisme *de* **$A^\dagger$-modules à gauche** *entre l'anneau des opérateur différentiels $D^\dagger_{A^\dagger/V}$ et l'algèbre $(A^\dagger[\xi_1, \ldots, \xi_n])^\dagger$ complétée †-adique de l'algèbre $A^\dagger[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique de V.*

En fait, dans les articles ([M-N$_1$], [M-N$_3$]) on ne disposait pas du critère d'affinité et on imposait en plus que le schéma †-adique induit $\mathscr{X}^\dagger|U := (U, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}|U)$ soit †-affine. Le critère d'affinité lève cette restriction gênante.

L'isomorphisme précédent **ne respecte pas**, bien entendu, la structure multiplicative et dépend des coordonnées locales. Le théorème du symbole total permet cependant de produire beaucoup d'opérateurs différentiels parce que les éléments de l'algèbre $(A^\dagger[\xi_1, \ldots, \xi_n])^\dagger$ sont faciles à décrire. Le théorème du symbole total admet de nombreuses applications importantes. Par exemple, on a la trivialité cohomologique, qui jouera un rôle essentiel dans cet article :

COROLLAIRE 2.4.3. — *Soit $\mathcal{U}^\dagger$ un schéma †-adique affine lisse sur V muni de coordonnées globales. Alors, les V-modules $H^\bullet(U, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})$ sont nuls en degrés positifs.*

Démonstration. Soient $A^\dagger$ l'algèbre de $\mathcal{U}^\dagger$, $A^\dagger \to (A^\dagger[\xi_1, \ldots, \xi_n)])^\dagger$ l'extension naturelle, $f^\dagger : (\mathscr{T}^*\mathcal{U})^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ la projection associée de schémas †-adiques et $f : T^*U \to U$ la projection du fibré cotangent de U. En vertu du corollaire 2.2.4 et du théorème du symbole total, les images directes

$\boldsymbol{R}^i f_* \mathcal{O}_{(\mathscr{T}^*\mathcal{U})^\dagger/V}$ sont nulles en degrés positifs et l'on a l'isomorphisme de faisceaux V-modules :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V} \simeq f_* \mathcal{O}_{(\mathscr{T}^*\mathcal{U})^\dagger/V}.$$

Il en résulte les isomorphismes de V-modules :

$$H^i(U, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}) \simeq H^i(T^*U, \mathcal{O}_{(\mathscr{T}^*\mathcal{U})^\dagger/V})$$

et l'on est ramené au théorème d'acyclicité 2.2.4 pour les schémas †-adiques affines. ■

Cette démonstration figure déjà dans l'article [M-N$_3$] dans le cas d'un schéma †-adique affine U et le critère d'affinité permet de supposer que U est affine.

Remarque 2.4.4. — Tous les résultats de cet article qui reposent sur le théorème du symbole total ne sont démontrés que pour un couple $(V, \mathfrak{m})$ jusqu'à nouvel ordre.

Remarque 2.4.5. — Dans la définition précédente on peut partir d'un R-schéma formel $\mathscr{X}^\wedge = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\wedge/R})$ [EGA I] et définir le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\wedge/R}$ comme sous-faisceau du faisceau des endomorphismes du faisceau structural et en imposant par réduction modulo I^s des conditions de croissances de type † aux ordres des opérateurs différentiels. Le théorème du symbole total dans le cas d'un schéma formellement lisse sur un anneau noethérien R a lieu et établit de même un isomorphisme de $\hat{A}$-modules à gauche entre $D^\dagger_{\hat{A}/R}$ et le complété †-adique $(\hat{A}[\xi_1, \ldots, \xi_n)])^\dagger$ pour la topologie I-adique de $\hat{A}$ mais la démonstration est élémentaire [M-N$_3$]. De ce point de vue la situation est meilleure.

3. Le site infinitésimal †-adique $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et son topos

Soit R un anneau noethérien muni de la topologie I-adique définie par un idéal $I \subset R$ et soit $(X, \mathcal{O}_{X/R_1})$ un R_1-schéma **lisse** ([EGA IV$_4$], §17).

3.1. Le site infinitésimal †-adique

Nous allons définir le site infinitésimal †-adique de X pour la topologie I-adique de R que nous noterons $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, le couple $I \subset R$ étant sous-entendu. Nous ne considérons pas dans cet article de façon essentielle les changements de base du couple (R, I).

DÉFINITION 3.1.1. — 1) *Un objet de la catégorie $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un ouvert U de l'espace topologique sous-jacent à X muni d'un relèvement $\mathcal{U}^\dagger$* **plat** *sur R, qui est donc un schéma †-adique $\mathcal{U}^\dagger := (U, \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R})$ R-plat, muni d'un morphisme surjectif*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathcal{O}_{U/R_1} \to 0$$

de noyau $I\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}$ où $(U, \mathcal{O}_{U/R_1})$ est le schéma induit sur U.

2) *Un morphisme de la catégorie $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est une inclusion d'ouverts $r : W \hookrightarrow U$ munie d'un morphisme $r^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/R}$ de faisceaux de R-algèbres rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} r^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ r^{-1}\mathcal{O}_{U/R_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{W/R_1}\,. \end{array}$$

3) *Un recouvrement d'un ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ est une famille de morphismes $\{r^\dagger_\gamma : \mathcal{U}^\dagger_\gamma \to \mathcal{U}^\dagger, \gamma \in J\}$ telle que la famille $\{U_\gamma, \gamma \in J\}$ est un recouvrement de U.*

En vertu du théorème 2.2.7, la catégorie des schémas †-adiques sur R admet des produits fibrés, et le produit fibré de deux ouverts du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est plat sur R. La catégorie $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est stable par produit fibré : le changement de base d'un recouvrement est un recouvrement. Le composé d'un recouvrement par des recouvrements est un recouvrement. La catégorie $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ se trouve munie d'une topologie de Grothendieck qui devient donc un site : le Site Infinitésimal †-adique $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ du schéma X pour la topologie I-adique de R. Le théorème des relèvements affines 2.3.1 montre que pour X lisse sur R_1 le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ a beaucoup d'ouverts et de morphismes et le critère d'affinité 2.2.1 produit davantage d'ouverts et de morphismes du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, ce qui lui donne une grande souplesse.

Notation 3.1.2. — Nous notons $\mathcal{U}^\dagger$ un objet du site infinitésimal †-adique $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ un morphisme du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Si $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ est un morphisme du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ nous noterons $r : W \to U$ l'inclusion topologique et r^* le morphisme structural $r^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/R}$ de faisceaux de R-algèbres sur W qui est donc un morphisme local.

Remarque 3.1.3. — 1) Un morphisme $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ se factorise par construction :

$$\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger|W \to \mathcal{U}^\dagger$$

où $\mathcal{U}^\dagger|W \to \mathcal{U}^\dagger$ est le morphisme d'inclusion canonique. Le morphisme $\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger|W$ est un **isomorphisme**, en vertu du théorème

2.2.10. En fait, c'est cet **isomorphisme** d'espaces localement annelés qui est le point essentiel dans ce qui va suivre.

2) On aurait pu dans la définition du site précédent, partir d'un schéma localement de type fini et plat sur R_1 et imposer aux objets d'être plats sur R, alors les morphismes du site sont des isomorphismes lorsque la réduction est une égalité.

3) On aurait pu dans la définition du site précédent partir d'un schéma localement de type fini sur R_1, n'imposer aucune condition restrictive aux relèvements †-adiques mais imposer aux morphismes $\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger|W$ d'être des isomorphismes.

4) Mais aujourd'hui, nous ne savons pas à quelles conditions, en dehors du cas lisse, on obtient au-dessus d'un point singulier un site dont l'ensemble des objets est non vide dans la situation du 2) ou dont l'ensemble des morphismes est non vide dans la situation du 3). C'est pour cette raison-là que nous supposerons dans le présent article que X **est lisse sur** R_1, bien que formellement cela n'est pas indispensable, et que certains développements se transposent.

Remarque 3.1.4. — À cause de la première partie de la remarque précédente, il est facile de voir que la catégorie $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ admet des produit fibrés sans invoquer le théorème général que la catégorie des schémas †-adiques admet des produits fibrés.

Remarque 3.1.5. — Pour tout $s \geqslant 1$ on définit de même le site X^s_{inf} dont les objets sont les relèvements R_s-plats des ouverts de X. On a alors des foncteurs canoniques des catégories sous-jacentes $X^\dagger_{\mathrm{inf}} \to X^{s+1}_{\mathrm{inf}} \to X^s_{\mathrm{inf}}$, pour tout $s \geqslant 1$, puisqu'un ouvert du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ induit par réduction un ouvert du site X^{s+1}_{inf} qui induit un ouvert du site X^s_{inf}. Les méthodes de cet article montrent que ces foncteurs définissent des morphismes de topos abéliens.

3.2. Le topos infinitésimal †-adique

Soient $\boldsymbol{Prefais}(X^\dagger_{\mathrm{inf}})$, resp. $\boldsymbol{Fais}(X^\dagger_{\mathrm{inf}})$ les catégories des préfaisceaux, resp. des faisceaux, à valeurs dans la catégorie des ensembles sur le site infinitésimal †-adique $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Définition 3.2.1. — *Soit $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert du site $X^\dagger_{\inf}$. On a alors un foncteur de restriction :*

$$R_{\mathcal{U}^\dagger} : \boldsymbol{Prefais}(X^\dagger_{\inf}) \to \boldsymbol{Prefais}(U)$$

de la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur le site infinitésimal dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur l'espace topologique U qui à un préfaisceau $\mathcal{P}_{\inf}$ associe le préfaisceau $\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger}$ défini par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger}(W) := \mathcal{P}_{\inf}(\mathcal{U}^\dagger|W)\,,$$

où $\mathcal{U}^\dagger|W$ est le schéma induit sur W par $\mathcal{U}^\dagger$, qui est bien un objet du site infinitésimal. Si W' est un ouvert de W, le morphisme de restriction

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger}(W) \to \mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger}(W')$$

provient de l'inclusion d'espaces annelés $\mathcal{U}^\dagger|W' \subset \mathcal{U}^\dagger|W$.

Notation 3.2.2. — Si $\mathcal{F}_{\inf}$ est un préfaisceau sur le site $X^\dagger_{\inf}$ et $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert, on note $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} := R_{\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{F}_{\inf})$ la restriction du préfaisceau $\mathcal{F}_{\inf}$ à l'ouvert $\mathcal{U}^\dagger$, c'est donc un préfaisceau sur U pour la topologie de Zariski.

Proposition 3.2.3. — *Un préfaisceau d'ensembles $\mathcal{F}_{\inf}$ sur le site $X^\dagger_{\inf}$ est un faisceau si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ sa restriction $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ est un faisceau sur U.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}_{\inf}$ un préfaisceau sur le site infinitésimal et supposons que pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ sa restriction $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ est un faisceau sur U. Soient $\{\phi_\alpha : \mathcal{W}^\dagger_\alpha \to U^\dagger\}$ un recouvrement de $\mathcal{U}^\dagger$ et $\cup_\alpha W_\alpha$ le recouvrement de U induit. Notons $\mathcal{U}^\dagger_\alpha := \mathcal{U}^\dagger|W_\alpha$ le schéma †-adique induit par $\mathcal{U}^\dagger$ sur W_α. Pour chaque α le morphisme $\phi_\alpha : \mathcal{W}^\dagger_\alpha \to \mathcal{U}^\dagger$ se factorise canoniquement par un morphisme : $\mathcal{W}^\dagger_\alpha \to \mathcal{U}^\dagger_\alpha$, qui est automatiquement un isomorphisme. D'où des isomorphismes $\mathcal{F}_{\inf}(\mathcal{U}^\dagger_\alpha) \simeq \mathcal{F}_{\inf}(\mathcal{W}^\dagger_\alpha)$ qui fournissent un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}_{\inf}(\mathcal{U}^\dagger) & \to & \prod_\alpha \mathcal{F}_{\inf}(\mathcal{U}^\dagger_\alpha) & \rightrightarrows & \prod_{\alpha,\beta} \mathcal{F}_{\inf}(\mathcal{U}^\dagger_{\alpha,\beta}) \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F}_{\inf}(\mathcal{U}^\dagger) & \to & \prod_\alpha \mathcal{F}_{\inf}(\mathcal{W}^\dagger_\alpha) & \rightrightarrows & \prod_{\alpha,\beta} \mathcal{F}_{\inf}(\mathcal{W}^\dagger_{\alpha,\beta})\,.
\end{array}$$

Les colonnes sont bijectives. Mais la ligne supérieure est exacte par hypothèse et donc la ligne inférieure est exacte. ■

Définition 3.2.4. — *On définit $\boldsymbol{Fam}(\mathcal{O}uv(X^\dagger_{\inf}))$ comme la catégorie des familles des couples $(\mathcal{U}^\dagger, \mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger})$ indexés par les ouverts $\mathcal{U}^\dagger$ munis d'un faisceau d'ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ sur l'espace topologique U et des morphismes $(\sharp)_{r^\dagger} : f^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}$ indexés par les morphismes $r^\dagger$ tels que :*

1) *les morphismes* $(\sharp)_{r^\dagger}$ *sont transitifs,*
2) *on a l'égalité* $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger|W} = \mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}|W$,
3) *pour l'inclusion canonique* $r^\dagger : \mathcal{U}^\dagger|W \hookrightarrow \mathcal{U}^\dagger$ *le morphisme* $(\sharp)_{r^\dagger}$ *est l'identité.*

On a alors un foncteur canonique de restrictions :

$$\text{(Rest)} : \qquad \boldsymbol{Fais}(X^\dagger_{\mathrm{inf}}) \longrightarrow \boldsymbol{Fam}(\mathcal{O}uv(X^\dagger_{\mathrm{inf}}))$$

qui à un faisceau $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ associe ses restrictions $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} := R_{\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}})$.

Proposition 3.2.5. — *Le foncteur canonique précédent* (Rest) *est une équivalence de catégories. Les morphismes* $(\sharp)_{r^\dagger}$ *sont de plus des isomorphismes.*

Démonstration. En effet, une famille de faisceaux d'ensembles $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ indexée par les ouverts $\mathcal{U}^\dagger$ et qui appartient à la catégorie $\boldsymbol{Fam}(\mathcal{O}uv(X^\dagger_{\mathrm{inf}}))$ définit un préfaisceau sur le site infinitésimal. La restriction de ce préfaisceau à tout ouvert du site est un faisceau de Zariski sur l'ouvert topologique sous-jacent par hypothèse et, en vertu de la proposition précédente, ce préfaisceau est un faisceau. On obtient comme cela un inverse canonique au foncteur (Rest). La compatibilité avec la composition des morphismes montre que les morphismes $(\sharp)_{r^\dagger}$ sont des isomorphismes. ■

Cette équivalence canonique produit beaucoup de faisceaux sur le site.

Exemples 3.2.6. —
1) La famille $\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}$ des faisceaux structuraux des objets du site infinitésimal a la propriété de restriction par construction. Elle définit donc un faisceau de R-algèbres, que nous noterons $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$: le faisceau structural du site infinitésimal †-adique $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.
2) Pour tout $j \geqslant 0$ la famille $\Omega^j_{\mathcal{U}^\dagger/R}$ des formes j-différentielles séparées a la propriété de restriction par construction. Elle définit un faisceau de $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules, que nous noterons $\Omega^j_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$: le faisceau des formes j-différentielles séparées du site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.
3) La famille $\Omega^\bullet_{\mathcal{U}^\dagger/R}$ des complexes de de Rham des formes différentielles séparées a la propriété de restriction par construction, la différentielle d commute aux restrictions $(\sharp)_{r^\dagger}$. Elle définit un complexe de R-modules que nous noterons $\Omega^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$: le complexe de de Rham du site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

4) La famille $\mathscr{T}_{\mathcal{U}^\dagger/R}$ des fibrés tangents, duaux des fibrés des 1-formes différentielles séparées des objets du site infinitésimal a la propriété de restriction par construction. Elle définit donc un faisceau de $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules, que nous noterons $\mathscr{T}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$: le fibré tangent du site infinitésimal †-adique $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Si $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ est un morphisme du site infinitésimal et si P est un opérateur différentiel de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$, on définit $(\sharp)_{r^\dagger}(P)$ comme le composé

$$\mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/R} \overset{r^{*-1}}{\to} r^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R} \overset{r^{-1}P}{\longrightarrow} r^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R} \overset{r^*}{\to} \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/R}$$

dont la réduction modulo I^s est un opérateur différentiel d'ordre égal à celui de la réduction modulo I^s de P. C'est donc un opérateur différentiel de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$ et on obtient le morphisme de restriction

$$(\sharp)_{r^\dagger} : \qquad r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$$

compatible aux compositions des morphismes du site. En vertu de la proposition précédente 3.2.5, on obtient un faisceau sur le site :

Définition 3.2.7. — *La famille qui à un ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ associe le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$ munie des morphismes de restriction $(\sharp)_{r^\dagger}$ définit un faisceau de $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-algèbres que nous noterons $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$: le faisceau des opérateurs différentiels †-adiques sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.*

Proposition 3.2.8. — *La famille qui à un ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ associe le faisceau $\mathscr{D}_{\mathcal{U}^\dagger/R}$ des opérateurs différentiels d'ordre localement fini définit un sous-faisceau du $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-algèbres $\mathscr{D}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ de faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que les restrictions $(\sharp)_{r^\dagger}$ laissent stables les opérateurs différentiels d'ordre fini, mais c'est un conséquence du fait que les morphismes d'algèbres r^* sont des isomorphismes. En fait, les restrictions $(\sharp)_{r^\dagger}$ conservent l'ordre des opérateurs différentiels. ■

Remarque 3.2.9. — 1) Les raisonnements que nous avons faits pour les faisceaux d'ensembles s'appliquent tout aussi bien pour les faisceaux à valeurs dans une catégorie abélienne ou pour les modules sur un faisceau d'anneaux sur le site infinitésimal. Nous utiliserons librement les résultats précédents dans ces contextes.

2) Par exemple, si $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est faisceau d'anneaux sur le site infinitésimal, un faisceau $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ de $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules est la donnée pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ d'un faisceau de $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}$-modules $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ tel que $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger|W} = \mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}|W$ et

pour tout morphisme $r^\dagger$ d'un morphisme de restriction compatible à la composition

$$(\sharp)_{r^\dagger} : \qquad r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}$$

qui est $(\sharp)_{r^\dagger}$**-linéaire** :

$$(\sharp)_{r^\dagger}(P(m)) = (\sharp)_{r^\dagger}(P)((\sharp)_{r^\dagger}(m))$$

pour une section P de $r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}$ et une section m de $r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ et qui se réduit à l'application identique dans le cas de l'inclusion $\mathcal{U}^\dagger|W \subset \mathcal{U}^\dagger$.

Notation 3.2.10. — Si $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est un faisceau d'anneaux sur le site, on note $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-Mod la catégorie des $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules à gauche sur le site et Mod-$\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ la catégorie des $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules à droite sur le site.

3.3. Le site infinitésimal †-adique affine

Dans le cas où le schéma X est *séparé* il est plus commode d'utiliser le site infinitésimal †-adique affine.

Définition 3.3.1. — *Soit un R_1-schéma X lisse et* séparé. *On note $X^{\dagger,\mathrm{aff}}_{\mathrm{inf}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ des relèvements des ouverts affines de X. Muni de la topologie induite $X^{\dagger,\mathrm{aff}}_{\mathrm{inf}}$ devient un site, le site infinitésimal †-adique affine de X.*

Soit $\boldsymbol{Fais}(X^{\dagger,\mathrm{aff}}_{\mathrm{inf}})$ la catégorie des faisceaux d'ensembles sur le site affine.

Théorème 3.3.2. — *Soit X un R_1-schéma lisse et* séparé. *Alors, le foncteur naturel de restriction :*

$$\boldsymbol{Fais}(X^\dagger_{\mathrm{inf}}) \to \boldsymbol{Fais}(X^{\dagger,\mathrm{aff}}_{\mathrm{inf}})$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau d'ensembles sur le site infinitésimal affine et $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert du site infinitésimal. Soit $U_\alpha, \alpha \in I$ un recouvrement par des ouverts affines de U. En vertu du critère d'affinité 2.2.1, si U_α est un ouvert affine de U, l'espace annelé $\mathcal{U}^\dagger_\alpha := (U_\alpha, \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}|U_\alpha)$ est un ouvert

du site infinitésimal affine. Soient alors les deux morphismes de restriction :

$$\prod_{\alpha\in I}\mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha^\dagger) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta\in I}\mathcal{F}(\mathcal{U}_{\alpha,\beta}^\dagger)$$

de noyau (ou lieu des coïncidences) noté $\mathrm{Ker}(I)$. On définit :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}^\dagger) := \mathrm{Ker}(I).$$

Cet ensemble ne dépend pas du recouvrement $U_\alpha, \alpha \in I$. En effet, soit $W_\beta, \beta \in J$ un autre recouvrement ; alors pour tout $\alpha \in I$ les ouverts affines $U_{\alpha,\beta} := U_\alpha \cap W_\beta$ forment un recouvrement de U_α. Si $s_\beta, \beta \in J$ est une famille de sections de $\mathcal{F}$ qui se recollent, leurs restrictions aux ouverts $U_{\alpha,\beta}$ forment une famille de sections qui se recollent et par hypothèse définissent une section s_α au-dessus de l'ouvert $\mathcal{U}_\alpha^\dagger$. La famille $s_\alpha, \alpha \in I$ se recolle et définit un élément de l'ensemble $\Gamma(\mathcal{U}^\dagger, \tilde{\mathcal{F}})$, ce qui fournit une identification entre l'ensemble construit à partir du recouvrement $U_\alpha, \alpha \in I$ et celui construit à partir du recouvrement $W_\beta, \beta \in J$.

Soit $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ un morphisme du site et soit un recouvrement $U_\alpha, \alpha \in I$ de U tel que pour un sous-ensemble $J \subset I$ les ouverts $W_\alpha := U_\alpha, \alpha \in J$ forment un recouvrement de W. On obtient pour tout $\alpha \in J$ un morphisme du site affine $\mathcal{W}_\alpha^\dagger \to \mathcal{U}_\alpha^\dagger$. Si $s_\alpha, \alpha \in I$ est une famille de sections qui se recollent, alors leurs restrictions aux ouverts affines $\mathcal{W}_\alpha^\dagger$ est une famille de sections qui se recollent. D'où un morphisme de restriction :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}^\dagger) \to \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{W}^\dagger)$$

et on obtient de façon évidente un préfaisceau d'ensembles sur le site infinitésimal.

Il s'agit de montrer que ce préfaisceau est un faisceau. Soit $\cup_{\alpha\in I}\mathcal{U}_\alpha^\dagger$ un recouvrement de l'ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ et $\cup_{\gamma\in I_\alpha}U_{\alpha,\gamma}$ un recouvrement de l'ouvert U_α par des ouverts affines. Le morphisme $\mathcal{U}_\alpha^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger|U_\alpha$ induit un morphisme du site affine :

$$\mathcal{U}_\alpha^\dagger|U_{\alpha,\gamma} \to \mathcal{U}^\dagger|U_{\alpha,\gamma}$$

qui est un isomorphisme en vertu de 2.2.10 et induit une bijection d'ensembles

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha^\dagger|U_{\alpha,\gamma}) \to \mathcal{F}(\mathcal{U}^\dagger|U_{\alpha,\gamma}).$$

On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\prod_\alpha \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}^\dagger_\alpha) & \rightrightarrows & \prod_{\alpha,\beta} \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}^\dagger_{\alpha,\beta}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\prod_{\alpha,\gamma} \mathcal{F}(\mathcal{U}^\dagger_\alpha | U_{\alpha,\gamma}) & \rightrightarrows & \prod_{\alpha,\gamma,\beta,\delta} \mathcal{F}(\mathcal{U}^\dagger_{\alpha,\beta} | U_{\alpha,\gamma,\beta,\delta}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\prod_{\alpha,\gamma} \mathcal{F}(\mathcal{U}^\dagger | U_{\alpha,\gamma}) & \rightrightarrows & \prod_{\alpha,\gamma,\beta,\delta} \mathcal{F}(\mathcal{U}^\dagger | U_{\alpha,\gamma,\beta,\delta})
\end{array}$$

dont les morphismes verticaux des deux dernières lignes sont des isomorphismes. Le noyau de la dernière ligne est l'ensemble $\Gamma(\mathcal{U}^\dagger, \tilde{\mathcal{F}})$. Il suffit de montrer que le morphisme induit sur les noyaux des deux premières lignes est bijectif. Il est injectif de façon évidente. Un élément du noyau de la deuxième ligne définit une famille de sections de $\tilde{\mathcal{F}}$ au-dessus des ouverts $\mathcal{U}^\dagger_\alpha$ qui se recollent. Le morphisme est surjectif. Cela montre que le diagramme :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}^\dagger) \longrightarrow \prod_\alpha \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}^\dagger_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}^\dagger_{\alpha,\beta})$$

est exact et le préfaisceau $\tilde{\mathcal{F}}$ est un faisceau. Le foncteur de restriction du théorème est essentiellement surjectif.

De même, on voit facilement qu'un morphisme de faisceaux d'ensembles sur le site infinitésimal est uniquement déterminé par sa restriction aux faisceaux d'ensembles sur le site infinitésimal affine. Le morphisme de restriction du théorème est pleinement fidèle. ■

4. Le faisceau $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\inf}}$ des automorphismes du faisceau structural qui se réduisent à l'identité modulo I

4.1. Le faisceau d'ensembles de transfert $\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}$

Soient $\mathscr{Y}^\dagger$, $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements des R_1-schéma Y, X et $f : Y \to X$ un morphisme de R_1-schémas.

On peut considérer le faisceau d'ensembles sur Y des morphisme d'espaces d'annelés de $\mathscr{Y}^\dagger$ dans $\mathscr{X}^\dagger$ qui se réduisent modulo I au morphisme f. Mais de façon équivalente il est plus commode pour pour nous de faire la définition suivante qui fait le lien avec le calcul différentiel des chapitres qui suivent.

Définition 4.1.1. — *Le faisceau $\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}$ d'ensembles sur Y* **de transfert** *est le sous-faisceau du faisceau $\mathscr{H}om_R(f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/R})$ des morphismes de R-***algèbres** *qui se réduisent modulo l'idéal I au morphisme structural de R_1-algèbres $f_1^* : f^{-1}\mathcal{O}_{X/R_1} \to \mathcal{O}_{Y/R_1}$.*

Une section globale du faisceau d'ensembles $\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}$ est par construction un morphisme d'espaces localement annelés.

Notation 4.1.2. — 1) Dans la notation $\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}$ le morphisme f de R_1-schémas est sous-entendu quand il n'y a pas de risque de confusion.

2) Notons $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ le faisceau de transfert correspondant au morphisme identique de X.

3) Notons $R[\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}]$ le faisceau de R-modules engendré par le R-module libre des sections du faisceau de transfert $\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}$.

4) Le module $R[\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}]$ est naturellement un $(R[\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger}], f^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}])$-bimodule.

Le cas le plus important est le cas où Y et X sont affines d'algèbres B, A et $\mathscr{Y}^\dagger$, $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements d'algèbres $B^\dagger, A^\dagger$. En vertu de l'équivalence 2.2.8, les sections globales du faisceau $\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}$ correspondent aux morphismes de R-algèbres $A^\dagger \to B^\dagger$ qui se réduisent modulo I au morphisme structural $f : A \to B$.

Notation 4.1.3. — Si $A^\dagger$ est une R-algèbre, on note $G_{A^\dagger}$ l'ensemble des morphismes de R-algèbres $A^\dagger \to A^\dagger$ qui se réduisent modulo I à l'identité.

Proposition 4.1.4. — *Si $A^\dagger$ est R-plate alors l'ensemble $G_{A^\dagger}$ est un groupe. Plus généralement, si $\mathscr{X}^\dagger$ est plat sur R, le faisceau $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ d'ensembles est un faisceau de groupes.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 2.2.9 et du théorème 2.2.10. ■

Définition 4.1.5. — *Si $r^\dagger$ est un morphisme du site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, le morphisme de faisceaux $r^* : r^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/R}$ est un isomorphisme de faisceaux de R-algèbres, en vertu de 2.2.10. On définit le morphisme de restriction*

$$(\sharp)_{r^\dagger} : \qquad r^{-1}\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger}$$

par $g \mapsto r^* \circ g \circ r^{*-1}$. La famille $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}$ et les morphismes $(\sharp)_{r^\dagger}$ ont la propriété 3.2.5. Ils définissent un faisceau de groupes sur le site infinitésimal.

Notation 4.1.6. — On note $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ le faisceau de groupes ainsi défini ; c'est le faisceau des automorphismes de R-algèbres du faisceau structural $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ qui se réduisent modulo I à l'identité.

Proposition 4.1.7. — *Un préfaisceau $\mathcal{P}_{\inf}$, resp. un faisceau $\mathcal{F}_{\inf}$, d'ensembles sur le site infinitésimal $X^{\dagger}_{\inf}$ est un $\mathcal{G}_{X^{\dagger}_{\inf}}$-préfaisceau, resp. faisceau, à* **gauche** *d'ensembles.*

Démonstration. Soient $\mathcal{U}^{\dagger}$ un ouvert du site et $\mathcal{U}^{\dagger} \to \mathcal{U}^{\dagger}$ un morphisme du site $X^{\dagger}_{\inf}$ défini par $g : \mathcal{O}_{\mathcal{U}^{\dagger}/R} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}^{\dagger}/R}$ qui est donc un isomorphisme. La restriction $(\sharp)_g$ induite par g du préfaisceau $\mathcal{P}_{\inf}(\mathcal{U}^{\dagger}) \to \mathcal{P}_{\inf}(\mathcal{U}^{\dagger})$ est donc bijective. Pour deux morphismes g_1, g_2 on a $(\sharp)_{g_2 g_1} = (\sharp)_{g_2}(\sharp)_{g_1}$. Mais par construction, g est une section globale du faisceau $\mathcal{G}_{X^{\dagger}_{\inf}}$ au-dessus de l'ouvert $\mathcal{U}^{\dagger}$. Cela définit une action à gauche de $\mathcal{G}_{X^{\dagger}_{\inf}}(\mathcal{U}^{\dagger})$ sur $\mathcal{P}_{\inf}(\mathcal{U}^{\dagger})$. Cette action induit une action à gauche de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^{\dagger}}$ sur la restriction $\mathcal{P}_{\mathcal{U}^{\dagger}}$.

Si $r^{\dagger} : \mathcal{W}^{\dagger} \to \mathcal{U}^{\dagger}$ est un morphisme du site, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{\inf}(\mathcal{U}^{\dagger}|W) & \xrightarrow{(\sharp)_g} & \mathcal{P}_{\inf}(\mathcal{U}^{\dagger}|W) \\ \downarrow (\sharp)_{r^{\dagger}} & & \downarrow (\sharp)_{r^{\dagger}} \\ \mathcal{P}_{\inf}(\mathcal{W}^{\dagger}) & \xrightarrow{(\sharp)_{r^* g r^{*-1}}} & \mathcal{P}_{\inf}(\mathcal{W}^{\dagger}) \end{array}$$

qui montre que l'action commute aux restrictions. Les mêmes arguments valent dans le cas du faisceau $\mathcal{F}_{\inf}$. Par construction, si $\mathcal{U}^{\dagger}$ est un ouvert du site et si $\mathcal{F}_{\inf}$ est faisceau d'ensemble sur le site sa restriction $R_{\mathcal{U}^{\dagger}}(\mathcal{F}_{\inf})$ est un $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^{\dagger}}$-module à gauche. ■

4.1.1. Un peu plus généralement, si $f : Y \to X$ est un morphisme de R_1-schémas lisses et $\mathcal{A}_{\mathscr{Y}^{\dagger}}$ est un faisceau de R-algèbres sur Y, on peut considérer le $\mathcal{A}_{\mathscr{Y}^{\dagger}}$-module à gauche $\mathcal{A}_{\mathscr{Y}^{\dagger}}[\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^{\dagger} \to \mathscr{X}^{\dagger}}]$ engendré par le module libre des sections du faisceau de transfert $\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^{\dagger} \to \mathscr{X}^{\dagger}}$. Si de plus $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$ est un $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$-module à gauche le module $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^{\dagger}}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^{\dagger}}]$ est naturellement un faisceau d'algèbres où le produit est le produit croisé défini par $P_1 g_1 P_2 g_2 := P_1 \rho_{g_1}(P_2) g_1 g_2$, où ρ est la représentation de $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$ sur $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$.

En particulier, si $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\inf}}$ est un faisceau de R-algèbres sur le site $X^{\dagger}_{\inf}$, pour tout ouvert $\mathcal{U}^{\dagger}$ l'algèbre $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^{\dagger}}$ est un $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^{\dagger}}$-module à gauche et le module $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^{\dagger}}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^{\dagger}}]$ est muni du produit croisé. Si $\mathcal{F}_{\inf}$ est un $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\inf}}$-module à gauche, sa restriction $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^{\dagger}}$ est un $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^{\dagger}}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^{\dagger}}]$-module à gauche. Le faisceau de transfert $\mathcal{A}_{\mathscr{Y}^{\dagger}}[\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^{\dagger} \to \mathscr{X}^{\dagger}}]$ est naturellement un $(\mathcal{A}_{\mathscr{Y}^{\dagger}}[\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^{\dagger}}], f^{-1}\mathcal{A}_{\mathscr{X}^{\dagger}}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^{\dagger}}])$-bimodule où l'action à droite est définie par $r^{\dagger} P := (\sharp)_{r^{\dagger}}(P) r^{\dagger}$.

4.2. La catégorie $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\inf}}$-Mod des $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\inf}}$-modules à gauche sur le site †-adique

Soit $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\inf}}$ un faisceau de R-algèbres sur le site infinitésimal. On dispose donc de la catégorie $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\inf}}$-Mod des $\mathcal{A}_{X^{\dagger}_{\inf}}$-modules à gauche. Soit $\mathcal{F}_{\inf}$ un

faisceau de $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules à gauche sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Si $\mathcal{U}^\dagger$ est un ouvert du site, alors sa restriction $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ est un faisceau de Zariski de $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}$-modules à gauche sur U, sur le lequel le faisceau de groupes $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}$ agit à gauche. C'est donc un module sur l'algèbre du groupe $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$. Nous allons donner une définition équivalente des objets de la catégorie $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-Mod, qui nous servira de transition à la catégorie des modules spéciaux.

Proposition 4.2.1. — *La donnée d' un $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module à gauche $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est la donnée, pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, d'un faisceau $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ de $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$-modules à gauche, et la donnée, pour pour tout couple $(\mathcal{W}^\dagger,\mathcal{U}^\dagger)$ d'objets du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, avec $r : W \hookrightarrow U$, d'un morphisme de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger}]$-modules à gauche*

$$(\sharp) : \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes_{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}.$$

En outre, ces données doivent satisfaire les conditions :

1) *pour un couple $(\mathcal{U}^\dagger|W,\mathcal{U}^\dagger)$, avec $W \hookrightarrow U$, on a $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger|W} = \mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}|W$, et le morphisme $(\sharp)$ coïncide avec le morphisme canonique,*
2) *pour un triplet $(\mathcal{W}'^\dagger,\mathcal{W}^\dagger,\mathcal{U}^\dagger)$, avec $r' : W' \hookrightarrow W$ et $r : W \hookrightarrow U$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}_{\mathcal{W}'^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}'^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger}] \underset{r'^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{W}'}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}'}]}{\otimes} r'^{-1}\big(\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \underset{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}'}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}'}]}{\otimes} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}\big) & \to & \mathcal{A}_{\mathcal{W}'^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}'^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \underset{(r'\circ r)^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}'}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}'}]}{\otimes} (r'\circ r)^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{A}_{\mathcal{W}'^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}'^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger}] \underset{r'^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{W}'}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}'}]}{\otimes} r'^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\mathcal{W}'^\dagger}.
\end{array}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ un $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module à gauche. En vertu des propositions 3.2.5 et 4.1.7, $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ est la donnée d'une famille de $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$-modules à gauche $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ paramétrée par les ouverts $\mathcal{U}^\dagger$, et de plus, pour chaque morphisme du site $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$, d'un morphisme de restriction

$$(\sharp)_{r^\dagger} : \qquad r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}.$$

Soient $\mathcal{W}^\dagger$, $\mathcal{U}^\dagger$ deux ouverts tels que $W \subset U$, et r^* une section globale au-dessus de W du faisceau de transfert $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}$ qui définit une restriction $(\sharp)_{r^\dagger} : r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}$. On a par linéarité un morphisme de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$-modules à gauche

$$(\sharp) : \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes_{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}$$

qui a les propriétés de la proposition. La transitivité des morphismes $(\sharp)_{r^\dagger}$ entraîne la transitivité des morphismes $(\sharp)$.

Réciproquement, une famille de $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$-modules à gauche munie de morphismes $(\sharp)$ ayant les propriétés de la proposition définit une famille

munie de morphismes $(\sharp)_{r^\dagger}$ compatibles à la compositions des morphismes ayant les propriétés de la proposition 3.2.5 et définit un objet de la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$. ■

THÉORÈME 4.2.2. — *Soient $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ un faisceau d'anneaux sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ un $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module à gauche et $\mathcal{W}^\dagger$ et $\mathcal{U}^\dagger$ deux ouverts du site tels que $W \subset U$. Alors, le morphisme de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger}]$-modules à gauche $(\sharp)$ de la proposition précédente*

$$(\sharp) : \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes_{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}$$

est un **isomorphisme**.

Démonstration. Soit $T \subset W$ un ouvert au-dessus duquel le morphisme d'inclusion se relève en une section r^*_T de $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}$. Alors, le morphisme $(\sharp)$ est un isomorphisme au-dessus de T. En effet, si w est une section de $\mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}$ au-dessus de T, elle est l'image de $r^*_T \otimes (\sharp)^{-1}_{r^*_T}(w)$ par le morphisme $(\sharp)$, ce qui montre qu'il est surjectif. Si l'image par le morphisme $(\sharp)$ d'une section le forme $r^*_T \otimes u$ pour une section u de $r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ est nulle, nécessairement u est nulle, mais r^*_T engendre $\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}]$ comme $r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$-module libre à droite au-dessus de T. Cela montre que le morphisme $(\sharp)$ est injectif.

Soit T un voisinage affine d'un point de W. En vertu du critère d'affinité, les schémas †-adiques $\mathcal{W}^\dagger|T$ et $\mathcal{U}^\dagger|T$ sont affines et, en vertu du théorème 2.3.2, le morphisme d'inclusion se relève en une section r^*_T de $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}$ au-dessus de T. Le morphisme $(\sharp)$ est un isomorphisme au voisinage des tous les points de W. ■

DÉFINITION 4.2.3. — *Soient X un R_1-schéma lisse, $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ un faisceau d'anneaux sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement plat sur R de X et $\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger}$ un $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]$-modules à gauche. Si $\mathcal{U}^\dagger$ est un ouvert du site de X on définit le $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$-module à gauche :*

$$P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger})_{\mathcal{U}^\dagger} := \mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}] \otimes_{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger}.$$

Si $\mathcal{W}^\dagger$,$\mathcal{U}^\dagger$ sont deux ouverts tels que $W \subset U$, on définit le morphisme $(\sharp)$:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes_{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger})_{\mathcal{U}^\dagger} \to P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger})_{\mathcal{W}^\dagger}$$

provenant, par produit tensoriel, du morphisme naturel provenant de la composition :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes_{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}] \to \mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}].$$

La famille $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger})_{\mathcal{U}^\dagger}$ *et les morphismes* ($\sharp$) *satisfont les conditions de la proposition précédente. Ils définissent donc un* $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$*-module à gauche* $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger})$ *sur le site infinitésimal.*

On obtient le foncteur prolongement

$$P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger} : \qquad \mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]\text{-Mod} \to \mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}\text{-Mod}.$$

Lemme 4.2.4. — *Le foncteur* $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger}$ *est exact.*

Démonstration. En effet le $r^{-1}\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]$-module à droite $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}]$ est localement libre de rang 1.

Exemple 4.2.5. —
1) Le prolongement $P_{R_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ du faisceau structural est le faisceau structural $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\inf}/R}$ du site.
2) Le complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ est un complexe de $R[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]$-modules à gauche et son prolongement $P_{R_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger}(\Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ est, par construction, le complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{X^\dagger_{\inf}/R}$ du site.

Théorème 4.2.6. — *Soit* $\mathscr{X}^\dagger$ *un relèvement* plat *sur* R *d'un schéma* X *lisse sur* R_1*. Alors, le foncteur prolongement* $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger}$ *est une équivalence de catégories entre les catégories* $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]$-Mod *et* $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$-Mod *qui est un inverse* **canonique** *du foncteur de restriction naturel* $R_{\mathscr{X}^\dagger}$*.*

Démonstration. Il est évident que si $\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger}$ est un $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]$-module à gauche, la restriction à $\mathscr{X}^\dagger$ du $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$-module à gauche $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger})$ coïncide avec le $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]$-module à gauche $\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger}$. On a donc l'isomorphisme canonique de foncteurs $R_{\mathscr{X}^\dagger}\circ P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger}\simeq Id$. Soit $\mathcal{F}_{\inf}$ un $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$-module à gauche et notons $\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger}$ sa restriction à $\mathscr{X}^\dagger$. Si $\mathcal{U}^\dagger, r : U \hookrightarrow X$, est un ouvert du site, la valeur du module $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger})$ au-dessus de $\mathcal{U}^\dagger$ est :

$$P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}},\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger})_{\mathcal{U}^\dagger} := \mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}]\otimes_{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger}$$

qui est, en vertu du théorème précédent, canoniquement isomorphe au $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger/R}]$-module $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$. Si $\mathcal{W}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger$ sont deux ouverts tels que $W\subset U$, le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}]\underset{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]}{\otimes} r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}]\underset{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]}{\otimes} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger} \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d] & \mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}]\underset{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]}{\otimes} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \arrow[d] \\
\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}]\underset{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathscr{X}}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]}{\otimes} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathscr{X}^\dagger} \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}
\end{tikzcd}$$

est commutatif par la transitivité des morphismes ($\sharp$) pour le triplet $(\mathcal{W}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger, \mathscr{X}^\dagger)$. On a donc canoniquement l'isomorphisme de foncteurs

$$P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{X}^\dagger} \circ R_{\mathscr{X}^\dagger} = Id\,.$$

Autrement dit, les foncteurs $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{X}^\dagger}$ et $R_{\mathscr{X}^\dagger}$ sont canoniquement inverses l'un de l'autre. ■

Corollaire 4.2.7. — *La catégorie* $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]$-Mod *des* $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]$*-modules à gauche ne dépend pas à équivalence* canonique *près du relèvement* $\mathscr{X}^\dagger$ *de* X *dans le cas d'un relèvement plat d'un schéma lisse.*

En fait, si $\mathscr{X}_1^\dagger$ et $\mathscr{X}_2^\dagger$ sont deux relèvements lisses de X, on a un diagramme commutatif d'équivalences de catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\mathscr{X}_1^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]\text{-Mod} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\mathscr{X}_2^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]\text{-Mod} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}\text{-Mod} & \end{array}$$

où les foncteurs obliques sont les prolongements canoniques et le foncteur horizontal est le foncteur image inverse ou directe (c'est comme on veut)

$$\mathcal{F}_{\mathscr{X}_1^\dagger} \to \mathcal{A}_{\mathscr{X}_2^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}_2^\dagger \to \mathscr{X}_1^\dagger}] \otimes_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}_1^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}_1^\dagger}]} \mathcal{F}_{\mathscr{X}_1^\dagger}\,.$$

La catégorie $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-Mod des $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules à gauche a toutes les propriétés d'une catégorie de modules sur un espace topologique dans le cas d'un schéma lisse. Par exemple :

Corollaire 4.2.8. — *Soit* X *un schéma lisse sur* R_1 *et soit* $(\mathcal{U}_i, i \in I)$ *une famille d'ouverts du site* $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *telle que les ouverts* $U_i, i \in I$, *recouvrent* X. *Alors, le foncteur qui à un faisceau* $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ *de* $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$*-modules sur le site associe ses restrictions* $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_i}, i \in I$, *est une équivalence de catégories entre la catégorie* $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-Mod *et la catégorie des faisceaux donnés localement : les familles* $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_i}$ *de* $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}_i^\dagger}]$*-modules,* $i \in I$, *munis d'isomorphismes de recollement satisfaisant les conditions de cocycle.*

Démonstration. Un isomorphisme de recollement entre $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_i}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_j}$ au-dessus de $U_i \cap U_j$ est un isomorphisme de recollement de faisceaux de $\mathcal{A}_{(U_i \cap U_j)^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules sur le site †-adique de $U_i \cap U_j$, ce qui est équivalent, en vertu de ce qui précède, à un isomorphisme de recollement à leur restriction à tout relèvement de $U_i \cap U_j$. Les conditions de cocycle se traduisent en conditions de cocycles pour les recollements de faisceaux sur des espaces topologiques. On est ramené au recollement de faisceaux de modules sur les espaces topologiques et de leurs morphismes, sans à avoir à invoquer le recollement plus délicat de faisceaux sur un site. ■

4.3. Le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}}(\mathcal{F}_{1\inf}, \mathcal{F}_{2\inf})$ de deux $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$-modules à gauche

Si $\mathcal{F}_{1\inf}$ et $\mathcal{F}_{2\inf}$ sont deux $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$-modules à gauche, où $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$ est un faisceau de R-algèbres, nous allons définir le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}}(\mathcal{F}_{1\inf}, \mathcal{F}_{2\inf})$ qui est un faisceau sur le site $X^\dagger_{\inf}$ de R-modules. Si $\mathcal{U}^\dagger$ est un ouvert, le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}}(\mathcal{F}_{1\mathcal{U}^\dagger}, \mathcal{F}_{2\mathcal{U}^\dagger})$ est un faisceau de Zariski sur U de R-modules. Si $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ est un morphisme du site $X^\dagger_{\inf}$, le morphisme de restriction $(\sharp)_{r^\dagger} : r^{-1}\mathcal{F}_{1\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{F}_{1\mathcal{W}^\dagger}$ est inversible. On définit la restriction

$$(\sharp)_{r^\dagger} : \qquad r^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}}(\mathcal{F}_{1\mathcal{U}^\dagger}, \mathcal{F}_{2\mathcal{U}^\dagger}) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}}(\mathcal{F}_{1\mathcal{W}^\dagger}, \mathcal{F}_{2\mathcal{W}^\dagger})$$

par $\phi \mapsto (\sharp)_{r^\dagger} \circ \phi \circ ((\sharp)_{r^\dagger})^{-1}$.

Proposition 4.3.1. — *La famille $(\mathcal{U}^\dagger, \mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}}(\mathcal{F}_{1\mathcal{U}^\dagger}, \mathcal{F}_{2\mathcal{U}^\dagger}))$ munie des morphismes de restriction précédents $(\sharp)_{r^\dagger}$ définit un faisceau, noté $\mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}}(\mathcal{F}_{1\inf}, \mathcal{F}_{2\inf})$, qui est un faisceau de R-modules sur le site $X^\dagger_{\inf}$.*

Démonstration. En effet, cette famille est de façon évidente un objet de la catégorie $\boldsymbol{Fam}(\mathcal{O}uv(X^\dagger_{\inf}))$. ■

Remarque 4.3.2. — Le foncteur $\mathcal{F}_{\inf} \mapsto \mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}}(\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}, \mathcal{F}_{\inf})$ est canoniquement isomorphe par construction au foncteur identique de la catégorie des $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$-modules.

Remarque 4.3.3. — Par contre, le lecteur prendra garde que les sections globales du faisceau $\mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}}(\mathcal{F}_{1\mathcal{U}^\dagger}, \mathcal{F}_{2\mathcal{U}^\dagger})$ **ne sont pas**, en général, les morphismes entre $\mathcal{F}_{1\inf}, \mathcal{F}_{2\inf}$ au-dessus de U, et que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{U^\dagger_{\inf}}}(\mathcal{A}_{U^\dagger_{\inf}}, \mathcal{F}_{\inf})$ n'est pas égal, en général, à $\Gamma(\mathcal{U}^\dagger, \mathcal{F}_{\inf}) = \Gamma(U, R_{\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{F}_{\inf}))$. C'est là un point important dans cette théorie.

4.4. Le faisceau $\mathcal{F}_{1\inf} \otimes_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}} \mathcal{F}_{2\inf}$ d'un $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$-module à gauche et d'un $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$-module à droite

Si $\mathcal{F}_{1\inf}$ est un $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$-modules à droite, $\mathcal{F}_{2\inf}$ un $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\inf}}$-module à gauche et $\mathcal{U}^\dagger$ est un ouvert du site, le faisceau $\mathcal{F}_{1\mathcal{U}^\dagger} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}} \mathcal{F}_{2\mathcal{U}^\dagger}$ est un faisceau de Zariski sur U de R-modules. Si $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ est un morphisme du site $X^\dagger_{\inf}$, on définit la restriction :

$$(\sharp)_{r^\dagger} : \qquad r^{-1}\mathcal{F}_{1\mathcal{U}^\dagger} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}} \mathcal{F}_{2\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{F}_{1\mathcal{W}^\dagger} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}} \mathcal{F}_{2\mathcal{W}^\dagger}$$

comme le produit tensoriel des restrictions.

Proposition 4.4.1. — *La famille* $(\mathcal{U}^\dagger, \mathcal{F}_{1\,\mathcal{U}^\dagger} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}} \mathcal{F}_{2\,\mathcal{U}^\dagger})$ *munie des morphismes de restriction précédents* $(\sharp)_{r^\dagger}$ *définit un faisceau, noté* $\mathcal{F}_{1\,\mathrm{inf}} \otimes_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}} \mathcal{F}_{2\,\mathrm{inf}}$*, qui est un faisceau de* R*-modules sur le site* $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$*.*

Démonstration. En effet, cette famille est de façon évidente un objet de la catégorie $\boldsymbol{Fam}(\mathcal{O}uv(X^\dagger_{\mathrm{inf}}))$. ■

4.5. Les foncteurs de prolongement et de restriction

Soient $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ un faisceau d'anneaux sur le site et $\mathcal{U}^\dagger$ un objet du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. On a un foncteur de restriction :

$$R_{\mathcal{U}^\dagger} : \qquad \mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}\text{-Mod} \to \mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]\text{-Mod}$$

qui à $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ associe $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$. Nous allons définir un foncteur prolongement :

$$P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger} : \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]\text{-Mod} \to \mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}\text{-Mod}.$$

Soient $\mathcal{W}^\dagger$ un ouvert du site, $r : W \cap U \hookrightarrow W$ l'inclusion canonique et $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ un $\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$-module. On définit :

$$P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger})(\mathcal{W}^\dagger) := r_*\big(\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger|W\cap U}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger|W\cap U \to \mathcal{U}^\dagger}] \underset{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]|W\cap U}{\otimes} \mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}|W \cap U\big).$$

La famille $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger})(\mathcal{W}^\dagger)$ définit de façon évidente un faisceau $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger})$ de $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules à gauche sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Proposition 4.5.1. — *Soit un* R_1*-schéma lisse* X*. Alors, le foncteur prolongement* $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger}$ *est un adjoint à droite du foncteur restriction* $R_{\mathcal{U}^\dagger}$ *:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]}(R_{\mathcal{U}^\dagger}?, ?) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(?, P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger}?).$$

Démonstration. En fait, pour un ouvert U de X on a un foncteur naturel de restriction :

$$\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}\text{-Mod} \to \mathcal{A}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}\text{-Mod}$$

qui admet un adjoint à droite $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},U^\dagger_{\mathrm{inf}}}$. Cet adjoint associe à un $\mathcal{A}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module à gauche $\mathcal{F}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ sur le site $U^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module à gauche $\mathcal{F}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ dont la valeur sur un ouvert $\mathcal{W}^\dagger$ est le faisceau $r_*\mathcal{F}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{W}^\dagger|W\cap U)$. L'adjonction de la proposition résulte alors de l'équivalence du théorème 4.2.6. ■

De la même façon, on dispose du résultat suivant.

PROPOSITION 4.5.2. — *Soit un R_1-schéma lisse X, le foncteur de restriction $R_{\mathcal{U}^\dagger}$ admet un adjoint à gauche :*

$$P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger!}: \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(P_{\mathcal{U}^\dagger!}?,?) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]}(?, R_{\mathcal{U}^\dagger}?).$$

Démonstration. Si $r : W \cap U \hookrightarrow W$, on définit :

$$P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger!}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger})(\mathcal{W}^\dagger) := r_!\big(\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger|W\cap U}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger|W\cap U\to\mathcal{U}^\dagger}] \underset{\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]|W\cap U}{\otimes} \mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger|W\cap U}\big),$$

où $r_!$ est le foncteur prolongement par zéro. La famille $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger!}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger})(\mathcal{W}^\dagger)$ définit de façon évidente un faisceau $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger!}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger})$ de $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules à gauche sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Remarquons que le foncteur $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger!}$ est exact. ■

COROLLAIRE 4.5.3. — *Soit un R_1-schéma lisse X. Alors, les foncteurs $R_{\mathcal{U}^\dagger}$ et $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger}$ transforment injectifs en injectifs.*

Démonstration. En effet, ils sont tous les deux adjoints à droite d'un foncteur qui est exact. ■

5. L'inclusion $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$

THÉORÈME 5.0.4. — *Soit $\mathscr{X}^\dagger$ un schéma $\dagger$-adique sur R. Le faisceau $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ est alors un sous-faisceau de semi-groupes pour la structure multiplicative du faisceau d'anneaux $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$.*

Démonstration. Par définition, les deux faisceaux $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ sont des sous-faisceaux du faisceau des endomorphismes $\mathcal{E}nd_R(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$. Il suffit de montrer que si g est une section du faisceau $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$, sa réduction g_s modulo I^s comme section de $\mathcal{E}nd_{R_s}(\mathcal{O}_{X_s/R_s})$ est un opérateur différentiel d'ordre borné par une fonction linéaire en s. Nous allons montrer qu'en fait g_s est un opérateur différentiel d'ordre $s-1$ avec $s \geqslant 1$. Par définition d'un opérateur différentiel d'ordre $s-1$, avec $s \geqslant 1$, il suffit de montrer que si $a_1, \ldots, a_s$ sont des sections du faisceau $\mathcal{O}_{X_s/R_s}$, alors le s-commutateur $[\ldots[g_s, a_s], \ldots, a_1]$ est un endomorphisme nul. Mais on a l'égalité d'endomorphismes

$$[\ldots[g_s, a_s], \ldots, a_1] = (g_s(a_s) - a_s) \cdots (g_s(a_1) - a_1) g_s,$$

et comme pour tout élément a l'élément $(g_s(a) - a)$ appartient à l'idéal engendré par I, l'endomorphisme $[\ldots[g_s, a_s], \ldots, a_1]$ appartient à l'idéal engendré par I^s et est donc nul comme élément de $\mathcal{E}nd_{R_s}(\mathcal{O}_{X_s/R_s})$. ■

Corollaire 5.0.5. — *Si P est un opérateur différentiel sur un schéma †-adique plat $\mathscr{X}^\dagger$ et g est un élément du groupe $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$, l'endomorphisme gPg^{-1} est un opérateur différentiel.*

Un peu plus généralement, on dispose du théorème suivant.

Théorème 5.0.6. — *Soient $Y \to X$ un morphisme de R_1-schéma, $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ deux schémas †-adiques sur R qui relèvent Y et X, et $u^\dagger$ et $v^\dagger$ deux morphismes de $\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}$. Alors, pour tout $s \geqslant 1$ la réduction v_s modulo I^s de $v^\dagger$ est un opérateur différentiel d'ordre $s-1$ de la réduction u_s modulo I^s de $u^\dagger$: $\mathscr{D}_{Y_s \xrightarrow{u_s} X_s/R_s} := \mathscr{D}iff_{R_s}(u_s^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}, \mathcal{O}_{Y_s/R_s})$* ([EGA IV$_4$], §16).

Démonstration. La question est locale. Par définition d'un opérateur différentiel, comme élément du faisceau $\mathscr{H}om_{R_s}(u_s^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}, \mathcal{O}_{Y_s/R_s})$ d'ordre $s-1$, $s \geqslant 1$, il suffit de montrer que si $a_1, \ldots, a_s$ sont des sections du faisceau $\mathcal{O}_{X_s/R_s}$ alors le s-commutateur $[\ldots[v_s, u_s(a_s)], \ldots, u_s(a_1)]$, comme élément du faisceau $\mathscr{H}om_{R_s}(u_s^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}, \mathcal{O}_{Y_s/R_s})$, est un homomorphisme nul. Mais on a l'égalité d'homomorphismes :

$$[\ldots[v_s, u_s(a_s)], \ldots, u_s(a_1)] = (v_s(a_s) - u_s(a_s)) \cdots (v_s(a_1) - u_s(a_1))v_s\,,$$

et comme pour tout élément a, l'élément $v_s(a) - u_s(a)$ appartient à l'idéal engendré par I, l'homomorphisme $[\ldots[v_s, u_s(a_s)], \ldots, u_s(a_1)]$ appartient à l'idéal engendré par I^s et est donc nul comme élément du faisceau $\mathscr{H}om_{R_s}(u_s^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}, \mathcal{O}_{Y_s/R_s})$. ■

Corollaire 5.0.7. — *Soit un R_1-schéma lisse X, le faisceau $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\inf}}$ est un sous-faisceau de groupes pour la structure multiplicative du faisceau d'anneaux $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\inf}/R}$.*

Démonstration. En effet, par construction, pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ du site, l'inclusion $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger} \hookrightarrow \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$ commute aux restrictions pour tout morphisme du site. ■

Corollaire 5.0.8. — *Soient V un anneau de valuation discrète complet, et $A^\dagger$ une V-algèbre †-adique lisse munie d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ tels que $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ est une base du module des formes différentielles séparées $\Omega_{A^\dagger/V}$. L'application qui à un élément g du groupe $G_{A^\dagger}$ associe*

$$\delta(g) = (\delta_1(g), \ldots, \delta_n(g)) := ((g-1)(x_1), \ldots, (g-1)(x_n))$$

est une **bijection** *du groupe $G_{A^\dagger}$ sur $(\mathfrak{m}A^\dagger)^n$. L'application inverse associe à $a = (a_1, \ldots, a_n)$ l'opérateur différentiel*

$$\theta_a := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a^\alpha \Delta_x^\alpha, \quad \text{avec } a^\alpha := a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}.$$

Démonstration. En effet, comme g est un opérateur différentiel en vertu du théorème 5.0.4, il est égal en vertu de la première partie du théorème du symbole total 2.4.2 à la série

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \Delta_x^\alpha\,, \quad \text{avec } a_\alpha = \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-x)^\beta g(x^{\alpha-\beta}).$$

Mais comme g est un morphisme d'algèbres, on a l'égalité :

$$a_\alpha = (g(x_1)-x_1)^{\alpha_1}\cdots(g(x_n)-x_n)^{\alpha_n}\,,$$

ce qui montre que g est complètement déterminé par

$$\delta(g) = \big(g(x_1)-x_1,\ldots,g(x_n)-x_n\big).$$

Réciproquement, en vertu de la deuxième partie du théorème du symbole total 2.4.2, si $a_1,\ldots,a_n$ sont des éléments de l'idéal $\mathfrak{m}A^\dagger$, la série :

$$\theta_a = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a^\alpha \Delta_x^\alpha$$

est un opérateur différentiel qui est un morphisme d'algèbres, en vertu de la formule de Leibniz, et qui se réduit à l'identité modulo $\mathfrak{m}$. ■

Remarque 5.0.9. — On remarquera que les applications δ_i sont des dérivations intérieures :

$$\delta_i(g_1g_2) = \delta_i(g_1) + g_1\delta_i(g_2).$$

Le corollaire 5.0.8 produit *localement* beaucoup d'éléments du groupe $G_{A^\dagger}$:

Corollaire 5.0.10. — *Soient V un anneau de valuation discrète complet, $A^\dagger$ une V-algèbre $\dagger$-adique lisse munie d'éléments $x_1,\ldots,x_n$ tels que $\{dx_1,\ldots,dx_n\}$ est une base du module des formes différentielles séparées $\Omega_{A^\dagger/V}$, et $\mathscr{X}^\dagger$ le V-schéma $\dagger$-adique associé à l'algèbre $A^\dagger$. Alors, le groupe $G_{A^\dagger}$, qui est aussi l'ensemble des sections globales du module de transfert $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}$ en vertu de l'équivalence 2.2.8, est* non trivial.

Remarque 5.0.11. — À partir de là, le théorème du symbole total donne des conditions nécessaires et suffisantes de recollement pour qu'une famille d'éléments définissant des sections locales du faisceau $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ définissent une sections globale, donnant ainsi un moyen éventuel de construire des éléments non triviaux du groupe $G_{A^\dagger}$ d'une algèbre $\dagger$-adique lisse $A^\dagger$ globale.

6. La catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod des Modules à gauche spéciaux sur le site infinitésimal et la cohomologie de de Rham †-adique

Soit X un R_1-schéma lisse. En vertu du paragraphe précédent, on a sur le site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ des opérateurs différentiels, qui est un faisceau de $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-algèbres. On dispose donc de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-Mod des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche.

Nous allons définir une sous-catégorie pleine fondamentale de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-Mod, à savoir la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod des modules à gauche **spéciaux** ; c'est elle qui va nous permettre de définir la cohomologie de de Rham †-adique d'un schéma lisse sur R_1 ainsi que les opérations cohomologiques pour cette cohomologie. Nous commençons par définir cette catégorie à l'aide des morphismes de transfert ce qui est essentiel pour les opérations cohomologiques et nous montrons que cette définition est équivalente à celle de l'introduction.

6.1. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R}$ pour une immersion ouverte

Soit $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ un morphisme du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour tout $s \geqslant 1$ le morphisme $r^\dagger$ donne naissance à un morphisme de schémas $r_s : W_s \to U_s$ sur R_s. On peut considérer le faisceau des opérateurs différentiels R_s-linéaires

$$\mathscr{D}_{W_s \xrightarrow{r_s} U_s/R_s} := \mathscr{D}\mathit{iff}_{R_s}(r^{-1}\mathcal{O}_{U_s/R_s}, \mathcal{O}_{W_s/R_s})$$

de $r^{-1}\mathcal{O}_{U_s/R_s}$ dans $\mathcal{O}_{W_s/R_s}$, qui est par définition un faisceau d'anneaux filtré ([EGA IV$_4$], §16).

Définition 6.1.1. — *Soit $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ un morphisme du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. On définit le module de transfert :*

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R}$$

comme le sous-module de $\mathscr{H}om_R(r^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/R})$ des morphismes de faisceaux de R-modules qui se réduisent modulo I^s à un opérateur différentiel de $\mathscr{D}_{W_h \xrightarrow{r_s} U_s/R_s}$ dont le degré est localement borné par une fonction linéaire en s.

Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R}$ est un $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}, r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R})$-bimodule de façon naturelle.

Théorème 6.1.2. — *Soit $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ un morphisme du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R}$* **ne dépend pas** *du morphisme d'algèbres $r^* : r^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/R}$ choisi et est un $r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$-module à droite localement libre engendré par le faisceau de transfert $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}$.*

Démonstration. Soit P une section du module de transfert construit sur r^*. En vertu du théorème 2.2.10, le morphisme r^* est inversible : $r^{*-1} : \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/R} \simeq r^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}$. En vertu du théorème 5.0.6, la réduction r^{*-1}_s est un opérateur différentiel d'ordre $s-1$. Le morphisme $Q := r^{*-1} \circ P$ est un morphisme de $\mathcal{E}nd_R(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger|W/R})$ dont la réduction modulo I^s est un opérateur différentiel composé de deux opérateurs différentiels et dont le degré est une fonction localement bornée par une fonction linéaire en s, somme de deux fonctions localement bornées par des fonctions linéaires en s. C'est donc par définition un opérateur différentiel Q de $\Gamma(W, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger|W/R})$. On a alors la factorisation :

$$P = r^* \circ Q.$$

Si r'^* est un autre relèvement de r, on a la factorisation $r^* = r'^* \circ g$, où g est une section globale du faisceau de groupes $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger|W}$ et est donc un opérateur différentiel de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger|W/R}$. L'égalité :

$$P = r^* \circ Q = r'^* \circ g \circ Q$$

montre que si P est un opérateur de transfert construit sur r^*, alors c'est aussi un opérateur de transfert construit sur r'^*. Comme r^* est inversible, cela montre la dernière assertion. D'où le théorème 6.1.2. ■

Définition 6.1.3. — *Soient un R_1-schéma lisse X et $\mathcal{W}^\dagger$,$\mathcal{U}^\dagger$ un couple d'objets du site infinitésimal avec $r : W \hookrightarrow U$. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R}$ est défini comme recollement des modules de transfert* locaux *induits par des morphismes de schémas †-adiques qui relèvent l'inclusion. En vertu du théorème précédent, le module de transfert est un sous-$(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}, r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R})$-bimodule bien défini de $\mathscr{H}om_R(r^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/R})$.*

Cette définition impose que X soit lisse pour **garantir l'existence de relèvements locaux**.

6.2. La catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod

Le module de transfert pour une immersion ouverte permet de définir la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux.

Définition 6.2.1. — *Soit X un R_1-schéma lisse. Un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche* spécial $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est la donnée, pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, d'un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-module à gauche $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$, et la donnée, pour tout couple $(\mathcal{W}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger)$ d'objets du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, avec $r : W \hookrightarrow U$, d'un morphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$-modules à gauche :*

$$(\diamond) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}.$$

En outre, ces données doivent satisfaire les conditions :

1) *pour un couple $(\mathcal{U}^\dagger|W, \mathcal{U}^\dagger)$, avec $r : W \hookrightarrow U$, on a $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger|W} = \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}|W$ et le morphisme $(\diamond)$ coïncide avec le morphisme canonique,*
2) *pour un triplet $(\mathcal{W}'^\dagger, \mathcal{W}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger)$, avec $r' : W' \hookrightarrow W$ et $r : W \hookrightarrow U$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}'^\dagger \to \mathcal{W}^\dagger/R} \otimes r'^{-1}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R} \otimes r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}) & \longrightarrow & \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R} \otimes (r \circ r')^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \\
{\scriptstyle r'^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle (r\circ r')^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} \\
\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}'^\dagger \to \mathcal{W}^\dagger/R} \bigotimes_{r'^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}} r'^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger} & \longrightarrow & \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}'^\dagger}.
\end{array}$$

Munis des morphismes naturels, les $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux forment une catégorie.

Notation 6.2.2. — On note $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux.

Proposition 6.2.3. — *Soit X un R_1-schéma lisse. Un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et pour tout couple d'objets $(\mathcal{W}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger)$ avec $r : W \hookrightarrow U$ le morphisme*

$$(\diamond) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}$$

prolonge le morphisme de restriction géométrique :

$$(\sharp) : \qquad R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger}] \otimes_{r^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}.$$

En particulier, l'action du groupe $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}$ sur $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ se fait à travers celle de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$.

Démonstration. En vertu du théorème 5.0.4, un module $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-module à gauche est un $R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$-module à gauche. En vertu du théorème 5.0.6, toute section locale du module $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}$ est un opérateur différentiel. Il en résulte un morphisme canonique :

$$R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R}$$

qui induit un morphisme :

$$R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes_{r^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}.$$

Les conditions de la proposition 4.2.1 sont satisfaites et un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial est bien un $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ dont l'action du groupe $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}$ sur $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ se fait à travers celle de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$. ■

Proposition 6.2.4. — *Soit X un R_1-schéma lisse. La catégorie des modules à gauche spéciaux* $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod *est une sous-catégorie pleine de la catégorie* $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-Mod *des* $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$*-modules à gauche.*

Démonstration. Si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial et $r^\dagger$ est un morphisme $\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$, alors on a un morphisme de restriction :

$$\Gamma(U, \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}) \to \Gamma(W, \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger|W}) \to \Gamma(W, \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}),$$

qui provient du morphisme ($\diamond$) et qui commute par construction avec l'action des opérateurs différentiels. ■

Réciproquement, on a ce qui suit.

Proposition 6.2.5. — *Soit X un R_1-schéma lisse. Un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche est* **spécial si et seulement si** *l'action géométrique* ($\sharp$) *de $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ se fait à travers l'action de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$.*

Démonstration. Par construction, l'action de $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ sur un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial se fait à travers celle de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$. Soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche dont l'action géométrique de $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ se fait à travers celle de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$, et soit $(\mathcal{W}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger)$ un couple d'ouverts du site avec

$W \subset U$, on a alors le morphisme canonique :

$$(\sharp) : \qquad R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger}] \otimes_{r^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}.$$

et aussi un autre morphisme canonique :

$$R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger}] \otimes_{r^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger},$$

et il s'agit de voir que le morphisme ($\sharp$) se factorise à travers un morphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$-modules à gauche

$$(\diamond) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}.$$

Si r^* est une section locale de $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger}$, elle engendre $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R}$ comme $r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-module à droite, on fait alors correspondre :

$$\big(\sum r^* P_i \otimes m_{i\mathcal{U}^\dagger}\big) \longmapsto r^*\big(\sum P_i m_{i\mathcal{U}^\dagger}\big),$$

d'où une application bien définie qui est un morphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$-modules à gauche. Cette application ne dépend pas du générateur r^* parce que précisément l'action de $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger}$ se fait à travers celle de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$. La famille $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ munie des morphismes ($\diamond$) ainsi définis a toutes les propriétés de la définition d'un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial. ■

Remarque 6.2.6. — La proposition précédente montre que la définition simple des modules spéciaux de l'introduction coïncide avec la définition à l'aide des modules de transfert. Mais c'est cette dernière qui est essentielle pour les opérations cohomologiques des chapitres qui suivent.

THÉORÈME 6.2.7. — *Soient X un R_1-schéma lisse et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche* **spécial**. *Alors, les morphismes de restriction*

$$(\diamond) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}$$

sont des **isomorphismes** *de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$-modules à gauche.*

Démonstration. La question est locale et puisque on est dans le cas lisse il existe toujours une section locale r^* du faisceau $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger}$ qui est *inversible*. Si $m_{\mathcal{W}^\dagger}$ est une section locale du faisceau $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}$, elle provient de la section locale $r^* \otimes r^{*-1} m_{\mathcal{W}^\dagger}$ du faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}$. Le morphisme ($\diamond$) du théorème est surjectif. Le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R}$ est un $r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$-module à droite engendré localement par r^*. Toute section locale du produit tensoriel est de la forme $r^* \otimes m_{\mathcal{U}^\dagger}$ dont l'image est nulle si et seulement si $m_{\mathcal{U}^\dagger}$ est nulle. Le morphisme ($\diamond$) du théorème est injectif. ■

Remarque 6.2.8. — Dans le cas lisse, si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module spécial de valeur $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ sur un ouvert $\mathcal{U}^\dagger$, alors sa valeur est canoniquement :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R}\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$$

sur tout ouvert $\mathcal{W}^\dagger$ qui relève U, et c'est en cela qu'il est spécial. Autrement dit, un module spécial est canoniquement déterminé par sa restriction à un relèvement particulier.

Définition 6.2.9. — *Soit $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement plat sur R d'un schéma X lisse sur R_1 et soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module à gauche. On définit le prolongement $P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger})$ de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$ comme le $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche* spécial *dont la valeur sur un ouvert $\mathcal{U}^\dagger$, $r : U \hookrightarrow X$, est le $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-module à gauche :*

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R}\otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}.$$

Par construction, le prolongement $P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger})$ d'un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-modules à gauche $\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module *spécial*, les conditions de transitivité étant automatiques. On obtient ainsi un foncteur

$$P_{\mathscr{X}^\dagger} : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}\text{-Mod} \to (\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}.$$

Lemme 6.2.10. — *Le foncteur prolongement $P_{\mathscr{X}^\dagger}$ est exact.*

Démonstration. En effet, $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R}$ est un $r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module à droite localement libre de rang 1.

Théorème 6.2.11. — *Soit $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement plat sur R d'un schéma X lisse sur R_1. Le foncteur prolongement $P_{\mathscr{X}^\dagger}$ est une équivalence de catégories, qui est un inverse* **canonique** *du foncteur de restriction $R_{\mathscr{X}^\dagger}$.*

Démonstration. Il est évident que le composé $R_{\mathscr{X}^\dagger}\circ P_{\mathscr{X}^\dagger}$ est canoniquement isomorphe au foncteur identique de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-Mod. Soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial et soit $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert du site. Par définition de module spécial on a un isomorphisme canonique :

$$(\diamond) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R}\otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}\simeq\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$$

de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-modules à gauche. Si $\mathcal{W}^\dagger$,$\mathcal{U}^\dagger$ sont deux ouverts avec $W\subset U$, on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R} \underset{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R} \underset{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} & \simeq & \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R} \underset{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R} \underset{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger},
\end{array}$$

qui est commutatif en vertu de la condition de transitivité des morphismes ($\diamond$) pour un module spécial. Cela exprime que le composé $P_{\mathscr{X}^\dagger} \circ R_{\mathscr{X}^\dagger}$ est canoniquement isomorphe au foncteur identique de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod. ■

Exemple 6.2.12. — Si $\mathcal{U}^\dagger$ est un ouvert, la valeur du prolongement $P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ en $\mathcal{U}^\dagger$ est le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}$ et donc $P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}/R}) \simeq \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$, alors que la valeur du prolongement $P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}/R})$ en $\mathcal{U}^\dagger$ est le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R}$ et donc $P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}/R})$ **n'est pas** isomorphe à $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$.

Corollaire 6.2.13. — *Soit un R_1-schéma lisse X. Alors, la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-Mod des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-modules à gauche ne dépend pas* **à équivalence canonique** *près du relèvement †-adique plat $\mathscr{X}^\dagger$ de X s'il existe.*

En fait, si $\mathscr{X}^\dagger_1$ et $\mathscr{X}^\dagger_2$ sont deux relèvements plats de X, on a un diagramme commutatif d'équivalences de catégories :

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_1/R}\text{-Mod} & \longrightarrow & \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_2/R}\text{-Mod} \\
& \searrow \quad \swarrow & \\
& (\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod} &
\end{array}$$

où les foncteurs obliques sont les prolongements canoniques et le foncteur horizontal est le foncteur image inverse ou directe :

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_1} \mapsto \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_1\to\mathscr{X}^\dagger_2/R} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_1/R}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_1}$$

où le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_1\to\mathscr{X}^\dagger_2/R}$ est défini par le théorème 6.1.2.

Proposition 6.2.14. — *Soit X un R_1-schéma lisse. La catégorie des modules à gauche spéciaux $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod est une sous-catégorie abélienne de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-Mod.*

Démonstration. En effet, si $u : \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un morphisme de la catégorie des modules à gauche spéciaux $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod son noyau $\mathrm{Ker}(u)$ et son conoyau $\mathrm{Coker}(u)$ sont des $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules sur le site. Si $\mathcal{W}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger$ est un

couple d'objets du site avec $r : W \hookrightarrow U$, la suite exacte de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-modules à gauche

$$0 \to \mathrm{Ker}(u)_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathrm{Coker}(u)_{\mathcal{U}^\dagger} \to 0$$

donne naissance par platitude (le $r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-module à droite $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R}$ étant localement libre de rang 1) à la suite exacte de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$-modules à gauche :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R} \underset{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}\,\mathrm{Ker}(u)_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R} \underset{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \\ \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R} \underset{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}\mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R} \underset{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}\,\mathrm{Coker}(u)_{\mathcal{U}^\dagger} \to 0\,, \end{aligned}$$

qui montre que le noyau et le conoyau du morphisme u sont des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux. ■

Remarque 6.2.15. — Le théorème 6.2.11 et son corollaire précédent constituent le succès le plus remarquable du point de vue du site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. De plus, les isomorphismes de restriction ($\diamond$) des modules spéciaux du théorème 6.2.7 correspondent à la rigidité des cristaux de Grothendieck [G$_3$], et la propagation des modules spéciaux du théorème 6.2.11 correspond à la croissance des cristaux dans un voisinage approprié. Mais alors que la catégorie des cristaux ne semble fournir une bonne théorie que pour les variétés algébriques propres et lisses sur k, la catégorie des modules spéciaux semble fournir une bonne théorie cohomologique pour les variétés éventuellement ouvertes, comme l'illustre la **première démonstration** du théorème 13.4.7 de l'expression cohomologique p-adique de la fonction Zêta d'une variété algébrique lisse sur un corps fini.

6.2.1. Soit $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement plat de X, on a alors deux foncteurs $P_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathscr{X}^\dagger}$ et $P_{\mathscr{X}^\dagger}$ et nous allons étudier leur rapport. On a deux morphismes canoniques de faisceaux d'anneaux : l'injection canonique, et la surjection canonique qui à un élément de l'algèbre du groupe $\sum_\alpha P_\alpha.g_\alpha$ associe l'opérateur différentiel $\sum_\alpha P_\alpha g_\alpha$:

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R} \xhookrightarrow{\mathrm{inj}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}] \xrightarrow{\mathrm{surj}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}.$$

Le morphisme composé $surj \circ \mathrm{inj}$ est l'application identique, alors que $\mathrm{inj} \circ \mathrm{surj}$ n'est pas l'application identique. Si bien qu'on a deux foncteurs

canoniques de restrictions des scalaires :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}\text{-Mod} \xrightarrow{\text{surj}^*} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]\text{-Mod} \xrightarrow{\text{inj}^*} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}\text{-Mod}.$$

Le foncteur composé $\text{inj}^* \circ \text{surj}^*$ est le foncteur identique, mais le foncteur $\text{surj}^* \circ \text{inj}^*$ **n'est pas** le foncteur identique.

PROPOSITION 6.2.16. — *Soient un R_1-schéma lisse X et $\mathscr{X}^\dagger$ et un relèvement plat. On a un isomorphisme canonique de foncteurs de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-Mod vers la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/R}$-Mod :*

$$P_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/R},\mathscr{X}^\dagger} \circ \text{surj}^* \simeq P_{\mathscr{X}^\dagger}.$$

Démonstration. Soient $\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module à gauche et $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert du site $X^\dagger_{\text{inf}}$. On a alors un morphisme canonique :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}]\otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R}\otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger},$$

qui commute aux restrictions, et il s'agit de voir que c'est un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-modules à gauche. Le problème est de nature locale. Soit $r^\dagger$ un relèvement local de l'inclusion $U \to X$. Alors, $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}]$ est engendré par r^* comme $r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]$-module à droite et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R}$ est engendré par r^* comme $r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module à droite en vertu du théorème 6.1.2, ce qui montre que le morphisme est à la fois surjectif et injectif. ■

Remarque 6.2.17. — Le foncteur $P_{\mathscr{X}^\dagger} \circ \text{inj}^*$ n'est pas isomorphe au foncteur $P_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/R},\mathscr{X}^\dagger}$.

Remarque 6.2.18. — Remarquons aussi que le faisceau structural du site infinitésimal †-adique $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\text{inf}}/R}$ est, par construction, un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/R}$-module à gauche spécial et est le prolongement du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ d'un relèvement. Mais le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/R}$ n'est pas spécial, parce que l'action de $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\text{inf}}}$ par automorphismes intérieurs est distincte de l'action différentielle à gauche. Autrement dit, **il n'existe pas de morphisme canonique**

$$(\diamond) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$$

en général.

Remarque 6.2.19. — Bien que la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/R}$-Mod ait bien un sens dans le cas singulier, elle ne semble pas avoir des propriétés intéressantes. Dans le cas singulier la théorie en caractéristique nulle nous enseigne de procéder autrement et à notre avis cela ne posera pas de difficulté une fois

surmonté tous les problèmes que posent le cas d'un morphisme, sans hypothèse restrictive, de schémas lisses. Aussi, dans tout cet article le lecteur ne perdra rien d'intéressant en supposant que le schéma X est lisse sur R_1.

Si X est lisse sur R_1 la catégorie de modules spéciaux est un champ :

THÉORÈME 6.2.20. — *Soit X un R_1-schéma lisse alors la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-modules à gauche spéciaux est un champ sur X, c'est-à-dire ses objets et ses morphismes sont de nature locale sur X.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'équivalence fondamentale 6.2.11. ■

6.3. La catégorie des modules spéciaux a suffisamment d'objets injectifs

Nous allons montrer que la catégorie des modules spéciaux a suffisamment d'injectifs, bien que ce ne soit pas une catégorie de modules, ce qui nous permettra de dériver les foncteurs exacts à gauche et, en particulier, de définir la cohomologie de de Rham †-adique en toute généralité.

THÉORÈME 6.3.1. — *Soit un R_1-schéma lisse X.*
La catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod a suffisamment d'objets injectifs.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 6.2.11. Soit $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-module à gauche, on définit le foncteur prolongement $P_{\mathcal{U}^\dagger}$ par :

$$P_{\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger})(\mathcal{W}^\dagger) := r_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger|W\cap U\to\mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}\big)$$

où $\mathcal{W}^\dagger$ est un objet du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $r : W \cap U \hookrightarrow W$ l'inclusion canonique. On obtient un adjoint à droite du foncteur restriction $R_{\mathcal{U}^\dagger}$ (exact à gauche) et donc transforme injectif en injectif.

Si maintenant $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial, $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert et $R_{\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \hookrightarrow \mathcal{I}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ un plongement dans un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-module à gauche injectif alors

$$P_{\mathcal{U}^\dagger} \circ R_{\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \hookrightarrow P_{\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger})$$

est un plongement dans un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial et injectif. Si $\{\mathcal{U}^\dagger_i, i \in I\}$ est une famille d'ouverts du site tels que $\{U_i, i \in I\}$ est un

recouvrement de X, le morphisme produit

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \longrightarrow \prod_{i\in I} P_{\mathcal{U}_i^\dagger}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathcal{U}_i^\dagger})$$

est un plongement dans un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial et injectif comme objet de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod. ■

Remarque 6.3.2. — **Attention** : Un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial qui est injectif comme objet de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod **n'est pas** en général injectif comme objet de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-Mod. C'est là une différence essentielle, voir 8.4.9. C'est un autre point important dans cette théorie.

6.4. La cohomologie de de Rham †-adique

Si X est un schéma lisse sur R_1, on note $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux sur le site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ de X.

La catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod est abélienne et admet suffisamment de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules **spéciaux injectifs**, en vertu du théorème précédent. On note $D^*((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ sa catégorie dérivée. On peut donc dériver tout foncteur covariant exact à gauche de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod, et en particulier le foncteur :

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}),$$

dont on notera $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ les foncteurs dérivés.

Définition 6.4.1. — *Soient X un schéma lisse sur R_1 et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe de la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. On définit la cohomologie de de Rham †-adique de X à coefficients dans $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ comme les R-modules*

$$H^\bullet_{DR}(X/R, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) := \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\,.$$

En particulier, on définit la cohomologie de de Rham †-adique de X comme :

$$H^\bullet_{DR}(X/R) := H^\bullet_{DR}(X/R, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}) := \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}).$$

Les modules de cohomologie $H^{\bullet}_{DR}(X/R, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ sont donc les modules de cohomologie du complexe :

$$DR(X/R, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}) := \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}),$$

vu comme foncteur dérivé à droite du foncteur :

$$\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$$

de la catégorie des modules spéciaux qui a suffisamment d'injectifs dans la catégorie des R-modules. De plus, l'action de R sur ces modules se fait à travers le morphisme canonique $R \to \hat{R}$ de R dans son complété séparé pour la topologie I-adique.

THÉORÈME 6.4.2. — *Soient $\mathscr{X}^{\dagger}$ un relèvement plat d'un R_1-schéma lisse X et $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$ un complexe de $D^{+}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R})$. Il existe des isomorphismes* **canoniques** *de R-modules :*

$$\mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}}) \simeq \mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, P_{\mathscr{X}^{\dagger}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}})).$$

En particulier, il existe des isomorphismes canoniques :

$$\mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}) \simeq \mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$ un complexe de $D^{+}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R})$ et $\mathcal{I}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$ une résolution $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$-injective de $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}}$ alors, en vertu du théorème 6.2.11, son prolongement canonique $P_{\mathscr{X}^{\dagger}}(\mathcal{I}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}})$ est une résolution injective de $P_{\mathscr{X}^{\dagger}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}})$ dans la catégorie $(\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod. D'autre part, le morphisme de complexes de R-modules :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}, \mathcal{I}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, P_{\mathscr{X}^{\dagger}}(\mathcal{I}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}})),$$

qui est un isomorphisme, induit en particulier un isomorphisme de leurs cohomologies, réalisant ainsi les isomorphismes du théorème. ■

En particulier, la cohomologie de de Rham †-adique d'un schéma lisse coïncide avec la cohomologie de de Rham d'un relèvement quand il existe, et la cohomologie de de Rham †-adique d'un relèvement lisse ne dépend pas à isomorphisme canonique près du relèvement et coïncide donc avec la définition de l'article de recherche [M-N$_1$]. On a alors résolu notre problème.

Un peu plus généralement, si $R \to S$ est un morphisme d'anneaux, on note

$$\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S} := \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R} \otimes_R S, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S} := \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R} \otimes_R S$$

les faisceaux obtenus par changement de base. Le faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ opère à gauche sur les faisceaux $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}$ et l'on dispose de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}, \mathrm{Sp})$-Mod des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}$-modules à gauche spéciaux sur le site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ de X qui est abélienne et qui a suffisamment d'injectifs. On peut donc considérer la théorie précédente sur S.

Définition 6.4.3. — *Soient X un schéma lisse sur R_1 et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe de $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. On définit la cohomologie de de Rham †-adique de X à coefficients $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ relativement à S comme les S-modules*

$$H^\bullet_{DR}(X/S, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) := \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X_{\mathrm{inf}}/S}, \mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}).$$

En particulier, on définit la cohomologie de de Rham †-adique de X comme

$$H^\bullet_{DR}(X/S) := H^\bullet_{DR}(X/S, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}) := \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}, \mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}).$$

Le cas le plus important pour l'instant est l'extension $V \to K$, mais les extensions $V \to V_s, s \geqslant 1$ sont aussi intéressantes et semblent donner lieu à des questions non sans intérêt.

6.5. Le foncteur de de Rham †-adique local

Soit X un R_1-schéma lisse et soit $\mathrm{Mod}(R_X)$ la catégorie des faisceaux de R-module sur X muni de la topologie de Zariski. Nous allons définir un foncteur prolongement des faisceaux de R-modules :

$$P_X : \qquad \mathrm{Mod}(R_X) \to \mathrm{Mod}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}).$$

Si $\mathcal{F}_X$ un faisceau de R-modules sur X, on lui associe le faisceau $\mathcal{F}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ dont la valeur sur un ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est le faisceau $\mathcal{F}_U$ et dont la valeur sur un morphisme du site $\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ est le morphisme de restriction $\mathcal{F}_U|W \to \mathcal{F}_W$.

Théorème 6.5.1. — *Le foncteur P_X est une équivalence de catégories de la catégorie $\mathrm{Mod}(R_X)$ dans la sous-catégorie des $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules sur le site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sur lesquels l'action du faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est* **triviale**.

Démonstration. Un $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module sur le site dont l'action de $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est triviale est un $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ tel que pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ l'action du faisceau $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}$ sur le R-module $\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ est triviale. Soit un couple d'ouverts $(\mathcal{U}^\dagger, \mathcal{W}^\dagger)$ avec $r : W \subset U$ et W affine. Il existe alors un isomorphisme **canonique** de R-modules :

$$r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}.$$

En effet, en vertu du critère d'affinité †-adique 2.2.1 l'ouvert $\mathcal{U}^\dagger|W$ est affine et, en vertu du théorème des relèvements 2.3.2, l'inclusion $r : W \subset U$ admet des relèvements $r^\dagger$. Il existe des morphismes de restriction $(\sharp)_{r^\dagger}$: $r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}$. Si $r_1^\dagger, r_2^\dagger$ sont deux relèvements, les restrictions $(\sharp)_{r_1^\dagger}, (\sharp)_{r_2^\dagger}$ diffèrent par une restriction $(\sharp)_g$, où g est une section de $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger}$ qui opère trivialement par hypothèse. Deux relèvements induisent la **même** restriction. Pour tout couple d'ouverts $\mathcal{U}^\dagger, \mathcal{W}^\dagger$ avec $r : W \subset U$ on obtient un morphisme canonique $r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}$, qui est défini localement et qui est un isomorphisme. À un tel $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ et à un ouvert *affine* U on associe le R_U-module défini par

$$\mathcal{F}_U := \lim_{\leftarrow\, \mathcal{U}^\dagger} \mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger},$$

où la limite est prise pour tous les ouverts $\mathcal{U}^\dagger$ du site qui relèvent U. On obtient ainsi un faisceau de Zariski défini localement qui définit un inverse au foncteur P_X. ■

Remarque 6.5.2. — En fait, le théorème précédent vaut pour les catégories des ensembles.

Corollaire 6.5.3. — *Si $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sont deux $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche* spéciaux, *l'action du faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ sur le faisceau :*

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

est triviale, qui est alors un **faisceau de Zariski** *de R_X-modules sur X.*

Démonstration. En effet, par construction un élément du groupe g agit par définition 4.3.1 par $\varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$, mais comme g et g^{-1} sont des opérateurs différentiels, en vertu du théorème 5.0.4, et que φ est $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-**linéaire**, cette action est **triviale** et on applique le théorème précédent. ■

Corollaire 6.5.4. — *Soit $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe appartenant à la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. Le foncteur*

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \mapsto \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

est un foncteur exact de catégories triangulées de $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ vers $D^+(R_X)$.

Démonstration. En effet, le complexe $\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ se représente par le complexe :

$$\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}) = \mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})\,,$$

où $\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est une résolution injective de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ dans la catégorie des **modules spéciaux**, qui est un complexe pour la topologie de Zariski de X en vertu du corollaire précédent. ■

Proposition 6.5.5. — *Soient $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ deux $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche* **spéciaux**. *Il existe alors un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \simeq \Gamma(X, \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}))\,.$$

Démonstration. Comme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\,,$$

un élément ϕ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est la donnée pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ d'un morphisme $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-linéaire $\varphi_{\mathcal{U}^\dagger} : \mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ tel que pour tout morphisme $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ on ait l'égalité :

$$\varphi_{\mathcal{W}^\dagger} = (\sharp)_{r^\dagger} \circ \varphi_{\mathcal{U}^\dagger|W} \circ (\sharp)^{-1}_{r^\dagger}.$$

En particulier, pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$, le morphisme ϕ définit une section de

$$\Gamma(U, \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger})) = \Gamma(U, \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})).$$

En prenant un recouvrement de X par des ouverts affines, on trouve que ϕ définit des sections locales qui se recollent, donc une section globale du faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$. Réciproquement, une section globale de ce dernier faisceau détermine un morphisme $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. ■

Remarque 6.5.6. — Dans le cas des modules **spéciaux**, c'est là un point tout à fait remarquable qui est à la base du succès des modules spéciaux

contrairement à la situation générale 4.3.1, une section globale du faisceau de Zariski :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

est un **morphisme global** : $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Corollaire 6.5.7. — *En particulier, pour des complexes spéciaux $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, la cohomologie du complexe $\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ n'est rien d'autre que l'hypercohomologie au-dessus de X du complexe de* **Zariski** *:*

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}),$$

exactement comme dans la théorie usuelle.

Cela permet de construire une fort utile suite spectrale du passage du local au global. Notons $\widetilde{\mathcal{E}xt}^i_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ le préfaisceau sur X, qui à un ouvert U associe l'hypercohomologie de degré i au-dessus de U du complexe de Zariski précédent.

Théorème 6.5.8. — *Soit $\mathcal{B}$ un recouvrement ouvert de X, alors il existe une suite spectrale dont le terme $\mathbb{E}_2$ est donné par la cohomologie de Čech du préfaisceau précédent $H^j(\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{E}xt}^i_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$ et dont le terme $\mathbb{E}_\infty$ est le R-module bigradué associé à une filtration convenable du R-module gradué $\mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$.*

Démonstration. En effet, si l'on prend une résolution $\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ par des modules spéciaux injectifs, le complexe $\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est un complexe de faisceaux flasques, puisque la propriété d'être flasque est locale sur X. La suite spectrale du théorème est la suite spectrale du complexe double de Čech $C^\bullet(\mathcal{B},\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$. ■

Proposition 6.5.9. — *Soient $X_1 \cup X_2$ un recouvrement ouvert de X, $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe spécial borné à gauche et $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe spécial borné à droite. Il existe alors un triangle distingué de Mayer-Vietoris*

$$\boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \to \boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^\dagger_{(X_1)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}^\dagger_{1\,\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{1\,\mathrm{inf}}) \oplus \boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^\dagger_{(X_2)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}^\dagger_{2\,\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{2\,\mathrm{inf}}) \to$$
$$\to \boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^\dagger_{(X_{12})^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}^\dagger_{12\,\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{12\,\mathrm{inf}}) \to ,$$

où $X_{12} := X_1 \cap X_2$ *et* $\mathcal{M}^\dagger_{1\,\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{2\,\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{12\,\mathrm{inf}}$ *désignent les restrictions de* $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *à* X_1, X_2 *et* $X_1 \cap X_2$.

Démonstration. En effet, si $\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est une résolution injective de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ par des modules spéciaux, le complexe de Zariski $\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est à **termes flasques** et donne donc naissance au triangle distingué de Mayer-Vietoris. ■

Définition 6.5.10. — *Soit* $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *un complexe spécial, on définit son complexe de de Rham local* †*-adique :*

$$dR(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) := \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}).$$

On obtient ainsi un foncteur covariant exact de catégories triangulées

$$dR(X/R,-): \qquad D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod}) \to D^+(R_X)\,.$$

En particulier, si $Z \subset X$ est un fermé, le complexe de cohomologie locale $\boldsymbol{R}\Gamma_Z(dR(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$ est un complexe de Zariski parfaitement défini dont l'hypercohomologie $\boldsymbol{R}\Gamma_Z(X, dR(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$ fournit la cohomologie de de Rham †-adique à support dans Z, donnant lieu aux triangles de cohomologie locale usuels.

Proposition 6.5.11. — *Soit* $\mathscr{X}^\dagger$ *un relèvement plat de* X*, et soient* $\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$ *un complexe de* $D^-(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ *et* $\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$ *un complexe de* $D^+(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R})$*. Alors, il existe un isomorphisme canonique de la catégorie* $D(R_X)$ *:*

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}) \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}), P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger})).$$

Démonstration. En effet, pour deux $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger/R}$-modules à gauche on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}) \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}), P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger})),$$

qui se dérive naturellement. ■

Remarque 6.5.12. — Si $R \to S$ est un morphisme d'anneaux, on peut considérer le faisceau d'anneaux sur le site $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S} := \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R} \otimes_R S$, et la théorie précédente a lieu sur ce faisceau.

6.6. Le théorème de finitude des nombres de Betti p-adiques d'une variété algébrique lisse

Jusqu'à présent, nous avons construit la théorie sur un anneau noethérien R muni de la topologie définie par un idéal I, ce qui a un grand intérêt, mais

les nombres de Betti p-adiques d'une variété algébrique sont des dimensions d'espaces vectoriels sur le corps K des fractions d'un anneau de valuation discrète complet V d'inégales caractéristiques. Aussi, il nous faut considérer les faisceaux d'anneaux :

$$K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \subset \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} := \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \otimes_V K \subset \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} := \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \otimes_V K\,,$$

sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ infinitésimal pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique de V. Le faisceau de groupes $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ agit sur tous ces faisceaux. On peut alors considérer la catégorie $\mathrm{Mod}(K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$ de faisceaux d'espaces vectoriels sur le site infinitésimal, la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-Mod des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche et sa sous-catégorie pleine $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})$-Mod des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche spéciaux qui est une catégorie abélienne admettant suffisamment d'objets injectifs.

Définition 6.6.1. — *Si X est un schéma lisse sur k, on définit ses nombres de Betti p-adiques comme les dimensions $B_{p,i}(X)$ de ses K-espaces de cohomologie de de Rham p-adique :*

$$H^i_{DR}(X/K) := H^i_{DR}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) := \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}).$$

Nous rappelons qu'une variété algébrique sur un corps est un schéma séparé et de type fini sur ce corps [EGA I].

Théorème 6.6.2. — *Si X est une variété algébrique lisse sur k, ses nombres de Betti p-adiques $B_{p,i}(X)$ sont* finis *pour tout $i \geqslant 0$.*

Démonstration. Considérons un recouvrement fini $\mathcal{B}$ de X par des ouverts affines. La filtration de la suite spectrale local-global 6.5.8 sur le groupe gradué $H^\bullet_{DR}(X/K)$ est finie. Les termes $\mathbb{E}_2$ sont des produits finis de cohomologie de de Rham p-adiques de variétés affines lisses qui, en vertu du théorème de finitude [Me$_2$], sont de dimension finie sur K. Cela entraîne que les nombres $B_{p,i}(X)$ sont finis. ∎

6.7. La fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adiques pour les schémas affines

Si X est un schéma lisse sur k et admet un relèvement plat $\mathscr{X}^\dagger$ sur V, la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$-modules à gauche est canoniquement équivalente à la catégorie des modules spéciaux $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})$-Mod en vertu du théorème fondamental 6.2.11. En particulier, les espaces de cohomologie

$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger})$ sont canoniquement isomorphes aux espaces de cohomologie de de Rham du site infinitésimal :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, P_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}))$$

pour tout complexe $\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$ de $D^+(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}\text{-Mod})$.

Si X est affine et lisse et si $\mathscr{X}^\dagger$ est un relèvement plat d'algèbre $A^\dagger$, il est montré ([M-N$_1$], [M-N$_2$]) que les espaces $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$ coïncident canoniquement avec la cohomologie du complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{A^\dagger/K}$ des formes différentielles séparées de l'algèbre $A^\dagger$ ([M-W]). Nous allons reprendre le principe de la démonstration de ce résultat pour faire le lien avec le foncteur construit dans [M-W], entre la catégorie des variétés algébriques affines lisses sur k et la catégorie homotopique $K^b(K)$ des complexes d'espaces vectoriels sur K.

Supposons plus généralement que $\mathscr{X}^\dagger$ est un relèvement plat d'un k-schéma lisse X et considérons le complexe de Spencer :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) := 0 \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}} \textstyle\bigwedge^n \mathscr{T}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \cdots \\ \cdots \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K} \to 0\end{aligned}$$

où $\bigwedge^i \mathscr{T}_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ est l'algèbre extérieure du fibré tangent et la différentielle est définie par :

$$\begin{aligned}\delta(P \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_i) := \sum_{j=1,\ldots,i} (-1)^{i-1} P v_j \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_i) - \\ \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant i} (-1)^{i+l} P \otimes ([v_j, v_l] \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge \hat{v}_l \wedge \cdots \wedge v_i)\,,\end{aligned}$$

où P est un opérateur différentiel et les v_j sont des vecteurs tangents.

On rappelle le résultat suivant ([Me$_3$], 7.2.5), qui ne se démontre pas uniquement à partir du complexe de Koszul vu que les ordres des opérateurs différentiels sont infinis.

Lemme 6.7.1. — *Le complexe de Spencer* $\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$ *est une résolution du faisceau structural* $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ *par des* $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$*-modules à gauche localement libres de type fini. En particulier,* $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ *est un* $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$*-module à gauche parfait.*

Le complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ est canoniquement isomorphe au complexe :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}), \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})\,.$$

Soit $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \mathcal{I}^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger}$ une résolution injective de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$-modules à gauche. Alors, les morphismes canoniques de complexes :

$$\begin{aligned}\Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K} &\simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}), \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \to \\ &\to \mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}), \mathcal{I}^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \leftarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{I}^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K})\end{aligned}$$

induisent des isomorphismes en cohomologie. Ce sont donc des isomorphismes canoniques de $D^b(K_X)$. Cela entraîne que les hypercohomologies des complexes $\Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ et $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{I}^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K})$ sont canoniquement isomorphes. Mais si X est affine, l'hypercohomologie du complexe $\Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ se réduit à la cohomologie du complexe des sections globales, en vertu du théorème d'acyclicité de Meredith 2.2.4.

Théorème 6.7.2. — *Soient X un schéma lisse sur k et $\mathscr{X}_1^\dagger, \mathscr{X}_2^\dagger$ deux relèvements plats de X et $f_1^\dagger$, $f_2^\dagger$ des relèvements de l'identité. Alors, les morphismes de complexes :*

$$f_1^*, f_2^* : \qquad \Omega^\bullet_{\mathscr{X}_2^\dagger/K} \to \Omega^\bullet_{\mathscr{X}_1^\dagger/K}$$

définissent le **même élément** *du groupe* $\mathrm{Hom}_{D^b(K_X\text{-Mod})}(\Omega^\bullet_{\mathscr{X}_2^\dagger/K}, \Omega^\bullet_{\mathscr{X}_1^\dagger/K})$.

Démonstration. Rappelons, en vertu de la prop. 4.3.1, que si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sont deux $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche, le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est un faisceau infinitésimal de K-espaces vectoriels. Si $f^\dagger$ est un morphisme du site $\mathscr{X}_1^\dagger \to \mathscr{X}_2^\dagger$, le morphisme de restriction

$$(\sharp)_{f^\dagger} : \qquad \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}_2^\dagger/K}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}_2}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}_2}) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}_1^\dagger/K}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}_1}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}_1})$$

est donné par la définition 4.3.1 par $\varphi \mapsto (\sharp)_{f^\dagger} \circ \varphi \circ ((\sharp)_{f^\dagger})^{-1}$. Mais si $\mathscr{X}_1^\dagger = \mathscr{X}_2^\dagger$ et que $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sont deux $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche **spéciaux**, alors φ et les restrictions $(\sharp)_{f^\dagger}$ sur ces modules **commutent**, et les restrictions $(\sharp)_{f^\dagger}$ sur le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}_1^\dagger/K}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}_1}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}_1})$ sont **triviales**.

Soit $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \to \mathcal{I}^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ une résolution injective de $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche spéciaux, par exemple $P_{\mathscr{X}_1^\dagger}(\mathcal{I}^\bullet_{\mathscr{X}_1^\dagger})$. Alors, pour chaque relèvement $f_i^\dagger$ on a un diagramme commutatif **de morphismes de**

complexes qui sont des **isomorphismes dans la catégorie dérivée** :

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K} \arrow[rr, "(\sharp)_{f_i^{\dagger}=f_i^*}"'] \arrow[d, equal, "\simeq"] & & \Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K} \arrow[d, equal, "\simeq"] \\
\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K}}(\mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K}), \mathcal{O}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K}) \arrow[rr, "(\sharp)_{f_i^{\dagger}}"'] \arrow[d] & & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}}(\mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}), \mathcal{O}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}) \arrow[d] \\
\mathscr{H}om^{\bullet}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K}}(\mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K}), R_{\mathscr{X}_2^{\dagger}}(\mathcal{I}^{\bullet}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K})) \arrow[rr, "(\sharp)_{f_i^{\dagger}}"'] & & \mathscr{H}om^{\bullet}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}}(\mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}), R_{\mathscr{X}_1^{\dagger}}(\mathcal{I}^{\bullet}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K})) \\
\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K}, R_{\mathscr{X}_2^{\dagger}}(\mathcal{I}^{\bullet}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K})) \arrow[rr, "(\sharp)_{f_i^{\dagger}}"'] \arrow[u] & & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}, R_{\mathscr{X}_1^{\dagger}}(\mathcal{I}^{\bullet}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K})) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Mais en vertu du théorème 2.2.10, les morphismes $f_1^{\dagger}$ et $f_2^{\dagger}$ sont inversibles et $f_2^{\dagger} = g \circ f_1^{\dagger}$, où g est un automorphisme d'algèbre de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/V}$ qui se réduit à l'identité modulo $\mathfrak{m}$, c'est donc un opérateur différentiel en vertu du théorème 5.0.4, et cela montre $f_2^{\dagger}$ et $f_1^{\dagger}$ induisent le **même** morphisme sur la dernière ligne du diagramme précédent, soit :
$(\sharp)_{f_1^{\dagger}} = (\sharp)_g \circ (\sharp)_{f_1^{\dagger}} = (\sharp)_{f_2^{\dagger}}$:

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K}}\left(\mathcal{O}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K}, R_{\mathscr{X}_2^{\dagger}}(\mathcal{I}^{\bullet}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K})\right) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}}\left(\mathcal{O}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}, R_{\mathscr{X}_1^{\dagger}}(\mathcal{I}^{\bullet}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K})\right),$$

puisque la restriction $(\sharp)_g$ sur $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}}\left(\mathcal{O}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K}, R_{\mathscr{X}_1^{\dagger}}(\mathcal{I}^{\bullet}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K})\right)$ est triviale. Les morphismes f_1^* et f_2^* définissent donc le **même élément** du groupe $\mathrm{Hom}_{D^b(K_X\text{-Mod})}(\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}_2^{\dagger}/K}, \Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}_1^{\dagger}/K})$. ■

Corollaire 6.7.3. — *Si $A_1^{\dagger}$ et $A_2^{\dagger}$ sont deux relèvements plats d'une algèbre A affine lisse sur k, alors tous les morphismes entre les complexes $\Omega^{\bullet}_{A_1^{\dagger}/K}$ et $\Omega^{\bullet}_{A_2^{\dagger}/K}$ induits par des relèvements $A_2^{\dagger} \to A_1^{\dagger}$ de l'identité sont* **homotopes**.

Démonstration. En effet, en vertu du théorème précédent tous les relèvements induisent le même morphisme de $\mathrm{Hom}_{D^b(K)}(\Omega^{\bullet}_{A_2^{\dagger}/K}, \Omega^{\bullet}_{A_1^{\dagger}/K})$, mais :

$$\mathrm{Hom}_{K^b(K)}(\Omega^{\bullet}_{A_2^{\dagger}/K}, \Omega^{\bullet}_{A_1^{\dagger}/K}) = \mathrm{Hom}_{D^b(K)}(\Omega^{\bullet}_{A_2^{\dagger}/K}, \Omega^{\bullet}_{A_1^{\dagger}/K}),$$

où $K^b(K)$ désigne comme d'habitude la catégorie des complexes bornés de K-espaces vectoriels à homotopie près. ■

Remarque 6.7.4. — La méthode de Monsky-Washnitzer ([M-W], remark p. 203) en construisant une homotopie explicite, montre en fait pour X

affine et lisse sur k, que tous les morphismes induits par des relèvements définissent le **même** élément dans le groupe :

$$\mathrm{Hom}_{K^b(K_X\text{-Mod})}(\Omega^\bullet_{\mathscr{X}_2^\dagger/K}, \Omega^\bullet_{\mathscr{X}_1^\dagger/K}).$$

La méthode précédente montre seulement que c'est le même élément dans le groupe :

$$\mathrm{Hom}_{D^b(K_X\text{-Mod})}(\Omega^\bullet_{\mathscr{X}_2^\dagger/K}, \Omega^\bullet_{\mathscr{X}_1^\dagger/K}).$$

Cette subtilité disparaît au niveau des complexes globaux puisque la catégorie homotopique de la catégorie des espaces vectoriels sur un corps coïncide avec sa catégorie dérivée. Le passage de la catégorie homotopique à la catégorie dérivée au niveau des complexes de faisceaux est le prix à payer pour passer des variétés affines aux variétés non affines, et surtout pour passer du cas du fibré trivial au cas d'un module spécial. Mais en même temps, c'est une simplification considérable de la construction originale de Monsky-Washnitzer puisqu'elle ne nécessite pas une homotopie explicite, qui est le point délicat de la construction originelle et qui ne semble pas se recoller.

Corollaire 6.7.5. — *Soient $f : Y \to X$ un morphisme de schémas* **affines** *lisses sur k, et $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats. Alors, tous les morphismes*

$$f^{-1}\Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \Omega^\bullet_{\mathscr{Y}^\dagger/K}$$

induits par des relèvements $f^\dagger$ définissent le **même** *élément du groupe :*

$$\mathrm{Hom}_{D^b(K_Y\text{-Mod})}(f^{-1}\Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \Omega^\bullet_{\mathscr{Y}^\dagger/K}).$$

Démonstration. En effet, si $f_1^\dagger, f_2^\dagger$ sont deux relèvements de f, on a les factorisations canoniques : $f_i^\dagger = i_{f_i^\dagger} \circ p^\dagger$, $i = 1, 2$, où $i_{f_i^\dagger}$ est l'immersion graphe $\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger$ de $f_i^\dagger$ et $p^\dagger$ est la projection canonique $\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger$. Cela ramène à supposer que f est une immersion fermée. Dans ce cas affine, et en vertu de la propriété 3) de la lissité, il existe un automorphisme g de $\mathscr{X}^\dagger$ tel que $f_2^\dagger = g \circ f_1^\dagger$. On est réduit au théorème précédent. ■

Corollaire 6.7.6. — *La correspondance $X \mapsto \Omega^\bullet_{A^\dagger/K}$ définit un foncteur contravariant*

$$DR(-/K) : \qquad \mathrm{SmAff}(k) \to K^+(K)$$

de la catégorie des schémas affines lisses $\mathrm{SmAff}(k)$ *sur k dans la catégorie homotopique $K^+(K)$.*

Démonstration. En effet, dans le cas affine un morphisme f admet toujours des relèvements (2.3.2) et on est réduit au corollaire précédent. ■

Le foncteur ainsi construit coïncide, par construction, avec celui de Monsky-Washnitzer [M-W], mais on ne peut pas étendre à ce stade la fonctorialité au cas non affine parce qu'en général un morphisme ne se relève pas. L'un des buts, qui est aussi un test, des chapitres suivants, est d'étendre cette fonctorialité à la catégorie de tous les schémas lisses séparés sur k. On est encouragé de retrouver par cette méthode la fonctorialité du cas affine de Monsky-Washnitzer ([M-W]), sans quoi rien n'est possible.

Corollaire 6.7.7. — *Soient X un schéma lisse sur k et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module à gauche spécial. Les faisceaux de Zariski :*

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

sont nuls si $i > \dim X$ et les espaces :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

sont nuls si $i > 2\dim X$. En particulier, les nombres de Betti $B_{p,i}(X)$ sont nuls si $i > 2\dim X$.

Démonstration. En effet, si $\mathscr{X}^\dagger$ est un relèvement plat, le complexe de faisceaux de Zariski $\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est isomorphe au-dessus de X au complexe de faisceaux $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}),\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger})$, concentré en degrés $[0,\dim X]$. La seconde assertion résulte du fait que la dimension topologique de X est bornée par la dimension algébrique $\dim X$ en vertu du théorème de Grothendieck. ■

Remarque 6.7.8. — On trouve par construction la suite spectrale conjuguée :

$$\mathrm{H}^{\mathrm{j}}(\mathrm{X},\mathcal{E}\mathrm{xt}^{\mathrm{i}}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/\mathrm{K}},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/\mathrm{K}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{\mathrm{i+j}}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/\mathrm{K}},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/\mathrm{K}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}),$$

et l'on s'attend, bien sûr, dans le cas géométrique ($\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} = \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$) à ce que la filtration de cette suite spectrale ait une interprétation géométrique.

6.8. Le théorème de comparaison dans le cas d'un relèvement propre et lisse

On trouve ou on retrouve comme corollaire l'invariance de la cohomologie de de Rham **algébrique** d'un relèvement propre et lisse, sans invoquer

la cohomologie cristalline qui a fourni historiquement la première démonstration de ce résultat [B-O].

Corollaire 6.8.1. — *Soit $\boldsymbol{X}/V$ un relèvement* algébrique *propre et lisse de X/k. La cohomologie de de Rham algébrique usuelle $H^{\bullet}_{DR}(\boldsymbol{X}/K) := H^{\bullet}(\boldsymbol{X}, \Omega^{\bullet}_{\boldsymbol{X}/K})$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham p-adique $H^{\bullet}_{DR}(X/K, \mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K})$ et est indépendante à isomorphisme canonique près du relèvement X/V.*

Démonstration. Le relèvement algébrique $\boldsymbol{X}/V$ induit un relèvement plat $\mathscr{X}^{\dagger}$ ([Mr]). Définissons :

$$H^i_{DR}(\mathscr{X}^{\dagger}/K) := H^i_{DR}(X/K, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}) := \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}).$$

Au vu des résultats précédents, on a alors l'isomorphisme canonique

$$H^i_{DR}(\mathscr{X}^{\dagger}/K) \simeq H^i_{DR}(X/K, \mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}).$$

En vertu du théorème de comparaison de Meredith [Mr] pour les schémas propres, le morphisme canonique

$$H^i_{DR}(\boldsymbol{X}/K) \to H^i_{DR}(\mathscr{X}^{\dagger}/K)$$

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels, ce qui montre le corollaire.■

Remarque 6.8.2. — Le morphisme naturel :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}) \otimes_V K \to \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \otimes_V K)$$

n'est pas un isomorphisme en général. En particulier, la cohomologie de de Rham *ne commute pas* au changement de base $V \to K$. C'est une des raisons pour laquelle il faut modifier la définition de la cohomologie de de Rham †-adique sur R, mais nous n'insisterons pas dans cet article sur ce point.

7. La catégorie des modules à gauche spéciaux et la cohomologie de de Rham p-adique $H^{\bullet}_{DR,h}(X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V)$ d'échelon $h \geqslant 0$

7.1. La filtration par les échelons du faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}$

Dans le cas où R est une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre où $\mathbb{Z}_{(p)}$ est le localisé de $\mathbb{Z}$ en l'idéal (p) pour un nombre premier $p > 0$, et si $\mathscr{X}^{\dagger}$ est un relèvement plat d'un R_1-schéma lisse X, nous avons défini dans les articles ([M-N$_1$],

[Me$_3$]) une filtration croissante et exhaustive du faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$ par les faisceaux d'anneaux $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$ des opérateurs différentiels d'échelon $h \geqslant 0$, que nous appelons « la p-filtration » ou « la filtration par les échelons » qui est similaire à la p-filtration du faisceau $\mathscr{D}_{X/k}$ des opérateurs différentiels sur un schéma lisse sur un corps de caractéristique $p > 0$. Rappelons-en la définition ([M-N$_1$], [Me$_3$], 2.6.1) :

Définition 7.1.1. — *Soit $h \geqslant 0$ un entier. On définit le faisceau $\mathscr{D}^{<\infty,h}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$ des opérateurs différentiels d'ordre fini et d'échelon h, comme le faisceau de sous-$\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$-algèbres du faisceau $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$, localement engendré par les opérateurs d'ordre $\leqslant p^h$.*

Le faisceau $\mathscr{D}^{<\infty,h}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$-algèbres du faisceau $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$, qui est aussi localement libre comme $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$-module [M-N$_1$].

Pour tout $h \geqslant 0$, nous pouvons considérer le complété I-adique $\mathscr{D}^{\wedge,h}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R}$ du faisceau $\mathscr{D}^{<\infty,h}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$. Nous pouvons aussi considérer le complété I-adique $(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R})$ du schéma †-adique $(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R})$ et le faisceau $\mathscr{D}^{\wedge,h}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R}$, qui opère de façon évidente sur le faisceau $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R}$, apparaît comme un sous-faisceau de R-algèbres du faisceau des endomorphismes $\mathcal{E}nd_R(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R})$. Pour tout entier $s \geqslant 1$, nous pouvons considérer la réduction modulo l'idéal I^s du faisceau $\mathscr{D}^{\wedge,h}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R}$:

$$\mathscr{D}^{\wedge,h}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R} I^s = \mathscr{D}^{<\infty,h}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R} / I^s.$$

C'est de façon naturelle un faisceau de $\mathcal{O}_{X_s}$-algèbres filtré sur le schéma X_s, réduction modulo l'idéal I^s du schéma †-adique $(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R})$.

L'inclusion $\mathscr{D}^{<\infty,h}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R} \subset \mathscr{D}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$ induit, pour tout $s \geqslant 1$, un morphisme filtré :

$$\mathscr{D}^{<\infty,h}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R} / I^s \to \mathscr{D}_{X_s/R_s},$$

qui, bien entendu, *n'est pas injectif*.

Le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$, qui opère de façon évidente sur le faisceau $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R}$, apparaît alors aussi comme un sous-faisceau de R-algèbres du faisceau des endomorphismes $\mathcal{E}nd_R(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R})$. On peut donc pour tout $h \geqslant 0$ considérer l'intersection $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R} \cap \mathscr{D}^{\wedge,h}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R}$ prise dans le faisceau $\mathcal{E}nd_R(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\wedge}/R})$. Rappelons la définition ([Me$_3$], 2.6.5) :

Définition 7.1.2. — *Sous les conditions précédentes, soit un entier $h \geqslant 0$ et soit $\mathscr{X}^{\dagger} = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R})$ un R-schéma †-adique lisse, on définit*

le faisceau des opérateurs d'ordre infini et d'échelon h noté $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$, comme le sous-faisceau du faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/R} \cap \mathscr{D}^{\wedge,h}_{\mathscr{X}/R}$ des opérateurs dont la réduction modulo I^s dans $\mathscr{D}^{\wedge,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}/I^s$ est d'ordre localement borné par une fonction linéaire en s.

Remarque 7.1.3. — Le lecteur prendra garde que l'inclusion $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/R} \subset \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/R} \cap \mathscr{D}^{\wedge,h}_{\mathscr{X}^\wedge/R}$ est **stricte**.

Notation 7.1.4. — Si $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ est un n-uplet et $h \geqslant 0$, on note dans l'énoncé suivant $\beta \in \mathbb{N}^n_{\leqslant p-1}$ si $\beta_i \leqslant p-1$ et :

$$(\Delta^{p^h})^\beta := (\Delta_1^{p^h})^{\beta_1} \cdots (\Delta_n^{p^h})^{\beta_n}.$$

Théorème 7.1.5. — *Soient $\mathscr{X}^\dagger$ un schéma †-adique lisse sur V et $x_1, \ldots, x_n$ une famille de sections locales du faisceau $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ au-dessus d'un ouvert affine U d'algèbre $A^\dagger := \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ telles que leurs différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$ forment une base locale du $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module des formes différentielles séparées $\Omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}$. Alors, pour $h \geqslant 0$, un opérateur différentiel P d'échelon h s'écrit de* **manière unique** *:*

$$P(a, \Delta, \ldots, \Delta^{p^h}) = \sum_{\beta^0, \ldots, \beta^{h-1} \in (\mathbb{N}^n_{\leqslant p-1})^h, \beta^h \in \mathbb{N}^n} a_{\beta^0, \ldots, \beta^h} (\Delta)^{\beta^0} \cdots (\Delta^{p^h})^{\beta^h}$$

où $a_{\beta^0, \ldots, \beta^h}$ est une suite d'éléments de l'algèbre $A^\dagger$ telle que la série « symbole total » :

$$\sigma_{P,h}(x, \xi^0, \ldots, \xi^h) := P(a, \xi^0, \ldots, \xi^h) := \sum_{\beta^0, \ldots, \beta^{h-1} \in (\mathbb{N}^n_{\leqslant p-1})^h, \beta^h \in \mathbb{N}^n} a_{\beta^0, \ldots, \beta^h} (\xi^0)^{\beta^0} \cdots (\xi^h)^{\beta^h}$$

est un élément de l'algèbre $(A^\dagger[\xi^0, \ldots, \xi^h])^\dagger$, où la $A^\dagger$-algèbre $A^\dagger[\xi^0, \ldots, \xi^h]$ est engendrée par les générateurs $\xi^j = (\xi_1^j, \ldots, \xi_n^j)$, $0 \leqslant j \leqslant h$, soumis aux relations $(\xi_i^j)^p = u_j \xi_i^{j+1}$ $0 \leqslant j \leqslant h-1$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $u_j := \frac{p^{j+1}!}{(p^j!)^p}$. En particulier, on a la majoration $v_{\mathfrak{m}}(a_{\beta^0, \ldots, \beta^h}) \geqslant \lambda(|\beta^0| + \cdots + |\beta^h| p^h)$, $\lambda > 0$.

De plus, l'application symbole total qui à P associe son symbole total,

$$P \mapsto \sigma_{P,h}(x, \xi^0, \ldots, \xi^h),$$

est un **isomorphisme** *de $A^\dagger$-modules à gauche entre l'anneau $D^{\dagger,h}_{A^\dagger/V} := \Gamma(U, \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ des sections globales des opérateurs d'échelon h et la $A^\dagger$-algèbre $(A^\dagger[\xi^0, \ldots, \xi^h])^\dagger$.*

Le théorème 7.1.5 est démontré en deux parties ([Me$_3$], Thm. 3.1.2 et Thm. 3.1.4). La démonstration utilise le théorème 2.4.2. Là aussi les éléments de l'algèbre $(A^\dagger[\xi^0, \ldots, \xi^h])^\dagger$ sont faciles à décrire ce qui produit

beaucoup d'opérateurs d'échelon h. On déduit du théorème précédent que le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ est aussi acyclique sur les ouverts affines assez petits ([Me$_3$], 3.2.3), que l'idéal $\mathfrak{m}$ est contenu dans la radical de $\Gamma(U, \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ pour un ouvert affine assez petit U ([Me$_3$], 4.1.1) et que la transposition est une anti-involution de cet anneau ([Me$_3$], 4.2.1).

L'intérêt de la p-filtration est le théorème :

Théorème 7.1.6. — *Pour tout ouvert assez petit affine U d'algèbre $A^\dagger$ et tout $h \geqslant 0$ l'anneau $D^{\dagger,h}_{A^\dagger/V} := \Gamma(U, \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ est* noethérien.

Le théorème 7.1.6 est démontré dans l'article ([Me$_3$], Thm. 5.3.6). Ce théorème ne se déduit pas de son analogue formel, il est beaucoup plus profond et sa démonstration utilise en fait le théorème précédent.

Remarque 7.1.7. — La filtration par les échelons permet d'appliquer le critère de platitude locale 2.0.3 pour montrer la platitude des extensions de faisceaux d'opérateurs différentiels que nous rencontrerons dans cet article. En particulier, les extensions $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ sont plates ([Me$_3$], Coro. 6.1.2).

Nous allons étudier l'extension de cette filtration au faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ des opérateurs différentiels sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Proposition 7.1.8. — *Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Alors, pour $h \geqslant 0$ et pour tout morphisme du site $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$, le morphisme de restriction $(\sharp)_{r^\dagger} : r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$ induit un morphisme de restriction*

$$(\sharp)_{r^\dagger,h} : \qquad r^{-1}\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger/R}$$

compatible à la composition des morphismes.

Démonstration. La question est locale. Il s'agit de montrer que si P est un opérateur différentiel d'échelon h l'opérateur différentiel r^*Pr^{*-1} est d'échelon h. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des coordonnées locales sur $\mathcal{U}^\dagger|W$ il suffit de montrer, par définition des opérateurs différentiels d'échelon h ([M-N$_1$], [Me$_3$]), que les opérateurs différentiels :

$$r^*\Delta_{x_j}r^{*-1}, \ldots, r^*\Delta^{p^h}_{x_j}r^{*-1}$$

sont d'ordre $1, \ldots, p^h$ respectivement, ce qui est conséquence du fait $r^* \circ P \circ r^{*-1}$ est un isomorphisme d'algèbres respectant l'ordre des opérateurs différentiels. ∎

Définition 7.1.9. — *Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Alors, la famille $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{U}^\dagger/R}$, munie des morphismes $(\sharp)_{r^\dagger,h}$, définit un faisceau d'algèbres $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, le faisceau des opérateurs différentiels d'échelon h. La filtration $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ est une filtration exhaustive du faisceaux $\mathscr{D}^{\dagger}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ par des sous-faisceaux d'algèbres.*

Rappelons que dans le cas d'un anneau de valuation discrète l'on définit l'indice de ramification absolu e comme la valuation $\mathfrak{m}$-adique $v_{\mathfrak{m}}(p)$ de p.

Proposition 7.1.10. — *Soit $\mathscr{X}^\dagger$ un schéma $\dagger$-adique sur V lisse. Si $h \geqslant 0$ est un entier tel que $e < p^h(p-1)$, alors le faisceau $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ est un* sous-faisceau de groupes pour la structure multiplicative *du faisceau $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ des opérateurs différentiels d'échelon h, et le faisceau $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est un* sous-faisceau de groupes pour la structure multiplicative *du faisceau $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ des opérateurs différentiels d'échelon h pour un schéma X lisse sur k.*

Démonstration. Les faisceaux $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ et $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ sont par définition des sous-faisceaux du faisceau $\mathcal{E}nd_V(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$. La question est donc locale. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de sections locales du faisceau $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ au-dessus d'un ouvert affine U d'algèbre $A^\dagger := \Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ telles que leurs différentielles $(dx_1,\dots,dx_n)$ forment une base locale du $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module des formes différentielles séparées $\Omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}$. Si g est une section de $\Gamma(U,\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger})$, c'est un automorphisme de l'algèbre $A^\dagger$ qui se réduit à l'identité modulo $\mathfrak{m}$ et, en vertu du corollaire 5.0.8, c'est donc un opérateur différentiel qui admet comme développement en série :

$$g = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n} (g(x_1)-x_1)^{\beta_1}\cdots(g(x_n)-x_n)^{\beta_n}\Delta_1^{\beta_1}\cdots\Delta_n^{\beta_n}.$$

La valuation $\mathfrak{m}$-adique du coefficient $a_\beta := (g(x_1)-x_1)^{\beta_1}\cdots(g(x_n)-x_n)^{\beta_n}$ est supérieure à $|\beta| := \beta_1+\cdots+\beta_n$. Soit

$$\beta_i := q_{\beta,i}p^h + a_{\beta,i,h-1}p^{h-1}+\cdots+a_{\beta,i,0},\ \ 0\leqslant a_{\beta,i,j}\leqslant p-1\,,$$

la division euclidienne de β_i par p^h. Posons

$$b_\beta := a_\beta\frac{(p^h!)^{|q_\beta|}(p^{h-1}!)^{|a_{\beta,h-1}|}\dots(p!)^{|a_{\beta,1}|}}{\beta!}.$$

La valuation $\mathfrak{m}$-adique de b_β est supérieure à :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\big(\beta_i + q_{\beta,i}\frac{(p^h-1)e}{p-1}+\cdots+a_{\beta,i,1}\frac{(p-1)e}{p-1}-\frac{(\beta_i-s_{\beta_i})e}{p-1}\big),$$

où s_{β_i} est la somme des coefficients du développement p-adique de β_i. Si $p^h(p-1)-e>0$, la valuation $\mathfrak{m}$-adique de b_β est supérieure à $\lambda|\beta|$ pour

une constante $\lambda := \frac{(p^h(p-1)-e)}{(p-1)p^h} > 0$, et la série

$$\sum_{\beta} b_\beta (\Delta)^{a_{\beta,0}} \cdots (\Delta^{p^h})^{q_\beta}$$

est un opérateur différentiel d'échelon h en vertu de la définition du faisceau $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$. ■

7.2. La cohomologie de de Rham p-adique $H^\bullet_{DR,h}(X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V)$ d'échelon $h \geqslant 0$

En vertu de la proposition précédente et sous la condition $e < p^h(h-1)$, le faisceau $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est, pour la structure multiplicative, un sous-faisceau de groupes du faisceau d'anneaux $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$.

Définition 7.2.1. — *Sous la condition $e < p^h(h-1)$, on dit qu'un $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche $\mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}}$ est spécial si l'action ($\sharp$) de $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ sur $\mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}}$ se fait à travers $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$.*

On note $(\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à gauche spéciaux. Tous les raisonnements que nous avons faits pour le couple $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^{\dagger}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ se transposent mutatis mutandis au couple $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ sous la condition $e < p^h(p-1)$.

1) On trouve que la donnée d'un module à gauche spécial d'échelon h est équivalente la donnée d'un famille de $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{U}^\dagger/V}$-modules à gauche munie d'isomorphismes $(\diamond)_h$ définis à l'aide des modules de transfert $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V}$.
2) On trouve que si $\mathscr{X}^\dagger$ est un relèvement plat de X, la catégorie $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-Mod est canoniquement équivalente à la catégorie des modules spéciaux $(\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod par le foncteur prolongement canonique $P_{\mathscr{X}^\dagger,h}$.
3) On trouve que la catégorie $(\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod des modules spéciaux à gauche est une catégorie abélienne qui a suffisamment d'injectifs et est un champ.
4) On trouve que si $\mathcal{N}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}}$ sont deux modules à gauche spéciaux d'échelon h, le complexe $\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}})$ est un complexe de Zariski. On définit en particulier la cohomologie de de

Rham de X p-adique d'échelon h à coefficients dans $\mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}}$ par :

$$H^{\bullet}_{DR,h}(X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V, \mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}}) := \mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}}).$$

5) On trouve que si $\mathscr{X}^{\dagger}$ est un relèvement plat, on a des isomorphismes canoniques :

$$\mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}, R_{\mathscr{X}^{\dagger}}(\mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}})) \simeq \mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}}).$$

Le cas $h = 0$ est particulièrement intéressant et donne :

Proposition 7.2.2. — *Si $\mathscr{X}^{\dagger}$ est une relèvement $\dagger$-adique lisse de X et si $e < p-1$, la cohomologie de de Rham usuelle $H^{\bullet}_{DR}(\mathscr{X}^{\dagger}/V) := H^{\bullet}(X, \Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V})$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie d'échelon zéro $H^{\bullet}_{DR,0}(X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V, \mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V})$ et est indépendante du relèvement.*

En particulier, si X est affine et si $e < p-1$, la cohomologie de de Rham des formes différentielles séparées d'un relèvement, qui est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham d'échelon 0 du site $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, est indépendante du relèvement comme V-module gradué [M-W].

On trouve ou on retrouve comme corollaire l'invariance de la cohomologie de de Rham **algébrique** d'un morphisme propre et lisse sur V sans invoquer la cohomologie cristalline, qui a fourni historiquement la première démonstration de ce résultat [B$_1$].

Corollaire 7.2.3. — *Soit $\boldsymbol{X}/V$ un relèvement* algébrique *propre et lisse de X/k. Si $e < p-1$, la cohomologie de de Rham algébrique usuelle $H^{\bullet}_{DR}(\boldsymbol{X}/V) := H^{\bullet}(\boldsymbol{X}, \Omega^{\bullet}_{\boldsymbol{X}/V})$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham p-adique d'échelon zéro $H^{\bullet}_{DR,0}(X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V, \mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V})$ et est indépendante à isomorphisme canonique près du relèvement $\boldsymbol{X}/V$.*

Démonstration. En effet, en vertu du théorème de comparaison $GAGA^{\dagger}$ de Meredith [Mr] pour les V-schémas propres, le morphisme canonique :

$$H^{\bullet}_{DR}(\boldsymbol{X}/V) \to H^{\bullet}_{DR}(\mathscr{X}^{\dagger}/V)$$

est un isomorphisme de V-modules gradués. On est alors réduit à la proposition précédente. ■

Corollaire 7.2.4. — *Soit $\boldsymbol{X}/V$ un relèvement* algébrique *propre et lisse de X/k. Si $e < p-1$, la cohomologie de de Rham algébrique usuelle $H^{\bullet}_{DR}(\boldsymbol{X}/V) := H^{\bullet}(\boldsymbol{X}, \Omega^{\bullet}_{\boldsymbol{X}/V})$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham p-adique d'échelon zéro du site infinitésimal formel $H^{\bullet}_{DR,0}(X^{\wedge}_{\mathrm{inf}}/V)$.*

Démonstration. En vertu du théorème de comparaison $GAGF$ de Grothendieck [EGA III$_1$] pour les V-schémas propres, la cohomologie de de Rham du schéma X, *i.e.* $H^\bullet_{DR}(\boldsymbol{X}/V) := H^\bullet(\boldsymbol{X}, \Omega^\bullet_{\boldsymbol{X}/V})$, est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham formelle $H^\bullet_{DR}(\mathscr{X}^\wedge/V) := H^\bullet(X, \Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\wedge/V})$ (*cf.* 1.24) et donc canoniquement à celle du site infinitésimal formel d'échelon nul $H^\bullet_{DR,0}(X^\wedge_{\mathrm{inf}}/V)$. ■

Ainsi toutes les cohomologies de type de de Rham qu'on peut définir pour une variété propre et lisse sur k qui se **relève** sur V en schéma propre et lisse, sont toutes **canoniquement** isomorphes.

Remarque 7.2.5. — Un peu plus généralement et comme nous l'avons signalé dans l'introduction (1.24), la cohomologie de de Rham p-adique formelle $H^\bullet_{DR}(X^\wedge_{\mathrm{inf}}/K)$ d'une variété algébrique X lisse sur k, **non nécessairement propre**, doit être canoniquement isomorphe à la cohomologie cristalline de X sur K et, si $e < p-1$, la cohomologie p-adique $H^\bullet_{DR,0}(X^\wedge_{\mathrm{inf}}/V)$ d'échelon 0 doit être canoniquement isomorphe à la cohomologie cristalline de X sur V. C'est le cas des variétés qui se relèvent en vertu du théorème de comparaison de Berthelot-Ogus [B-O]. Il faut donc construire un morphisme de comparaison et passer du local au global.

8. La cohomologie infinitésimale et la cohomologie de de Rham p-adiques

Soit X/k une variété algébrique lisse sur un corps k. Lorsque la caractéristique du corps de base k est nulle, Grothendieck a montré ([G$_3$]) que la cohomologie $H^\bullet_{\mathrm{inf}}(X/k, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/k})$ du site infinitésimal de X à valeurs dans le faisceau structural est canoniquement isomorphe à sa cohomologie de de Rham $H^\bullet_{DR}(X/k) := H^\bullet(X, \Omega^\bullet_{X/k})$, et fournit donc les bons nombres de Betti en vertu du théorème de comparaison de Grothendieck ([G$_1$]) entre la cohomologie de de Rham algébrique et la cohomologie transcendante, quand k est plongé dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Nous allons voir que **ce n'est pas** le cas de la cohomologie du site infinitésimal p-adique à valeurs dans le faisceau structural.

8.1. La cohomologie infinitésimale †-adique des complexes de la catégorie $D^+(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$

Soient X un schéma lisse sur R_1 et $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ un faisceau d'anneaux sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

PROPOSITION 8.1.1. — *La catégorie* $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-Mod *des* $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$*-modules à gauche sur le site* $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *admet suffisamment d'objets injectifs.*

Démonstration. C'est un cas particulier de l'existence de suffisamment d'injectifs dans la catégorie de modules sur un faisceau d'anneaux sur un site. Mais ici on peut explicitement construire des résolutions injectives à l'aide des foncteurs $P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\mathcal{U}^\dagger}$ exactement comme on a construit des résolutions injectives dans la catégorie des modules spéciaux $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod dans le théorème 6.3.1. ■

Le foncteur covariant $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}})$ de la catégorie $\mathrm{Mod}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$ dans la catégorie $\mathrm{Mod}(R)$ est exact à gauche et se dérive à droite $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}})$ comme foncteur exact de catégorie triangulées, de la catégorie $D^+(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$ vers la catégorie $D^+(R)$.

DÉFINITION 8.1.2. — *Si* $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ *est un complexe appartenant à la catégorie* $D^+(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$*, on définit la cohomologie infinitésimale* †*-adique :*

$$H^\bullet_{\mathrm{inf}}(X/R, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}),$$

de X *à valeurs dans* $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$*, comme la cohomologie du complexe :*

$$\mathrm{Inf}(X/R, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}) := \boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}).$$

THÉORÈME 8.1.3. — *Soit* $\mathscr{X}^\dagger$ *un relèvement plat de* X*. Si* $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ *est un complexe de la catégorie* $D^+(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$*, alors il existe un isomorphisme canonique :*

$$\boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{R[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]}(R_X, R_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}})) \simeq \boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}),$$

et donc des isomorphismes canoniques :

$$\mathrm{Ext}^\bullet_{R[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]}(R_X, R_{\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}})) \simeq H^\bullet_{\mathrm{inf}}(X/R, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'équivalence du théorème 4.2.6. ■

Remarque 8.1.4. — On peut de façon évidente considérer la théorie sur le corps des fractions K d'un anneau V de valuation discrète complet, où se pose la question redoutable du calcul des espaces :

$$H^i_{\mathrm{inf}}(X/K, K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}),\ H^i_{\mathrm{inf}}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}),$$
$$H^i_{\mathrm{inf}}(X/K, \Omega^j_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}),\ H^i_{\mathrm{inf}}(X/K, \Omega^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}),$$

même pour la droite affine ou la droite projective. Nous allons montrer, dans le paragraphe qui suit, des résultats très partiels dans cette direction.

8.2. La cohomologie infinitésimale en degré zéro à valeurs dans le faisceau structural fournit le bon nombre de Betti

Notre première approche a été de montrer, de même qu'en caractéristique nulle, qu'en caractéristique positive la cohomologie $H^\bullet_{\mathrm{inf}}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ du site infinitésimale p-adique de X, supposée affine pour commencer, à valeurs dans le faisceau structural est canoniquement isomorphe à sa cohomologie de de Rham p-adique, ce qui éventuellement établit l'indépendance du relèvement de la cohomologie de de Rham. Pendant longtemps, plusieurs années, nous avons cru que tel était bien le cas, mais nos efforts nous ont conduits à montrer qu'il n'en était rien, de façon non triviale, ce qui soulève des problèmes fort intéressants en liaison avec la cohomologie de groupes et l'algèbre (non)-commutative.

Si $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ est un $K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module, son K-espace des sections globales infinitésimales est par définition le K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}})$, et sa cohomologie infinitésimale est donc :

$$H^\bullet_{\mathrm{inf}}(X/K, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}) := \mathrm{Ext}^\bullet_{K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}).$$

On peut faire le changement de base :

$$K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \to \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},$$

qui est plat et trouver, pour un $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module $\mathcal{M}_{\mathrm{inf}}$, les isomorphismes canoniques :

$$H^\bullet_{\mathrm{inf}}(X/K, \mathcal{M}_{\mathrm{inf}}) \simeq \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{M}_{\mathrm{inf}}).$$

Proposition 8.2.1. — *Si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module spécial, il existe un isomorphisme canonique :*

$$H^0_{DR}(X/K, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \simeq H^0_{\mathrm{inf}}(X/K, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}).$$

Démonstration. Comme $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ est un sous-faisceau d'anneaux du faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$, on a un morphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}).$$

En vertu de 4.2.8, le fait que ce soit un isomorphisme est une question de nature locale pour la topologie de Zariski. Aussi, on peut supposer que X est affine. Soit $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement plat. Il suffit de montrer que le morphisme

canonique :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger})$$

est un isomorphisme. En vertu du théorème 5.0.4, on a morphisme canonique de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}$-algèbres :

$$\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K} := \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}] \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}.$$

Il suffit de montrer que le morphisme canonique :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}} \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$-modules à gauche. La question est encore locale, et on peut supposer que $x_1, \ldots, x_n$ sont des sections locales du faisceau structural dont les différentielles forment une base de l'espace des formes différentielles séparées. Il suffit enfin de montrer en vertu de ([Me$_3$], Prop. 6.2.3) que l'idéal d'augmentation $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ engendre sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ l'idéal $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Mais en vertu du corollaire 5.0.8, les générateurs de l'idéal d'augmentation sont de la forme :

$$g - 1 = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta \neq 0} a_1^{\beta_1} \cdots a_n^{\beta_n} \Delta_1^{\beta_1} \cdots \Delta_n^{\beta_n},$$

pour $a_1, \ldots, a_n$ dans l'idéal engendré par $\mathfrak{m}$. L'idéal sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ engendré par l'idéal d'augmentation contient des éléments de la forme $(1 + P_i)\Delta_i$, qu'on obtient, par exemple, pour $g = (\sum_{0 \leqslant \beta_i \leqslant \infty}((p^2)^{\beta_i})\Delta_i^{\beta_i})$, où P_i appartient à l'idéal engendré par $\mathfrak{m}$. En vertu du théorème ([Me$_3$], Thm. 4.2.1), l'opérateur $1 + P_i$ est inversible et donc Δ_i appartient à l'idéal engendré par l'idéal d'augmentation pour $i = 1, \ldots, n$. En fait, on obtient des opérateurs $1 + P_i$ comme dans l'exemple précédent qui sont de façon évidente inversibles. ■

La cohomologie infinitésimale p-adique d'une variété algébrique lisse sur k fournit le bon nombre de Betti en degré zéro.

8.3. La cohomologie infinitésimale en degré un à valeurs dans le faisceau structural *ne fournit pas* le bon nombre de Betti

THÉORÈME 8.3.1. — *Soit $\mathscr{X}^\dagger$ une relèvement plat d'un schéma affine lisse X muni de sections $x_1, \ldots, x_n$ du faisceau structural telles que leurs différentielles forment une base de l'espace des formes différentielles séparées. Alors, le K-espace $H^1_{\mathrm{inf}}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ est* **non nul**.

Démonstration. En vertu de l'équivalence de catégories 4.2.6, on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \simeq H^1_{\mathrm{inf}}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}).$$

Soit la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{I}_{\mathscr{X}^\dagger} \to \mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to 0\,,$$

où $\mathcal{I}_{\mathscr{X}^\dagger}$ est l'idéal d'augmentation.

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(?, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$, on trouve une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{I}_{\mathscr{X}^\dagger}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}).$$

Il suffit de montrer que le morphisme induit :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{I}_{\mathscr{X}^\dagger}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$$

n'est pas surjectif. Un élément de l'espace figurant à droite est un morphisme de faisceaux, et est défini par ses restrictions sur les ouverts affines qui forment une base de la topologie. Soit U un ouvert affine d'algèbre †-adique $A^\dagger_U := \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$. L'idéal $\Gamma(U, \mathcal{I}_{\mathscr{X}^\dagger})$ est engendré par les éléments $g-1$, où g est un automorphisme de l'algèbre $A^\dagger_U$ qui se réduit à l'identité modulo $\mathfrak{m}$. En vertu du corollaire 5.0.8, il s'agit d'opérateurs différentiels qui admettent des développements de la forme :

$$g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_1^{\beta_1} \cdots a_n^{\beta_n} \Delta_1^{\beta_1} \cdots \Delta_n^{\beta_n},$$

pour $a_1, \ldots, a_n$ dans l'idéal engendré par $\mathfrak{m}$.

Lemme 8.3.2. — *L'opérateur différentiel*

$${}^t g := \sum\nolimits_{\beta \in \mathbb{N}^n} (-1)^{|\beta|} \Delta_1^{\beta_1} \cdots \Delta_n^{\beta_n} a_1^{\beta_1} \cdots a_n^{\beta_n}$$

est égal à ${}^t g(1) g^{-1}$.

Démonstration. La transposition $P \mapsto {}^t P$ est une anti-involution de l'algèbre des opérateurs différentiels ([Me$_3$], Coro. 4.2.2). Si g est un automorphisme de $\Gamma(U, \mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger})$ et si f une fonction de $A^\dagger_U$, on a $gf = g(f)g$ et $f\,{}^t g = {}^t g g(f)$ soit $f\,{}^t g(1) := {}^t g(g(f))$ ou encore ${}^t g(1) g^{-1}(f) = {}^t g(f)$. □

LEMME 8.3.3. — *Si g est un élément du groupe $\Gamma(U, \mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger})$, l'élément :*

$$\mathrm{Log}({}^t g(1)) := \sum_{m=0,\infty} (-1)^m \frac{({}^t g(1) - 1)^{m+1}}{m+1}$$

est un élément bien défini de l'algèbre $A_U^\dagger \otimes_V K$.

Démonstration. En effet, si l'on choisit une présentation de l'algèbre $A_U^\dagger$ comme quotient du complété †-adique d'une algèbre de polynômes, l'élément ${}^t g(1) - 1$ appartient à l'algèbre de Banach $A_{U,\rho}^\dagger$, image de l'algèbre des séries qui convergent dans un domaine $|x| \leqslant \rho$ pour un nombre $\rho > 1$, et sa norme quotient vérifie $|| {}^t g(1) - 1||_\rho < 1$, ce qui entraîne que la série converge dans l'algèbre $A_{U,\rho}^\dagger$. □

LEMME 8.3.4. — *L'application $g \mapsto \delta(g) := \mathrm{Log}({}^t g^{-1}(1))$ est un cocycle de $\Gamma(U, \mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger})$ à valeurs dans $A_U^\dagger \otimes_V K$ qui n'est pas un cobord.*

Démonstration. Il faut vérifier la propriété de cocycle :

$$\delta(g_1 g_2) = \delta(g_1) + g_1 \delta(g_2).$$

Par définition, on a l'égalité :

$$\delta(g_1 g_2) = \mathrm{Log}({}^t(g_1 g_2)^{-1}(1)) = \mathrm{Log}\ {}^t g_1^{-1}(1) + \mathrm{Log}(g_1({}^t g_2^{-1}(1))),$$

car ${}^t g_1^{-1}(1) g_1 = {}^t g_1^{-1}$. Mais comme g_1 est un morphisme de l'algèbre $A_{U,\rho}^\dagger$ vers l'algèbre $A_{U,\rho'}^\dagger$ pour $\rho > 1, \rho' > 1$ assez près de 1, on trouve que $\mathrm{Log}(g_1({}^t g_2^{-1}(1))) = g_1(\mathrm{Log}({}^t g_2^{-1}(1)))$, ce qui montre bien la propriété de cocycle. □

Le cocycle ainsi défini est nul sur les éléments du groupe à coefficients constants, c'est-à-dire les éléments g tels que $g = \sum_\beta a^\beta \Delta_i^{\beta_i}$ où a est un élément de $\mathfrak{m} \subset V$. Cela implique que ce cocycle n'est pas un cobord. En effet, si ce cocycle était un cobord, il existerait un élément f tel que $\delta(g) = (g-1)f$, d'où $\Delta_i(f) = 0, i = 1, \ldots, n$ et donc $\delta(g) = 0$, ce qui n'est pas le cas. D'autre part, l'application δ commute aux restrictions et définit un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{I}_{\mathscr{X}^\dagger}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$ dont l'image dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$ n'est pas nulle. ■

Remarque 8.3.5. — Sous la condition précédente, la cohomologie de groupes $H^1(G_{A^\dagger}, A_U^\dagger \otimes_V K)$ de degré 1 est non nulle.

COROLLAIRE 8.3.6. — *Le lemme de Poincaré pour la cohomologie infinitésimale n'a pas lieu : le $H^1_{\mathrm{inf}}(A_k^n/K, \mathcal{O}_{(A_k^n)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ de l'espace affine $\mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n])$ n'est pas nul.*

Démonstration. En effet, le faisceau des formes différentielles séparées est libre sur l'espace affine. ■

En particulier, la comparaison entre la cohomologie infinitésimale et la cohomologie de de Rham n'a pas lieu.

Corollaire 8.3.7. — *Sous les condition du théorème 8.3.1, si l'espace $H^1_{DR}(X/K)$ est nul, l'extension $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$* **n'est pas plate**.

Démonstration. En effet, si l'extension $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ était plate, il existerait un isomorphisme canonique :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K} \otimes_{\mathcal{A}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}} \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$$

et la cohomologie infinitésimale serait isomorphe à la cohomologie de de Rham p-adique. ■

On rappelle que l'on a l'isomorphisme de changement de base :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathcal{A}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes}} \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}),$$

qui a lieu dans le contexte topologique très général.

En fait pendant longtemps nous avons cru et essayé de montrer que cette extension est plate.

Corollaire 8.3.8. — *Sous les conditions du théorème 8.3.1, si l'espace $H^1_{DR}(X/K)$ est nul, le faisceau :*

$$\mathcal{T}or_1^{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$$

n'est pas nul.

Démonstration. En effet, en vertu de l'isomorphisme précédent, la cohomologie infinitésimale $H^1_{\mathrm{inf}}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ est isomorphe à l'espace :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}} \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}).$$

Mais comme le morphisme $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger/K} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}} \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ est un isomorphisme et que l'espace $H^1_{DR}(X/K)$ est nul, en considérant la suite

longue de cohomologie du triangle construit sur le morphisme de comparaison entre la cohomologie de de Rham p-adique et la cohomologie infinitésimale :

$$DR(X/K) := \boldsymbol{R}\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \to$$
$$\to \operatorname{Inf}(X/K) \simeq \boldsymbol{R}\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathcal{A}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes}} \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}),$$

on trouve que si $\mathcal{T}or_1^{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$ est nul, l'espace :

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}} \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$$

est nul, et le corollaire est conséquence du théorème précédent. ■

En fait, on trouve une injection :

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}} \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \to$$
$$\to \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{T}or_1^{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}), \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}).$$

Remarques 8.3.9. — 1) La non-platitude précédente est due à la non-noethérianité de l'algèbre du groupe. De façon plus précise, supposons que $e < p^h(p-1)$. On a alors un morphisme $\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ d'image $Im(\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$, et on peut montrer que ce morphisme est injectif. Définissons le faisceau d'algèbres

$$\mathcal{B}_{\mathscr{X}^\dagger/V} := (\operatorname{Im}(\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger}) \otimes_V K) \cap \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \subset \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/K}.$$

Par construction, $\operatorname{Im}(\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \otimes_V K \simeq \mathcal{B}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \otimes_V K$. On peut montrer que l'inclusion $\mathcal{B}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \subset \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ induit un isomorphisme modulo $\mathfrak{m}^s$ pour tout $s \geqslant 1$. Cela entraîne que l'algèbre $\mathcal{B}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ *n'est pas noethérienne*. Parce que si elle l'était, l'extension précédente serait plate en vertu du critère de platitude local 2.0.3, et la cohomologie infinitésimale fournirait les bons nombres de Betti.

2) Il n'est par contre pas impossible que les idéaux de type fini au-dessus d'un ouvert affine assez petit de l'algèbre $\mathcal{B}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ soient de présentation finie. Dans ce cas les faisceaux

$$\mathcal{T}or_i^{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$$

pour $i \geqslant 2$, seraient nuls, et l'obstruction au théorème de comparaison entre la cohomologie infinitésimale et la cohomologie de de Rham p-adique se trouverait dans les foncteurs dérivés à droite

du foncteur covariant exact à gauche des morphismes du $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}$-module $\mathcal{T}or_1^{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K})$ à valeurs dans le faisceau structural. En effet, il est difficile de construire des relations selon l'expérience que l'on a de cette algèbre.

3) Le faisceau $\mathcal{T}or_1^{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K})$ est non nul en général. Aussi, il serait intéressant de construire un élément non trivial dans le cas de la droite affine. Nous allons proposer un candidat. Supposons que X est la droite affine sur un corps fini, soit $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[x])$, et soit $(\mathbb{Z}_p[x])^{\dagger}$ son relèvement canonique. Notons θ_p l'automorphisme $x \mapsto x+p$, et θ_{px^2} l'automorphisme $x \mapsto x+px^2$ de l'algèbre $(\mathbb{Z}_p[x])^{\dagger}$. On peut montrer de façon non triviale que le groupe $G(\theta_p, \theta_{px^2})$ engendré par les éléments θ_p, θ_{px^2} est *libre*, de sorte que les éléments $\theta_p - 1$ et $\theta_{px^2} - 1$ n'admettent aucune relation non triviale dans l'algèbre $(\mathbb{Z}_p[x])^{\dagger}[G(\theta_p, \theta_{px^2})]$. Pourtant, l'opérateur $\theta_{px^2} - 1$ appartient à l'idéal engendré par l'opérateur $\theta_p - 1$ dans l'anneau $D^{\dagger}_{(\mathbb{Z}_p[x])^{\dagger}/\mathbb{Q}_p}$, ce qui fournit une relation non triviale dans cet anneau. Il est possible que $\theta_p - 1$ et $\theta_{px^2} - 1$ n'admettent aucune relation non triviale dans l'algèbre $(\mathbb{Z}_p[x])^{\dagger}[G_{(\mathbb{Z}_p[x])^{\dagger}}]$, et la relation précédente fournit un élément non trivial du faisceau $\mathcal{T}or_1^{\mathcal{A}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/K})$, pour $\mathscr{X}^{\dagger}$ le schéma †-adique associé à $(\mathbb{Z}_p[x])^{\dagger}$.

4) Le lecteur notera que la découverte du cocycle 8.3.4 a été une chance inespérée pour le fondement de la théorie de la cohomologie de de Rham p-adique. Il a permis le passage de la cohomologie infinitésimale p-adique à la cohomologie de de Rham p-adique une fois pour toutes.

8.4. Le foncteur de de Rham infinitésimal local

Si $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{N}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ sont deux $\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche, le faisceau :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$$

est un faisceau infinitésimal de $R_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$-modules par la construction 4.3.1, mais dont l'action de $G_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$ est triviale si $\mathcal{N}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ sont **spéciaux**. Nous allons voir que ce phénomène survit en cohomologie. Cela permet de définir le complexe de de Rham infinitésimal local.

DÉFINITION 8.4.1. — *Soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe appartenant à la catégorie $D^+(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}\text{-Mod})$, on définit son complexe de de Rham* **infinitésimal local** *:*

$$dR_{\mathrm{inf}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) := \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

comme foncteur dérivé du foncteur covariant exact à gauche :

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\,.$$

On obtient un foncteur covariant exact de catégories triangulées

$$dR_{\mathrm{inf}}(X/R,-) : \qquad D^+(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}\text{-Mod}) \to D^+(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}).$$

THÉORÈME 8.4.2. — *Soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche* **spéciaux** *borné inférieurement, alors il existe un isomorphisme canonique :*

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

dans la catégorie $D^+(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ une résolution de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux et injectifs et $\mathcal{J}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ une résolution de $\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche injectifs. Alors, le morphisme naturel :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{J}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

représente le morphisme du théorème précédent. Pour montrer que c'est un isomorphisme la question est locale. Soit $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert du site il suffit de montrer que le morphisme induit :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}, \mathcal{I}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}, \mathcal{J}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger})$$

est un quasi-isomorphisme. Mais en vertu de l'équivalence de catégories 6.2.11, le complexe $\mathcal{I}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} := R_{\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est un complexe de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-modules à gauche injectifs et en vertu de l'équivalence de catégories 4.2.6 le complexe $\mathcal{J}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} := R_{\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{J}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est un complexe de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$-modules à gauche injectifs. Mais l'extension $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$ est plate, donc le complexe $\mathcal{J}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ est une résolution par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-modules à gauche injectifs de $\mathcal{I}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ et donc de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, ce qui entraîne que le morphisme de complexes précédent est un quasi-isomorphisme. ∎

Corollaire 8.4.3. — *Soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe appartenant à la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ alors le $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module :*

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

est **trivial** *pour tout $j \geqslant 0$.*

Démonstration. En effet, en vertu du théorème précédent on a un isomorphisme canonique $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

et le module de gauche est trivial. ■

Corollaire 8.4.4. — *Les* **faisceaux de cohomologie** *du complexe de de Rham du site $\Omega^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ sont des $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules triviaux.*

Démonstration. Il suffit de montrer en vertu du corollaire précédent qu'il existe un isomorphisme canonique de la catégorie $D^+(K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$:

$$\Omega^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}).$$

Si $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ est un morphisme du site on a un morphisme de restriction

$$(\sharp)_{r^\dagger} : \qquad r^{-1}\,\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}) \to \mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/K})$$

compatible à la composition ce qui définit le complexe de Spencer sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, noté $\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$.

Lemme 8.4.5. — *Le complexe de Spencer $\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ est une résolution du faisceau structural par des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche localement libres de type fini, en particulier le module $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module à gauche parfait.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait que le complexe de Spencer $\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ est une résolution du faisceau structural en vertu du lemme 6.7.1. □

En vertu du lemme précédent, on a un isomorphisme canonique de $D^+(K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$:

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}), \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}).$$

Mais, par construction, le complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ est canoniquement isomorphe au complexe $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}), \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$. ■

Nous allons maintenant étudier le rapport entre la cohomologie infinitésimale du complexe de de Rham du site et la cohomologie de de Rham †-adique du site.

PROPOSITION 8.4.6. — *Soient $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ deux $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche. Alors, on a l'égalité de R-modules :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) = \mathrm{Hom}_{R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})).$$

Démonstration. Un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est la donnée pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ d'un morphisme $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-linéaire $\varphi_{\mathcal{U}^\dagger} : \mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ tel que pour tout morphisme $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ on ait l'égalité :

$$\varphi_{\mathcal{W}^\dagger} = (\sharp)_{r^\dagger} \circ \varphi_{\mathcal{U}^\dagger|W} \circ (\sharp)^{-1}_{r^\dagger}.$$

Un élément de $\mathrm{Hom}_{R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$ est la donnée pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ de l'image de 1, qui est une section globale du faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}))$, c'est-à-dire d'un morphisme $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-linéaire $\varphi'_{\mathcal{U}^\dagger} : \mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ tel que pour tout morphisme $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ on ait l'égalité :

$$\varphi'_{\mathcal{W}^\dagger} = (\sharp)_{r^\dagger} \circ \varphi'_{\mathcal{U}^\dagger|W} \circ (\sharp)^{-1}_{r^\dagger}.$$

Cela montre bien l'égalité de la proposition. ■

Remarque 8.4.7. — **Attention !** Cette égalité **ne se dérive pas** en un isomorphisme de foncteurs :

$$\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \simeq \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$$

parce que le foncteur $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$ **ne transforme pas** un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module injectif en module acyclique pour le foncteur $? \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, ?)$, voir 8.4.9, et tout le sel de cette théorie est là.

Cependant, ceci nous conduit à faire la conjecture d'annulation suivante.

CONJECTURE 8.4.8. — *Soit $\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module à gauche* **spécial** *et injectif, alors le faisceau de Zariski $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est acyclique pour le foncteur $? \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, ?)$:*

$$\forall j > 0, \quad \mathrm{Ext}^j_{K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})) = 0.$$

La conjecture précédente entraîne l'isomorphisme canonique :

$$\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \simeq \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$$

pour tout complexe spécial $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. En particulier, cette conjecture fournirait éventuellement l'isomorphisme canonique :

$$\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \simeq \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\Omega^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$$

montrant que la cohomologie infinitésimale du complexe de Rham du site infinitésimal $\Omega^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ fournit les bons nombres de Betti p-adiques et donne lieu à la suite spectrale Hodge-de Rham :

$$\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{inf}}(\mathrm{X},\Omega^{\mathrm{j}}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/\mathrm{K}}) \Longrightarrow \mathrm{H}^{\mathrm{i+j}}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/\mathrm{K})$$

dans le contexte de cette théorie, c'est dire l'importance de cette question.

Nous allons indiquer quelques points positifs en direction de la conjecture précédente qui semble assez profonde selon les calculs que nous avons faits pour essayer de démontrer cette annulation.

Remarques 8.4.9. — 1) Dans le cas d'une variété affine X, on peut montrer que la non nullité de $H^1_{\mathrm{inf}}(X/K,\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ entraîne la non nullité de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$. Cela montre qu'un objet injectif de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp})$-Mod n'est pas en général un objet injectif de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-Mod et la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp})$-Mod n'est pas stable par extensions comme sous-catégorie de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-Mod.

2) On peut montrer que pour la droite affine X, l'espace :

$$\mathrm{Ext}^1_{K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(K_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}))$$

est nul, ce qui effectivement montre que le foncteur :

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

ne transforme pas un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche injectif en objet acyclique pour le foncteur $\mathrm{Hom}_{R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}},?)$.

3) Plus généralement, on peut montrer que pour tout ouvert U de la droite affine, l'espace :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{K_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}}&(K_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}))\\ &= \mathrm{Ext}^1_{K_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(K_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}))\end{aligned}$$

fournit le bon nombre de Betti ce qui donne un support crédible à la conjecture 8.4.8.

4) On peut montrer que pour tout ouvert U de la droite affine, on a :

$$H^1_{\mathrm{inf}}(U/K, K_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}) = \mathrm{Ext}^1_{K_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(K_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}, K_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}}) = 0.$$

5) Tout ce qui précède montre tout l'intérêt, du passage de la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-Mod à la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})$-Mod. En fait tout notre problème pendant de longues années venait clairement de là. Mais comme toute idée féconde il faut plusieurs années d'efforts et d'expériences avant de tomber dessus. Nous avons maintenant une idée très claire de la situation et il ne fait aucun doute pour nous que c'est le bon point de vue de la théorie de de Rham p-adique qui nous conduira à la bonne théorie que nous cherchons.

9. La catégorie Mod-$(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$ des Modules à droite spéciaux sur le site infinitésimal

Pour définir le foncteur image directe et le foncteur de dualité pour les modules à gauche spéciaux, il nous faut comprendre la structure des modules à **droite** spéciaux sur le site infinitésimal, qui a en soi-même un grand intérêt.

9.1. La structure de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à droite du fibré des formes différentielles de degré maximum

Rappelons d'abord que si X_s/R_s est un schéma lisse sur R_s, le faisceau des formes différentielles ω_{X_s/R_s} de degré maximum est un $\mathscr{D}_{X_s/R_s}$-module à **droite**. Si $x_1, \ldots, x_n$ est un système de coordonnées locales, cette action à droite est donnée par $(\omega)P := (fdx)P = {}^tP(f)dx$ où ${}^tP := \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\Delta^\alpha_x a_\alpha$ si $P = \sum_\alpha a_\alpha \Delta^\alpha_x$ ([EGA IV$_4$], §16).

Soit $\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ un schéma †-adique lisse sur R et soit $\omega_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ le fibré de rang 1 des formes différentielles séparées de degré maximum.

Définition 9.1.1. — *On définit le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}(\omega_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ comme le sous-faisceau du faisceau des endomorphismes $\mathcal{E}nd_R(\omega_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ dont la réduction modulo I^s est un opérateur différentiel de degré localement borné par une fonction linéaire en s.*

Proposition 9.1.2. — *Si R est un anneau de valuation discrète complet V, il existe un anti-morphisme canonique de faisceaux d'algèbres :*

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}(\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V})$$

qui munit le faisceau $\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ d'une structure de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à droite et qui est un isomorphisme.

Démonstration. Soient P et ω un opérateur différentiel et une forme différentielle séparée de degré maximum sur un ouvert U muni d'un recouvrement par des ouverts U_i au-dessus desquels le faisceau des 1-formes différentielles séparées est trivial. Si $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions sur U_i dont les différentielles forment une base du module des formes différentielles séparées, en vertu du théorème 2.4.2, l'opérateur P admet sur U_i un développement $\sum_\alpha a_\alpha \Delta_x^\alpha$ et en vertu du théorème ([Me$_3$], Coro. 4.2.2), la série ${}^tP := \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \Delta_x^\alpha a_\alpha$ est un opérateur différentiel sur U_i. Si $\omega = f dx_1 \dots dx_n$ on pose :

$$(\omega)P := {}^tP(f) dx_1 \dots dx_n.$$

Cela définit une action à droite qui ne dépend pas des coordonnées parce qu'il est en ainsi modulo $\mathfrak{m}^s$ pour tout $s \geqslant 1$. Cette action se globalise et définit une structure de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à droite sur le faisceau $\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}$. La démonstration du théorème du symbole total 2.4.2 [M-N$_3$] montre localement que les sections du faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}(\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ sont de cette forme là et le morphisme de la proposition est donc un isomorphisme. ■

Un morphisme $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ du site $X^\dagger_{\inf}$ induit par image inverse un morphisme de $\mathscr{H}om_R(r^{-1}\omega_{\mathcal{U}^\dagger/V}, \omega_{\mathcal{W}^\dagger/V})$ par :

$$(\sharp)_{r^\dagger} : \qquad r^*(f d(f_1) \wedge \dots \wedge d(f_n)) := r^* f d(r^* f_1) \wedge \dots \wedge d(r^* f_n)).$$

Théorème 9.1.3. — *Soit $\mathcal{U}^\dagger$ un relèvement d'un ouvert affine, alors l'action géométrique $(\sharp)_g$ d'un élément g du groupe $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}$ sur $\omega_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ se fait à travers l'opérateur différentiel g^{-1} autrement dit :*

$$(\sharp)_g(\omega) = (\omega) g^{-1}$$

où ω est une section du faisceau $\omega_{\mathcal{U}^\dagger/V}$.

Démonstration. La question est locale. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées locales au-dessus d'un ouvert affine d'algèbre $A^\dagger$ et $f(x)dx$ une forme différentielle, il faut montrer que :

$$g(f)dg(x_1)\dots dg(x_n) = {}^t g^{-1}(f)dx = {}^t g^{-1}(1)g(f)dx.$$

En vertu du corollaire 5.0.8, l'application :

$$g \mapsto \delta(g) := (\delta_1(g), \dots, \delta_n(g)), \delta_i(g) := (g-1)(x_i)$$

est une bijection entre le groupe $G_{A^\dagger}$ et $(\mathfrak{m}A^\dagger)^n$.

Lemme 9.1.4. — *Soit g un élément du groupe $G_{A^\dagger}$ alors g est égal au produit $g_n \dots g_1$ d'éléments du groupe tels que $\delta_i(g_j) = 0$ si $i \neq j$.*

Démonstration. L'application :

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \theta_{(a_1,\dots,a_n)} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a^\alpha \Delta^\alpha$$

est l'inverse de l'application δ. Posons $g_1 := (\theta_{(-g^{-1}(\delta_1(g)),0,\dots,0)})^{-1}$ alors $g = gg_1^{-1}g_1$ et $\delta_1(gg_1^{-1}) := \delta_1(g) + g\delta_1(g_1^{-1}) = 0$. On a $\delta_1(gg_1^{-1}) = 0$ et $\delta_i(g_1) = 0$ si $i \neq 1$. De proche en proche on construit la suite $g_1, \dots, g_n$ qui a la propriété du lemme. □

En vertu du lemme, pour démontrer le théorème on peut supposer que $g := g_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} a_i^\alpha \Delta_i^\alpha$, de sorte que $\delta_j(g) = 0$ si $j \neq i$, et $\delta_i(g) = a_i$. Pour simplifier les notations, posons aussi $a := a_i$, et $\Delta := \Delta_i$. La fonction a appartient par définition à l'idéal engendré par $\mathfrak{m}$ et il s'agit d'établir l'égalité :

$${}^t g^{-1}(1) = (1 + \Delta(a)).$$

Mais $g^{-1} = \sum_k (-1)^k (g-1)^k$ et

$${}^t g^{-1} = 1 + \sum_{k>0} (-1)^k ({}^t g - 1)^k = \sum_k (-1)^k \Big(\sum_\alpha (-1)^\alpha \Delta^\alpha a^\alpha \Big)^k,$$

de sorte que l'on est ramené à montrer l'égalité :

$$\sum_{k \geqslant 1} (-1)^k \Big(\sum_{\alpha \geqslant 1} (-1)^\alpha \Delta^\alpha a^\alpha \Big)^k (1) = \Delta(a),$$

qu'il suffit de montrer modulo $\mathfrak{m}^{s+1}$ pour tout $s \geqslant 1$, soit :

$$-\Delta(a) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant s} (-1)^k \Big(\sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant s} (-1)^\alpha \Delta^\alpha a^\alpha \Big)^k (1) \equiv 0.$$

En raisonnant par récurrence sur s, en appliquant l'opérateur différentiel $-\sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant s} (-1)^\alpha \Delta^\alpha a^\alpha$ à la relation modulo $\mathfrak{m}^{s+1}$, on trouve la relation

modulo $\mathfrak{m}^{s+2}$, en tenant compte de l'égalité :

$$-\Big(\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant s}(-1)^\alpha\Delta^\alpha a^\alpha\Big)(\Delta a)=\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant s+1}(-1)^\alpha\Delta^\alpha(a^\alpha)$$

qui résulte de l'identité :

$$\Delta^\alpha(a^\alpha\Delta(a))=\Delta^{\alpha+1}(a^{\alpha+1})$$

puisque l'algèbre $A^\dagger$ se plonge dans l'algèbre $A^\dagger_K$ et qu'on peut intégrer dans cette dernière algèbre. ■

Corollaire 9.1.5. — *Soient $x_1,\dots,x_n$ des coordonnées locales sur un ouvert U affine d'algèbre $A^\dagger$. Alors, l'application $g\mapsto \mathrm{Log}(\det(\Delta_j(g(x_i))_{ij}))$ est un cocycle de $G_{A^\dagger}$ à valeurs dans $A^\dagger_K$, qui n'est pas un cobord.*

Démonstration. En effet, ${}^tg^{-1}(1)=\det(\Delta_j(g(x_i))_{ij})$ en vertu du théorème précédent, et l'application $g\mapsto \mathrm{Log}({}^tg^{-1}(1))$ est un cocycle qui n'est pas un cobord en vertu du lemme 8.3.3. ■

9.2. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V}$ pour une immersion ouverte

À cause de l'isomorphisme de la proposition 9.1.2, nous ne considérons que le cas du couple $(V,\mathfrak{m})$ pour définir le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V}$.

Définition 9.2.1. — *Soit $r^\dagger:\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger$ un morphisme du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. On définit le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V}$ comme le module des morphismes V-linéaires $r^{-1}\omega_{\mathcal{U}^\dagger/V}\to\omega_{\mathcal{W}^\dagger/V}$ dont la réduction modulo $\mathfrak{m}^s$ est un opérateur différentiel construit sur r^*_s d'ordre localement borné par une fonction linéaire en s.*

Proposition 9.2.2. — *Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V}$ ne dépend pas du relèvement r^*, et est un $(r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V},\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V})$-bimodule engendré par toute section globale du faisceau $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}$.*

Démonstration. La démonstration est la même que celle du cas des modules à gauche 6.1.2. ■

9.3. La catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à *droite* spéciaux $\mathrm{Mod}\text{-}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$

En vertu de la proposition précédente, le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/V}$ est défini pour tout couple $(\mathcal{W}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger)$ avec $r : W \hookrightarrow U$. Par construction, on a un plongement canonique $\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger} \hookrightarrow \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/V}$ et donc un morphisme canonique $V[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger}] \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/V}$.

Définition 9.3.1. — *Soit X un V-schéma lisse. Un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à droite* spécial *$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est la donnée, pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, d'un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$-module à droite $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$, et la donnée, pour tout couple d'objets $(\mathcal{W}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger)$ du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, avec $r : W \hookrightarrow U$, d'un morphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}$-modules à droite :*

$$(\diamond) : \qquad r^{-1}\mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/V} \to \mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}.$$

En outre, ces données doivent satisfaire les conditions :

1) *pour un couple $(\mathcal{U}^\dagger|W, \mathcal{U}^\dagger)$, avec $r : W \hookrightarrow U$, on a $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger|W} = \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}|W$ et le morphisme $(\diamond)$ coïncide avec le morphisme canonique,*
2) *pour un triplet $(\mathcal{W}'^\dagger, \mathcal{W}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger)$, avec $r' : W' \hookrightarrow W$ et $r : W \hookrightarrow U$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
r'^{-1}\big(r^{-1}\mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \underset{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/V}\big) \underset{r'^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}'^\dagger/V} \arrow[r] \arrow[d] & r'^{-1}\mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger} \underset{r'^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}'^\dagger/V} \arrow[d] \\
(r \circ r')^{-1}\mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \otimes_{(r\circ r')^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}'^\dagger/V} \arrow[r] & \mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{W}'^\dagger}.
\end{tikzcd}$$

Toutes les propriétés de la catégorie des modules spéciaux à gauche se transposent à la catégorie des modules à droite spéciaux $\mathrm{Mod}\text{-}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$ avec les mêmes arguments. En particulier, les morphismes de restriction $(\diamond)$ sont des isomorphismes et le module $\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ des formes différentielles séparées de degré maximum sur $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à droite spécial en vertu de la proposition 9.1.2.

Cependant, il y a un différence saillante dans l'action du groupe $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$. Considérons le morphisme $\mathrm{Inv} : V[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}] \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ qui envoie un élément g du groupe sur l'opérateur différentiel g^{-1}.

Proposition 9.3.2. — *Supposons que X est lisse sur k, alors pour un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à droite $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ spécial et pour tout relèvement $\mathcal{U}^\dagger$ d'un ouvert affine U, l'action du groupe $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}$ sur $\mathcal{N}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ se fait à travers le morphisme* Inv.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 9.1.3. ■

Corollaire 9.3.3. — *Soient $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à droite spécial et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial. Alors, le produit tensoriel $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un* **faisceau de Zariski** *sur X de V-modules.*

Démonstration. En effet, l'action de groupe $g(n \otimes m) := gn \otimes gm = ng^{-1} \otimes gm = n \otimes g^{-1}gm = n \otimes m$ est triviale, et l'on applique le théorème 6.5.1. ■

10. Le foncteur image inverse dans la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$

Pour un morphisme f de schémas lisses sur k, on peut, bien sûr, définir avec Grothendieck un morphisme de topos entre les topos associés aux sites infinitésimaux †-adiques des schémas. Mais, le paragraphe 8 montre que ce sont des opérations insuffisantes et pathologiques, tout au moins pour la théorie de de Rham.

Aussi, nous allons développer les opérateurs cohomologiques pour les catégories des modules **spéciaux** sur les sites infinitésimaux, et nous allons voir que ce sont les bonnes opérations fournissant à terme la bonne théorie que nous cherchons.

Le lecteur prendra garde tout de suite que les foncteurs cohomologiques que nous définissons **ne se prolongent pas** à la catégorie de tous les modules sur le site. Cela indique que l'on ne pouvait espérer, sans la notion essentielle de **module spécial**, développer les opérations cohomologiques pour la cohomologie de de Rham p-adique, ni obtenir en particulier la fonctorialité de cette cohomologie et l'expression cohomologique p-adique de la fonction Zêta d'une variété algébrique lisse sur un corps fini.

Nous rappelons que l'on suppose le schéma X lisse sur R_1.

10.1. La catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod a suffisamment d'objets plats

Nous allons d'abord montrer que la catégorie des modules spéciaux a suffisamment d'objets plats, ce qui nous permettra de définir le foncteur image inverse.

Lemme 10.1.1. — *Soient $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$-module à gauche plat. Le prolongement $P_{\mathcal{U}^\dagger!}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger})$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial, et plat comme objet de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod.*

Démonstration. Si $\mathcal{W}^\dagger$ est un ouvert, notons $r : U \cap W \hookrightarrow W$, $r' : U \cap W \hookrightarrow U$ les inclusions canoniques. Par définition :

$$P_{\mathcal{U}^\dagger!}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger})(\mathcal{W}^\dagger) := r_!\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger|W\cap U\to\mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r'^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r'^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger}\big).$$

Mais $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger|W\cap U\to\mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r'^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r'^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger|_{U\cap W}/R}$-module à gauche plat, ce qui entraîne que $r_!\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger|W\cap U\to\mathcal{U}^\dagger/R} \otimes_{r'^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r'^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger}\big)$ est aussi un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/R}$-module à gauche plat et donc $P_{\mathcal{U}^\dagger!}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger})$ est plat comme objet de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod. ■

Théorème 10.1.2. — *La catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod a suffisamment d'objets plats.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial. Pour chaque ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ de $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, soit $\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to 0$ une surjection d'un module plat. Alors :

$$P_{\mathcal{U}^\dagger!}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger}) \to P_{\mathcal{U}^\dagger!}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}) \to 0$$

est une surjection d'un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial et plat. Si maintenant $\{\mathcal{U}^\dagger_i, i \in I\}$ est une famille d'ouverts du site tels que $\{U_i, i \in I\}$ est un recouvrement de X, le morphisme somme, composé des surjections :

$$\oplus_i P_{\mathcal{U}^\dagger_i!}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}^\dagger_i}) \twoheadrightarrow \oplus_i P_{\mathcal{U}^\dagger_i!}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger_i}) \twoheadrightarrow \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to 0,$$

est une surjection d'un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial, plat comme objet de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod. ■

On pourra donc dériver à gauche dans la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod le foncteur produit tensoriel, et on note :

$$\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$$

le foncteur dérivé.

Les raisonnements que nous avons faits pour les modules à gauche spéciaux peuvent se faire pour les modules à droite spéciaux et on pourra donc dériver à gauche le foncteur produit tensoriel dans la catégorie des modules à droite spéciaux.

10.2. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/R}$ pour une immersion fermée

Soit $f^\dagger : (Y, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/R}) \to (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ un morphisme de schémas †-adiques sur R. Pour tout $s \geqslant 1$, la réduction modulo I^s est un morphisme de R_s-schémas $Y_s \to X_s$. Le module de transfert $\mathscr{D}_{Y_s \to X_s/R_s}$ est défini comme l'image inverse :

$$\mathscr{D}_{Y_s \to X_s/R_s} := \mathcal{O}_{Y_s/R_s} \otimes_{f_s^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}} f_s^{-1}\mathscr{D}_{X_s/R_s}.$$

Il s'agit du faisceau des opérateurs différentiels R_s-linéaires de $f_s^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}$ dans $\mathcal{O}_{Y_s/R_s}$, noté $\mathscr{D}iff_{R_s}(f_s^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}, \mathcal{O}_{Y_s/R_s})$ dans ([EGA IV$_4$], §16). C'est de façon naturelle un sous-bimodule filtré du $(\mathscr{D}_{Y_s/R_s}, f_s^{-1}\mathscr{D}_{X_s/R_s})$-bimodule :

$$\mathscr{H}om_{R_s}(f_s^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}, \mathcal{O}_{Y_s/R_s}).$$

Définition 10.2.1. — *Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/R}$, ,construit sur le morphisme $f^\dagger$, est le sous-bimodule du $(\mathscr{D}_{\mathscr{Y}^\dagger/R}, f^{-1}\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$-bimodule $\mathscr{H}om_R(f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/R})$ des R-homomorphismes P dont la réduction modulo I^s est un élément de $\mathscr{D}_{Y_s \to X_s/R_s}$ de degré localement borné par une fonction linéaire en s.*

Nous démontrons d'abord l'indépendance locale du module de transfert relativement aux relèvements du morphisme.

Théorème 10.2.2. — *Soit $i : Y \to X$ une immersion* fermée *de schémas affines lisses sur R_1. Soient $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats sur R, et soit $i^\dagger : \mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger$ un relèvement de l'immersion. Alors, le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/R}$* **ne dépend pas** *du relèvement $i^\dagger$ choisi.*

Démonstration. Une section P du module de transfert construit sur $i^\dagger$ est, par construction, une section du faisceau $\mathscr{H}om_R(i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/R})$. Soit $i_1^\dagger$ un autre relèvement de i. Comme le relèvement $\mathscr{X}^\dagger$ est plat, il existe un morphisme d'algèbres g de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ tel que l'on a la factorisation $i^* = i_1^* \circ g$. En vertu du théorème 5.0.4, g est un opérateur différentiel et sa réduction g_s modulo $\mathfrak{m}^s$ est un opérateur différentiel d'ordre $s-1$. Pour tout $s \geqslant 1$, la réduction P_s modulo $\mathfrak{m}^s$ est par définition un opérateur différentiel de $\mathscr{D}_{Y_s \to X_s/R_s} := \mathcal{O}_{Y_s/R_s} \otimes_{f_s^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}} f_s^{-1}\mathscr{D}_{X_s/R_s}$, d'ordre localement borné par une fonction linéaire en s. Mais le module $\mathcal{O}_{Y_s/R_s} \otimes_{f_s^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}} f_s^{-1}\mathscr{D}_{X_s/R_s}$ est un $\mathscr{D}_{X_s/R_s}$-module à droite engendré par i_s^*. Autrement dit, P admet la factorisation :

$$i^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s} \xrightarrow{i^{-1}Q_s} i^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s} \xrightarrow{i_s^*} \mathcal{O}_{Y_s/R_s},$$

où Q_s est un opérateur différentiel de $\mathscr{D}_{X_s/R_s}$ d'ordre borné par une fonction linéaire en s. Mais $i_s^* = i_{1s}^* \circ g_s$ et P_s admet aussi la factorisation $P_s = i_{1s}^* \circ g_s \circ Q_s$. Comme $g_s \circ Q_s$ est un opérateur différentiel d'ordre localement borné par une fonction linéaire en s, cela montre que P est une section du module de transfert construit sur $i_1^\dagger$. ■

Théorème 10.2.3. — *Sous les conditions précédentes, le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$ est un $i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à droite engendré par un relèvement i^*. En particulier, c'est un $i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module de type fini.*

Démonstration. Il faut montrer que le morphisme :

$$i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$$

défini par la composition avec i^* est **surjectif**. La question est donc locale. Soit U un ouvert affine de X d'algèbre $A^\dagger$ munie d'un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ tel que les différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$ forment une base du module des formes différentielles séparées, soit $B^\dagger$ l'algèbre de l'ouvert affine $U \cap Y$ de Y, et soit $i^* : A^\dagger \to B^\dagger$ le morphisme surjectif d'algèbres induit par $i^\dagger$. Pour $P : A^\dagger \to B^\dagger$, section globale au-dessus de U du faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$, définissons les éléments b_α de l'algèbre $B^\dagger$ par la formule :

$$b_\alpha := \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} i^*((-x)^\beta) P(x^{\alpha-\beta}).$$

Pour tout élément a de l'algèbre $A^\dagger$, considérons la série

$$\phi(a) := \sum_\alpha b_\alpha i^*(\Delta_x^\alpha(a)),$$

qui converge formellement. Par hypothèse, $P(a)$ est égal à $\phi(a)$ modulo $\mathfrak{m}^s$ pout tout $s \geqslant 1$ et donc :

$$P(a) = \phi(a).$$

Soit $(V[Y_1, \ldots, Y_m])^\dagger \to A^\dagger$ une présentation de l'algèbre $A^\dagger$. En composant avec le morphisme d'algèbres i^*, on trouve une présentation de l'algèbre $B^\dagger$. En vertu du théorème de ([M-N$_3$], Thm. 2.4.8), les topologies quotient sur les espaces $A^\dagger_K, B^\dagger_K$ sont **séparées**, ce sont donc des topologies $\mathcal{LF}$, limite inductive dénombrable séparée d'espaces métriques complets. Le théorème du graphe fermé de Grothendieck pour les espaces vectoriels topologiques de type limite inductive dénombrable d'espaces métriques complets sur un corps valué complet (cf. [M-N$_3$], Thm. 3.0.8) montre que le morphisme induit :

$$A^\dagger_K \to B^\dagger_K$$

est **continu** pour les topologies de type $\mathcal{LF}$ et le théorème de factorisation de Grothendieck pour les espaces vectoriels topologiques de type limite inductive dénombrable d'espaces métriques complets sur un corps valué complet (cf. [M-N$_3$], Thm. 3.0.9) montre que les fonctions b_α appartiennent à **un cran** $B^\dagger_\rho$, image par la présentation induite du module $(V\langle Y_1, \ldots, Y_m\rangle)_\rho$ des séries qui convergent dans un domaine $|Y_i| \leqslant \rho$, avec $\rho > 1$, pour une valeur absolue $|-|$ de K. Considérons la division dans l'algèbre $(V[Y_1, \ldots, Y_m])^\dagger$ par une base de division J ([M-N$_3$], Thm. 2.3.4) de l'idéal N, noyau du morphisme d'algèbres $(V[Y_1, \ldots, Y_m])^\dagger \to B^\dagger$. La rétraction reste de la division $\mathrm{Retr}_J : B^\dagger_\rho \to (V\langle Y_1, \ldots, Y_m\rangle)_{\rho'}$, avec $\rho' \leqslant \rho$, permet de définir les éléments a_α de l'algèbre $A^\dagger_{\rho'}$ comme les images des $\mathrm{Retr}_J(b_\alpha)$ par la présentation $(V\langle Y_1, \ldots, Y_m\rangle)_{\rho'} \to A^\dagger_{\rho'}$. Le raisonnement, dans l'article [M-N$_3$], de la démonstration du théorème du symbole total 2.4.2 montre qu'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que :

$$||b_\alpha||_\rho \leqslant C_1 \lambda^{|\alpha|},$$

pour un nombre $\rho > 1$ assez près de 1, où $|| - ||_\rho$ est la norme quotient de la norme en ρ de l'algèbre $(V\langle Y_1, \ldots, Y_m\rangle)_\rho$. En vertu de la majoration du reste du corollaire ([M-N$_3$], Coro. 2.3.5), il existe une constante $C_2 > 0$

telle que :

$$||\operatorname{Retr}_J(b_\alpha)||_\rho \leqslant C_2\lambda^{|\alpha|}\,,$$

pour $\rho > 1$ assez près de 1 et donc :

$$||a_\alpha||_\rho \leqslant C_2\lambda^{|\alpha|}\,,$$

pour $\rho > 1$ assez près de 1. En vertu du théorème 2.4.2, la série :

$$\tilde{P}(x,\Delta) := \sum_\alpha a_\alpha \Delta_x^\alpha$$

opère sur l'algèbre $A^\dagger$ et définit un opérateur différentiel. Autrement dit, l'opérateur :

$$P : A^\dagger \to B^\dagger$$

admet une factorisation :

$$A^\dagger \xrightarrow{\tilde{P}} A^\dagger \xrightarrow{i^*} B^\dagger\,,$$

où $\tilde{P}$ est un opérateur différentiel de $A^\dagger$. D'où le théorème 10.2.3. ■

La même démonstration montre :

Théorème 10.2.4. — *Soit un entier $h \geqslant 0$. Sous les conditions précédentes, le module de transfert $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$ est un $i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à droite engendré par un relèvement i^*. En particulier, c'est un $i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module de type fini.*

Remarque 10.2.5. — Dans le cas d'un anneau de valuation discrète complet, la factorisation de P_s du théorème 10.2.2 est localement uniforme en s et provient d'une factorisation de P. En fait, le théorème précédent qui est un théorème de finitude algébro-topologique remarquable, a des conséquences importantes pour le calcul de l'image inverse, en particulier pour les fibrés p-adiques 10.5.9. Par ailleurs, cette propriété de finitude jouera un rôle essentiel dans la suite de cet article.

Lemme 10.2.6. — *Soit $i : Y \to X$ une immersion* fermée *de schémas affines lisses sur k. Soient $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats sur V, et $i^\dagger$ un relèvement de i d'idéal d'augmentation $\mathcal{I}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$. Alors, on a une suite exacte de $i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-modules à droite :*

$$0 \to \mathcal{I}_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V} \xrightarrow{i^*} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V} \to 0\,,$$

où le dernier morphisme est défini par le générateur i^*.

Démonstration. La question est locale. Soit U un ouvert affine de X d'algèbre †-adique $A^\dagger$, munie d'éléments $z_1, \ldots, z_l$ tels que leur différentielles forment une base du module des formes différentielles séparées. L'ouvert $W = U \cap Y$ est un ouvert affine d'algèbre $B^\dagger$. Si P est un opérateur différentiel au-dessus de U, il admet en vertu du théorème 2.4.2 un développement $P = \sum_\alpha a_\alpha \Delta_z^\alpha$, où a_α est une suite d'éléments de $A^\dagger$. Si $i^* \circ P$ est nul dans $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V}$, nécessairement $i^*(a_\alpha)$ est nul dans $B^\dagger$ pour tout α. Soit $(V[Y_1, \ldots, Y_m])^\dagger \to A^\dagger$ une présentation de l'algèbre $A^\dagger$, et soit $(V[Y_1, \ldots, Y_m])^\dagger \to B^\dagger$ la présentation de $B^\dagger$ induite, dont on notera N le noyau. En vertu du théorème 2.4.2, les fonctions a_α se relèvent en de fonctions $\tilde{a}_\alpha$ définies dans un même domaine. On peut effectuer la division des éléments $\tilde{a}_\alpha$ par une base de division de l'idéal N ([M-N$_3$], Thm. 2.3.4). Le reste de cette division est nul, et le théorème de continuité de la division ([M-N$_3$], Thm. 2.3.4) montre que les quotients de cette division sont définis dans un même domaine, dont les normes admettent de majorations par des constantes du type $C\lambda^{|\alpha|}$. Cela montre que le noyau du morphisme défini par i^* est l'idéal à droite de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ engendré par $\mathcal{I}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$. Pour terminer, le morphisme naturel $\mathcal{I}_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathcal{I}_{\mathscr{X}^\dagger/V}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ est un isomorphisme parce que l'extension $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ est plate ([Me$_3$], Coro. 6.1.2). D'où le lemme. ■

Remarque 10.2.7. — Le lemme précédent dit que le morphisme défini par $i^\dagger$ induit un isomorphisme :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V} \xrightarrow{i^*} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V} \to 0$$

de $i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-modules à droite. Autrement dit, de façon tout à fait remarquable, si on oublie un instant la structure de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-module à gauche, l'image inverse pour une immersion fermée coïncide avec l'image inverse en tant que $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module, ce qui est très utile, en particulier, pour étudier l'image inverse des fibrés p-adiques.

Définition 10.2.8. — *Si $i : Y \to X$ est une immersion fermée de schémas lisses sur R_1 admettant des relèvements $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ plats sur R, on définit le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/R}$ comme le sous-bimodule du $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/R}, i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R})$-bimodule $\mathscr{H}om_R(i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/R})$ des homomorphismes qui sont localement des homomorphismes de transfert pour un relèvement local de i.*

En vertu du théorème 5.0.6, le module de transfert $R[\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}]$ est alors un sous R-module du module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/R}$.

Corollaire 10.2.9. — *Sous les conditions de la définition précédente, le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$ est un $i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à droite engendré localement par un relèvement local de i.*

On définit alors le foncteur image inverse.

Définition 10.2.10. — *Si $i : Y \to X$ est une immersion fermée de schémas lisses sur R_1 admettant des relèvements $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ plats sur R, on définit le foncteur image inverse :*

$$i^{*,0}_{\mathrm{diff}} : \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}\text{-Mod} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/R}\text{-Mod}, \qquad \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} \mapsto \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R} \underset{i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}}{\otimes} i^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$$

et le foncteur image inverse :

$$i^*_{\mathrm{diff}} := \boldsymbol{L}i^{*,0}_{\mathrm{diff}} : \begin{cases} D^-((\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}))\text{-Mod} & \longrightarrow \quad D^-((\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/R}\text{-Mod})), \\ \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} & \longmapsto \quad \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R} \underset{i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}}{\overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}} i^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}, \end{cases}$$

$$i^*_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} := \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}} i^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}.$$

Ainsi, pour éviter toute confusion, le foncteur $i^{*,0}_{\mathrm{diff}}$ opère sur la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-modules alors que le foncteur i^*_{diff} opère sur la catégorie des complexes de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-modules. Le foncteur image inverse i^*_{diff} est, par construction, un foncteur exact de catégories triangulées, de la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}\text{-Mod}))$ vers la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/R})\text{-Mod})$, et en vertu de l'équivalence fondamentale 6.2.11, il définit aussi un foncteur exact de catégories triangulées de la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ vers la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$.

10.3. Le foncteur image inverse dans la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ pour une immersion

Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas lisses sur R_1. On se propose de définir le foncteur image inverse :

$$i^*_{\mathrm{diff}} : D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) \to D^-((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}).$$

Soit $\{X_j, j \in J\}$ un recouvrement de X par des ouverts affines et soit $\{Y_j, j \in J\}$ le recouvrement par des ouverts affines de Y induit sur Y. Soient $\mathscr{X}^\dagger_j$ et $\mathscr{Y}^\dagger_j$ des relèvements plats de X_j et de Y_j pour $j \in J$, et soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche **spécial** et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}_j}$ sa restriction à $\mathscr{X}_j$.

L'inclusion $i_j : Y_j \to X_j$ définit le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}_j^\dagger \to \mathscr{X}_j^\dagger/R}$ et on pose :

$$\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}_j^\dagger} := \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}_j^\dagger \to \mathscr{X}_j^\dagger/R} \otimes_{i_j^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}_j^\dagger/R}} i_j^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}_j^\dagger},$$

qui est alors un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}_j^\dagger/R}$-module à gauche.

Proposition 10.3.1. — *Les modules $\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}_j^\dagger}$ admettent des isomorphismes canoniques de recollement qui satisfont aux conditions de cocycle et définissent un $\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ qui ne dépend pas du recouvrement $\{X_j, \mathscr{X}_j^\dagger, j \in J\}$ et qui dépend fonctoriellement de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.*

Démonstration. En vertu de l'équivalence de catégories fondamentale 6.2.11, les prolongements $P_{\mathscr{Y}_j^\dagger}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}_j})$ des modules $\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}_j}$ définissent des modules spéciaux sur les sites de Y_j. Ces modules sont munis d'isomorphismes de recollement sur les intersections qui proviennent des isomorphismes de recollement des restriction de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ qui satisfont aux conditions de cocycles et définissent un module donné localement. En vertu du théorème de recollement 4.2.8, on obtient un module spécial $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sur le site de Y qui dépend fonctoriellement de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Il est facile de voir que $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ ne dépend pas du recouvrement $\{\mathscr{X}_j, j \in J\}$. ■

Remarque 10.3.2. — Les modules $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}_j^\dagger \to \mathscr{X}_j^\dagger/R}$ ne sont pas canoniquement isomorphes et **on ne peut pas** induire le faisceau **non spécial** $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ comme $\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche.

Définition 10.3.3. — 1) *Si $i : Y \to X$ est une immersion fermée, on définit l'image inverse :*

$$i^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} := \mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}.$$

2) *Si i est une immersion ouverte, on définit le foncteur image inverse $i^{*,0}_{\mathrm{diff}}$ comme le foncteur de restriction naturel qui est un foncteur exact.*

3) *Si i est une immersion localement fermée, on définit le foncteur image inverse $i^{*,0}_{\mathrm{diff}}$ par factorisation en une immersion fermée suivie d'une immersion ouverte. Ce foncteur ne dépend pas de la factorisation choisie.*

Dans le cas d'une immersion, on obtient un foncteur exact à droite :

$$i^{*,0}_{\mathrm{diff}} : \qquad (\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod} \to (\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}.$$

Comme la catégorie des modules spéciaux a suffisamment d'objets plats, ce foncteur se dérive à gauche en un foncteur exact de catégories triangulées :

$$i^{*}_{\mathrm{diff}} := \boldsymbol{L}i^{*,0}_{\mathrm{diff}} : \qquad D^{-}((\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) \to D^{-}((\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}).$$

Proposition 10.3.4. — *Supposons que R est un anneau de valuation discrète complet V, et soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas lisses sur le corps résiduel k. Alors, la dimension cohomologique du foncteur image inverse i^{*}_{diff} est localement bornée par* $\mathrm{codim}_X Y$.

Démonstration. La question est locale. On peut supposer que X est affine. Soient $\mathscr{Y}^{\dagger}$ et $\mathscr{X}^{\dagger}$ des relèvements plats sur V. Il suffit de montrer que le module de transfert $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\to\mathscr{X}^{\dagger}/V}$ admet une résolution par des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}$-modules à droite localement libres de type fini de longueur bornée par $\mathrm{codim}_X Y$. Si $i^{\dagger}$ est un relèvement local de l'immersion, on a en vertu du lemme 10.2.6 un isomorphisme canonique de $i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}$-modules à droite :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^{\dagger}/V} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}} i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V} \xrightarrow{i^{*}} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\to\mathscr{X}^{\dagger}/V} \to 0.$$

En vertu de l'équivalence entre la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}$-modules cohérents et la catégorie $\Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V})$-modules de type fini, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^{\dagger}/V}$ admet une résolution finie par des $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}$-modules localement libres de rang fini $\mathcal{L}^{\bullet}$, de longueur bornée par $\mathrm{codim}_X Y$. Le complexe :

$$\mathcal{L}^{\bullet} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}} i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}$$

est alors une résolution de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\to\mathscr{X}^{\dagger}/V}$ par des $i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}$-modules à droite localement libres de type fini. ■

10.4. Le foncteur image inverse dans la catégorie $D^{-}((\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ pour une projection

Soit $p : Y \times_{R_1} X \to X$ la projection de schémas lisses sur R_1 sur le second facteur. On se propose de définir le foncteur image inverse :

$$p^{*}_{\mathrm{diff}} : D^{-}((\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) \to D^{-}((\mathscr{D}^{\dagger}_{(Y\times_{R_1}X)^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}).$$

Si Y et X admettent des relèvements plats $\mathscr{Y}^{\dagger}$ et $\mathscr{X}^{\dagger}$, leur produit fibré $\mathscr{Y}^{\dagger} \times_R \mathscr{X}^{\dagger}$ existe et est un relèvement plat du produit $Y \times_{R_1} X$,

muni d'une projection sur $\mathscr{X}^\dagger$ ([A-M$_2$]). On définit le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_R\mathscr{X}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R}$ à l'aide de cette projection.

Si Y et X sont affines, on peut considérer des relèvements plats $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ et si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial il provient canoniquement d'un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$-module $\mathcal{M}_{\mathscr{X}^\dagger}$. On définit alors :

$$\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_R\mathscr{X}^\dagger} := \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_R\mathscr{X}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R}\otimes_{p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}} p^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}\,,$$

qui est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_R\mathscr{X}^\dagger}$-module et qui donne naissance à un $\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module spécial qui est, par définition, l'image inverse $p^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Dans le cas général, soient $\{Y_j, j\in J\}$ et $\{X_k, k\in I\}$ des recouvrements de Y et de X par des ouverts affines, soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module spécial, $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf},k}$ sa restriction à X_k et $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf},j,k}$ son image inverse par la projection $Y_j\times_{R_1}X_k\to X_k$. Les modules $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf},j,k}$, avec $j,k\in J\times I$, admettent des isomorphismes de recollement qui satisfont à la condition de cocycle. En vertu du théorème 6.2.20, ils définissent un $\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_{R_1}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module spécial $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ qui ne dépend pas des recouvrements et dépend fonctoriellement de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. C'est $p^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, par définition.

Définition 10.4.1. — *Sous les conditions ci-dessus, on définit l'image inverse par :*

$$p^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} := \mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}.$$

On obtient ainsi un foncteur exact à droite

$$p^{*,0}_{\mathrm{diff}}:\qquad (\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod}\to(\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod},$$

qui se dérive en un foncteur exact de catégories triangulées :

$$p^*_{\mathrm{diff}} := \boldsymbol{L}p^{*,0}_{\mathrm{diff}}:\ D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod})\to D^-((\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod}).$$

Théorème 10.4.2. — *Supposons que R est un anneau de valuation discrète complet V. Soit $p: Y\times_k X\to X$ la projection de schémas affines lisses sur le corps résiduel k, et soient $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats sur V. Alors, le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$ est un $p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$-module* **plat**.

Démonstration. La question est locale sur $Y\times_k X$. Soit U un ouvert affine voisinage d'un point de $Y\times_k X$, d'algèbre $B^\dagger$. Nous pouvons supposer que la projection de U est contenue dans un ouvert affine W d'algèbre $A^\dagger$ au-dessus duquel il existe des éléments $x_1,\dots,x_n$ de $A^\dagger$ dont les différentielles forment une base du module des formes différentielles séparées. Notons

u le morphisme d'algèbres $A^\dagger \to B^\dagger$ induit par la projection. Soit P un opérateur différentiel de $A^\dagger \to B^\dagger$, nous posons :

$$b_\alpha := \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} u((-x)^\beta)P(x^{\alpha-\beta}).$$

Les éléments b_α sont des éléments bien définis de l'algèbre $B^\dagger$. Le raisonnement de la démonstration du théorème 2.4.2 montre que la série :

$$\sum_\alpha b_\alpha \xi^\alpha$$

est un élément de l'algèbre $(B^\dagger[\xi_1,\ldots,\xi_n])^\dagger$. Quitte à diminuer l'ouvert U, on peut supposer que les différentielles des fonctions $x_1,\ldots,x_n$ font partie d'une base du module des formes différentielles séparées au-dessus de U, de sorte que les opérateurs Δ_x^α opèrent sur les éléments de l'algèbre $B^\dagger$ et l'opérateur $\sum_\alpha b_\alpha \Delta_x^\alpha$ opère, en vertu du théorème 2.4.2, sur l'algèbre $B^\dagger$. On trouve, sous les conditions précédentes, que le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V}$, défini en 10.2.1, est un sous-faisceau d'anneaux du faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ et on peut considérer la filtration $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V}$ par les échelons qui est en fait la filtration induite par la filtration de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$. La démonstration du théorème 7.1.6 dans [Me$_3$] montre que l'anneau $\Gamma(U,\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V})$ est noethérien.

Soit N un idéal à gauche de type fini de $\Gamma(W,\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V})$. Il faut montrer que le morphisme :

$$\Gamma(U,\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V}) \otimes_{\Gamma(W,\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V})} N \to \Gamma(U,\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V})$$

est injectif. Soient $P_1,\ldots,P_l$ un système de générateurs de N et $\sum_i Q_iP_i = 0$ une relation dans $\Gamma(U,\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V})$. Pour $h\geqslant 0$ assez grand, c'est une relation dans $\Gamma(U,\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V})$ et la platitude de l'extension $\Gamma(W,\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger/V}) \to \Gamma(U,\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V})$ entraîne la platitude de l'extension $\Gamma(W,\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}) \to \Gamma(U,\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V})$. La réduction modulo $\mathfrak{m}^s$ de l'extension $\Gamma(W,\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger/V}) \to \Gamma(U,\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V})$ est plate, parce que le morphisme $U\to W$ est lisse. On est dans les conditions d'application du critère local de platitude 2.0.3 : les anneaux d'opérateurs différentiels $\Gamma(W,\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger/V})$ et $\Gamma(U,\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V})$ sont noethériens et l'idéal $\mathfrak{m}$ est contenu dans le radical de l'anneau $\Gamma(U,\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathcal{W}^\dagger/V})$ ([Me$_3$], Thm. 4.1.1). ■

Corollaire 10.4.3. — *Supposons que R est un anneau de valuation discrète complet V. Le foncteur image inverse*

$$p^{*,0}_{\mathrm{diff}} : \qquad (\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod} \to (\mathscr{D}^{\dagger}_{(Y\times X)^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}$$

est **exact**.

Démonstration. En effet, la question étant locale, c'est donc une conséquence du théorème précédent. ■

10.5. Le foncteur image inverse dans le cas général

Un morphisme de schémas lisses sur k se factorise en une immersion suivie d'une projection. On peut définir le morphisme image inverse par composition, mais il nous faut montrer que l'image inverse par une projection transforme un module plat en un module acyclique pour le foncteur image inverse par l'immersion, pour que le foncteur image inverse soit indépendant de la factorisation. Nous notons, pour simplifier, $Z := Y \times_k X$ et $\mathscr{Z}^{\dagger}$ le produit fibré $\mathscr{Y}^{\dagger} \times_V \mathscr{X}^{\dagger}$. Si $f : Y \to X$ est un morphisme, notons $f := p \circ i_f$, où i_f est l'immersion graphe et où p est la projection de $Y \times_k X$ sur X.

Théorème 10.5.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas* affines *lisses sur le corps résiduel k et soient $\mathscr{Y}^{\dagger}$ et $\mathscr{X}^{\dagger}$ des relèvements plats. Alors, le morphisme canonique :*

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\to\mathscr{Z}^{\dagger}/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{i_f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z}^{\dagger}/V}}{\otimes}} i_f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z}^{\dagger}\to\mathscr{X}^{\dagger}/V} \longrightarrow \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\to\mathscr{Z}^{\dagger}/V} \underset{i_f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z}^{\dagger}/V}}{\otimes} i_f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z}^{\dagger}\to\mathscr{X}^{\dagger}/V}$$

est un isomorphisme. De plus, il existe un isomorphisme :

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\to\mathscr{Z}^{\dagger}/V} \otimes_{i_f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z}^{\dagger}/V}} i_f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z}^{\dagger}\to\mathscr{X}^{\dagger}/V} \simeq \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\to\mathscr{X}^{\dagger}/V}$$

pour tout relèvement de f sur lequel est construit le module de transfert $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\to\mathscr{X}^{\dagger}/V}$.

Démonstration. Soit $i_f^* : i_f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Z}^{\dagger}/V} \to \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^{\dagger}/V}$ un relèvement du morphisme graphe de f. En vertu du lemme 10.2.6, le relèvement i_f^* définit un isomorphisme de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z}^{\dagger}/V}$-modules à droite :

$$\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^{\dagger}/V} \otimes_{i_f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Z}^{\dagger}/V}} i_f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z}^{\dagger}/V} \simeq \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\to\mathscr{Z}^{\dagger}/V}.$$

En vertu de l'équivalence entre la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathscr{Z}^{\dagger}/V}$-modules cohérents et la catégorie $\Gamma(Z, \mathcal{O}_{\mathscr{Z}^{\dagger}/V})$-modules de type fini, le faisceau

$\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$ admet une résolution finie par des $i_f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Z}^\dagger/V}$-modules localement libres de rang fini $\mathcal{L}^\bullet$, et le complexe :

$$\mathcal{L}^\bullet \otimes_{i_f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Z}^\dagger/V}} i_f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger/V}$$

est une résolution de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{Z}^\dagger/V}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger/V}$-modules à droite localement libres de type fini, en vertu de la platitude évoquée dans la remarque 7.1.7. Le complexe $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{Z}^\dagger/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{i_f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger/V}} i_f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$ se représente donc par le complexe :

$$\mathcal{L}^\bullet \otimes_{i_f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Z}^\dagger/V}} i_f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V},$$

et il s'agit de montrer que ce complexe n'a de la cohomologie qu'au dernier cran. La question est locale sur $Y \times X$ et l'on peut remplacer le produit par un ouvert affine U où le module des formes différentielles séparées est libre. Dans ce cas, nous avons vu que $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$ est un faisceau d'anneaux d'opérateurs différentiels **relatifs** filtré par $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$, et on est ramené à montrer la même assertion pour ce dernier faisceau. On obtient un complexe de $i_f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$-modules **à droite**, dont les termes sont sans torsion sur $\mathfrak{m}$. Le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$ étant acyclique au-dessus d'un ouvert affine assez petit ([Me$_3$], Thm. 3.2.3), on est réduit à la même assertion pour les sections globales. Mais la cohomologie est de type fini, parce que l'anneau des sections globales du faisceau $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$ au-dessus d'un ouvert affine assez petit est noethérien en vertu du théorème 7.1.6. Il suffit, en vertu du lemme de Nakayama, de montrer la même assertion après réduction modulo $\mathfrak{m}$ qui est contenu dans le radical de cet anneau ([Me$_3$], Thm. 4.1.1). Mais, modulo $\mathfrak{m}$, ce complexe se réduit à la restriction à $i_f^{-1}U$ du faisceau $\mathcal{O}_{Y/k} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{X/k}} f^{-1}(\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}/\mathfrak{m}) \simeq \mathcal{O}_{Y/k} \otimes_{i_f^{-1}\mathcal{O}_{Z/k}} i_f^{-1}(\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{Z}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}/\mathfrak{m})$. D'où la première partie du théorème 10.5.1.

Puisqu'on est dans le cas affine, soit $f^\dagger$ un relèvement de f, alors le morphisme :

$$(*) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{Z}^\dagger/V} \otimes_{i_f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger/V}} i_f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$$

provient du morphisme composé :

$$f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V} = i_f^{-1}p^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to i_f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Z}^\dagger/V} \to \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V},$$

où p est la projection $Y \times_k X \to X$. Pour montrer que c'est un isomorphisme la question est locale sur Y. On peut supposer que le fibré des formes différentielles séparées sur X est trivial et alors une section globale P de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$ se représente par une série $\sum_\alpha b_\alpha \Delta_x^\alpha$, où (b_α) est une

suite d'éléments de $\Gamma(Y, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$. De plus, le théorème de continuité de la division ([M-N$_3$], Thm. 2.3.4) montre que la suite (b_α) se relève en une suite d'éléments (a_α) de $\Gamma(Y \times_k X, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/V})$ tels que la série $\sum_\alpha a_\alpha \Delta_x^\alpha$ est un opérateur $\tilde{P}$ de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$. Autrement dit, si on note $i_f^\dagger$ le morphisme graphe de $f^\dagger$, l'opérateur P est l'image de $i_f^* \otimes \tilde{P}$ et le morphisme $(*)$ est surjectif. D'autre part, $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{Z}^\dagger/V}$ est un $i_f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \times \mathscr{X}^\dagger/V}$-module à droite engendré par i_f^* en vertu du théorème 10.2.2, mais si $\tilde{P}$ est un opérateur de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$ et si l'image par $(*)$ de $u \otimes \tilde{P}$ est nulle, nous avons vu, en vertu du théorème de division, que $\tilde{P}$ appartient à l'idéal à droite engendré par l'idéal d'augmentation de i_f^* et donc $u \otimes \tilde{P}$ est nul. Le morphisme $(*)$ est injectif. D'où la seconde partie du théorème 10.5.1. ■

Corollaire 10.5.2. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas* affines *lisses sur le corps résiduel, et soient $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats. Alors, le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$ ne dépend pas du relèvement de f.*

Démonstration. En effet, en vertu du théorème 10.2.2 le module de transfert de l'immersion qui est fermée ne dépend pas du graphe du relèvement. Le corollaire est conséquence de la factorisation précédente. ■

Définition 10.5.3. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses sur le corps résiduel, et soient $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats. On définit le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$ comme le sous-faisceau du faisceau $\mathscr{H}om_V(f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$ des morphismes qui sont* **localement** *des sections du module de transfert d'un relèvement local du triplet (Y, X, f).*

En vertu du corollaire précédent, le module $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$ est bien défini et c'est de façon naturelle un $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}, f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$-bimodule. En outre, il coïncide avec le module de transfert construit sur un relèvement global de f quand il existe.

Corollaire 10.5.4. — *Si $f : Y \to X$ est un morphisme de schémas lisses sur le corps résiduel, alors le foncteur image inverse*

$$p^{*,0}_{\mathrm{diff}} : (\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod} \to (\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}$$

transforme un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module spécial plat en un module spécial **acyclique** *pour le foncteur image inverse $i^{*,0}_{\mathrm{diff}}$.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 10.5.1, parce que l'image inverse se calcule localement à la source et à la base. ■

Définition 10.5.5. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses sur le corps résiduel. On définit l'image inverse*

$$f^{*,0}_{\mathrm{diff}} : \qquad (\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod} \to (\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}$$

comme le composé $i^{*,0}_{\mathrm{diff}} \circ p^{*,0}_{\mathrm{diff}}$, lequel se dérive donc à gauche en un foncteur exact de catégories triangulées

$$f^{*}_{\mathrm{diff}} := \boldsymbol{L} f^{*,0}_{\mathrm{diff}} : \qquad D^{-}((\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) \to D^{-}((\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}).$$

On obtient, comme corollaire des résultats précédents, ce qui suit.

Théorème 10.5.6. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses sur le corps résiduel, et soient $\mathscr{Y}^{\dagger}$ et $\mathscr{X}^{\dagger}$ des relèvements plats. Alors, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{rccc}
f^{*}_{\mathrm{diff}} := f^{*}_{\mathrm{diff},\mathscr{Y}^{\dagger},\mathscr{X}^{\dagger}} : & D^{-}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}\text{-Mod}) & \to & D^{-}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}/V}\text{-Mod}) \\
 & \Big\downarrow P_{\mathscr{X}^{\dagger}} & & \Big\downarrow P_{\mathscr{Y}^{\dagger}} \\
f^{*}_{\mathrm{diff}} : & D^{-}((\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) & \to & D^{-}((\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}),
\end{array}$$

où le foncteur de la première ligne est le foncteur défini par le module de transfert :

$$\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}} \mapsto \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger} \to \mathscr{X}^{\dagger}/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}} f^{-1}\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}},$$

et où les flèches verticales sont les foncteurs prolongement canoniques.

Le foncteur image inverse dans la catégorie des modules spéciaux sur le site infinitésimal prolonge comme il se doit le foncteur image inverse lorsque les relèvements des objets existent sans que les morphismes se relèvent.

Théorème 10.5.7. — *Si $f : Y \to X$ est un morphisme de schémas lisses sur le corps résiduel, alors le complexe $f^{*}_{\mathrm{diff}}\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}$ est canoniquement isomorphe au fibré trivial $\mathcal{O}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}$ muni de sa structure de $\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial canonique.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas d'une immersion et d'une projection. Si Y, X sont affines, soient $\mathscr{Y}^{\dagger}$, $\mathscr{X}^{\dagger}$ des relèvements plats. Dans le cas d'une projection, le foncteur image inverse est exact et le morphisme canonique de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\times_V \mathscr{X}^{\dagger}/V}$-modules à gauche :

$$(*) : \qquad \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\times_V \mathscr{X}^{\dagger} \to \mathscr{X}^{\dagger}/V} \otimes_{p^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V}} p^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V} \to \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^{\dagger}\times_V \mathscr{X}^{\dagger}/V}$$

est surjectif et un calcul local à l'aide du théorème du symbole total 2.4.2 montre qu'il est injectif.

Dans le cas d'une immersion, il suffit de considérer le cas d'une immersion fermée $i : Y \to X$ de schémas affines lisses sur k. Si $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ sont des relèvements plats, le complexe :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}} i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$$

est en vertu du lemme 10.2.6 concentré en degré zéro. Le morphisme canonique de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-modules à gauche :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V} \otimes_{i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}} i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$$

est surjectif, et le lemme 10.2.6 montre qu'il est injectif. ■

Remarque 10.5.8. — Tous les résultats précédents du foncteur image inverse valent également sur l'extension $V \to K$ et nous les utiliserons aussi dans ce contexte.

Définition 10.5.9. — *On dit qu'un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module, resp. $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module, à gauche spécial $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un fibré p-adique, si pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ de $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sa restriction $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V}$-module, resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}$-module, localement libre de rang fini. La notion de fibré p-adique sur le site infinitésimal $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est* **purement algébrique**.

La notion de fibré p-adique a été introduite dans l'article [Me$_2$] sous cette forme-là dans le cas d'un relèvement. Autrement dit, un fibré sur K à connexion intégrable est un fibré p-adique si l'action à gauche du faisceau $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ se prolonge en une action à gauche du faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$. C'est là une propriété restrictive.

Notation 10.5.10. — On note $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$, resp. $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$, la catégorie des fibrés p-adiques.

Proposition 10.5.11. — *Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k. Alors, le foncteur $i^{*,0}_{\mathrm{diff}}$ image inverse est un foncteur* **exact** *de la catégorie $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ dans la catégorie $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$, resp. de la catégorie $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ dans la catégorie $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$.*

Démonstration. La question est locale, et découle de l'isomorphisme :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V} \xrightarrow{i^*} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V} \to 0$$

de $i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-modules à droite induit par un relèvement de i en vertu du corollaire 10.2.6 et de la platitude de l'extension $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ ([Me$_3$], Coro. 6.1.2). ■

Remarque 10.5.12. — Le raisonnement précédent ne marche pas dans le cas d'une projection, mais on peut montrer que le foncteur $p^{*,0}_{\mathrm{diff}}$, qui est exact en vertu du corollaire 10.4.3, envoie la catégorie $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ dans la catégorie $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$, resp. la catégorie $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ dans la catégorie $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$, mais la démonstration n'est pas de même nature. Nous n'utiliserons pas ce résultat dans cet article, mais il permet de donner intrinsèquement la définition des fibrés p-adiques munis d'une structure de Frobenius.

10.6. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$

Si $f_s : Y_s \to X_s$ est un morphisme de R_s-schémas lisses, on peut définir le module de transfert $\mathscr{D}_{X_s \leftarrow Y_s/R_s}$ comme :

$$\mathscr{D}_{X_s \leftarrow Y_s/R_s} := \omega_{Y_s/R_s} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_s/R_s}} \mathscr{D}_{Y_s/R_s \to X_s/R_s} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{X_s/R_s}} f_s^{-1}\omega^{-1}_{X_s/R_s}.$$

C'est de façon naturelle un sous-bimodule filtré du $(f_s^{-1}\mathscr{D}_{X_s/R_s}, \mathscr{D}_{Y_s/R_s})$-bimodule :

$$\mathscr{H}om_R(f_s^{-1}\omega_{X_s/R_s}, \omega_{Y_s/R_s}).$$

Soit $f^\dagger : (Y, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}) \to (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ un morphisme de schémas †-adiques sur V.

Définition 10.6.1. — *Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$ est le sous-$(f^{-1}\mathscr{D}_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$-bimodule du bimodule $\mathscr{H}om_V(f^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$ des V-homomorphismes P tels que leur réduction modulo $\mathfrak{m}^s$ est un élément de $\mathscr{D}_{X_s \leftarrow Y_s/V}$ dont l'ordre est localement borné par une fonction linéaire en s.*

Notons $\omega^{-1}_{\mathscr{X}^\dagger/V} := \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}}(\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ le fibré dual du fibré $\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}$.

Lemme 10.6.2. — *Il existe des morphismes canoniques :*

$$\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} f^{-1}\omega^{-1}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$$

et

$$f^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \omega^{-1}_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V},$$

qui sont des isomorphismes de $(f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$-bimodules.

Démonstration. On a un morphisme canonique :

$$\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \underset{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}}{\otimes} \mathscr{H}om_V(f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}) \underset{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}}{\otimes} f^{-1}\omega^{-1}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \\ \to \mathscr{H}om_V(f^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V}),$$

qui provient du morphisme d'évaluation :

$$\mathscr{H}om_V(f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} f^{-1}\omega^{-1}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \\ \to \mathscr{H}om_V\left(f^{-1}\,\mathscr{H}om_V(\omega^{-1}_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}), \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}\right)$$

suivi du morphisme canonique du produit tensoriel :

$$\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathscr{H}om_V\left(f^{-1}\,\mathscr{H}om_V(\omega^{-1}_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}), \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}\right) \to \\ \to \mathscr{H}om_V\left(f^{-1}\,\mathscr{H}om_V(\omega^{-1}_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}), \omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V}\right) \simeq \\ \simeq \mathscr{H}om_V(f^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V}).$$

D'où un morphisme :

$$\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} f^{-1}\omega^{-1}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \\ \to \mathscr{H}om_V(f^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V}),$$

dont il s'agit de voir que l'image est dans le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}$. Mais c'est une condition qui porte sur les réductions modulo $\mathfrak{m}^s$, et qui est par construction satisfaite. De même, on construit le morphisme :

$$f^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \omega^{-1}_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}.$$

À partir de là, on voit aussitôt que ces morphismes sont des isomorphismes.■

Corollaire 10.6.3. — *Le module* $\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/R}\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} f^{-1}\omega^{-1}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ *est naturellement un* $(f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$*-bimodule.*

Démonstration. Cela résulte par transport de structure de la structure de $(f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$-bimodule du module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}$. ■

Théorème 10.6.4. — *Soit* $f^\dagger : (Y, \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}) \to (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ *un morphisme de schémas* †*-adiques lisses sur* V*. Le module de transfert* $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}$ ne dépend *que de la réduction modulo* $\mathfrak{m}$*,* $f : Y \to X$*, de* $f^\dagger$*.*

Démonstration. En vertu du lemme précédent, l'indépendance du module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}$ du relèvement résulte alors de l'indépendance du module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$. ■

DÉFINITION 10.6.5. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses sur k, et soient $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats. On définit le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$ comme le sous-bimodule du $(f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$-bimodule $\mathscr{H}om_V(f^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$ des germes du module de transfert défini à l'aide d'un relèvement local du morphisme f.*

10.7. Le foncteur image inverse dans la catégorie $D^-(\text{Mod-}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/V}, \text{Sp}))$

On dispose de la catégorie abélienne Mod-$(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/V}, \text{Sp})$ des modules à droite spéciaux, qui a suffisamment d'objets d'injectifs et d'objets plats et de sa catégorie dérivée $D(\text{Mod-}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/V}, \text{Sp}))$. En considérant les modules de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$, on définit le foncteur image inverse f^*_{diff} par :

$$\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} \mapsto f^{-1}\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$$

puis le foncteur :

$$f^*_{\text{diff}} := \boldsymbol{L}f^{*,0}_{\text{diff}} : \quad D^-(\text{Mod-}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/V}, \text{Sp})) \to D^-(\text{Mod-}(\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\text{inf}}/V}, \text{Sp}))$$

pour un morphisme $f : Y \to X$ de schémas lisses sur k par factorisation comme dans le cas des modules à gauche spéciaux. Les propriétés de ce foncteur sont toutes parallèles aux propriétés du foncteur image inverse pour les modules à gauche spéciaux. On dispose ainsi et à titre d'exemple d'un analogue au théorème 10.5.7.

THÉORÈME 10.7.1. — *Soit un morphisme $f : Y \to X$ de schémas lisses sur k. Alors, l'image inverse $f^*_{\text{diff}}\,\omega_{X^\dagger_{\text{inf}}/V}$ du fibré des formes différentielles séparées de degré maximum sur $X^\dagger_{\text{inf}}$ est canoniquement isomorphe à $\omega_{Y^\dagger_{\text{inf}}/V}$ muni de sa structure canonique de $\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\text{inf}}/V}$-module à droite spécial.*

La démonstration est identique à celle de 10.5.7.

Remarque 10.7.2. — Sous la condition $e < p^h(p-1)$, on peut reprendre les constructions précédentes pour construire le foncteur $f^*_{\text{diff},h}$, qui a les mêmes propriétés que le foncteur f^*_{diff}.

11. Le foncteur image directe dans la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\text{inf}}/K}, \text{Sp})\text{-Mod})$

Pour définir le foncteur image directe il nous faut étudier d'abord quelques propriétés de finitude des opérateurs différentiels.

11.1. La platitude du module de transfert pour une immersion fermée

Lemme 11.1.1. — *(Critère jacobien) Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas affines lisses sur k. Soient U un ouvert affine de X, W sa trace sur Y, et $A^\dagger$ et $B^\dagger$ des relèvements plats de W et U. Si $u : A^\dagger \to B^\dagger$ est un relèvement de l'inclusion de W dans U, alors,* localement *sur U, il existe des éléments $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ de $A^\dagger$ tels que $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ est une base locale de $\Omega_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ et $\{du(x_1), \ldots, du(x_r)\}$ est une base locale de $\Omega_{\mathcal{W}^\dagger/V}$. De plus, $\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ engendre l'idéal noyau de u.*

Démonstration. Puisque $W \to U$ est une immersion fermée, le morphisme $u : A^\dagger \to B^\dagger$ est **surjectif** en vertu de la première partie du théorème 2.2.9, d'où une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{I}_{\mathcal{W}^\dagger/V} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V} \to \mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/V} \to 0.$$

Soient $z_1, \ldots, z_s$ des générateurs de l'idéal $\mathcal{I}_{\mathcal{W}^\dagger/V}$ et $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ une base locale de $\Omega_{\mathcal{U}^\dagger/V}$. Si

$$0 \to \mathcal{I}_{W/k} \to \mathcal{O}_{U/k} \to \mathcal{O}_{W/k} \to 0$$

est la réduction modulo $\mathfrak{m}$ de la suite précédente, les classes modulo $\mathfrak{m}$ de $z_1, \ldots, z_s$ engendrent $\mathcal{I}_{W/k}$ et les classes de $dx_1, \ldots, dx_n$ forment une base locale de $\Omega_{U/k}$. En vertu du critère jacobien algébrique ([EGA IV$_4$], 17.12.2), quitte à réindexer $z_1, \ldots, z_s$ et $dx_1, \ldots, dx_n$, les classes de $z_{r+1}, \ldots, z_n$ engendrent l'idéal $\mathcal{I}_{W/k}$, les classes de $dx_1, \ldots, dx_r$ et de $dz_{r+1}, \ldots, dz_n$ forment une base locale de $\Omega_{U/k}$, et les images des classes de $dx_1, \ldots, dx_r$ forment une base locale de $\Omega_{W/k}$. Les éléments $x_1, \ldots, x_r, z_{r+1}, \ldots, z_n$ ont la propriété du lemme parce que $\mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/V}$ est plat sur V. ■

Définition 11.1.2. — *Étant donné un relèvement $u : A^\dagger \to B^\dagger$ d'une immersion fermée $Y \to X$ de schémas affines et lisses sur k, on dit qu'un système d'éléments $z = \{z_1, \ldots, z_q\}$, $y = \{y_1, \ldots, y_{n-q}\}$ de $A^\dagger$ est adapté à u, si $dz := \{dz_1, \ldots, dz_q\}$, $dy := \{dy_1, \ldots, dy_{n-q}\}$ forment une base de $\Omega_{A^\dagger/V}$, $du(y) := \{du(y_1), \ldots, du(y_{n-q})\}$ forment une base de $\Omega_{B^\dagger/V}$ et $\{z_1, \ldots, z_q\}$ engendre le noyau de u.*

En vertu du critère jacobien 11.1.1, il existe, **localement** sur X, un système d'éléments $x = (z, y)$ adapté à u.

On rappelle que $\mathscr{D}_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ désigne le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini et $\mathscr{D}^{<\infty,h}_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ le sous-faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini et d'échelon $h \geqslant 0$.

COROLLAIRE 11.1.3. — *Le $\mathscr{D}_{\mathcal{W}^\dagger/V}$-module à gauche $\mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/V} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V}} i^{-1}\mathscr{D}_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ est localement libre, et pour tout $h \geqslant 0$ le $\mathscr{D}^{<\infty,h}_{\mathcal{W}^\dagger/V}$-module à gauche $\mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/V} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V}} i^{-1}\mathscr{D}^{<\infty,h}_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ est localement libre.*

Démonstration. En effet, si $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1} \ldots, x_n$ sont des éléments comme dans le critère jacobien précédent, une base locale du $\mathscr{D}_{\mathcal{W}^\dagger/V}$-module $\mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/V} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V}} i^{-1}\mathscr{D}_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ est formée des tenseurs d'opérateurs $1 \otimes \Delta_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \cdots \Delta_n^{\alpha_n}$. Le même argument vaut pour $\mathcal{O}_{\mathcal{W}^\dagger/V} \underset{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V}}{\otimes} i^{-1}\mathscr{D}^{<\infty,h}_{\mathcal{U}^\dagger/V}$. ■

PROPOSITION 11.1.4. — *Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas affines et lisses sur k d'algèbres B et A. Soient $A^\dagger$ et $B^\dagger$ des relèvements plats et $u : A^\dagger \to B^\dagger$ un relèvement du morphisme quotient $A \to B$. Alors, le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$ est un $i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à gauche* **localement** *engendré par $dy_1 \ldots dy_m \otimes u \otimes (dx_1 \ldots dx_n)^*$, où $dy_1 \ldots dy_m$, $dx_1 \ldots dx_n$ sont des bases locales des fibrés des formes différentielles séparées de X et de Y.*

Démonstration. En effet, en vertu du théorème 10.2.3, le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$ est engendré à droite par u et l'on a l'égalité :

$$dy_1 \ldots dy_m \otimes u\, {}^tP \otimes (dx_1 \ldots dx_n)^* = P(dy_1 \ldots dy_m \otimes u \otimes (dx_1 \ldots dx_n)^*)$$

comme morphismes :

$$i^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V} \xrightarrow{(dx)^*} i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \xrightarrow{u \circ {}^tP} \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \xrightarrow{dy} \omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V},$$

où ${}^tP$ est le transposé de P pour la forme $dx_1 \ldots dx_n$. ■

THÉORÈME 11.1.5. — *Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k, et soient $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats. Les modules de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$ sont* **plats** *sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$.*

Démonstration. La question est locale sur Y et, par un choix de trivialisations locales des fibrés $\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$ et $\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}$, il suffit de montrer que le $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-module à gauche $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$ est plat. Soient des ouverts affines assez petits U et W au-dessus desquels il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n$ comme dans le lemme du critère jacobien, et soit N un idéal à droite de $D^\dagger_{B^\dagger/V}$ de type fini. Il faut montrer que le morphisme :

$$N \otimes_{D^\dagger_{B^\dagger/V}} \Gamma(W, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V}) \to \Gamma(W, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V})$$

est injectif. L'anneau $D^\dagger_{B^\dagger/V}$ est filtré par $D^{\dagger,h}_{B^\dagger/V}$ et $\Gamma(W, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V})$ est filtré par les $D^{\dagger,h}_{A^\dagger/V}$-modules à droite $\Gamma(W, \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V})$. Il suffit de montrer,

pour h assez grand, que :

$$N^h \otimes_{D^{\dagger,h}_{B^\dagger/V}} \Gamma(W, \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V}) \to \Gamma(W, \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V})$$

est injectif, où N^h est l'idéal engendré par les générateurs de N. Il suffit donc de montrer que $\Gamma(W, \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V})$ est plat sur $D^{\dagger,h}_{B^\dagger/V}$. Comme les anneaux $D^{\dagger,h}_{B^\dagger/V}, D^{\dagger,h}_{A^\dagger/V}$ sont noethériens en vertu du théorème 7.1.6, que l'idéal $\mathfrak{m}$ est contenu dans la radical de l'anneau $D^{\dagger,h}_{A^\dagger/V}$ ([Me$_3$], Thm. 4.1.1) et que $\Gamma(W, \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V})$ est un $D^{\dagger,h}_{A^\dagger/V}$-module à droite de type fini en vertu du théorème 10.2.4, on peut appliquer le critère de platitude local 2.0.3. Pour cela, il faut s'assurer que les réductions modulo $\mathfrak{m}^s$ du $D^{\dagger,h}_{B^\dagger/V}$-module $\Gamma(W, \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V})$ sont plates. Mais ceci est une conséquence du corollaire précédent. ■

11.2. Le théorème de changement de base pour une immersion fermée

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème de changement de base pour une immersion fermée, qui nous servira à définir le foncteur image directe dans le cas d'une immersion fermée.

Proposition 11.2.1. — *Soient $\mathcal{U}^\dagger$ et $\mathcal{U}'^\dagger$ deux relèvements plats d'un schéma U affine et lisse sur k. Il existe alors un isomorphisme* canonique

$$(*) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$$

de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})$-bimodules, et un isomorphisme canonique

$$(**) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}$$

de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V})$-bimodules.

Démonstration. Soit $u : A^\dagger \to A'^\dagger$ un relèvement de l'identité. Notons u_0, u_n (l'indice n rappelle que u_n opère sur les n-formes différentielles), ses images dans $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V}$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V}$. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V}$ est un $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})$-bimodule libre engendré par u_0, et le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V}$ est un $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V})$-bimodule libre engendré par u_n.

Lemme 11.2.2. — *L'élément $u_n \otimes u_0$ de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V}$ est indépendant de u.*

Démonstration. En effet, si v est un autre relèvement, on a les égalités $u = (uv^{-1})v = gv$ où g est un élément de $G_{A'^\dagger}$. Alors, $u_n \otimes u_0 = u_n \otimes gv_0 = u_n g \otimes v_0$. Il faut voir que $u_n g = v_n$ comme morphisme de $\omega_{A^\dagger/V} \to \omega_{A'^\dagger/V}$. Mais en vertu du théorème 9.1.3, l'action à droite de l'opérateur différentiel g sur $\omega_{A'^\dagger/V}$ est égal au morphisme de restriction g^{-1} et $g^{-1} \circ u_n = v_n$. □

On définit alors le morphisme par linéarité :

$$(*) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$$

par $Pu_n \otimes u_0 Q \mapsto PQ$. Le lemme suivant montre que le morphisme $(*)$ bien défini et est injectif.

Lemme 11.2.3. — *Pour tous opérateurs P et Q de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$, on a l'égalité $Pu_n \otimes u_0 Q = PQu_n \otimes u_0$.*

Démonstration. Il existe un unique opérateur Q' de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}$ tel que $Q'u_0 = u_0 Q$, comme éléments du module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V}$. Il s'agit alors de voir que $u_n Q' = Qu_n$ comme éléments du module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V}$, ou bien, si le diagramme de gauche est commutatif, que le diagramme de droite est aussi commutatif :

$$\begin{tikzcd} A^\dagger \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "Q"] & A'^\dagger \arrow[d, "Q'"] \\ A^\dagger \arrow[r, "u_0"] & A'^\dagger \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \omega_{A^\dagger/V} \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "Q"] & \omega_{A'^\dagger/V} \arrow[d, "Q'"] \\ \omega_{A^\dagger/V} \arrow[r, "u_n"] & \omega_{A'^\dagger/V}. \end{tikzcd}$$

La question est locale. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales au-dessus d'un ouvert affine de $\mathcal{U}^\dagger$ et $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) = u(x) = (u(x_1), \ldots, u(x_n))$ le système de coordonnées locales au-dessus de l'ouvert affine de $\mathcal{U}'^\dagger$ obtenu par le morphisme u. Il s'agit de voir que si $Q'u_0 = u_0 Q$, alors $u_0\, {}^tQ = {}^tQ' u_0$. Mais en vertu du théorème 2.4.2, si l'opérateur Q admet le développement $\sum_\alpha a_\alpha \Delta_x^\alpha$, l'opérateur Q' admet le développement $\sum_\alpha u(a_\alpha)\Delta_{x'}^\alpha$, ${}^tQ' = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \Delta_{x'}^\alpha u(a_\alpha)$ et ${}^tQ' u_0 = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \Delta_{x'}^\alpha u(a_\alpha) u = u \circ (\sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \Delta_x^\alpha a_\alpha) = u_0\, {}^tQ$. □

Le morphisme $(*)$ est alors un morphisme de bimodules surjectif. De même, on définit le morphisme $(**)$ qui est un isomorphisme. ■

Corollaire 11.2.4. — *Soient $\mathcal{U}^\dagger$ et $\mathcal{U}'^\dagger$ deux relèvements plats d'un schéma affine lisse sur k. Alors, les foncteurs :*

$$\mathcal{M}'^\dagger_{\mathcal{U}'} \mapsto \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}}{\otimes} \mathcal{M}'^\dagger_{\mathcal{U}'} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}} \mapsto \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}{\otimes} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}}$$

sont des équivalences de catégories canoniquement *inverses l'une de l'autre entre la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}$-*Mod *et la catégorie $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$-*Mod.

Démonstration. C'est une conséquence directe des isomorphismes $(*)$ et $(**)$ précédents. ■

Proposition 11.2.5. — *Soient $\mathcal{U}^\dagger$ et $\mathcal{U}'^\dagger$ deux relèvements plats d'un schéma affine lisse sur k. Alors, il existe un isomorphisme canonique :*

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \to \mathcal{U}'^\dagger/V} \simeq \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V}$$

de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V})$-bimodules.

Démonstration. Soient $u : \mathcal{O}_{\mathcal{U}'^\dagger/V} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ un relèvement de l'identité et $P_{\mathcal{U}^\dagger \to \mathcal{U}'^\dagger/V}$ un opérateur différentiel de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \to \mathcal{U}'^\dagger/V}$. Alors, $P_{\mathcal{U}^\dagger \to \mathcal{U}'^\dagger/V}$ admet la factorisation :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}'^\dagger/V} \xrightarrow{P} \mathcal{O}_{\mathcal{U}'^\dagger/V} \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V},$$

où P est un opérateur différentiel. On lui associe l'opérateur $P_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V}$ composé :

$$\omega_{\mathcal{U}^\dagger/V} \xrightarrow{u^{-1}} \omega_{\mathcal{U}'^\dagger/V} \xrightarrow{P} \omega_{\mathcal{U}'^\dagger/V},$$

lequel ne dépend pas de la factorisation. En effet, si v est un autre relèvement, on aura $u = vg$ où g est un automorphisme d'algèbre qui se réduit à l'identité et donc un opérateur différentiel de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'^\dagger/V}$. En vertu du théorème 9.1.3, on aura $gP \circ v^{-1} = P \circ (vg)^{-1} = P \circ u^{-1}$. Le morphisme ainsi défini est un morphisme de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V})$-bimodules qui est un isomorphisme. ■

Cela va nous permettre de définir les modules à gauche spéciaux à l'aide de l'image directe.

Définition 11.2.6. — *Un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est la donnée pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ d'un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$-module à gauche $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ tel que $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger|W} = \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}|W$ pour tout $W \subset U$, et la donnée pour tout couple*

$(\mathcal{W}^\dagger,\mathcal{U}^\dagger)$ *avec* $r : W \hookrightarrow U$ *d'un isomorphisme de* $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}$*-modules à gauche*

$$(\diamond) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\leftarrow\mathcal{U}^\dagger|W/V} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \simeq \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}$$

se réduisant au morphisme canonique dans le cas $(\mathcal{U}^\dagger|W,\mathcal{U}^\dagger)$ *et satisfaisant aux conditions de transitivité pour trois ouverts.*

Soient $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas affines lisses sur k, $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert affine de X et W sa trace sur Y. Soient $\mathscr{Y}^\dagger$, $\mathscr{X}^\dagger$, $\mathcal{U}^\dagger$ et $\mathcal{W}^\dagger$ des relèvements plats de Y, X, U et W.

Théorème 11.2.7. — *Soit* $\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger}$ *un* $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$*-module à gauche. Il existe alors un morphisme canonique de changement de base :*

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V} \otimes_{j^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}} j^{-1}i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger})\\ \longrightarrow \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}} i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{j^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} j^{-1}\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger}),\end{aligned}$$

qui est un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$*-modules à gauche.*

Démonstration. Nous allons d'abord construire un morphisme

$$(*) : \ \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V} \underset{j^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}}{\otimes} j^{-1}i_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V} \longrightarrow i_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathscr{Y}^\dagger/V}\big).$$

Soit $P_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger} \otimes j^{-1}Q_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger}$ un tenseur élémentaire. En vertu de la proposition précédente, l'opérateur $P_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}$ donne naissance à un opérateur $P_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathscr{X}^\dagger|U}$ qui, composé avec $j^{-1}Q_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger}$, donne un opérateur $R_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger|W}$. On définit l'image du tenseur $P_{\mathcal{U}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger}\otimes j^{-1}Q_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger}$ comme $R_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger|W}u_n\otimes u_0$ pour n'importe quel relèvement u de l'identité de W. En vertu du lemme 11.2.2, ce tenseur ne dépend pas du relèvement u. On obtient le morphisme $(*)$ de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}, j^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$-bimodules, qui est un isomorphisme.

Soit maintenant $\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-module à gauche. En tensorisant l'isomorphisme $(*)$ avec $j^{-1}\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger}$ et tenant compte l'isomorphisme de changement de base topologique de $j^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-modules à gauche :

$$j^{-1}i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger}) \to i_*j^{-1}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger}),$$

on trouve l'isomorphisme de changement de base du théorème 11.2.7. ■

11.3. Le foncteur image directe dans le cas d'une immersion fermée

Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k. On se propose de définir le foncteur image directe :

$$i^{\mathrm{diff}}_{*,0} : (\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod} \to (\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}.$$

Soient $\mathcal{N}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial et $\mathcal{U}^{\dagger}$ un ouvert affine du site $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Si $\mathcal{W}^{\dagger}$ est un relèvement de l'ouvert affine $Y \cap U$, la restriction $\mathcal{N}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}}$ est un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}/V}$-module à gauche, et on peut définir

$$\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}} := i_*\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger} \leftarrow \mathcal{W}^{\dagger}/V} \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}/V}} \mathcal{N}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}}\big).$$

En vertu du théorème de changement de base pour une immersion fermée 11.2.7, le module $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}}$ ne dépend pas à isomorphisme canonique près du relèvement $\mathcal{W}^{\dagger}$. Donc, en prenant un recouvrement par des ouverts affines d'un ouvert $\mathcal{U}^{\dagger}$, on définit un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}/V}$-module à gauche $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}}$ donné localement qui ne dépend pas du recouvrement choisi. D'autre part, si U' est un ouvert de U, on trouve que $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}|U'} = \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}}|U'$.

Soit un couple d'objets du site $(\mathcal{U}^{\dagger}_1, \mathcal{U}^{\dagger}_2)$ avec $r : U_1 \hookrightarrow U_2$. Nous allons construire un isomorphisme de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_1/V}$-modules à gauche :

$$(\diamond) : \qquad \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_1 \leftarrow \mathcal{U}^{\dagger}_2|U_1} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_2/V}} r^{-1}\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_2} \simeq \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_1}$$

satisfaisant aux conditions de transitivité pour trois ouverts.

Supposons d'abord U_1 affine et soit $\mathcal{W}^{\dagger}_1$ un relèvement de $U_1 \cap Y$. Alors, $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_1}$ est par construction canoniquement isomorphe à :

$$i_*\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_1 \leftarrow \mathcal{W}^{\dagger}_1/V} \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}_1/V}} \mathcal{N}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}_1}\big),$$

et $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_2|U_1}$ est par construction canoniquement isomorphe à :

$$i_*\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_2|U_1 \leftarrow \mathcal{W}^{\dagger}_1/V} \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}_1/V}} \mathcal{N}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}_1}\big),$$

ce qui fournit l'isomorphisme $(\diamond)$ dans ce cas-là par application du foncteur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_1 \leftarrow \mathcal{U}^{\dagger}_2|U_1/V} \otimes_{r^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_2/V}} ?$, en tenant compte de l'isomorphisme canonique :

$$i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_1 \leftarrow \mathcal{U}^{\dagger}_2|U_1/V} \otimes_{i^{-1}r^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_2/V}} i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_2|U_1 \leftarrow \mathcal{W}^{\dagger}_1/V} \simeq \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}_1 \leftarrow \mathcal{W}^{\dagger}_1/V}$$

parce que $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}_1^\dagger \leftarrow \mathcal{U}_2^\dagger|U_1/V}$ est un $r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}_2^\dagger/V}$-module à droite localement libre de rang 1.

On obtient des isomorphismes locaux qui se recollent canoniquement pour fournir un isomorphisme ($\diamond$) dans le cas général. Les conditions de transitivité pour $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sont conséquences de celles de $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Le morphisme ($\diamond$) coïncide avec le morphisme canonique dans le cas du couple $(\mathcal{U}^\dagger|U', \mathcal{U}^\dagger)$.

Corollaire 11.3.1. — *Sous les conditions précédentes, le foncteur* $\mathcal{U}^\dagger \rightsquigarrow \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ *est un* $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$*-module à gauche spécial* $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *sur le site* $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Définition 11.3.2. — *Pour une immersion fermée* $i : Y \to X$ *de schémas lisses sur* k*, on définit l'image directe :*

$$i^{\mathrm{diff}}_{*,0}\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}} := \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}.$$

On obtient, en vertu du théorème 11.1.5, un foncteur **exact**

$$i^{\mathrm{diff}}_{*,0} : \qquad i^{\mathrm{diff}}_{*,0} : (\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod} \to (\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod},$$

qui se dérive trivialement en un foncteur exact de catégories triangulées :

$$i^{\mathrm{diff}}_{*} := \boldsymbol{R}i^{\mathrm{diff}}_{*,0} : \qquad D^*((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) \to D^*((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}).$$

Corollaire 11.3.3. — *Soient une immersion* **fermée** $i : Y \to X$ *de schémas lisses sur* k *et une immersion* **ouverte** $j : U \to X$*. Alors, il existe un isomorphisme canonique de foncteurs exacts de la catégorie* $(\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod *vers la catégorie* $(\mathscr{D}^\dagger_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod *:*

$$j^{*,0}_{\mathrm{diff}} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*,0} \simeq i^{\mathrm{diff}}_{*,0} \circ j^{*,0}_{\mathrm{diff}},$$

et il existe un isomorphisme canonique de foncteurs exacts de la catégorie $D^*((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ *vers la catégorie* $D^*((\mathscr{D}^\dagger_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ *:*

$$j^{*}_{\mathrm{diff}} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*} \simeq i^{\mathrm{diff}}_{*} \circ j^{*}_{\mathrm{diff}}.$$

Démonstration. C'est la traduction du théorème de changement de base 11.2.7. ■

De même, en considérant un couple adapté 11.1.2 d'un relèvement d'une immersion fermée de schémas lisses sur k on montre le changement de base pour une projection :

Proposition 11.3.4. — *Soit un carré cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} Z \times_k Y & \xrightarrow{i} & Z \times_k X \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

de morphismes de schémas lisses sur k, où i est une immersion fermée et p est une projection. Il existe alors un isomorphisme canonique de foncteurs exacts entre les catégories $(\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod et $(\mathscr{D}^\dagger_{(Z\times_k X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod :

$$p^{*,0}_{\mathrm{diff}} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*,0} \simeq i^{\mathrm{diff}}_{*,0} \circ p^{*,0}_{\mathrm{diff}},$$

et il existe un isomorphisme canonique de foncteurs exacts de la catégorie $D^*((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ vers la catégorie $D^*((\mathscr{D}^\dagger_{(Z\times_k X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$:

$$p^{*}_{\mathrm{diff}} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*} \simeq i^{\mathrm{diff}}_{*} \circ p^{*}_{\mathrm{diff}}.$$

Proposition 11.3.5. — *Soient $Y \xrightarrow{i_1} X \xrightarrow{i_2} Z$ la composée de deux immersions fermées de schémas lisses sur k. Alors, il existe un isomorphisme canonique de foncteurs : $i^{\mathrm{diff}}_{2*} \circ i^{\mathrm{diff}}_{1*} \simeq (i_2 \circ i_1)^{\mathrm{diff}}_{*}$.*

Démonstration. Les foncteurs $i_{1*,0}, i_{2*,0}, (i_2 \circ i_1)_{*,0}$ sont exacts. Pour $\mathscr{Y}^\dagger$, $\mathscr{X}^\dagger$, $\mathscr{Z}^\dagger$ des relèvements plats, alors on a un morphisme canonique :

$$i_1^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger \leftarrow \mathscr{X}^\dagger/V} \otimes_{i_1^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$$

de $(i_2 \circ i_1)^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger/V}$-modules de type fini. En filtrant ce morphisme par la filtration par les échelons, on montre que c'est un isomorphisme. On obtient des isomorphisme locaux qui se recollent canoniquement. ■

Remarque 11.3.6. — On peut remplacer le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ dans la définition du foncteur image direct i^{diff}_{*} par le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$.

11.4. Le foncteur image directe dans le cas d'une projection

Pour un couple (Y, X) de schémas lisses sur R_1, on note q et p les projections de $Y \times_{R_1} X$ sur le premier et le second facteur.

Définition 11.4.1. — *Soit $\mathscr{X}^\dagger$ un ouvert du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. On définit le site $Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger$ relatif à l'ouvert $\mathscr{X}^\dagger$ comme le sous-site de $(Y \times_{R_1} X)^\dagger_{\mathrm{inf}}$ dont les objets sont les ouverts de la forme $\mathcal{U}^\dagger \times_R \mathscr{X}^\dagger$ pour un ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ du site $Y^\dagger_{\mathrm{inf}}$, dont les morphismes sont de la forme $r^\dagger \times Id$ pour $r^\dagger$ un morphisme du site $Y^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et muni de la topologie induite.*

Sur le site $Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger$ on a une description locale des faisceaux de modules analogue à celle des faisceaux de modules sur le site $Y^\dagger_{\mathrm{inf}}$. En particulier, si $\mathcal{L}_X$ est un faisceau d'anneaux de Zariski sur X, on a un faisceau d'anneaux sur le site $Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger$ dont la valeur sur un ouvert $\mathcal{U}^\dagger \times_R \mathscr{X}^\dagger$ est l'image inverse de $\mathcal{L}_X$ par la projection $U \times_{R_1} X \to X$ muni des restrictions canoniques. Notons $(Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger, p^{-1}\mathcal{L}_X)$-Mod la catégorie des $p^{-1}\mathcal{L}_X$-modules à gauche sur le site $Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger$. Sur le site $Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger$ on a aussi le faisceau $q^{-1}\mathcal{G}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}}$, dont la valeur sur un ouvert $\mathcal{U}^\dagger \times_R \mathscr{X}^\dagger$ est le faisceau $q^{-1}\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}$ muni des restrictions canoniques.

Proposition 11.4.2. — *Le foncteur naturel :*

$$P_{Y\times_{R_1}X} : \qquad (Y \times_{R_1} X, p^{-1}\mathcal{L}_X)\text{-Mod} \to (Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger, p^{-1}\mathcal{L}_X)\text{-Mod}$$

induit une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux de Zariski sur le produit $Y \times_{R_1} X$, notée $(Y \times_{R_1} X, p^{-1}\mathcal{L}_X)$-Mod, et la sous-catégorie des modules sur le site relatif $Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger$ dont l'action du faisceau de groupes $q^{-1}\mathcal{G}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est **triviale**. *Ce foncteur admet comme inverse canonique le foncteur qui à un module $\mathcal{F}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathscr{X}^\dagger}$ sur le site relatif associe le module dont la valeur sur $U \times_{R_1} X$, si U est affine, est :*

$$\varprojlim_{\mathcal{U}^\dagger} \mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger \times_R \mathscr{X}^\dagger},$$

la limite étant prise sur tous les ouverts qui relèvent U.

Démonstration. Remarquons d'abord que sous l'hypothèse de la proposition, pour deux ouverts affines $\mathcal{U}^\dagger_1, \mathcal{U}^\dagger_2$ qui relèvent le même ouvert, tous les morphismes de restriction induisent le *même* isomorphisme :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger_1 \times_R \mathscr{X}^\dagger} \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger_2 \times_R \mathscr{X}^\dagger}.$$

La limite projective est bien définie. On obtient un faisceau donné localement sur un recouvrement de $Y \times_k X$ qui donne naissance canoniquement à un faisceau de $p^{-1}\mathcal{L}_X$-modules sur $Y \times_{R_1} X$. ■

Sur le site relatif $Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger$ on a le faisceau $q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$, dont la valeur sur l'ouvert $\mathcal{U}^\dagger \times_R \mathscr{X}^\dagger$ est le faisceau $q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}$. Pour tout $q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, on peut considérer le faisceau sur le site relatif $Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger$:

$$\mathcal{U}^\dagger \times_R \mathscr{X}^\dagger \rightsquigarrow \mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}\left(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\times_R\mathscr{X}^\dagger}\right).$$

Corollaire 11.4.3. — *Si* $\mathcal{M}^{\dagger}_{(Y\times_{R_1}X)^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$ *est un* $\mathscr{D}^{\dagger}_{(Y\times_{R_1}X)^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$*-module à gauche spécial, le foncteur :*

$$\mathcal{U}^{\dagger}\times_R\mathscr{X}^{\dagger}\rightsquigarrow\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}/R}}\left(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^{\dagger}/R},\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}\times_R\mathscr{X}^{\dagger}}\right)$$

définit un faisceau de **Zariski** *de* $p^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$*-modules à gauche sur le produit* $Y\times_{R_1}X$*.*

Démonstration. En effet, l'action d'un élément g du groupe $q^{-1}\mathcal{G}_{\mathcal{U}^{\dagger}}$ sur un morphisme φ est donnée par construction par $g\varphi g^{-1}$, mais l'action de g sur $q^{-1}\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}/R}$ et sur $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}\times_R\mathscr{X}^{\dagger}}$ se fait à travers $q^{-1}\mathcal{G}_{\mathcal{U}^{\dagger}}\subseteq q^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}/R}$ et donc $g\varphi g^{-1}=\varphi gg^{-1}=\varphi$. Le corollaire est conséquence de la proposition précédente. ■

Notation 11.4.4. — Si $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^{\dagger}_{(Y\times_{R_1}X)^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial et $\mathscr{X}^{\dagger}$ est un ouvert du site $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, on note $R_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}\times\mathscr{X}^{\dagger}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ sa restriction au site $Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}\times\mathscr{X}^{\dagger}$ et :

$$\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}}\left(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R},R_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}\times\mathscr{X}^{\dagger}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})\right)$$

le faisceau de **Zariski** de $p^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$-modules défini dans le corollaire précédent. Son image directe $p_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}}\left(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R},R_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}\times\mathscr{X}^{\dagger}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})\right)$ est donc un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/R}$-module à gauche bien défini.

Soit $(\mathcal{W}^{\dagger}_1,\mathcal{W}^{\dagger}_2)$ un couple d'objets du site $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, avec $r:W_1\hookrightarrow W_2$. Nous allons construire un isomorphisme de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}_1/V}$-modules à gauche :

$$(\diamond):\quad \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}_1\to\mathcal{W}^{\dagger}_2/R}\underset{r^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}_2/R}}{\otimes}r^{-1}p_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}}\left(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R},R_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}^{\dagger}_2}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})\right)\simeq$$
$$\simeq p_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R}}\left(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/R},R_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}^{\dagger}_1}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})\right)$$

satisfaisant à la condition de transitivité pour trois ouverts et les conditions portant sur les couples $(\mathcal{W}^{\dagger}_2|W_1,\mathcal{W}^{\dagger}_2)$. Le morphisme de projection topologique suivant est un isomorphisme, parce que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{W}^{\dagger}_1\to\mathcal{W}^{\dagger}_2/R}$ est un

$r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_2^\dagger/R}$-module à droite localement libre de rang 1. On a donc l'isomorphisme :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_1^\dagger\to\mathcal{W}_2^\dagger/R}\underset{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_2^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}p_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}_2^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)\simeq$$

$$\simeq p_*\big(p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_1^\dagger\to\mathcal{W}_2^\dagger/R}\underset{p^{-1}r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_2^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}_2^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)\big).$$

Il suffit de construire un isomorphisme :

$$p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_1^\dagger\to\mathcal{W}_2^\dagger/R}\underset{p^{-1}r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_2^\dagger/R}}{\otimes} r^{-1}\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}_2^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)\simeq$$

$$\simeq \mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}_1^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big).$$

Les deux faisceaux précédents sur $Y\times_k W_1$ sont donnés localement sur un recouvrement produit. Il suffit de construire un isomorphisme de faisceaux donnés localement. Pour tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ du site $Y^\dagger_{\mathrm{inf}}$, le morphisme produit tensoriel est un isomorphisme parce que l'action de $q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ **commute** avec celle de $p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_2^\dagger/V}$:

$$p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_1^\dagger\to\mathcal{W}_2^\dagger/R}\underset{p^{-1}r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_2^\dagger/R}}{\otimes} j^{-1}\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\times_R\mathcal{W}_2^\dagger}\big)\simeq$$

$$\simeq r^{-1}\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/R}, p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_1^\dagger\to\mathcal{W}_2^\dagger/R}\underset{p^{-1}r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_2^\dagger/R}}{\otimes}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\times_R\mathcal{W}_2^\dagger}\big).$$

Il suffit de construire un isomorphisme :

$$p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_1^\dagger\to\mathcal{W}_2^\dagger/R}\otimes_{p^{-1}r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_2^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\times_R\mathcal{W}_2^\dagger}\simeq\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\times_R\mathcal{W}_1^\dagger}.$$

Mais $p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}_1^\dagger\to\mathcal{W}_2^\dagger/R}$ est un sous-faisceau de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\times_R\mathcal{W}_1^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger\times_R\mathcal{W}_2^\dagger/R}$ et le morphisme provient du morphisme du module spécial $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on reprend le raisonnement de la démonstration du théorème 6.2.7. Les compatibilités proviennent des compatibilités pour $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Les conditions portant sur les couples induits sont évidentes. Nous avons montré le théorème qui suit.

THÉORÈME 11.4.5. — *Si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_{R_1}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial, le foncteur précédent :*

$$\mathscr{X}^\dagger\rightsquigarrow p_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)$$

est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche **spécial**.

Définition 11.4.6. — *Soit* $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *un* $\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_{R_1}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$*-module à gauche spécial. On définit son image directe* $p^{\mathrm{diff}}_{*,0}\,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *comme le* $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$*-module spécial placé en degré* $-[\dim Y]$ *dont la valeur sur l'ouvert* $\mathcal{U}^\dagger$ *de* $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *est :*

$$p_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{U}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)[\dim Y].$$

Proposition 11.4.7. — *L'application* $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \mapsto p^{\mathrm{diff}}_{*,0}\,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *définit un foncteur covariant exact à gauche*

$$p^{\mathrm{diff}}_{*,0}\ :\qquad (\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_{R_1}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod}\to(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod}[\dim Y]$$

de $(\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_{R_1}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})$-Mod *vers la catégorie* $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})$-Mod$[\dim Y]$ *des modules placés en degré* $-[\dim Y]$.

Démonstration. En effet, la construction du module $p^{\mathrm{diff}}_{*,0}\,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ se fait à l'aide de foncteurs exacts à gauche. ■

Définition 11.4.8. — *Le foncteur image directe*

$$p^{\mathrm{diff}}_{*,0}\ :\qquad (\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_kX)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod}\to(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod}[\dim Y]$$

est un foncteur covariant exact à gauche, et se dérive donc en foncteur exact de catégories triangulées

$$p^{\mathrm{diff}}_*:=\boldsymbol{R}p^{\mathrm{diff}}_{*,0}:\quad D^+((\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_kX)^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod})\to D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod}).$$

Remarque 11.4.9. — Si $R\to S$ est une extension d'anneaux, on peut remplacer les faisceaux $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ et $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ dans la définition du foncteur image directe p^{diff}_*, par les faisceaux $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}:=\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}\otimes_R S$ et $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/S}:=\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}\otimes_R S$. Le cas où $R=V$ et $S=K$ est particulièrement important.

11.5. Le foncteur image directe dans le cas général

Si $f:Y\to X$ est un morphisme de schémas lisses sur k et si X est **séparé**, le morphisme graphe de f est une immersion fermée $i_f:Y\to Y\times_k X$. Pour simplifier la définition du foncteur image directe dans le cas général, nous supposons que X est **séparé**, de sorte qu'un morphisme se factorise par une immersion **fermée** suivi d'une projection. Si f est un morphisme de $Y\to X$, notons $f:=p\circ i_f$, où i_f l'immersion graphe et où p est la projection de $Y\times_k X$ sur X.

Définition 11.5.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses sur k, avec X séparé. On définit le foncteur f_*^{diff} image directe sur K :*

$$f_*^{\mathrm{diff}} : \qquad D^+((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) \longrightarrow D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$$

comme le foncteur composé

$$f_*^{\mathrm{diff}} : D^+((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) \xrightarrow{i_{f*}^{\mathrm{diff}}} D^+((\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) \xrightarrow{p_*^{\mathrm{diff}}}$$
$$\xrightarrow{p_*^{\mathrm{diff}}} D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}),$$

où $p \circ i_f$ est la factorisation canonique de f.

Remarque 11.5.2. — On ne peut pas définir le foncteur image directe par le module de transfert comme dans la théorie classique parce qu'en général les schémas ne se relèvent pas. D'autre part, le foncteur image directe n'est pas en général le foncteur dérivé d'un foncteur.

Si U est un ouvert de Y, notons f_U la restriction de f à U, et si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un complexe de $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$, notons $\mathscr{H}^i_f(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ le préfaisceau sur Y à valeurs dans la catégorie abélienne des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules spéciaux qui à un ouvert U associe le i-ème faisceau de cohomologie $h^i(f_{U*}^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ du complexe $f_{U*}^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Théorème 11.5.3. — *Soit $\mathcal{B}$ un recouvrement de Y par des ouverts. Il existe alors une suite spectrale dont le terme $\mathbb{E}_2$ est $H^j(\mathcal{B}, \mathscr{H}^i_f(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$ et dont le terme $\mathbb{E}_\infty$ est le module bigradué associé à une filtration convenable du module gradué $h^{i+j}(f_*^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$.*

Démonstration. Soit

$$i_{f*,0}^{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} = i_{f*}^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{I}^\bullet_{\mathrm{inf}}$$

une résolution $\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-injective spéciale de $i_{f*}^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Alors, le complexe $p_{*,0}^{\mathrm{diff}}\,(\mathcal{I}^\bullet_{\mathrm{inf}})$ est isomorphe en catégorie dérivée au complexe $f_*^{\mathrm{diff}}\,(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$.

Pour un ouvert U de Y, on désignera par p_U la projection $U \times X \to X$. Soient $\mathcal{B}$ un recouvrement de Y par des ouverts et $\mathcal{I}_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module à gauche spécial. Notons $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{B}, p_{*,0}^{\mathrm{diff}}, \mathcal{I}_{\mathrm{inf}})$ le complexe de Cech du recouvrement dont la valeur sur un ouvert U est le $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module spécial $p_{U,*,0}^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{I}_{\mathrm{inf}}$, et notons $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{B}, p_{*,0}^{\mathrm{diff}}, \mathcal{I}^\bullet_{\mathrm{inf}})$ le bicomplexe de Čech du recouvrement $\mathcal{B}$.

Il suffit de montrer que pour tout $\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module **injectif spécial** $\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}}$ le complexe $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{B}, p^{\mathrm{diff}}_{*,0}, \mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}})$ est une résolution de $p^{\mathrm{diff}}_{*,0}\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}}$. En effet, la suite spectrale du bicomplexe $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{B}, p^{\mathrm{diff}}_{*,0}, \mathcal{I}^\bullet_{\mathrm{inf}})$ montre alors le théorème.

La question est alors locale sur X. Pour un ouvert $\mathcal{W}^\dagger$ de $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, la valeur du module $p^{\mathrm{diff}}_{*,0}\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}}[-\dim Y]$ sur l'ouvert $\mathcal{W}^\dagger$ est :

$$p_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}^\dagger}(\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}})\big),$$

et la valeur du module $p^{\mathrm{diff}}_{U*,0}\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}}[-\dim Y]$ sur l'ouvert $\mathcal{W}^\dagger$ est :

$$p_{U*}\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/K}}(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}, \mathcal{I}^j_{\mathcal{U}^\dagger\times_V\mathcal{W}^\dagger}).$$

Le complexe de Čech :

$$\mathcal{C}^\bullet\big(\mathcal{B}\times W, \mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}^\dagger}(\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}})\big)\big)$$

du recouvrement produit $\mathcal{B}\times W$ à valeurs dans le faisceau de Zariski $\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}^\dagger}(\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}})\big)$, dont les termes locaux sont les faisceaux $\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/K}}(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}, \mathcal{I}^j_{\mathcal{U}^\dagger\times_V\mathcal{W}^\dagger})$, est une résolution de ce faisceau :

$$\begin{aligned}0\to \mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}^\dagger}(\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}})\big)\to\\ \to \mathcal{C}^\bullet\big(\mathcal{B}\times W, \mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}^\dagger}(\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}})\big)\big).\end{aligned}$$

Il suffit de voir que l'image directe reste une résolution :

$$\begin{aligned}0\to p_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}^\dagger}(\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}})\big)\to\\ \to p_*\mathcal{C}^\bullet\big(\mathcal{B}\times W, \mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}^\dagger}(\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}})\big)\big),\end{aligned}$$

qui, par construction, est le complexe :

$$0\to p^{\mathrm{diff}}_{*,0}\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}}\to\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{B}, p^{\mathrm{diff}}_{*,0}, \mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}}).$$

Or, l'extension $q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/K}\to\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\times_V\mathcal{W}^\dagger/K}$ est **plate**, comme on peut le voir sur V en considérant la filtration par les échelons et en appliquant le critère de platitude locale 2.0.3. Le $q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/K}$-module $\mathcal{I}^j_{\mathcal{U}^\dagger\times_V\mathcal{W}^\dagger}$ reste donc

injectif. Il en résulte que le faisceau :

$$\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/K}}(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}, \mathcal{I}^j_{\mathcal{U}^\dagger\times_V\mathcal{W}^\dagger})$$

est **flasque**. La résolution de Čech du faisceau flasque :

$$\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\left(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{W}^\dagger}(\mathcal{I}^j_{\mathrm{inf}})\right)$$

est une résolution par des faisceaux flasques, et l'image directe est une résolution. ■

Cette suite spectrale ramène souvent les propriétés de l'image directe au cas où Y est affine, ce qui est très utile dans la pratique.

Définition 11.5.4. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses sur k, et soient $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats de Y et X. On définit le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}$ comme le module de transfert induit par un relèvement local à la source et au but du morphisme, ce qui est légitime puisqu'en vertu du théorème 10.5.2 le module de transfert ne dépend pas du relèvement. On définit le module de transfert sur K par :*

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/K} := \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}\otimes_V K.$$

Nous allons étudier le rapport entre les foncteurs images directes dans le cas des relèvements des schémas.

Théorème 11.5.5. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses sur k, où X est séparé. Soient $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats, alors le diagramme suivant est* **commutatif** *:*

$$\begin{array}{rccc}
f_*^{\mathrm{diff}} := f^{\mathrm{diff}}_{*,\mathscr{Y}^\dagger,\mathscr{X}^\dagger} : & D^b((\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K})\text{-Mod}) & \longrightarrow & D^b((\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K})\text{-Mod}) \\
 & \Big\downarrow P_{\mathscr{Y}^\dagger} & & \Big\downarrow P_{\mathscr{X}^\dagger} \\
f_*^{\mathrm{diff}} : & D^b((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}) & \longrightarrow & D^b((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}),
\end{array}$$

où le foncteur de la première ligne est le foncteur défini par le module de transfert :

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger} \rightsquigarrow \boldsymbol{R}f_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger})$$

et où les flèches verticales sont les foncteurs de prolongement canonique.

Démonstration. Le foncteur de la première ligne est le foncteur :

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger} \rightsquigarrow \boldsymbol{R}f_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger}),$$

ce qui nécessite que $\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger}$ soit cohomologiquement borné. Dans le cas d'une immersion fermée, le théorème est vrai par construction ; même sur V. Le

cas d'une projection est plus délicat. Le produit fibré $\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger$ existe et est un relèvement lisse de $Y \times_k X$ ([A-M$_2$]).

Lemme 11.5.6. — *Il existe un isomorphisme canonique :*

$$q^{-1}\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V},$$

de $(p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V})$*-bimodules.*

Démonstration. On définit le morphisme de $(p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V})$-bimodules :

$$q^{-1}\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{H}om_V(p^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \omega_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V})$$

par $(dy\otimes P) \mapsto \big(dx \to (dx\otimes dy)P\big)$. Par réduction modulo $\mathfrak{m}^s$, on obtient un opérateur différentiel dont le degré est localement borné par une fonction linéaire en s. D'où le morphisme :

$$(*) : \qquad q^{-1}\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V}.$$

Le module $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à droite de type fini, et le conoyau du morphisme $(*)$ est donc nul en vertu du lemme de Nakayama, parce que de type fini et de réduction modulo $\mathfrak{m}$ nulle. Le morphisme $(*)$ est filtré par :

$$(*)_h : \qquad q^{-1}\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^{\dagger,h}/V}} \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V}.$$

Le module $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V}$ est un $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à droite de type fini, et le conoyau du morphisme $(*)_h$ est donc nul en vertu du lemme de Nakayama, parce que de type fini et de réduction modulo $\mathfrak{m}$ nulle. Le module $\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V}$ est sans $\mathfrak{m}$-torsion et le noyau du morphisme $(*)_h$ est nul modulo $\mathfrak{m}^s$ pour tout $s \geqslant 1$. Comme $q^{-1}\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V}\otimes_{q^{-1}\mathscr{D}_{\mathscr{Y}^{\dagger,h}/V}} \mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/V}$ est séparé pour topologie $\mathfrak{m}$-adique comme module de type fini sur un anneau de Zariski (non commutatif), il en résulte que le noyau de $(*)_h$ est nul pour tout $h \geqslant 0$, ce qui entraîne que le noyau du morphisme $(*)$ est nul. □

En particulier, le lemme entraîne l'isomorphisme canonique :

$$q^{-1}\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/K} \otimes_{q^{-1}\mathscr{D}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K} \simeq \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K},$$

de $(p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K})$-bimodules. Mais en vertu du lemme 6.7.1, il existe un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée des $q^{-1}\mathscr{D}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}$-modules à droite :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}, q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K})[\dim Y] \simeq q^{-1}\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/K}.$$

Le fibré $q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}$ est un $q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}$-module à gauche parfait, en vertu du lemme 6.7.1. Pour tout complexe $\mathcal{M}^\dagger$ de $D^+\left((\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K})\text{-Mod}\right)$ on trouve des isomorphismes canoniques dans la catégorie dérivée de la catégorie des $p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$-modules à gauche :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K},\mathcal{M}^\dagger)[\dim Y]\simeq q^{-1}\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/K}\overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}\mathcal{M}^\dagger\simeq$$
$$\simeq\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}\overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}}\mathcal{M}^\dagger.$$

En appliquant cet isomorphisme à une résolution injective $\mathcal{I}^\dagger$ de $\mathcal{M}^\dagger$, on trouve effectivement que $p_*^{\mathrm{diff}}P_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger)$ est canoniquement isomorphe à $P_{\mathscr{X}^\dagger}\left(\boldsymbol{R}p_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}\overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}}\mathcal{M}^\dagger)\right)$.

Dans le cas général, le théorème résulte du fait que l'image directe pour les modules spéciaux est, par définition, la composée du cas d'une immersion fermée suivie du cas de la projection, et de l'isomorphisme :

$$i_f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}\overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{i_f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/K}\simeq\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/K}$$

conséquence du théorème 10.5.1. ■

Le foncteur image directe dans la catégorie des modules spéciaux sur K sur le site infinitésimal p-adique prolonge, comme il se doit, le foncteur image directe lorsque les relèvements existent. Il s'applique aux morphismes de variétés qui se relèvent, courbes lisses, variétés abéliennes, grassmanniennes, etc. sans que les morphismes ne se relèvent.

Remarque 11.5.7. — C'est bien pour faire coïncider les deux foncteurs d'image directe que l'on a mis le décalage $[\dim Y]$ dans la définition du foncteur $p_{*,0}^{\mathrm{diff}}$.

Il nous faut maintenant étudier l'indépendance du foncteur image directe f_*^{diff} de la factorisation du morphisme f.

THÉORÈME 11.5.8. — *Soit une composition de morphismes de schémas lisses sur k : $Z\xrightarrow{i}Y\times_kX\xrightarrow{p}X$, où i est une immersion fermée et p une projection. Si nous supposons que $p\circ i$ est une* **immersion fermée**, *alors*

le foncteur $p^{\mathrm{diff}}_{*,0} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*,0}$ *est* **exact**, *et il existe un isomorphisme canonique de foncteurs de la catégorie* $(\mathscr{D}^\dagger_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})$-Mod *:*

$$p^{\mathrm{diff}}_{*,0} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*,0} \longrightarrow (p \circ i)^{\mathrm{diff}}_{*,0}$$

et un isomorphisme canonique de foncteurs de $D^b((\mathscr{D}^\dagger_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}))$ *:*

$$p^{\mathrm{diff}}_{*} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*} \longrightarrow (p \circ i)^{\mathrm{diff}}_{*}.$$

Démonstration. Soit z un point de Z et soit T un voisinage affine de $q(i(z))$, où q est la projection de $Y \times_k X$ sur Y. Soit U un ouvert affine voisinage de $p \circ i(z)$ dans X. Puisque $p \circ i$ est par hypothèse une **immersion fermée**, quitte à remplacer U par un ouvert affine plus petit, on peut supposer que sa trace W sur Z est contenue dans l'image inverse de T par $q \circ i$.

Si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module spécial, les restrictions à U des complexes $p^{\mathrm{diff}}_{*} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ et $(p \circ i)^{\mathrm{diff}}_{*}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ ne dépendent par construction que de la restriction de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ à W et du morphisme $W \xrightarrow{i} T \times_k U \xrightarrow{p} U$, où i est l'immersion fermée induite et p la projection induite. Mais W, T et U sont affines et admettent des relèvements plats $\mathcal{W}^\dagger, \mathscr{T}^\dagger, \mathcal{U}^\dagger$. En vertu du théorème 11.5.5, on a les isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned}
(p \circ i)^{\mathrm{diff}}_{*}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}}) &\simeq (p \circ i)_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/K} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/K}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}}),\\
i^{\mathrm{diff}}_{*}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}}) &\simeq i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{T}^\dagger \times_V \mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/K} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/K}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}}),\\
p^{\mathrm{diff}}_{*} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}}) &\simeq p_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathscr{T}^\dagger \underset{\hat{V}}{\times} \mathcal{U}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{T}^\dagger \times_V \mathcal{U}^\dagger/K}}{\otimes}} i_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{T}^\dagger \underset{\hat{V}}{\times} \mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/K} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/K}}{\otimes} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}}\big)\big).
\end{aligned}$$

En vertu du théorème 10.5.1, on a un isomorphisme canonique :

$$\begin{aligned}
&i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathscr{T}^\dagger \times_V \mathcal{U}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{T}^\dagger \times_V \mathcal{U}^\dagger/K}}{\otimes}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{T}^\dagger \times_V \mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/K} \simeq\\
&\qquad \simeq i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathscr{T}^\dagger \times_V \mathcal{U}^\dagger/K} \underset{i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{T}^\dagger \times_V \mathcal{U}^\dagger/K}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{T}^\dagger \times_V \mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/K} \simeq \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/K}.
\end{aligned}$$

Cela montre que les restrictions à $\mathcal{U}^\dagger$ des complexes :

$$p^{\mathrm{diff}}_{*} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \quad \text{et} \quad (p \circ i)^{\mathrm{diff}}_{*}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

sont isomorphes. Mais le foncteur $(p \circ i)^{\mathrm{diff}}_{*,0}$ est exact, puisque par hypothèse l'immersion $p \circ i$ est fermée, et donc le complexe $p^{\mathrm{diff}}_{*} \circ i^{\mathrm{diff}}_{*}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est

concentré cohomologiquement en degré zéro. Le foncteur $p_{*,0}^{\mathrm{diff}} \circ i_{*,0}^{\mathrm{diff}}$ est alors exact.

Les $\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche spéciaux :

$$p_{*,0}^{\mathrm{diff}} \circ i_{*,0}^{\mathrm{diff}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}) \quad \text{et} \quad (p \circ i)_{*,0}^{\mathrm{diff}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$$

sont localement isomorphes. Il reste à voir que ces isomorphismes locaux sont compatibles.

Mais si $\mathscr{T}'$ est un autre relèvement de T, les modules :

$$i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}\leftarrow\mathscr{T}^{\dagger}\times_V\mathcal{U}^{\dagger}/K} \otimes_{i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{T}^{\dagger}\times_V\mathcal{U}^{\dagger}/K}} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{T}^{\dagger}\times_V\mathcal{U}^{\dagger}\leftarrow\mathcal{W}^{\dagger}/K}$$

et

$$i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}\leftarrow\mathscr{T}'^{\dagger}\times_V\mathcal{U}^{\dagger}/K} \otimes_{i^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{T}'^{\dagger}\times_V\mathcal{U}^{\dagger}/K}} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{T}'^{\dagger}\times_V\mathcal{U}^{\dagger}\leftarrow\mathcal{W}^{\dagger}/K}$$

sont canoniquement isomorphes. Cela montre que l'isomorphisme local entre les modules $p_{*,0}^{\mathrm{diff}} \circ i_{*,0}^{\mathrm{diff}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ et $(p \circ i)_{*,0}^{\mathrm{diff}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ ne dépend pas du relèvement de T, puis par construction, ne dépend pas des relèvements de U et de W.

Les $\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}$-modules $p_{*,0}^{\mathrm{diff}} \circ i_{*,0}^{\mathrm{diff}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ et $(p\circ i)_{*,0}^{\mathrm{diff}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ sont canoniquement isomorphes, les foncteurs $p_{*,0}^{\mathrm{diff}} \circ i_{*,0}^{\mathrm{diff}}$ et $(p \circ i)_{*,0}^{\mathrm{diff}}$ sont canoniquement isomorphes et les foncteurs $p_{*}^{\mathrm{diff}} \circ i_{*}^{\mathrm{diff}}$ et $(p\circ i)_{*}^{\mathrm{diff}}$ sont aussi canoniquement isomorphes comme foncteurs dérivés de foncteurs exacts canoniquement isomorphes. ■

Proposition 11.5.9. — *Soit $Y \times_k (X \times_k Z) \xrightarrow{p_1} X \times_k Z \xrightarrow{p_2} Z$ une composition de deux projections de schémas lisses sur k. Il existe alors un isomorphisme canonique de foncteurs : $p_{2*}^{\mathrm{diff}} \circ p_{1*}^{\mathrm{diff}} \simeq (p_2 \circ p_1)_{*}^{\mathrm{diff}}$ de $D^{+}\big((\mathscr{D}^{\dagger}_{(Y\times_k X\times_k Z)^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}\big)$ vers $D^{+}\big((\mathscr{D}^{\dagger}_{Z^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}\big)$.*

Démonstration. Voyons d'abord que la première projection transforme module à gauche spécial injectif en module à gauche spécial **acyclique** pour la seconde projection. La question étant locale sur Z, on peut supposer qu'il existe un relèvement plat $\mathcal{Z}^{\dagger}$ de Z. Supposons alors, dans un premier temps, qu'il existe aussi des relèvements plats $\mathscr{Y}^{\dagger}$ et $\mathscr{X}^{\dagger}$ de Y et X respectivement. Le morphisme canonique :

$$p_1^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{Z}^{\dagger}\leftarrow\mathscr{X}^{\dagger}\times_V\mathcal{Z}^{\dagger}/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{p_1^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}\times_V\mathcal{Z}^{\dagger}/K}}{\otimes}} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}\times_V\mathcal{Z}^{\dagger}\leftarrow\mathscr{Y}^{\dagger}\times_V\mathscr{X}^{\dagger}\times_V\mathcal{Z}^{\dagger}/K} \to$$

$$\to p_1^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{Z}^{\dagger}\leftarrow\mathscr{X}^{\dagger}\times_V\mathcal{Z}^{\dagger}/K} \underset{p_1^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}\times_V\mathcal{Z}^{\dagger}/K}}{\otimes} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}\times_V\mathcal{Z}^{\dagger}\leftarrow\mathscr{Y}^{\dagger}\times_V\mathscr{X}^{\dagger}\times_V\mathcal{Z}^{\dagger}/K}$$

est un isomorphisme, parce que le $p_1^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\times_V\mathscr{Z}^\dagger/K}$-module à gauche :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\times_V\mathscr{Z}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger\times_V\mathscr{Z}^\dagger/K}$$

est plat. Le morphisme canonique :

$$p_1^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger\leftarrow\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger/K}\underset{p_1^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger/K}}{\otimes}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger/K}\to\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger/K}$$

est un isomorphisme de $\big((p_2\circ p_1)^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger/K},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger\times_V\mathscr{Z}^\dagger/K}\big)$-bimodules, parce que p_1 et p_2 sont des projections. Cela entraîne que pour tout complexe $\mathcal{M}^\dagger$ de $D^b(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger\times_V\mathscr{Z}^\dagger/K}\text{-Mod})$, le morphisme canonique :

$$\begin{aligned}(*):\big(p_1^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger\leftarrow\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger/K}\overset{\boldsymbol{L}}{\underset{p_1^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger/K}}{\otimes}}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger/K}\big)\overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger/K}}{\otimes}}\mathcal{M}^\dagger\to\\ \to\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger/K}\overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{X}^\dagger\underset{V}{\times}\mathscr{Z}^\dagger/K}}{\otimes}}\mathcal{M}^\dagger\end{aligned}$$

est un isomorphisme dans la catégorie dérivée de $(p_2\circ p_1)^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger/K}$-modules à gauche. L'isomorphisme $(*)$ donne l'isomorphisme dans la catégorie dérivée de la catégorie des $(p_2\circ p_1)^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger/K}$-modules à gauche :

$$\begin{aligned}(**):\ \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{(q\circ p_1)^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}\big((q\circ p_1)^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K},\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K},\mathcal{M}^\dagger\big)\big)\to\\ \to\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K},\mathcal{M}^\dagger\big),\end{aligned}$$

parce que le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathscr{T}^\dagger/K}$ d'un schéma †-adique lisse $\mathscr{T}^\dagger$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{T}^\dagger/K}$-module à gauche parfait en vertu du lemme 6.7.1, où l'on désigne par q la projection sur le premier facteur. En appliquant le foncteur $\boldsymbol{R}p_{1_*}$, on trouve un isomorphisme dans la catégorie dérivée de la catégorie des $p_2^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger/K}$-modules à gauche :

$$\begin{aligned}(***):\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K},\boldsymbol{R}p_{1_*}\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K},\mathcal{M}^\dagger\big)\big)\to\\ \to\boldsymbol{R}p_{1_*}\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K},\mathcal{M}^\dagger\big),\end{aligned}$$

parce que le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathscr{T}^\dagger/K}$ d'un schéma †-adique lisse $\mathscr{T}^\dagger$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{T}^\dagger/K}$-module à gauche parfait.

Si $\mathcal{I}^\dagger$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger\times_V\mathscr{Z}^\dagger/K}$-module à gauche supposé injectif, il reste injectif comme $q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}$-modules à gauche et comme $q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}$-module à gauche. L'isomorphisme $(***)$ devient de fait un isomorphisme de $p_2^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}^\dagger/K}$-modules à gauche :

$$(****):\ \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}, p_{1_*}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K},\mathcal{I}^\dagger\big)\big)\simeq$$
$$\simeq p_{1_*}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K},\mathcal{I}^\dagger\big),$$

parce que le faisceau $\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}}(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K},\mathcal{I}^\dagger)$ est flasque et donc le faisceau $p_{1_*}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}}(q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K},\mathcal{I}^\dagger)$ est aussi flasque.

En appliquant le foncteur $\boldsymbol{R}p_{2_*}$ à la formule $(****)$, on voit que $p^{\mathrm{diff}}_{1_{*,0}}\mathcal{I}^\dagger$ est acyclique pour le foncteur $p^{\mathrm{diff}}_{2_{*,0}}$ et, en même temps, que $p^{\mathrm{diff}}_{2_{*,0}}\circ p^{\mathrm{diff}}_{1_{*,0}}(\mathcal{I}^\dagger)$ et $(p_{2_{*,0}}\circ p_{1_{*,0}})^{\mathrm{diff}}(\mathcal{I}^\dagger)$ sont canoniquement isomorphes.

L'isomorphisme $(****)$ se recolle naturellement en un isomorphe de $p_2^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{Z}^\dagger/K}$-modules à gauche pour tout Y, qu'il admette ou non de relèvement plat global $\mathscr{Y}^\dagger$.

Dans le cas général, pour tous Y et X, si $\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module à gauche spécial et injectif, la méthode précédente montre, que l'isomorphisme $(****)$ se recolle en un isomorphisme de complexes de $p_2^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{Z}^\dagger/K}$-modules à gauche :

$$(****)_{\mathrm{inf}}:\ \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{Z}^\dagger}\big(p^{\mathrm{diff}}_{1_*}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)\big)$$
$$\simeq p_{1_*}\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{(Y\underset{k}{\times}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{(Y\underset{k}{\times}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathcal{Z}^\dagger}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)$$

avec les notations 11.4.4. Cet isomorphisme implique que $p^{\mathrm{diff}}_{1_{*,0}}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est acyclique pour le foncteur $p^{\mathrm{diff}}_{2_{*,0}}$.

En vertu de ce qui précède, $p^{\mathrm{diff}}_{2_*}(p^{\mathrm{diff}}_{1_*}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$ et $p^{\mathrm{diff}}_{2_*}\circ p^{\mathrm{diff}}_{1_*}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ sont deux $\mathscr{D}^\dagger_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche spéciaux en degré $-[\dim Y+\dim X]$, et il suffit donc de montrer qu'ils sont canoniquement isomorphes. Par construction, la restriction de $p^{\mathrm{diff}}_{2_{*,0}}(p^{\mathrm{diff}}_{1_{*,0}}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}))[-\dim Y-\dim X]$ à l'ouvert $\mathcal{Z}^\dagger$ est le

faisceau :

$$p_{2*}\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\inf}/K}}(q^{-1}\mathcal{O}_{X^\dagger_{\inf}/K}, R_{X^\dagger_{\inf}\times\mathcal{Z}^\dagger}(p^{\mathrm{diff}}_{1*}\mathcal{I}^\dagger_{\inf}))[-\dim Y],$$

alors que la restriction à l'ouvert $\mathcal{Z}^\dagger$ du faisceau

$$(p_2\circ p_1)^{\mathrm{diff}}_{*,0}\,(\mathcal{I}^\dagger_{\inf})[-\dim Y-\dim X]$$

est le faisceau :

$$(p_2\circ p_1)_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X)^\dagger_{\inf}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{(Y\times_k X)^\dagger_{\inf}/K}, R_{(Y\times_k X)^\dagger_{\inf}\times\mathcal{Z}^\dagger}(\mathcal{I}^\dagger_{\inf})\big).$$

Ces deux $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{Z}^\dagger/K}$-modules à gauche sont des images directes de $p_2^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{Z}^\dagger/K}$-modules à gauche donnés localement qui sont canoniquement isomorphes.■

Corollaire 11.5.10. — *Soit un morphisme $f : Y \to X$ de schémas lisses sur k où X est séparé, et soit $Y \xrightarrow{i} P\times_k X \xrightarrow{p} X$ une factorisation de f par une immersion fermée suivie d'une projection, où P est un schéma lisse sur k, et telle que le morphisme induit $Y \to Y\times_k P\times_k X$ est une immersion fermée. Alors, le foncteur f^{diff}_* est canoniquement isomorphe au foncteur $p^{\mathrm{diff}}_*\circ i^{\mathrm{diff}}_*$.*

Démonstration. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & Y\times_k X \arrow[dr] & \\
Y\to Y\times_k P\times_k X \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr] & & X, \\
 & P\times_k X \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où le composé de deux morphismes non tous deux horizontaux est soit un composé de deux projections soit un composé d'une immersion fermée et d'une projection qui est une immersion fermée. On est réduit aux résultats précédents.

En particulier, si X est séparé, pour une immersion fermée $Y \to X$, le foncteur image directe est canoniquement isomorphe au foncteur construit à l'aide de la factorisation canonique et pour une projection $Y\times_k X \to X$ le foncteur image directe est aussi canoniquement isomorphe au foncteur construit à l'aide de la factorisation canonique. ■

Exemples 11.5.11. — 1) Si X est le point $\mathrm{Spec}(k)$, le complexe $f^{\mathrm{diff}}_*\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\inf}/K}$ est un complexe de $D^+(K)$ qui est à cohomologie de dimension finie sur K lorsque Y est une variété algébrique lisse en vertu du théorème de finitude 6.6.2. Ce théorème a présenté de sérieuses difficultés pendant près d'un quart de siècle dans le cas

d'une variété qui se relève [Me$_2$], qui est aussi à la base des progrès significatifs de la théorie p-adique.

2) Plus généralement, pour **tout morphisme** f de schémas de type fini et lisses sur k, le complexe spécial $f_*^{\mathrm{diff}}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ sur la base X est l'analogue p-adique du complexe de Gauss-Manin en caractéristique nulle, dont on s'attend naturellement à ses propriétés de finitude. Cela semble de nouveau présenter de sérieuses difficultés, sauf qu'aujourd'hui on est mieux équipé. Un cas intéressant est celui d'un morphisme propre et lisse sur une courbe, où l'on s'attend à ce que les images directes soient des fibrés p-adiques dont les rangs donnent les nombres de Betti p-adiques des fibres.

Remarques 11.5.12. — 1) Sous la condition $e < p^h(p-1)$, on peut reprendre les constructions précédentes pour construire les foncteurs $f_*^{\mathrm{diff},h}$ sur K.

2) Le module $q^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$ n'est pas un $q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-module à gauche de présentation finie, parce que l'idéal d'augmentation $(\Delta^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n)$ n'est pas de type fini, et on ne peut pas appliquer le raisonnement du théorème 11.5.5 sur V.

3) Mais dans le cas $h = 0$, on peut si $e < p-1$ reprendre les constructions précédentes pour définir les foncteurs $f_*^{\mathrm{diff},0}$ sur V, et on peut appliquer le raisonnement du théorème 11.5.5, sur V, pour montrer que

$$R_{\mathscr{X}^\dagger}(f_*^{\mathrm{diff},0}\mathcal{M}^{\dagger,0}_{\mathrm{inf}}) \simeq \boldsymbol{R}f_*\big(\mathscr{D}^{\dagger,0}_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{\dagger,0}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} R_{\mathscr{Y}^\dagger}(\mathcal{M}^{\dagger,0}_{\mathrm{inf}})\big)$$

est un isomorphisme pour des relèvements de Y et de X.

11.6. Le foncteur image directe pour les modules à droite spéciaux

En remplaçant le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}$ par $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$, on définit le foncteur $i^{\mathrm{diff}}_{*,0}$ pour la catégorie Mod-$(\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$ et, en remplaçant le $\mathscr{D}^\dagger_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial $\mathcal{O}_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ par le $\mathscr{D}^\dagger_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à droite spécial $\omega_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$, on définit le foncteur $p^{\mathrm{diff}}_{*,0}$ pour la catégorie Mod-$(\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$. On dispose donc, sur K et quand le but est séparé, du foncteur image direct f_*^{diff} pour les catégories de modules à droite spéciaux, qui a des propriétés parallèles à celles du foncteur image directe des modules à gauche.

12. Le foncteur de cohomologie locale et ses compatibilités avec les foncteurs images directe et inverse

12.1. Le foncteur de cohomologie locale dans le cas des faisceaux

Soit $X := (X, \mathcal{O}_{X/R_1})$ un schéma lisse sur R_1, et soit $i : Z \hookrightarrow X$ un fermé de l'espace topologique X, de complémentaire $j : X - Z \hookrightarrow X$.

Proposition 12.1.1. — *Soit $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ un faisceau de $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Les données qui à un ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ associent le faisceau $\Gamma_Z(\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger})$ et le faisceau $j_*j^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ définissent alors des faisceaux de $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules sur le site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, notés respectivement $\Gamma_Z(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}})$ et $j^{\mathrm{inf}}_* j^{-1}_{\mathrm{inf}}\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$.*

Démonstration. Il s'agit de voir que si $\mathcal{W}^\dagger$ et $\mathcal{U}^\dagger$ sont deux ouverts de $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ avec $r : W \subset U$, le morphisme de restriction ($\sharp$) induit des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc}
R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes\limits_{r^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\Gamma_Z(\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}) & \to & R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes\limits_{r^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} & \to & R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes\limits_{r^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}j_*j^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\Gamma_Z(\mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger} & \longrightarrow & j_*j^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}
\end{array}$$

qui sont transitifs (*cf.* 4.2.1). Le morphisme canonique :

$$R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes\limits_{r^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}j_*j^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \to j_*\big(j^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes\limits_{r^{-1}j^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}j^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}\big)$$

est un isomorphisme, parce que $R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}]$ est un $r^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]$-module localement libre de rang 1. Mais le morphisme :

$$(\sharp\sharp) : \qquad j^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger}] \otimes\limits_{r^{-1}j^{-1}R[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}j^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \to j^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger},$$

qui est le morphisme de restriction du couple $(\mathcal{W}^\dagger|j^{-1}W, \mathcal{U}^\dagger|j^{-1}U)$, est un isomorphisme. Les familles $\Gamma_Z(\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger})$ et $j_*j^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger}$ ont toutes les propriétés des faisceaux de $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules. ■

Remarque 12.1.2. — Dans le raisonnement précédent on peut remplacer le faisceau $R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ par un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ et définir les foncteurs de cohomologie locale dans la catégorie $\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-Mod.

Définition 12.1.3. — *Si Z est un fermé de X, on définit ainsi deux foncteurs exacts à gauche qu'on peut dériver dans la catégorie $D^+(R_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})$ et obtenir le triangle de cohomologie locale habituel :*

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Z(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}) \to \mathcal{F}_{\mathrm{inf}} \to \boldsymbol{R}j^{\mathrm{inf}}_* j^{-1}_{\mathrm{inf}}\mathcal{F}_{\mathrm{inf}} \to \cdot$$

12.2. Le foncteur de cohomologie locale dans le cas des modules spéciaux

Si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-module à gauche spécial, le même raisonnement montre que $\Gamma_Z(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ et $j^{\mathrm{inf}}_* j^{-1}_{\mathrm{inf}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sont des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-modules à gauche spéciaux et définissent des foncteurs covariants exacts à gauche qu'on peut dériver dans la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod})$.

Définition 12.2.1. — *Si Z est un fermé de X, on définit ainsi deux foncteurs covariants exacts à gauche qu'on peut dériver dans la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp})\text{-Mod})$, et obtenir le triangle de cohomologie locale habituel :*

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Z(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \boldsymbol{R}j^{\mathrm{inf}}_* j^{-1}_{\mathrm{inf}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to,$$

qui pour tout ouvert se restreint par construction au complexe de cohomologie locale usuelle.

Proposition 12.2.2. — *Soient Z un fermé de X, $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe borné à gauche et $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe borné à droite de modules à gauche spéciaux. Alors, il existe un isomorphisme canonique de complexes de Zariski de la catégorie $D(R_X)$:*

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}\big(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\boldsymbol{R}\Gamma_Z(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big) \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Z\big(\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ la résolution injective par des modules spéciaux injectifs de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ construite localement par la résolution injective de Godement. Le complexe $\Gamma_Z(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est une résolution injective par des modules spéciaux de $\boldsymbol{R}\Gamma_Z(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$, et le complexe $\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}\big(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\Gamma_Z(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)$ est alors une résolution du complexe $\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}\big(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\boldsymbol{R}\Gamma_Z(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)$. D'autre part, $\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est un complexe de faisceaux de Zariski flasques, de sorte que le complexe $\Gamma_Z\big(\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)$ est une résolution du complexe $\boldsymbol{R}\Gamma_Z\big(\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)$. L'isomorphisme de la proposition provient de l'isomorphisme canonique de faisceaux de Zariski :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}\big(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\Gamma_Z(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big) \simeq \Gamma_Z\big(\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})\big)$$

pour deux modules à gauche spéciaux. ■

Remarque 12.2.3. — L'extension $V[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}] \to \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}]$ est plate, et les foncteurs de cohomologie locale calculés dans $D^+((V_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}})\text{-Mod})$ et $D^+((\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})\text{-Mod})$ coïncident. Mais l'extension $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}[\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}] \to \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ est loin d'être plate, même sur K. Aussi, les foncteurs de cohomologie locale sont distincts lorsque calculés dans les catégories :

$$D^+(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}\text{-Mod}) \text{ et } D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod}),$$

et leurs rapports posent des problèmes non triviaux.

Proposition 12.2.4. — *Si X est un schéma séparé et lisse sur k, les foncteurs $\boldsymbol{R}j_*^{\mathrm{inf}} j_{\mathrm{inf}}^{-1}$ et $\boldsymbol{R}j_*^{\mathrm{diff}} j_{\mathrm{diff}}^*$ coïncident canoniquement dans la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$, où $j : X - Z \hookrightarrow X$ est l'inclusion canonique.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe de $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. Si $\mathcal{U}^\dagger$ est un ouvert du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$, la valeur du complexe $\boldsymbol{R}j_*^{\mathrm{inf}} j_{\mathrm{inf}}^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sur l'ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ est par définition le complexe $\boldsymbol{R}j_* j^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$. Notons $j : U' := (X - Z) \cap U \hookrightarrow U$ l'inclusion canonique. L'espace annelé $\mathcal{U}'^\dagger := (U', j^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V})$ est un relèvement de U', donc les modules de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V}$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{U}'^\dagger/V}$ sont définis et valent $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}$ par construction. La valeur du complexe $j_{\mathrm{diff}}^*\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sur l'ouvert $\mathcal{U}'$ est $j^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ et, en vertu du théorème 11.5.5, la valeur du complexe $j_*^{\mathrm{diff}} j_{\mathrm{diff}}^*\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sur l'ouvert $\mathcal{U}^\dagger$ est le complexe $\boldsymbol{R}j_* j^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}$. En prenant une résolution injective de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, on voit que les foncteurs $\boldsymbol{R}j_*^{\mathrm{inf}} j_{\mathrm{inf}}^{-1}$ et $\boldsymbol{R}j_*^{\mathrm{diff}} j_{\mathrm{diff}}^*$ sont canoniquement isomorphes. ■

Remarque 12.2.5. — La possibilité de définir le triangle distingué de cohomologie locale dans le site infinitésimal †-adique dans le cas d'un relèvement, a été l'une des principales raisons du succès de notre point de vue [M-N$_1$] dès le début de la théorie.

12.3. Le théorème de pureté pour un couple lisse

Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k et soit $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement plat de X. On a alors le théorème de pureté suivant.

Théorème 12.3.1. — *Sous les conditions précédentes, les faisceaux $\mathscr{H}^i_Y(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ et $\mathscr{H}^i_Y(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ sont nuls si $i \neq \mathrm{codim}_X Y$.*

Démonstration. La question est locale. Commençons par le cas du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$.

LEMME 12.3.2. — *Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas lisses sur R_1 et soit $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement plat de X. Alors, $\mathscr{H}^i_Y(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}) = 0$ si $i > \operatorname{codim}_X Y$.*

Démonstration. La question étant locale, on peut supposer que le schéma X est affine et que l'idéal de Y est engendré par $x_1, \ldots, x_q$. Le complémentaire $X - Y$ admet le recouvrement affine $X - V(x_i)$, qui est acyclique pour le faisceau $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ en vertu du théorème d'acyclicité 2.2.4. Cela montre que $\mathscr{H}^i_Y(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}) = 0$ si $i > \operatorname{codim}_X Y$. □

LEMME 12.3.3. — *Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k et soit $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement plat de X. Alors, $\mathscr{H}^i_Y(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) = 0$ si $i < \operatorname{codim}_X Y$.*

Démonstration. La question est locale, et l'on peut supposer que X est affine d'algèbre †-adique $A^\dagger$. Soient $B^\dagger$ un relèvement lisse de Y, $u : A^\dagger \to B^\dagger$ un relèvement de i et $\mathcal{I}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$ le noyau de u.

Soit $x = (y, z)$ un couple adapté à u, au sens de 11.1.2. Notons $I_z := I_{z_1,\ldots,z_q}$ l'idéal engendré par $z_1, \ldots, z_q$. On peut considérer le $D_{A^\dagger/V}$-module à gauche :

$$\operatorname{alg} H^\bullet_Y(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) := \lim_{\to k} \operatorname{Ext}^\bullet_{A^\dagger}(A^\dagger/I_z^k, A^\dagger)$$

donné par les modules d'hypercohomologie du complexe :

$$\boldsymbol{R}\operatorname{alg}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) := \boldsymbol{R}\lim_{\to k} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}/\mathcal{I}^k_{\mathscr{Y}^\dagger/V}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}).$$

PROPOSITION 12.3.4. — *Il existe un isomorphisme de $D^\dagger_{A^\dagger/V}$-modules à gauche :*

$$D^\dagger_{A^\dagger/V} \otimes_{D_{A^\dagger/V}} \operatorname{alg} H^\bullet_Y(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \simeq H^\bullet_Y(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}).$$

Comme $\{z_1, \ldots, z_q\}$ forment une suite régulière dans $A^\dagger$, cela entraîne que les V-modules $\operatorname{Ext}^j_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}/\mathcal{I}^k_{\mathscr{Y}^\dagger/V}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ sont nuls pour $j < q$, et la proposition implique donc le lemme 12.3.3 précédent.

Reste à montrer l'isomorphisme de la proposition. Si $\mathcal{I}^\dagger_1$ et $\mathcal{I}^\dagger_2$ sont deux idéaux de type fini de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ et Y_1, Y_2 les supports de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}/\mathcal{I}^\dagger_1$ et de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}/\mathcal{I}^\dagger_2$, la suite de Mayer-Vietoris topologique fournit un triangle distingué :

$$\boldsymbol{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \to \boldsymbol{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Y_1}(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \oplus \boldsymbol{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Y_2}(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \to$$
$$\to \boldsymbol{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \to$$

et un triangle distingué :

$$\boldsymbol{R}\Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \to \boldsymbol{R}\Gamma_{Y_1}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \oplus \boldsymbol{R}\Gamma_{Y_2}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \to \\ \to \boldsymbol{R}\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \to \cdot$$

Prenant une résolution $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-injective de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ qui reste donc $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-injective. Comme l'extension $D_{A^\dagger/V} \to D^\dagger_{A^\dagger/V}$ est plate ([Me$_3$], Thm. 4.2.7), on trouve un morphisme de triangles :

$$\begin{tikzcd}
D^\dagger_{A^\dagger/V} \underset{D_{A^\dagger/V}}{\otimes} \boldsymbol{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \arrow[d] \arrow[dddr, bend left] & & \\
\boldsymbol{R}\Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \arrow[dr, bend left] & & \\
& D^\dagger_{A^\dagger/V} \underset{D_{A^\dagger/V}}{\otimes} \boldsymbol{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Y_1}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\bigoplus"] & D^\dagger_{A^\dagger/V} \underset{D_{A^\dagger/V}}{\otimes} \boldsymbol{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Y_2}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \arrow[d] \arrow[dddl, bend left] \\
& \boldsymbol{R}\Gamma_{Y_1}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \arrow[r, phantom, "\bigoplus"] & \boldsymbol{R}\Gamma_{Y_2}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \arrow[dr, bend left] \\
& & D^\dagger_{A^\dagger/V} \underset{D_{A^\dagger/V}}{\otimes} \boldsymbol{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \arrow[d] \\
& & \boldsymbol{R}\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(X,\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}).
\end{tikzcd}$$

En utilisant ce morphisme de triangles et en raisonnant par récurrence sur le nombre d'équations, on est ramené à montrer la proposition dans le cas de l'idéal engendré par $z_1\cdots z_r$ pour $1 \leqslant r \leqslant q$, ce qui est conséquence du lemme suivant.

Lemme 12.3.5. — *Sous les conditions précédentes, pour tout r tel que $1 \leqslant r \leqslant q$, le $D_{A^\dagger/V}$-module à gauche $A^\dagger[1/(z_1\cdots z_r)]$, resp. le $D^\dagger_{A^\dagger/V}$-module à gauche $(A^\dagger[1/(z_1\cdots z_r)])^\dagger$, est engendré par l'élément $1/(z_1\cdots z_r)$ dont l'annulateur est l'idéal engendré par les opérateurs différentiels :*

$$\Delta_1^{\alpha_1} z_1, \ldots, \Delta_r^{\alpha_r} z_r, \Delta_{r+1}^{\alpha_{r+1}}, \ldots, \Delta_n^{\alpha_n}$$

tels que $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_r > 0, \alpha_{r+1} > 0, \ldots, \alpha_n > 0$.

Démonstration. Commençons par $A^\dagger[1/(z_1\cdots z_r)]$, lequel est engendré en tant que $D_{A^\dagger/V}$-module à gauche, de façon évidente, par $1/(z_1\cdots z_r)$. Si P est un opérateur d'ordre fini qui annule $1/(z_1\cdots z_r)$, on peut le supposer de la forme $P = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^r} a_\alpha \Delta_1^{\alpha_1}\cdots\Delta_r^{\alpha_r}$. Considérons l'ordre lexicographique sur les r-uplets $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ et notons $\exp(P)$ le plus grand indice des indices des coefficients de P. La suite $z_1,\ldots,z_r$ étant régulière dans $A^\dagger$, il s'ensuit que le coefficient $a_{\exp(P)} = a_\alpha$ appartient à l'idéal

$(z_i, \alpha_i \neq 0)$. Modulo l'idéal $(\Delta_1^{\alpha_1} z_1, \ldots, \Delta_r^{\alpha_r} z_r, \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_r > 0)$, le polynôme P est alors égal à un opérateur dont l'exposant est strictement plus petit que $\exp(P)$. Par récurrence, on obtient que P appartient à l'idéal $(\Delta_1^{\alpha_1} z_1, \ldots, \Delta_r^{\alpha_r} z_r, \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_r > 0)$.

Passons au cas d'ordre infini. Le $D^\dagger_{A^\dagger/V}$-module $(A^\dagger[1/(z_1 \cdots z_r)])^\dagger$ est aussi engendré, de façon évidente, par $1/(z_1 \cdots z_r)$. Si P un opérateur d'ordre infini tel que $P(1/(z_1 \cdots z_r)) = 0$, on peut supposer que $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} a_\alpha \Delta_1^{\alpha_1} \cdots \Delta_r^{\alpha_r}$. Écrivons P sous la forme $\sum_\alpha \Delta_1^{\alpha_1} \cdots \Delta_r^{\alpha_r} a'_\alpha$. Considérons la réduction P_s modulo $\mathfrak{m}^s$ de P qui annule $1/(z_1 \cdots z_r)$. Le raisonnement du cas où l'ordre est fini montre que chaque coefficient a'_α appartient modulo $\mathfrak{m}^s$ à l'idéal $(z_i, \alpha_i \neq 0)$, et ces coefficients a'_α appartiennent donc à l'idéal $(z_i, \alpha_i \neq 0)$. En considérant une présentation de $A^\dagger$, on peut montrer, en vertu du théorème de continuité de la division par une base de division [M-N$_3$], qu'on peut écrire $a'_\alpha = \sum_{i, \alpha_i \neq 0} b_{\alpha,i} z_i$, de sorte que $P_i := \sum_{\alpha, \alpha_i \neq 0} \Delta_r^{\alpha_r} b_{\alpha,i}$ est encore un opérateur différentiel et que $P = \sum_i P_i z_i$. En raisonnant par récurrence sur la longueur des monômes en Δ qui interviennent dans P, on trouve que P appartient à l'idéal $(\Delta_1^{\alpha_1} z_1, \ldots, \Delta_r^{\alpha_r} z_r, \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_r > 0)$. Cela termine la démonstration du lemme 12.3.5, mais également celles de la proposition 12.3.4 et du lemme 12.3.3. □

Les mêmes raisonnements montrent que sous les conditions précédentes on a la nullité :

$$H^j_{Y \times_k A^n_k}(T^*X, \mathcal{O}_{(\mathscr{T}^*\mathscr{X})^\dagger/V}) = H^j_{Y \times_k A^n_k}(X \times_k A^n_k, \mathcal{O}_{(\mathscr{T}^*\mathscr{X})^\dagger/V}) = 0,$$

où $(\mathscr{T}^*\mathscr{X})^\dagger := (T^*X, \mathcal{O}_{(\mathscr{T}^*\mathscr{X})^\dagger/V})$ est le fibré cotangent †-adique de X, pour $j \neq \operatorname{codim}_X Y$. Mais en vertu du théorème du symbole total 2.4.2, on a l'isomorphisme :

$$H^j_{Y \times_k A^n_k}(X \times_k A^n_k, \mathcal{O}_{(\mathscr{T}^*\mathscr{X})^\dagger/V}) \simeq H^j_Y(X, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}),$$

et $H^j_Y(X, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}) = 0$ si $j \neq \operatorname{codim}_X Y$. On en déduit que :

$$\mathscr{H}^j_Y(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}) = 0$$

si $j \neq \operatorname{codim}_X Y$, puisque ce faisceau est associé au préfaisceau précédent. Cela termine la preuve du théorème 12.3.1. ■

Corollaire 12.3.6. — *Le foncteur* $\mathcal{U}^\dagger \rightsquigarrow \mathscr{H}_Y^{\operatorname{codim}_U Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})$ *définit un* $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\inf}/V}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\inf}/V})$*-bimodule* $\mathscr{H}_Y^{\operatorname{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\inf}/V})$ *sur le site infinitésimal* $X^\dagger_{\inf}$.

Démonstration. En effet, si $r^\dagger : \mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ est un morphisme, on définit

$$(\sharp)_{r^\dagger} : \qquad r^{-1}\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_U Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}) \to \mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_W Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V})$$

comme le morphisme induit par le morphisme de complexes

$$(\sharp)_{r^\dagger} : \qquad r^{-1}\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}) \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}),$$

dont on voit en considérant les résolutions locales de Čech que c'est un morphisme $(\sharp)_{r^\dagger}$-linéaire à droite et à gauche. Ces morphismes sont transitifs de façon naturelle. ■

Corollaire 12.3.7. — *Le foncteur :*

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$$

est covariant exact à droite de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod *dans elle-même.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial, le $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche :

$$\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$$

est spécial. Mais par construction, un élément g du groupe $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ agit par $gPg^{-1} \otimes gm = gP \otimes m$. ■

12.4. La comparaison entre la cohomologie locale et l'image directe dans le cas d'une immersion fermée. Le morphisme de foncteurs Adj^i_*

L'analogue de la proposition 12.2.4 pour une immersion fermée **n'a pas lieu** en général et son étude est beaucoup plus délicate. Nous allons utiliser le théorème de pureté pour construire un morphisme de foncteurs Adj^i_* entre les foncteurs $i_*^{\mathrm{diff}} i^*_{\mathrm{diff}}$ et $\boldsymbol{R}\Gamma_Y[\mathrm{codim}_X Y]$ pour une immersion fermée $i : Y \to X$ de schémas lisses sur le corps k.

Supposons que X est affine et soit $u : A^\dagger \to B^\dagger$ un relèvement de i et $x = (y, z)$ un système adapté à u.

LEMME 12.4.1. — *Pour X affine* **assez petit**, *le $D_{A^\dagger/V}$-module à gauche* $\operatorname{alg} H_Y^{\operatorname{codim}_X Y}(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ *est engendré par la classe* $[1/z] = [1/(z_1 \cdots z_q)]$ *dont l'annulateur est l'idéal*

$$\big(z_1, \ldots, z_q, \Delta_{q+1}^{\alpha_{q+1}}, \ldots, \Delta_n^{\alpha_n}, \alpha_{q+1} > 0, \ldots, \alpha_n > 0\big),$$

et le $D^\dagger_{A^\dagger/V}$-module à gauche $H_Y^{\operatorname{codim}_X Y}(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ est engendré par la classe $[1/z] = [1/(z_1 \cdots z_q)]$ dont l'annulateur est l'idéal

$$\big(z_1, \ldots, z_q, \Delta_{q+1}^{\alpha_{q+1}}, \ldots, \Delta_n^{\alpha_n}, \alpha_{q+1} > 0, \ldots, \alpha_n > 0\big)\,.$$

Démonstration. En vertu de la proposition 12.3.4, il suffit de traiter le cas du module $\operatorname{alg} H_Y^{\operatorname{codim}_X Y}(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$. Il est évident que la classe $[1/z]$ est un générateur. Soit un opérateur d'ordre fini $P(x, \Delta) := \sum_\alpha a_\alpha \Delta^\alpha$ qui annule $[1/z]$. On peut supposer que $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q, 0, \ldots, 0)$. Il nous faut montrer que $P(x, \Delta)$ appartient à l'idéal à gauche engendré par $z_1, \ldots, z_q$. L'équation $P(x, \Delta)([1/z]) = 0$ se traduit par une égalité dans $A^\dagger[1/z]$:

$$P(x, \Delta)(1/(z_1 \cdots z_q)) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \frac{b_i}{(z_1 \cdots \hat{z}_i \cdots z_q)^{\alpha^i}}\,, \qquad \alpha_j^i \geqslant 1\,,$$

entre fonctions méromorphes, où les coefficients b_i sont des fonctions de $A^\dagger$. Mais :

$$\begin{aligned}\frac{b_i}{(z_1 \cdots \hat{z}_i \cdots z_q)^{\alpha^i}} &= b_i \Delta^{\alpha_1^i - 1, \ldots, \alpha_q^i - 1}(1/(z_1 \cdots \hat{z}_i \cdots z_q)) \\ &= b_i \Delta^{\alpha_1^i - 1, \ldots, \alpha_q^i - 1} z_i (1/(z_1 \cdots z_q)).\end{aligned}$$

Il suffit de démontrer que l'opérateur $P(x, \Delta) - \sum_i b_i \Delta^{\alpha_1^i - 1, \ldots, \alpha_q^i - 1} z_i$ appartient à l'idéal $(z_1, \ldots, z_q)$. Mais on a déjà vu dans la démonstration du lemme 12.3.5 que si un tel opérateur annule $1/(z_1 \cdots z_q)$ comme fonction méromorphe, il appartient à l'idéal $(\Delta_1^{\alpha_1} z_1, \ldots, \Delta_q^{\alpha_r} z_q)$. ∎

LEMME 12.4.2. — *Pour X affine* **assez petit** *les V-modules :*

$$H_Y^{\operatorname{codim}_X Y}(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \quad \text{et} \quad H_Y^{\operatorname{codim}_X Y}(X, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$$

sont **séparés** *pour la topologie* $\mathfrak{m}$*-adique.*

Démonstration. Commençons par le V-module $H_Y^{\operatorname{codim}_X Y}(X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger})$. En vertu du lemme précédent, il faut montrer que si un opérateur $P(x, \Delta) =$

$\sum_{\alpha=0,\infty} a_\alpha \Delta^\alpha$ appartient à l'idéal :

$$(z_1, \ldots, z_q, \Delta_{q+1}^{\alpha_{q+1}}, \ldots, \Delta_n^{\alpha_n}, \alpha_{q+1} > 0, \ldots, \alpha_n > 0)$$

modulo $\mathfrak{m}^s$ pour tout $s \geqslant 1$, alors il appartient à l'idéal :

$$(z_1, \ldots, z_q, \Delta_{q+1}^{\alpha_{q+1}}, \ldots, \Delta_n^{\alpha_n}, \alpha_{q+1} > 0, \ldots, \alpha_n > 0).$$

On peut supposer que $P(x, \Delta) = \sum_{\alpha=0,\infty} a_\alpha \Delta^\alpha$, avec $\alpha_{q+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. On a alors, pour tout $s \geqslant 1$, les égalités

$$P(x, \Delta) = \sum_{\alpha=0,\infty} a_\alpha \Delta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} = \sum_{\gamma=0,\infty} b_{\gamma;s} \Delta^\gamma + \big(\sum_{i=1,q} Q_i z_i + \sum_\beta Q_\beta \Delta^\beta \big),$$

avec des n-uplets β en nombre fini tels que $\beta_{q+1} > 0, \ldots, \beta_n > 0$, où les coefficients $b_{\alpha;s}$ sont dans $\mathfrak{m}^s A^\dagger$.

En vertu du théorème du symbole total 2.4.2, on a les égalités :

$$\sum_{\alpha=0,\infty} a_\alpha \Delta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q,0,\ldots,0;s} \Delta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} + \\ + \sum_i \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} q_{i,\alpha_1,\ldots,\alpha_q,0,\ldots,0} \Delta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} z_i,$$

où les coefficients $q_{i,\alpha}$ sont ceux de Q_i. Si on écrit cette égalité sous la forme :

$$\sum_{\alpha=0,\infty} \Delta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} a'_\alpha = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} \Delta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} b'_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q,0,\ldots,0;s} + \\ + \sum_i \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} \Delta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_q} q'_{i,\alpha_1,\ldots,\alpha_q,0,\ldots,0} z_i,$$

on trouve que les coefficients a'_α appartiennent à l'idéal $(z_1, \ldots, z_q)$ modulo $\mathfrak{m}^s$ pour tout $s \geqslant 1$, et qu'ils appartiennent donc à l'idéal $(z_1, \ldots, z_q)$.

En vertu du théorème du symbole total 2.4.2, pour X assez petit, le V-module $H_Y^{\operatorname{codim}_X Y}(X, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ est isomorphe au V-module $H_{Y \times_k A_k^n}^{\operatorname{codim}_X Y}(X \times_k A_k^n, \mathcal{O}_{(\mathscr{T}^* \mathscr{X})^\dagger})$ qui est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique en vertu de ce qui précède. D'où le lemme 12.4.2. ■

Supposons que X est affine et soit $u : A^\dagger \to B^\dagger$ un relèvement de i et $x = (y, z)$ un système adapté à u. Nous avons vu en 10.2.2 que le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à droite engendré par u. Et, nous avons vu en 10.5.2 que le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à gauche engendré par $dyu(dx)^*$, où $(dx)^*$ est la base duale

de $dx = dx_1 \cdots dx_n$. Un élément $Pdyu(dx)^*$, considéré comme morphisme de $i^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$, opère comme $dyu\,{}^tP(dx)^*$:

$$i^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V} \overset{(dx)^*}{\to} i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \overset{u\circ {}^tP}{\to} \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \overset{dy}{\to} \omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V}.$$

Un tenseur élémentaire de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$ s'écrit comme $Pdyu(dx)^* \otimes uQ$. Au générateur $dyu(dx)^* \otimes u$ du bimodule on associe la classe $[1/z] = [1/(z_1 \cdots z_q)]$ dans $\mathscr{H}^q_Y(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$. On définit l'application :

$$(*)_{u,z,y} : \qquad i_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}\big) \to \mathscr{H}^q_Y(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$$

par linéarité par :

$$Pdyu(dx)^* \otimes uQ \mapsto P[1/z_1 \cdots z_q]Q.$$

Lemme 12.4.3. — *L'application $(*)_{u,z,y}$ est un morphisme bien défini de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$-bimodules.*

Démonstration. Il faut montrer que si une somme finie $\sum Pdyu(dx)^* \otimes uQ$ est nulle dans le produit tensoriel, alors la somme $\sum P[1/z]Q$ est nulle dans la cohomologie locale. La question est locale. En vertu du lemme 12.4.2, il suffit donc d'établir que la réduction $\sum P_s[1/z_s]Q_s$ modulo $\mathfrak{m}^s$ est nulle pour $s \geqslant 1$. On est ramené ainsi à démontrer le lemme 12.4.3 modulo $\mathfrak{m}^s$ pour tout $s \geqslant 1$.

Soient $P_s = \sum_{\alpha,\beta} \Delta^\alpha_{y_s}\Delta^\beta_{z_s} a_{\alpha,\beta}$ et $Q_s = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta}\Delta^\alpha_{y_s}\Delta^\beta_{z_s}$ des opérateurs différentiels tels que $P_s dy_s u_s(dx_s)^* \otimes u_s Q_s$ est nul. Si $a_{\alpha,\beta}$ ou $b_{\alpha,\beta}$ appartiennent à l'idéal (z_s), alors

$$\Delta^\alpha_{y_s}\Delta^\beta_{z_s} a_{\alpha,\beta} dy_s u_s(dx_s)^* \otimes u_s Q_s \quad \text{et} \quad P_s dy_s u_s(dx_s)^* \otimes u_s b_{\alpha,\beta}\Delta^\alpha_{y_s}\Delta^\beta_{z_s}$$

sont nuls, et

$$\Delta^\alpha_{y_s}\Delta^\beta_{z_s} a_{\alpha,\beta}[1/z_s]Q_s \quad \text{et} \quad P_s[1/z_s]b_{\alpha,\beta}\Delta^\alpha_{y_s}\Delta^\beta_{z_s}$$

sont nuls aussi. On peut donc supposer que les images par u_s des coefficients $a_{\alpha,\beta}$ et $b_{\alpha,\beta}$ sont non nuls. Le module de transfert $\mathscr{D}_{Y_s\to X_s/V_s}$ est un $\mathscr{D}_{Y_s/V_s}$-module à gauche libre, les opérateurs $u_s\Delta^\beta_{z_s}$ formant une base, et de même le module de transfert $\mathscr{D}_{X_s\leftarrow Y_s/V_s}$ est un $\mathscr{D}_{Y_s/V_s}$-module à droite libre, les

opérateurs $dy_s u_s \Delta^{\beta}_{z_s}(dx_s)^*$ formant une base. On a alors les égalités :

$$u_s Q_s = \sum_{\beta} Q_{s,\beta} u_s \Delta^{\beta}_{z_s} := \sum_{\beta} \big(\sum_{\alpha} u_s(b_{\alpha,\beta}) \Delta^{\alpha}_{y_s} \big) u_s \Delta^{\beta}_{z_s}$$

et

$$\begin{aligned} &P_s dy_s u_s (dx_s)^* = \\ &\quad = \sum_{\beta} dy_s u_s \Delta^{\beta}_{z_s}(dx_s)^* P_{s,\beta} := \sum_{\beta} dy_s u_s \Delta^{\beta}_{z_s}(dx_s)^* \big(\sum_{\alpha} \Delta^{\alpha}_{y_s} u_s(a_{\alpha,\beta}) \big). \end{aligned}$$

La nullité du tenseur $P_s dy_s u_s (dx_s)^* \otimes u_s Q_s$ est équivalente à la nullité des produits $P_{s,\beta} Q_{s,\gamma}$. Si l'on pose $\tilde{P}_{s,\beta} := \sum_{\alpha} \Delta^{\alpha}_{y_s} a_{\alpha,\beta}$ et $\tilde{Q}_{s,\gamma} := \sum_{\alpha} b_{\alpha,\gamma} \Delta^{\alpha}_{y_s}$, on a les égalités :

$$P_s [1/z_s] Q_s = \sum_{\beta,\gamma} \Delta^{\beta}_{z_s} \tilde{P}_{s,\beta} [1/z_s] \tilde{Q}_{s,\gamma} \Delta^{\gamma}_{z_s} = \sum_{\beta,\gamma} \Delta^{\beta}_{z_s} \tilde{P}_{s,\beta} \tilde{Q}_{s,\gamma} [1/z_s] \Delta^{\gamma}_{z_s} = 0.$$

Un raisonnement similaire vaut pour une somme finie

$$\sum P_s dy_s u_s (dx_s)^* \otimes u_s Q_s. \qquad \blacksquare$$

Lemme 12.4.4. — *Pour u fixé le morphisme $(*)_u := (*)_{u,z,y}$ ne dépend pas du couple adapté (z, y).*

Démonstration. Si (z', y') est un autre couple, on a dans $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger} \leftarrow \mathscr{Y}^{\dagger}/V}$ l'égalité :

$$dy' \otimes u \otimes (dx')^* = \det(\partial_{z'} z) dy \otimes u \otimes (dx)^*,$$

où $\partial_{z'} z$ est la matrice $\partial_{z'_i} z_j$. On doit montrer l'égalité dans $\mathscr{H}^q_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V})$:

$$[1/z'] = \det(\partial_{z'} z)[1/z].$$

Il suffit de montrer cette égalité dans $\mathscr{H}^q_Y(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V})$.

Lemme 12.4.5. — *Sous les conditions précédentes, on a l'égalité dans $\mathscr{H}^q_Y(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}/V})$:*

$$[1/z'] = \det(\partial_{z'} z)[1/z].$$

Démonstration. La question est de nature locale. Nous allons raisonner par récurrence sur $q \geqslant 1$. Supposons que $q = 1$, alors $z' = az$ et $z = a'z'$; cela montre que $\det(\partial_{z'} z)(1/z) = 1/z' + a\partial_{z'} a'$ et donc $[1/z'] = \det(\partial_{z'} z)[1/z]$.

Supposons que $q \geqslant 2$ et que $z_1 = z'_1$. Considérons la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \xrightarrow{z_1} \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}/z_1 \to 0.$$

En vertu du théorème de pureté 12.3.1, on obtient une suite exacte :

$$0 \to \mathscr{H}_Y^{q-1}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}/z_1) \to \mathscr{H}_Y^q(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \xrightarrow{z_1} \mathscr{H}_Y^q(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \to 0.$$

Notons $\bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_q$ les classes de $z_2, \ldots, z_q$ dans le quotient par z_1, et de même notons $\bar{z}'_2, \ldots, \bar{z}'_q$ les classes de $z'_2, \ldots, z'_q$ dans le quotient par z_1. Comme $z_1[1/z'] = z_1 \det(\partial_{z'} z)[1/z] = 0$, il suffit de montrer en vertu de l'hypothèse de récurrence que la classe $[1/z]$ provient de la classe $[1/\bar{z}_2 \cdots \bar{z}_q]$ par le morphisme de connexion et que la classe $\det(\partial_{z'} z)[1/z]$ provient de la classe $\det(\partial_{\bar{z}'} \bar{z})[1/\bar{z}_2 \cdots \bar{z}_q]$ par le morphisme de connexion. En considérant le complexe de Čech du recouvrement affine $\{U_i, i = 1, \ldots, q\}$, resp. $\{U'_{i'}, i' = 1, \ldots, q\}$, où U_i, resp. $U'_{i'}$, est l'ouvert principal défini par la réduction modulo $\mathfrak{m}$ de z_i, resp. de $z'_{i'}$, de $X - Y$ à valeurs dans le faisceau structural, on voit effectivement que tel est bien le cas.

Soient $z = (z_1, \ldots, z_q)$ et $z' = (z'_1, \ldots, z'_q)$ deux systèmes comme précédemment. Alors, nous allons montrer que localement il existe un entier j, avec $1 \leqslant j \leqslant q$, tel que $\{z'_j, z_2, \ldots, z_q\}$ engendre l'idéal $\mathcal{I}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$ noyau de u. Considérons la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-modules localement libres de type fini :

$$0 \to \mathcal{I}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}/\mathcal{I}^2_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \to \mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}} i^{-1}\Omega_{\mathscr{X}^\dagger/V} \to \Omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \to 0$$

et sa réduction modulo $\mathfrak{m}$:

$$0 \to \mathcal{I}_{Y/k}/\mathcal{I}^2_{Y/k} \to \mathcal{O}_{Y/k} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{X/k}} i^{-1}\Omega_{X/k} \to \Omega_{Y/k} \to 0.$$

Considérons les réductions $\{\bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_q\}$ modulo $\mathfrak{m}$ et leurs différentielles $\{d\bar{z}_2, \ldots, d\bar{z}_q\}$ au voisinage d'un point. Alors, il existe un entier j tel que les différentielles $d\bar{z}'_j, d\bar{z}_2, \ldots, d\bar{z}_q$ forment une base du fibré conormal de Y dans X et, en vertu du lemme de Nakayama, les classes de $\bar{z}'_j, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_q$ forment une base locale du $\mathcal{O}_{Y/k}$-module $\mathcal{I}_{Y/k}/\mathcal{I}^2_{Y/k}$. Cela montre que localement $\bar{z}_1$ est dans l'idéal $(\bar{z}'_j, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_q)$, et que z_1 est donc dans l'idéal $(z'_j, z_2, \ldots, z_q)$.

Quitte à réindexer, on peut supposer que $j = 1$. Notons par $z'' = (z''_1, z''_2, \ldots, z''_q)$ l'idéal $(z'_1, z_2, \ldots, z_q)$. Alors, en vertu de ce qui précède

on a les égalités :

$$[1/z_1 \cdots z_q] = \det \partial_z(z'')[1/z''_1 \cdots z''_q]$$

et :

$$[1/z''_1 \cdots z''_q] = \det \partial_{z''}(z')[1/z'_1 \cdots z'_q].$$

Mais comme $\det \partial_z(z'') \det \partial_{z''}(z') \equiv \det \partial_z(z')$ modulo $\mathcal{I}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$, on a bien l'égalité :

$$[1/z_1 \cdots z_q] = \det \partial_z(z')[1/z'_1 \cdots z'_q]\,,$$

ce qui termine la preuve des lemmes 12.4.5 et 12.4.4. □■

Lemme 12.4.6. — *Le morphisme* $(*) := (*)_u$ *ne dépend pas du relèvement* u *de* i.

Démonstration. Soit u' un autre relèvement de i. En vertu de la lissité, on a la factorisation $u = u'g$, où g est un élément du groupe $G_{A^\dagger}$. Soit (z, y) un couple adapté à u. Par construction, le couple (z', y'), avec $z' := g(z)$ et $y' := g(y)$, est adapté à u'. Si $Pdyu(dx)^* \otimes uQ$ est un tenseur, on a l'égalité :

$$Pdyu(dx)^* \otimes uQ = P\,{}^t g \det(\partial_z z')dy'u'(dx')^* \otimes u'gQ = \\ = P\,{}^t g(1)g^{-1} \det(\partial_z z')dy'u'(dx')^* \otimes u'gQ.$$

Donc, son image par le morphisme $(*)_{u'}$ construit à l'aide de u' est égale à :

$$P\,{}^t g(1)g^{-1} \det(\partial_z z')[1/z']gQ.$$

En vertu du lemme précédent (12.4.5), on a l'égalité :

$$[1/z] = \det(\partial_z z')[1/z']$$

et l'égalité :

$$g^{-1} \det(\partial_z z')[1/z']g = g^{-1}(\det(\partial_z z')[1/z]).$$

Mais en vertu du théorème 9.1.3, on a l'égalité ${}^t g(1) = \det(\partial_x g(x))$. Or, par construction :

$$\det(\partial_x g(x))g^{-1} \det(\partial_z z') \equiv 1\,,$$

modulo le noyau de u. On a alors l'égalité :

$$P[1/z]Q = P\,{}^t g(1)g^{-1} \det(\partial_z z'[1/z'])gQ,$$

qui montre que le morphisme $(*)$ ne dépend pas du relèvement de i. ■

Les lemmes précédents légitiment la définition qui suit.

DÉFINITION 12.4.7. — *Soient $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k et $\mathscr{X}^\dagger$ et $\mathscr{Y}^\dagger$ des relèvement plats. On définit le morphisme $\mathrm{Adj}^i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$-bimodules :*

$$\mathrm{Adj}^i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}) : i_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}\big) \to \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \simeq \\ \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})[\mathrm{codim}_X Y],$$

comme le morphisme $(*)$ précédent, défini localement.

THÉORÈME 12.4.8. — *Pour $s \geqslant 1$, la réduction modulo $\mathfrak{m}^s$ du morphisme $\mathrm{Adj}^i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$*

$$\mathrm{Adj}^i_{*,s}(\mathscr{D}_{X_s/V_s}) : i_*\big(\mathscr{D}_{X_s\leftarrow Y_s/V_s} \underset{\mathscr{D}_{Y_s/V_s}}{\otimes} \mathscr{D}_{Y_s\to X_s/V_s}\big) \to \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}_{X_s/V_s}) \simeq \\ \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}_{X_s/V_s})[\mathrm{codim}_X Y]$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La question est locale. Soit un triplet (u, z, y) comme précédemment, où $x = (z, y)$ est adapté à u, et soit (u_s, z_s, y_s) sa réduction. Le morphisme $\mathrm{Adj}^i_{*,s}$ est défini par :

$$P_s dy_s u_s (dx_s)^* \otimes u_s Q_s \mapsto P_s[1/z_s]Q_s.$$

On a un isomorphisme de $\mathscr{D}_{X_s/V_s}$-modules à droite :

$$\mathscr{H}^q_Y(\mathcal{O}_{X_s/V_s}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_s/V_s}} \mathscr{D}_{X_s/V_s} \simeq \mathscr{H}^q_Y(\mathscr{D}_{X_s/V_s}).$$

Tout tenseur s'écrit de manière unique comme somme finie :

$$\sum \delta_\alpha \otimes \Delta^\alpha_{x_s},$$

où δ_α est un élément de $\mathscr{H}^q_Y(\mathcal{O}_{X_s/V_s})$. L'action à gauche est définie par :

$$\Delta^\beta_{x_s}(\delta_\alpha \otimes \Delta^\alpha_{x_s}) = \sum_{0\leqslant k\leqslant\beta} \Delta^{\beta-k}_{x_s}\delta_\alpha \otimes \Delta^k_{x_s}\Delta^\alpha_{x_s}.$$

D'autre part, tout élément δ_α est de la forme $P_\alpha([1/z_s])$ pour un opérateur différentiel P_α. Mais :

$$\Delta^\alpha_{x_s}([1/z_s] \otimes 1) = \sum_{0\leqslant k\leqslant\alpha} \Delta^{\alpha-k}_{x_s}[1/z_s] \otimes \Delta^k_{x_s}.$$

Cela montre par récurrence sur la longueur de α que $\mathrm{Adj}^i_{*,s}(\mathscr{D}_{X_s/V_s})$ est un morphisme surjectif.

Comme on a l'égalité par construction :

$$dy_s u_s (dx_s)^* \otimes u_s b_\alpha \Delta^\alpha_{y_s} = dy_s u_s b_\alpha \Delta^\alpha_{y_s} (dx_s)^* \otimes u_s,$$

tout tenseur s'écrit comme une somme finie de tenseurs $\sum P_\alpha dy_s u_s (dx_s)^* \otimes u_s \Delta^\alpha_{z_s}$ où P_α est un opérateur différentiel. L'image du tenseur :

$$P_\alpha dy_s u_s (dx_s)^* \otimes u_s \Delta^\alpha_{z_s}$$

par le morphisme $\mathrm{Adj}^i_{*,s}$ est égale à :

$$P_\alpha([1/z_s] \otimes \Delta^\alpha_{z_s}).$$

Tout opérateur différentiel P_α s'écrit de manière unique comme une somme $\sum_\beta P_{\alpha,\beta} \Delta^\beta_{z_s}$ où $P_{\alpha,\beta}$ est un opérateur différentiel en $\Delta^\alpha_{y_s}$. Soit :

$$\sum_{\alpha,\beta} P_{\alpha,\beta} \Delta^\beta_{z_s} dy_s u_s (dx_s)^* \otimes u_s \Delta^\alpha_{z_s}$$

un tenseur dont l'image par $\mathrm{Adj}^i_{*,s}$ est nulle. Nécessairement, $P_{0,0}([1/z_s] \otimes 1)$ est nul, l'élément $P_{0,0}$ appartient à l'idéal $(z_1, \ldots, z_q)$, et cela entraîne que le tenseur :

$$P_{0,0} dy_s u_s (dx_s)^* \otimes u_s 1 = dy_s u_s (dx_s)^* \otimes u_s P_{0,0}$$

est nul. Par récurrence sur l'ordre en Δ_{z_s} on voit que le tenseur :

$$\sum_{\alpha,\beta} P_{\alpha,\beta} \Delta^\beta_{z_s} dy_s u_s (dx_s)^* \otimes u_s \Delta^\alpha_{z_s}$$

est nul. Le morphisme $\mathrm{Adj}^i_{*,s}(\mathscr{D}_{X_s/V_s})$ est injectif. ■

Corollaire 12.4.9. — *Si $\mathcal{M}_s$ est un complexe de $D^+(\mathscr{D}_{X_s/V_s})$ à cohomologie $\mathcal{O}_{\mathscr{X}_s/V_s}$-quasi-cohérente, alors le morphisme :*

$$i_*\big(\mathscr{D}_{X_s \leftarrow Y_s/V_s} \underset{\mathscr{D}_{Y_s/V_s}}{\otimes} \mathscr{D}_{Y_s \to \mathscr{X}_s/V_s}\big) \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_{X_s/V_s}} \mathcal{M}_s \to$$
$$\to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}_{X_s/V_s}) \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_{X_s/V_s}} \mathcal{M}_s[\mathrm{codim}_X Y] \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}_s)[\mathrm{codim}_X Y]$$

est un isomorphisme.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème précédent et du lemme du way-out foncteur. ■

Nous n'utiliserons pas dans la suite de cet article le théorème précédent et son corollaire.

À présent, nous allons construire, pour une immersion fermée $i : Y \to X$ de schémas lisses sur le corps k, le morphisme de foncteurs Adj^i_* entre les

foncteurs $i_*^{\mathrm{diff}}\, i_{\mathrm{diff}}^*$ et $\boldsymbol{R}\Gamma_Y[\mathrm{codim}_X Y]$, annoncé au début de cette section. On rappelle que, sous les conditions du théorème de pureté 12.3.1, on a :

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})[\mathrm{codim}_X Y] \simeq \mathscr{H}_Y^q(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})\,,\ \text{avec } q = \mathrm{codim}_X Y\,.$$

Lemme 12.4.10. — *Si $\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial et* **plat**, *il existe un morphisme :*

$$i_{*,0}^{\mathrm{diff}}\, i_{\mathrm{diff}}^{*,0}\, \mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} \mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}$$

de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à gauche spéciaux.

Démonstration. Soit $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert affine du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et soit $\mathcal{W}^\dagger$ un relèvement plat de la trace W de U dans Y. Le morphisme $\mathrm{Adj}_*^i(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})$ pour le couple $(\mathcal{U}^\dagger, \mathcal{W}^\dagger)$ fournit un morphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$-modules à gauche par produit tensoriel :

$$i_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/V}\big) \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}{\otimes} \mathcal{P}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}) \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}{\otimes} \mathcal{P}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}.$$

Par construction, le complexe de gauche est la valeur de $i_{*,0}^{\mathrm{diff}}\, i_{\mathrm{diff}}^{*,0}\, \mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sur l'ouvert $\mathcal{U}^\dagger$. Il faut voir que ce morphisme commute aux morphismes du site. Soient $r^\dagger : \mathcal{U}'^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger$ un morphisme du site, u un relèvement de l'inclusion $W \to U$ et $\mathcal{W}'^\dagger$ le produit fibré $\mathcal{U}'^\dagger \times_{\mathcal{U}^\dagger} \mathcal{W}^\dagger$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}'^\dagger \arrow[r, "r^\dagger"] \arrow[d, "u'"'] & \mathcal{W}^\dagger \arrow[d, "u"'] \\ \mathcal{U}'^\dagger \arrow[r, "r^\dagger"] & \mathcal{U}^\dagger. \end{tikzcd}$$

Si (z, y) est un couple adapté à u, le couple (z', y'), avec $z' := r^*z$ et $y' := r^*y$, est par construction adapté au relèvement u'. Il en résulte un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} r^{-1} i_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/V}\big) \arrow[r] \arrow[d] & r^{-1}\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}) \arrow[d] \\ i_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger\leftarrow\mathcal{W}'^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}'^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}'^\dagger\to\mathcal{U}'^\dagger/V}\big) \arrow[r] & \mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}'^\dagger/V}), \end{tikzcd}$$

où les lignes sont les morphismes Adj_*^i et les colonnes sont les morphismes :

$$Pdyu(dx)^* \otimes uQ \mapsto r^*Pr^{*-1}dy'u'(dx')^* \otimes u'r^*Qr^{*-1}$$

et

$$P[1/z]Q \mapsto r^*Pr^{*-1}[1/z']r^*Qr^{*-1}.$$

Par produit tensoriel, on obtient que le morphisme commute aux restrictions. On obtient comme cela un morphisme défini localement. ■

Lemme 12.4.11. — *Si X est* **séparé** *et si $\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un complexe $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à gauche spéciaux et* **plats**, *il existe un morphisme de la catégorie $D((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$:*

$$\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} \mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}[-\mathrm{codim}_X Y] \to \mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}.$$

Démonstration. L'extension $V_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \to \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ est plate, et un injectif sur $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ reste donc injectif sur $V_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$. Prenant une résolution injective de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à droite, on réalise le morphisme :

$$\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} \mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}[-\mathrm{codim}_X Y] \to \mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}$$

dans la catégorie $D((V_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}\text{-Mod}))$. Rien ne dit alors que c'est un morphisme de la catégorie $D((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$, car a priori on ne sait pas construire une résolution de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ par des bimodules qui soit injective à droite. C'est pour construire une résolution par des bimodules que l'hypothèse de séparation intervient. Soit B_α un recouvrement de X par des ouverts affines au-dessus desquels Y est défini par des équations $z_1, \ldots, z_q$. Notons $j_{\alpha,i}$: $B_{\alpha,i} := B_\alpha - V(z_i) \to X$ l'inclusion canonique. Considérons le complexe de Čech $C^\bullet(\mathcal{B}_{\alpha,i}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$:

$$0 \to \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \to \prod_{\alpha,i} j_{\alpha,i*} j_{\alpha,i}^{-1} \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \to \cdots$$

En vertu du théorème de pureté 12.3.1 et du corollaire d'acyclicité 2.4.3, si X est *séparé*, le complexe $C^\bullet(\mathcal{B}_{\alpha,i}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ est une résolution par des $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$-bimodules de $\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})[-\mathrm{codim}_X Y]$. Le complexe tronqué $\sigma_{\leqslant \mathrm{codim}_X Y} C^\bullet(\mathcal{B}_{\alpha,i}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ est une résolution du bimodule $\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})[-\mathrm{codim}_X Y]$, et le morphisme de complexes qui provient du morphisme canonique $\sigma_{\leqslant \mathrm{codim}_X Y} C^\bullet(\mathcal{B}_{\alpha,i}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \to \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$, à savoir :

$$\sigma_{\leqslant \mathrm{codim}_X Y} C^\bullet(\mathcal{B}_{\alpha,i}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} \mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}},$$

réalise le morphisme du lemme. ■

Soit maintenant $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe de $D^b((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. Il admet une résolution $\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ par des modules spéciaux plats, d'où résulte par le

lemme précédent un morphisme canonique :

$$\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^!_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}[\mathrm{codim}_X Y].$$

Comme $\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ est à support dans Y, ce morphisme se factorise nécessairement par $\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Il en résulte le morphisme :

$$\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^!_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})[\mathrm{codim}_X Y],$$

qui composé avec morphisme du lemme 12.4.10 donne le morphisme :

$$\mathrm{Adj}^i_*(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) : \qquad i_*^{\mathrm{diff}}\, i^*_{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})[\mathrm{codim}_X Y].$$

Définition 12.4.12. — *Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas lisses et* **séparés** *sur k. On définit le morphisme $\mathrm{Adj}^i_*(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ pour tout complexe $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ de la catégorie $D^b((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ comme le morphisme précédent de la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$:*

$$\mathrm{Adj}^i_*(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) : \qquad i_*^{\mathrm{diff}}\, i^*_{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})[\mathrm{codim}_X Y].$$

Remarque 12.4.13. — Le morphisme $\mathrm{Adj}^i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ *n'est pas* un isomorphisme, même sur K. Mais nous allons montrer qu'il induit un isomorphisme dans le cas géométrique $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} = \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$.

Théorème 12.4.14. — *Si X est un schéma lisse et séparé sur k, le morphisme $\mathrm{Adj}^i_*(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$:*

$$i_*^{\mathrm{diff}}\, i^*_{\mathrm{diff}}\, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})[\mathrm{codim}_X Y] \simeq \mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$$

est un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à gauche spéciaux.

Démonstration. En vertu du théorème 10.5.7, on a un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à gauche spéciaux :

$$\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \simeq i^*_{\mathrm{diff}}\, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}.$$

Il suffit donc de montrer que le morphisme :

$$i_*^{\mathrm{diff}}\, \mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \to \mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$$

est un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à gauche spéciaux. La question est locale, et l'on peut supposer que X est affine. Soient $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement

plat de X et $\mathscr{Y}^\dagger$ un relèvement plat de Y. Par construction, il suffit de montrer que le morphisme :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}\to\mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$$

est un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-modules à gauche. Mais le $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module $\mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ est localement de type fini, dont les générateurs locaux sont donnés par la classe $[1/z]$ pour un système $z=(z_1,\dots,z_q)$ de relèvements des équations de Y. D'autre part, le $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à gauche $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}}\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$ est engendré localement par $dyu(dx)^*\otimes 1$ pour un relèvement u de l'immersion i et un système $x=(y,z)$ adapté à u. On voit que le morphisme $\mathrm{Adj}^i_*(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ envoie le générateur $dyu(dx)^*\otimes 1$ au générateur $[1/z]$ dont l'annulateur annule aussi $dyu(dx)^*\otimes 1$. Le morphisme $\mathrm{Adj}^i_*(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V})$ est nécessairement un isomorphisme. ■

De la même façon, on construit le morphisme $\mathrm{Adj}^i_*(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ et on obtient le théorème qui suit.

Théorème 12.4.15. — *Le morphisme* $\mathrm{Adj}^i_*(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$:

$$i^{\mathrm{diff}}_* i^*_{\mathrm{diff}}\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}\to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})[\mathrm{codim}_X Y]\simeq\mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$$

est un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$*-modules à droite spéciaux.*

Remarque 12.4.16. — Les résultats précédents valent sur l'extension $V\to K$ et nous aurons surtout à les utiliser dans ce cas-là dans l'article présent.

12.5. La comparaison entre la cohomologie locale et l'image directe dans le cas d'une immersion fermée. Le morphisme de foncteurs Adj^*_i

Lemme 12.5.1. — *Soient $i:Y\hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k, et $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats de Y et X. Alors, les modules $\mathcal{T}or_j^{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V})$ sont nuls pour $j\neq\mathrm{codim}_X Y$.*

Démonstration. La question étant locale, on peut supposer que X est affine. Soit u un relèvement de l'inclusion i et soit $x=(z_1,\dots,z_q,y)$ un système adapté à u. Considérons le complexe de Koszul $K(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V},z_1,\dots,z_q)$, où l'action des z se fait à gauche, augmenté vers $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$ par $P\mapsto uP$.

C'est est une résolution par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-modules à droite de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}$, en vertu du théorème 10.2.3 et du lemme 10.2.6. Il suffit maintenant de démontrer que le complexe $K(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}, z_1,\dots,z_q)\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}$ est concentré en degré $-\mathrm{codim}_X Y$. Mais c'est un complexe de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-modules à gauche, et l'application symbole total :

$$\sigma\big(\sum_\alpha(-1)^{|\alpha|}\Delta_x^\alpha b_\alpha\big) := \sum_\alpha(-1)^{|\alpha|}\xi^\alpha b_\alpha$$

est un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-linéaire, en vertu du théorème du symbole total 2.4.2. Il suffit donc de démontrer que le complexe :

$$K\big((\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}[\xi_1,\dots,\xi_n])^\dagger, z_1,\dots,z_q\big)\underset{(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}[\xi_1,\dots,\xi_n])^\dagger}{\otimes}\big(\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/V}[\xi_1,\dots,\xi_n]\big)^\dagger$$

est concentré en degré $-\mathrm{codim}_X Y$, mais comme les objets de ce complexe sont sans $\mathfrak{m}$-torsion et de type fini sur $(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/V}[\xi_1,\dots,\xi_n])^\dagger$, suffit de montrer que la réduction modulo $\mathfrak{m}$ de ce complexe est concentrée en degré $-\mathrm{codim}_X Y$. Or, cela résulte du fait que l'immersion de $Y\times_k A^n_k$ dans le fibré cotangent T^*X est une immersion régulière de codimension $\mathrm{codim}_X Y$.■

Nous allons construire un isomorphisme canonique de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$-bimodules :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}\simeq \mathcal{T}or^{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}}_{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}).$$

Lemme 12.5.2. — *Soit u un relèvement de l'immersion i et soit $x=(z,y)$ un système de fonctions adapté à u. Alors, le morphisme $P\mapsto P\circ dyu(dx)^*$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-modules à droite de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$ sur le noyau* $\mathrm{Ker}(z,\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V})$ *du morphisme :*

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V} & \longrightarrow & (\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V})^q\\ Q & \longmapsto & (z_1Q,\dots,z_qQ).\end{array}$$

Démonstration. Comme les actions de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$ et de $z_1,\dots,z_q$ commutent, l'image de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$ par le morphisme $P\mapsto P\circ dyu(dx)^*$ est contenue dans le noyau $\mathrm{Ker}(z,\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V})$. Le module de transfert $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/V}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-module à gauche engendré par $dyu(dx)^*$. Un élément $Pdyu(dx)^*$ opère par

$$f(x)dxPdyu(dx)^* = u({}^tP(f(x))dy,$$

et $z_iPdyu(dx)^*$ opère par $f(x)dxz_iPdyu(dx)^* = u({}^tP(z_if(x))dy$. Si on développe ${}^tP=\sum_\alpha a_{\alpha,\alpha'}\Delta_y^\alpha\Delta_z^{\alpha'}$, on trouve que $z_iPdyu(dx)^*$ est nul pour

$i = 1, \ldots, q$ si seulement si les coefficients $a_{\alpha,\alpha'}$ pour α' non nul appartiennent au noyau de u. Cela entraîne que le morphisme $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \to \mathrm{Ker}(z, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V})$ est surjectif. D'autre part, si l'image d'un opérateur $\sum_\alpha a_\alpha \Delta_y^\alpha$ est nulle, l'action sur les monômes y^α de cet opérateur est nulle, et l'opérateur est donc nul. Le morphisme du lemme est injectif. ■

En vertu du lemme précédent, pour tout triplet (u, z, y) on dispose d'un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-modules à droite :

$$(*) : \qquad \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \simeq \mathcal{T}or^{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}}_{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}).$$

Soit v un autre relèvement de i qui donne la présentation de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$-modules à droite

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V} \xrightarrow{v} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}.$$

Mais $u = vg$ pour un élément g du groupe $\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ dont l'action fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & K(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}, z_1, \ldots, z_q) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V} \arrow[dd, "g"'] & \\
\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{T}or^{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}}_{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}) \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & K(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}, z'_1, \ldots, z'_q) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V} &
\end{tikzcd}$$

Cette description montre que le morphisme $(*)$ précédent ne dépend pas du triplet choisi (u, z, y) et fournit donc un isomorphisme canonique global de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-modules à droite. En inversant les rôles de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$ et de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}$, on montre que $(*)$ est un isomorphisme canonique global de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-modules à gauche et donc le morphisme $(*)$ est un isomorphisme de bimodules.

Définition 12.5.3. — *Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k, et $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats de Y et X. On définit l'isomorphisme* $\mathrm{Adj}_i^*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger}/V)$ *de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$-bimodules :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Adj}_i^*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}) : \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}[\mathrm{codim}_X Y] &\to \\
\to \mathcal{T}or^{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}}_{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V})[\mathrm{codim}_X Y] &\simeq \\
\simeq \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}
\end{aligned}$$

comme l'isomorphisme $(*)$ précédent.

Corollaire 12.5.4. — *Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas lisses et séparés sur k. Pour tout complexe $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ de la catégorie $D^-(\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$ il existe un isomorphisme canonique dans la catégorie $D^-(\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$:*

$$\mathrm{Adj}_i^*(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) : \qquad \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}[\mathrm{codim}_X Y] \simeq i^*_{\mathrm{diff}}\, i_*^{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}.$$

Démonstration. Soit W un ouvert affine de Y qui est la trace d'un ouvert affine U de X. Soient $\mathcal{W}^\dagger$ et $\mathcal{U}^\dagger$ des relèvements de W et de U. Si $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module spécial, la valeur du complexe $i^*_{\mathrm{diff}}\, i_*^{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sur l'ouvert $\mathcal{W}^\dagger$ est par construction le complexe :

$$(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/V}) \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}} \mathcal{M}_{\mathcal{W}^\dagger}$$

dont la cohomologie est concentrée, en vertu des lemmes 12.5.1 et 12.5.2, en degré $-\mathrm{codim}_X Y$, et dont la valeur est le faisceau

$$\mathcal{T}or^{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}_{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/V}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}.$$

Il en résulte un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}$-modules à gauche induit par l'isomorphisme $\mathrm{Adj}_i^*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V})$:

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger} \to \mathcal{T}or^{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}}_{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger},$$

qui commute aux restrictions du site $Y^\dagger_{\mathrm{inf}}$. On a comme cela un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules spéciaux :

$$\mathrm{Adj}_i^*(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) : \qquad \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}[\mathrm{codim}_X Y] \simeq i^*_{\mathrm{diff}}\, i_*^{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}},$$

qui se dérive trivialement. ■

On en déduit le corollaire suivant qui donne un cas où la cohomologie locale commute avec l'image inverse.

Corollaire 12.5.5. — *Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k. Il existe un isomorphisme canonique $\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à gauche spéciaux :*

$$\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \simeq i^*_{\mathrm{diff}}\, \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}).$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'isomorphisme $\mathrm{Adj}_*^i(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ et de l'isomorphisme du théorème 12.4.14. ■

Autrement dit, les modules spéciaux à gauche :

$$\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \quad \text{et} \quad \mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$$

se correspondent par les foncteurs image directe et inverse dans le cas d'une immersion fermée.

De même, les modules spéciaux à droite $\omega_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ et $\mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ se correspondent par les foncteurs image directe et inverse dans le cas d'une immersion fermée.

Remarque 12.5.6. — Dans le cas du site infinitésimal p-adique formel la correspondance précédente n'a pas lieu, aussi le module $i_*^{\mathrm{diff}}\mathcal{O}_{Y^\wedge/V}$ se substitue avantageuseemnt au faisceau de cohomologie locale de Y à valeur dans le faisceau structural $\mathcal{O}_{X^\wedge/V}$.

13. La fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adique et le foncteur de dualité

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que la cohomologie de de Rham p-adique sur le corps des fractions K varie fonctoriellement de façon contravariante pour les morphismes f. La fonctorialité sur V nécessite des changements dans les définitions. On note encore Z le produit $Y \times_k X$.

13.1. La compatibilité des foncteurs image inverse topologique et différentielle

Théorème 13.1.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses et* **séparés** *sur k, et soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe de $D^b((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. Il existe un morphisme $dR(f/K, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ fonctoriel en $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$:*

$$f^{-1}\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \to \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, f^*_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

de complexes de $D(K_Y)$.

Démonstration. Comme $f^{-1} = i^{-1} \circ p^{-1}$ et $f^*_{\mathrm{diff}} = i^*_{\mathrm{diff}} \circ p^*_{\mathrm{diff}}$, il suffit de considérer le cas d'une projection puis celui d'une immersion fermée. Le

foncteur $p^{*,0}_{\mathrm{diff}}$ étant exact, le cas d'une projection est élémentaire. Il suffit de construire un morphisme entre faisceaux de Zariski :

$$p^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(p^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}},p^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}),$$

si $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ sont deux $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche spéciaux. Si Y et X sont affines et $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ sont des relèvements †-adiques plats, le morphisme :

$$\begin{aligned}&p^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}(\mathcal{N}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger},\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}) \to\\ &\quad\to \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger/K}}\big(\mathscr{D}_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/K}\underset{p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes}p^{-1}\mathcal{N}^\dagger,\mathscr{D}_{\mathscr{Y}^\dagger\times_V\mathscr{X}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/K}\underset{p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes}p^{-1}\mathcal{M}^\dagger\big)\end{aligned}$$

provient de la fonctorialité du produit tensoriel. Ces morphismes locaux se recollent de façon naturelle pour fournir un morphisme global dans le cas d'une projection. Prenant une résolution injective $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$-modules spéciaux puis une résolution injective de $p^*_{\mathrm{diff}}\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules spéciaux, on trouve le morphisme du théorème dans le cas d'une projection. En fait, dans le cas d'une projection le résultat est vrai sur V, même sans l'hypothèse de séparation.

Le morphisme du théorème précédent est défini chaque fois que le foncteur $f^{*,0}_{\mathrm{diff}}$ est exact.

Le cas d'une immersion ouverte est élémentaire mais le cas d'une immersion fermée où le foncteur image inverse n'est plus exact est nettement plus profond, délicat et nécessite l'extension $V \to K$ et l'hypothèse de séparation. Pour cela, nous allons d'abord définir le foncteur de dualité pour la catégorie des modules spéciaux et montrer la compatibilité du foncteur dualité avec le morphisme image directe pour une immersion fermée.

13.2. Le foncteur dualité et le théorème de dualité pour une immersion fermée

Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k.

Lemme 13.2.1. — *Si $\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial et* **plat**, *le faisceau $\mathcal{T}or_j^{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}}(\omega_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}/V}}, i^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est alors nul pour $j \neq 0$,*

et il existe un isomorphisme canonique de faisceaux de Zariski :

$$\omega_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} i^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}} \simeq \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} \mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}.$$

Pour tout complexe $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *de la catégorie* $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ *il existe un isomorphisme canonique de la catégorie* $D^-(V_Y)$ *:*

$$\omega_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}}{\otimes}} i^*_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}}{\otimes}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}[\mathrm{codim}_X Y].$$

Démonstration. La première assertion étant de nature locale, on peut supposer que X est affine et que $\mathscr{X}^\dagger$, $\mathscr{Y}^\dagger$ sont des relèvements plats de X et Y. Le complexe $\omega_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}} i^*_{\mathrm{diff}}\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ se représente par le complexe

$$\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}} i^{-1}\mathcal{P}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}\big).$$

En vertu du théorème 12.4.15, il existe un isomorphisme canonique :

$$i_*(\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/V}) \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V})[\mathrm{codim}_X Y].$$

Mais en vertu du théorème de pureté 12.3.1, on a l'isomorphisme :

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V})[\mathrm{codim}_X Y] \simeq \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}).$$

Comme $\mathcal{P}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}$ est plat sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ par hypothèse, les faisceaux de torsion $\mathcal{T}or_j^{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V},\mathrm{Sp}}(\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V}, i^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{P}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger})$ sont nuls pour $j \neq 0$ et, pour $j = 0$, on a l'isomorphisme :

$$\omega_{\mathscr{Y}^\dagger/V} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/V}} i^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{P}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} \simeq \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\omega_{\mathscr{X}^\dagger/V}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/V}} \mathcal{P}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger},$$

qui se globalise naturellement dans le cas non affine.

Prenant une résolution de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à gauche spéciaux plats, on trouve l'isomorphisme canonique de complexes de Zariski :

$$\omega_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}}{\otimes}} i^*_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}}{\otimes}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}[\mathrm{codim}_X Y].$$

□

Corollaire 13.2.2. — *Si* $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *est* $\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$*-module à gauche spécial, on a un isomorphisme :*

$$\omega_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}} \mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}} \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}} i^{\mathrm{diff}}_*\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}.$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition précédente et de l'isomorphisme du corollaire 12.5.4.

LEMME 13.2.3. — *Soit X un schéma lisse sur k et soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial. Alors, le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à droite spécial. Autrement dit, le foncteur de dualité :*

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$$

est contravariant et exact à gauche de la catégorie $(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod *des modules à gauche spéciaux dans la catégorie* Mod-$(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$ *des modules à droite spéciaux.*

Démonstration. Par construction, l'action géométrique ($\sharp$) de $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ sur $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ se fait à travers le morphisme $\mathrm{Inv} : \mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \to \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ qui associe à g l'opérateur différentiel g^{-1}. □

PROPOSITION 13.2.4. — *Si X est* **séparé** *sur k, le foncteur de dualité :*

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$$

se dérive en un foncteur de la catégorie dérivée $\mathrm{D}^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/\mathrm{V}}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ *vers la catégorie dérivée* $D^+(\text{Mod-}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp}))$*, foncteur que l'on note :*

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \boldsymbol{R}\mathscr{H}om^{\mathrm{Sp}}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}).$$

Démonstration. Il faut montrer qu'un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial admet une résolution à gauche par des modules à gauche spéciaux qui sont acycliques pour le foncteur dualité.

Soient $\mathcal{U}^\dagger$ un ouvert du site $X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et $j : W \to U$ un ouvert affine de U. Le $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$-module à droite $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}(j_!\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger|W/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})$ est isomorphe à $j_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger|W/V}$. Pour que le $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$-module à gauche $j_!\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger|W/V}$ soit acyclique pour le foncteur de dualité, il suffit que les images directes $R^l j_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger|W/V}$ soient nulles pour $l \geqslant 1$. Pour cela et en vertu du corollaire 2.4.3, il suffit que W soit affine assez petit et que la trace sur W d'un ouvert affine **reste affine** : et c'est cela qui demande l'hypothèse de *séparation*. Si donc U est **séparé**, tout $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$-module à gauche est quotient d'un module acyclique pour le foncteur de dualité, et la méthode de la démonstration du théorème 10.1.2 montre que tout $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial admet une

résolution à gauche par des modules à gauche spéciaux qui sont acycliques pour le foncteur dualité. □

Notation 13.2.5. — On note $\mathbb{D}^{\vee}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}}$ le foncteur de dualité décalé :

$$\mathbb{D}^{\vee}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}) := \boldsymbol{R}\mathscr{H}om^{\mathrm{Sp}}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}, \mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V})[\dim X].$$

Le foncteur de dualité est aussi défini sur K.

Proposition 13.2.6. — *Si X est séparé, il existe un morphisme canonique de la catégorie dérivée des modules à droite $D^{+}(\text{Mod-}(\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp}))$*

$$E_i^{\vee} : \qquad \omega_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K} \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K})[2\mathrm{codim}_X Y].$$

Démonstration. Soit :

$$E_i : \qquad \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}) \to \mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K},$$

le morphisme canonique de la catégorie $D^{b}((\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. En dualisant sur K, on trouve un morphisme :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om^{\mathrm{Sp}}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}, \mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}) \to \boldsymbol{R}\mathscr{H}om^{\mathrm{Sp}}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}}(\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}), \mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}).$$

Le complexe de gauche est canoniquement isomorphe à $\omega_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}[-\dim X]$. Le théorème suivant permet de montrer que le complexe de droite est canoniquement isomorphe au complexe :

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K})[2\mathrm{codim}_X Y - \dim X],$$

ce qui fournit le morphisme $E_i^{\vee}$ de la proposition. □

Théorème 13.2.7. — *Soit X un schéma lisse et séparé sur k et soient $i : Y \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé et lisse et $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ un complexe de la catégorie $D^{-}((\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. Alors, il existe un morphisme fonctoriel canonique de dualité de la catégorie $D^{+}(\text{Mod-}(\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp}))$:*

$$\mathbb{D}^{i}_{*}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}) : \qquad i_{*}^{\mathrm{diff}}\,\mathbb{D}^{\vee}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{Y^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}) \to \mathbb{D}^{\vee}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/V}}(i_{*}^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}).$$

De plus, le morphisme de dualité est un isomorphisme pour tout complexe parfait $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.

Démonstration. Soient $\mathcal{U}^{\dagger}$ un ouvert affine de $X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, $W = U \cap Y$ et $\mathcal{W}^{\dagger}$ un relèvement de W.

La restriction à $\mathcal{U}^\dagger$ du complexe $i_*^{\mathrm{diff}}\,\boldsymbol{R}\mathscr{H}om^{\mathrm{Sp}}_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ est le complexe :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger},\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V})\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/V}\,.$$

La restriction à $\mathcal{U}^\dagger$ du complexe $\boldsymbol{R}\mathscr{H}om^{\mathrm{Sp}}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}}(i_*^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}},\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ est par définition le complexe de modules à droite :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}(i_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V}\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}\mathcal{M}_{\mathcal{W}^\dagger},\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})\,.$$

Soit $\mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger}\to\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}$ une résolution à gauche de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}$-modules à gauche qui sont somme directe de modules élémentaires. Alors, on a un isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger},\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V})\simeq\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}(\mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger},\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}).$$

Le morphisme du produit tensoriel fournit un morphisme canonique :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}(\mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger},\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V})\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/V}\to\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}(\mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger},\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/V}).$$

Par fonctorialité, on a un morphisme canonique :

$$\begin{aligned}&i_*\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}(\mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger},\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/V})\to\\&\qquad\to\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}(i_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V}\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}\mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger},i_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V}\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}\to\mathcal{U}^\dagger/V}).\end{aligned}$$

Le morphisme précédent suivi du morphisme $\mathrm{Adj}^i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})$ fournit un morphisme :

$$\begin{aligned}&i_*\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}(\mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger},\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V})\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/V}\to\\&\qquad\to\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}\big(i_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V}\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}\mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger},\mathscr{H}_Y^{[\mathrm{codim}_X Y]}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})\big)\to\\&\qquad\qquad\to\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}\big(i_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V}\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}\mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger},\mathscr{H}_Y^{[\mathrm{codim}_X Y]}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})\big)\end{aligned}$$

Le morphisme canonique :

$$\mathscr{H}_Y^{[\mathrm{codim}_X Y]}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})\to\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}[\mathrm{codim}_X Y]$$

fournit un morphisme canonique :

$$i_*\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\mathscr{H}om}\ (\mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}) \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/V} \to$$
$$\to \boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}{\mathscr{H}om}\ \big(i_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{U}^\dagger/V} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\otimes} \mathcal{P}^\bullet_{\mathcal{W}^\dagger}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}\big)[\mathrm{codim}_X Y]$$

D'où un morphisme canonique :

$$i_*\boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\mathscr{H}om}\ (\mathcal{M}_{\mathcal{W}^\dagger}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}) \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/V} \to$$
$$\to \boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}{\mathscr{H}om}\ (i_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{U}^\dagger/V} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\otimes} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})[\mathrm{codim}_X Y],$$

qui est le morphisme de dualité $\mathbb{D}^i_*(\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger})$.

En considérant la résolution canonique $\mathcal{P}^\bullet_{\mathrm{inf}}$ de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-modules à gauche spéciaux acycliques pour le foncteur de dualité, on voit que le morphisme local de dualité est la restriction d'un morphisme global de dualité $\mathbb{D}^i_*(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ parce que dans le cas d'un module élémentaire, de la forme $P_{\mathcal{U}^\dagger!}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})$ pour un ouvert affine $\mathcal{U}^\dagger$, les deux membres du morphisme de dualité sont concentrés en degré 0.

De plus, le morphisme $\mathbb{D}^i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V})$:

$$i_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger\to\mathcal{U}^\dagger/V} \to \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}(i_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger/V}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V})[\mathrm{codim}_X Y]$$

est un isomorphisme en vertu du lemme 10.2.6. Cela montre la seconde assertion du lemme de dualité. □

L'isomorphisme du dualité précédent a aussi lieu sur l'extension $V \to K$.

Corollaire 13.2.8. — *Soient un schéma X lisse et séparé sur k et Y un sous-schéma lisse sur k. On a alors un isomorphisme canonique de la catégorie $D^-(\mathrm{Mod}\text{-}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp}))$:*

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})[2\mathrm{codim}_X Y - \dim X] \simeq$$
$$\simeq \boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}{\mathscr{H}om}^{\mathrm{Sp}}\ (\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}), \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}).$$

Démonstration. En effet, on applique l'isomorphisme de dualité au fibré trivial $\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$, en tenant compte des isomorphismes des théorèmes 12.4.14 et 12.4.15. □

L'isomorphisme du corollaire induit le morphisme de la proposition 13.2.6.

En vertu de la proposition 13.2.6, on obtient par produit tensoriel un morphisme de la catégorie $D(K_X)$:

$$\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}{\overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \underset{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}{\overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}[2\mathrm{codim}_X Y].$$

Mais le complexe de gauche est canoniquement isomorphe au complexe de de Rham décalé vers la droite :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K,\mathrm{Sp}}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})[\dim X],$$

alors qu'en vertu du lemme 13.2.1 le complexe de droite est canoniquement isomorphe au complexe de de Rham décalé vers la gauche :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K,\mathrm{Sp}}}(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, i^*_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})[\dim X].$$

Cela fournit le morphisme du théorème 13.1.1 dans le cas d'une immersion fermée. ■

Proposition 13.2.9. — *Soient $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas affines lisses sur k et $i^\dagger : \mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger$ un relèvement de i. Alors, le morphisme :*

$$E_i^\vee : \qquad \omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})[2\mathrm{codim}_X Y]$$

est représenté par le morphisme de complexes défini par $i^\dagger$:

$$i^{-1}\big(\Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K} \underset{\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}\big)[\dim X] \to \big(\Omega^\bullet_{\mathscr{Y}^\dagger/K} \underset{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/K}\big)[\dim X].$$

Démonstration. Voyons d'abord que $u := i^*$ définit un morphisme de complexes :

$$u : \ \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/K} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}{\otimes} \mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}) \to \mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes} \mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$$

par

$$P \otimes 1 \otimes \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k \mapsto \mathrm{Adj}^i_*(P \otimes u) \otimes {}^t u(\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k),$$

où ${}^t u$ est la différentielle de u et $\mathrm{Adj}^i_*(P \otimes u) := \mathrm{Adj}^i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K})(P \otimes u)$. Ce morphisme représente le morphisme

$$i^{\mathrm{diff}}_* i^*_{\mathrm{diff}} \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \to \mathscr{H}_Y^{\mathrm{codim}_X Y}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}} \mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K})$$

Considérons alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
i^{-1}(\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}^\dagger/K} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \arrow[d, "u:=i^*"] & \simeq i^{-1}\,\underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\mathscr{H}om}\big(\mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}), \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}\big) \arrow[d] \\
\Omega^{\bullet}_{\mathscr{Y}^\dagger/K} \underset{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}{\otimes} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/K} & \simeq \underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}{\mathscr{H}om}\big(\mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}), \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/K}\big)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\mathscr{H}om}\big(\mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes} \mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}),\, \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K})\big) \arrow[d, "u"] \\
\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/K} \underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}{\otimes} \mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}),\, \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K})\big),
\end{tikzcd}$$

qui est par construction *commutatif*. D'autre part, le diagramme suivant est aussi commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\mathscr{H}om}\big(\mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes} \mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}),\, \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K})\big) \arrow[d] \\
\underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\mathscr{H}om}\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/K} \underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}{\otimes} \mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}),\, \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K})\big)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\mathscr{H}om}\big(\mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes} \mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}),\, \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K})\big) \arrow[d] \\
\boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\mathscr{H}om}\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/K} \underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}{\otimes} \mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}),\, \mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K})\big)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\mathscr{H}om}\big(\mathscr{H}^{\mathrm{codim}_X Y}_Y(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}) \underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes} \mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}),\, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}\big)[\mathrm{codim}_X Y] \arrow[d] \\
\boldsymbol{R}\underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\mathscr{H}om}\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger\leftarrow\mathscr{Y}^\dagger/K} \underset{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}{\otimes} \mathrm{Sp}^{\bullet}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}),\, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^\dagger/K}\big)[\mathrm{codim}_X Y]
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que le morphisme :

$$i^{-1}\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \to \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})[2\mathrm{codim}_X Y]$$

est représenté par le morphisme de complexes défini par $i^\dagger$:

$$i^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K} \simeq i^{-1}\big(\Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K} \underset{\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}\big)[\dim X] \xrightarrow{u}$$
$$\xrightarrow{u} \big(\Omega^\bullet_{\mathscr{Y}^\dagger/K} \underset{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger\to\mathscr{X}^\dagger/K}[\dim X]\big) \simeq$$
$$\simeq \mathscr{H}_Y^{\operatorname{codim}_X Y}(\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K})[\operatorname{codim}_X Y].$$
■

Corollaire 13.2.10. — *Soient $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses et* **séparés** *sur k, $f^\dagger : \mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger$ un relèvement de f et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module à gauche spécial et acyclique pour f^*_{diff}. Alors, le morphisme*

$$f^{-1}\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}\big) \to \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, f^*_{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}\big)$$

est représenté par le morphisme de complexes :

$$f^{-1}\big(\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/K}} \Omega^\bullet_{\mathscr{X}^\dagger/K}\big) \to f^{*,0}_{\mathrm{diff}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{Y}^\dagger/K}} \Omega^\bullet_{\mathscr{Y}^\dagger/K}.$$

Démonstration. La méthode du complexe de Spencer du théorème 6.7.2 montre le cas d'une projection. Le cas d'une immersion ouverte est élémentaire. Le cas d'une immersion fermée est conséquence, précisément, de la compatibilité 13.2.9. Cela montre que le morphisme 13.1.1 recolle les morphismes locaux que l'on peut construire à partir de relèvements. En particulier, le corollaire s'applique à chaque fois que le foncteur $f^{*,0}_{\mathrm{diff}}$ est exact. ■

Remarque 13.2.11. — Les morphismes locaux précédents sont des morphismes de la catégorie dérivée, qui n'est pas un champ, et donc ne se recollent pas a priori, ce qui explique la nécessité et l'utilité du foncteur de dualité pour définir le morphisme 13.1.1 dans le cas d'une immersion fermée. Dans la pratique, le corollaire permet d'expliciter localement le morphisme précédent et c'est ce qui est utile.

La même démonstration montre la compatibilité sur K du foncteur de dualité avec le foncteur image inverse pour une projection.

Théorème 13.2.12. — *Soient $p : Y \times_k X \to X$ une projection de schémas lisses et séparés sur k, et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe de la catégorie $D^-((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. Il existe alors un morphisme fonctoriel canonique*

de dualité de la catégorie $D^+(\text{Mod-}(\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X)^\dagger_{\inf}/K}, \text{Sp}))$ *:*

$$\mathbb{D}^*_p(\mathcal{M}^\dagger_{\inf}) : \qquad p^*_{\text{diff}}\, \mathbb{D}^\vee_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\inf}/K}}(\mathcal{M}^\dagger_{\inf}) \to \mathbb{D}^\vee_{\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X)^\dagger_{\inf}/K}}(p^*_{\text{diff}}\, \mathcal{M}^\dagger_{\inf}).$$

De plus, le morphisme de dualité est un isomorphisme pour tout complexe parfait $\mathcal{M}^\dagger_{\inf}$.

13.3. La fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adique

Nous allons déduire la fonctorialité de la cohomologie des résultats précédents.

Corollaire 13.3.1. — *Soit* $f : Y \to X$ *un morphisme de schémas lisses et séparés sur* k *et soit* $\mathcal{M}^\dagger_{\inf}$ *un complexe de* $D^b((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\inf}/K}, \text{Sp})\text{-Mod})$. *Alors, il existe un morphisme canonique* $DR(f/K, \mathcal{M}^\dagger_{\inf})$:

$$\boldsymbol{R}\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\inf}/K},\text{Sp}}\big(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\inf}/K}, \mathcal{M}^\dagger_{\inf}\big) \to \boldsymbol{R}\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\inf}/K},\text{Sp}}\big(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\inf}/K}, f^*_{\text{diff}}\, \mathcal{M}^\dagger_{\inf}\big),$$

qui est en fonctoriel en $\mathcal{M}^\dagger_{\inf}$.

C'est une conséquence du théorème 13.1.1 et du fait que la cohomologie globale est l'hypercohomologie pour la topologie de Zariski du complexe de de Rham p-adique local.

Spécialisant au cas géométrique $\mathcal{M}^\dagger_{\inf} = \mathcal{O}_{X^\dagger_{\inf}/K}$ et tenant compte du théorème 10.5.7, on trouve la fonctorialité de la cohomologie de de Rham p-adique pour un morphisme.

Théorème 13.3.2. — *Soit* $f : Y \to X$ *un morphisme de schémas lisses et séparés sur* k. *Il existe alors un morphisme canonique* $DR(f/K)$:

$$\boldsymbol{R}\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\inf}/K},\text{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\inf}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\inf}/K}) \to \boldsymbol{R}\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\inf}/K},\text{Sp}}(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\inf}/K}, \mathcal{O}_{Y^\dagger_{\inf}/K}),$$

qui est transitif pour deux morphismes.

Démonstration. Si $Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$ sont deux morphismes entre schémas séparés et lisses sur k, le théorème 10.5.7 fournit des isomorphismes canoniques :

$$f^*_{\text{diff}}(g^*_{\text{diff}}(\mathcal{O}_{Z^\dagger_{\inf}/K})) \simeq f^*_{\text{diff}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\inf}/K}) \simeq \mathcal{O}_{Y^\dagger_{\inf}/K} \simeq (g\circ f)^*_{\text{diff}}(\mathcal{O}_{Z^\dagger_{\inf}/K}).$$

Reste à voir que le foncteur $DR(-/K)$ est compatible avec la composition des morphismes. Considérons le diagramme commutatif où les morphismes

i_f, i_g sont les morphismes graphes de f et g et les morphismes p sont les projections naturelles :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i_f"] \arrow[dr, "f"'] & Y \times_k X \arrow[r, "i_g"] \arrow[d, "p"] & Y \times_k X \times_k Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"] & Y \times_k Z \arrow[ddl, "p"] \\
& X \arrow[r, "i_g"] \arrow[dr, "g"'] & X \times_k Z \arrow[d, "p"] & \\
& & Z. &
\end{tikzcd}$$

Par construction, le foncteur $DR(-/K)$ est compatible avec la composition de deux immersions fermées ou de deux projections. Reste à voir la compatibilité des morphismes du carré cartésien, c'est-à-dire l'égalité :

$$(*) : \qquad DR(i_g/K) \circ DR(p/K) = DR(p/K) \circ DR(i_g/K).$$

On a un premier diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
DR(X \times_k Z/K) \arrow[r] \arrow[d] & \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\boldsymbol{R}\Gamma_{i_g(X)}(\mathcal{O}_{(X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}), \mathcal{O}_{(X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}\big) \arrow[d] \\
DR(Y \underset{k}{\times} X \underset{k}{\times} Z/K) \arrow[r] & \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\boldsymbol{R}\Gamma_{i_g(Y\underset{k}{\times}X)}(\mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}), \mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}\big),
\end{tikzcd}$$

puis un diagramme commutatif dont les morphismes horizontaux sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\boldsymbol{R}\Gamma_{i_g(X)}(\mathcal{O}_{(X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}), \mathcal{O}_{(X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}\big) \arrow[d] & \\
\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\boldsymbol{R}\Gamma_{i_g(Y\underset{k}{\times}X)}(\mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}), \mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}\big) \arrow[d] & \\
\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathscr{H}^{\dim Z}_{i_g(X)}(\mathcal{O}_{(X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}), \mathscr{H}^{\dim Z}_{i_g(X)}(\mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})\big) \arrow[d] & \\
\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathscr{H}^{\dim Z}_{i_g(Y\underset{k}{\times}X)}(\mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}), \mathscr{H}^{\dim Z}_{i_g(Y\underset{k}{\times}X)}(\mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})\big) &
\end{tikzcd}$$

et enfin un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathscr{H}^{\dim Z}_{i_g(X)}(\mathcal{O}_{(X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}),\mathscr{H}^{\dim Z}_{i_g(X)}(\mathcal{O}_{(X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})\big) & \leftarrow & DR(X/K) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathscr{H}^{\dim Z}_{i_g(Y\underset{k}{\times}X)}(\mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}),\mathscr{H}^{\dim Z}_{i_g(Y\underset{k}{\times}X)}(\mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})\big) & \leftarrow & DR(Y\underset{k}{\times}X/K),
\end{array}$$

dont les morphismes horizontaux sont des isomorphismes et dont la commutativité entraîne la compatibilité $(*)$.

En effet, soit :

$$\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \to \mathcal{I}^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$$

une résolution par des $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche spéciaux et

$$p^{*,0}_{\mathrm{inf}}\mathcal{I}^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \to \mathcal{J}^\bullet_{(Y\underset{k}{\times}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}}$$

une résolution par des $\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche spéciaux, alors le dernier diagramme se représente par le diagramme **commutatif** de complexes d'espaces vectoriels sur K dont les morphismes horizontaux sont des isomorphismes en vertu du corollaire 13.2.2 :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathscr{H}^{\dim Z}_{i_g(X)}(\mathcal{O}_{(X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}),i^{\mathrm{diff}}_{g,*}\mathcal{I}^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big) & \leftarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{I}^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X\times_k Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathscr{H}^{\dim Z}_{i_g(Y\underset{k}{\times}X)}(\mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X\underset{k}{\times}Z)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}),i^{\mathrm{diff}}_{g,*}\mathcal{J}^\bullet_{(Y\underset{k}{\times}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big) & \leftarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{(Y\times_k X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathcal{O}_{(Y\underset{k}{\times}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{J}^\bullet_{(Y\underset{k}{\times}X)^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big),
\end{array}$$

où le morphisme vertical de gauche provient de l'isomorphisme de changement de base pour une projection 11.3.4.

La commutativité de ce diagramme implique l'égalité :

$$DR(i_g/K)\circ DR(p/K) = DR(p/K)\circ DR(i_g/K)$$

et donc l'égalité :

$$DR(f/K)\circ DR(g/K) = DR(g\circ f/K). \qquad \blacksquare$$

Le théorème suivant résume ce qui précède.

THÉORÈME 13.3.3. — *La correspondance $DR(-/K)$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sms}(k) & \rightsquigarrow & D^+(K) \\ X & \rightsquigarrow & DR(X/K) := \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \end{array}$$

est un **foncteur** *contravariant de la catégorie* $\mathrm{Sms}(k)$ *des schémas lisses et séparés sur k vers la catégorie dérivée $D^+(K)$, qui étend le foncteur de Monsky-Washnitzer 6.7.6 du cas affine.*

Remarque 13.3.4. — Sous la condition $e < p^h(p-1)$, tous les arguments précédents se transposent pour le couple $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$. On n'obtient rien de nouveau pour la cohomologie sur K quand $h \neq 0$. Mais dans le cas $h = 0$, on obtient déjà la fonctorialité de la cohomologie sur V :

THÉORÈME 13.3.5. — *Si $e < p-1$, alors la correspondance $DR_0(-/V)$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sms}(k) & \rightsquigarrow & D^+(V) \\ X & \rightsquigarrow & \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\dagger,0}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}) \end{array}$$

est un **foncteur** *contravariant de la catégorie* $\mathrm{Sms}(k)$ *des schémas lisses et séparés sur k dans la catégorie dérivée $D^+(V)$.*

Démonstration. En effet, dans ce cas on peut considérer le complexe de Spencer $\mathrm{Sp}^{\bullet,0}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ d'échelon zéro qui se construit en remplaçant le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ par le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger,0}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$, qui est une résolution du faisceau structural, qui est alors un module de présentation finie. A partir de là tous les arguments se transposent. ■

Remarque 13.3.6. — D'autre part, si $e < p-1$, la cohomologie de Rham p-adique d'échelon zéro du site infinitésimal formel doit être canoniquement isomorphe à la cohomologie cristalline sur V, et cet isomorphisme doit être fonctoriel.

13.4. Le théorème de factorisation p-adique de la fonction Zêta d'une variété algébrique lisse sur un corps fini

Nous allons appliquer la fonctorialité précédente, en fait dans une situation plus simple, au morphisme de Frobenius d'une variété algébrique lisse sur un corps fini, morphisme plat mais non lisse, et en déduire l'expression cohomologique p-adique de sa fonction Zêta.

Définition 13.4.1. — *Supposons que k est un corps fini $\mathbb{F}_q$ et notons $f := fr$ le morphisme de Frobenius relatif à $\mathbb{F}_q$ d'une variété algébrique lisse X sur $\mathbb{F}_q$. On définit l'endomorphisme $\mathcal{F}$ de complexes de Zariski par :*

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to$$
$$\to \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, fr^*_{\mathrm{diff}}\,\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}),$$

où le premier morphisme est celui du théorème 13.1.1 et le second provient de l'isomorphisme canonique $fr^*_{\mathrm{diff}}\,\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \simeq \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ du théorème 10.5.7. On définit l'endomorphisme de Frobenius de la cohomologie de de Rham p-adique, et l'on note

$$\boldsymbol{F}^i : \qquad H^i_{DR}(X/K,\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to H^i_{DR}(X/K,\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}),$$

le morphisme induit en cohomologie par le morphisme $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, fr^*_{\mathrm{diff}}\,\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \simeq$$
$$\simeq \boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}).$$

Lemme 13.4.2. — *Si $X_1 \cup X_2$ est un recouvrement ouvert de X, le triangle de Mayer-Vietoris de 6.5.9 induit une suite exacte longue de cohomologie de K-espaces vectoriels munis de l'endomorphisme $\boldsymbol{F}^\bullet$:*

$$\cdots \to H^\bullet_{DR}(X/K,\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to$$
$$\to H^\bullet_{DR}(X_1/K,\mathcal{O}_{(X_1)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \oplus H^\bullet_{DR}(X_2/K,\mathcal{O}_{(X_2)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to$$
$$\to H^\bullet_{DR}(X_{12}/K,\mathcal{O}_{(X_{12})^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to H^{\bullet+1}_{DR}(X/K,\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to \cdots$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to \mathcal{I}^\bullet_X$ une résolution injective par un complexe de Zariski de faisceaux d'espaces vectoriels sur K. Alors, l'endomorphisme $\mathcal{F}$ se prolonge en un endomorphisme $\tilde{\mathcal{F}}$ du complexe $\mathcal{I}^\bullet_X$. On obtient alors un endomorphisme d'une **suite exacte courte** de complexes d'espaces vectoriels sur K, parce que les termes du complexe $\mathcal{I}^\bullet_X$ sont **flasques** :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Gamma(X,\mathcal{I}^\bullet_X) & \to & \Gamma(X_1,\mathcal{I}^\bullet_X)\oplus\Gamma(X_2,\mathcal{I}^\bullet_X) & \to & \Gamma(X_{12},\mathcal{I}^\bullet_X) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Gamma(X,\mathcal{I}^\bullet_X) & \to & \Gamma(X_1,\mathcal{I}^\bullet_X)\oplus\Gamma(X_2,\mathcal{I}^\bullet_X) & \to & \Gamma(X_{12},\mathcal{I}^\bullet_X) & \to & 0\,.
\end{array}$$

La suite longue de cohomologie fournit le lemme.

Corollaire 13.4.3. — *Les endomorphismes de Frobenius* $\boldsymbol{F}^\bullet$ *sur la cohomologie de de Rham p-adique sont* **bijectifs**.

Démonstration. La suite longue de cohomologie du lemme précédent ramène la bijectivité de $\boldsymbol{F}^\bullet$ pour X aux cas de X_1, X_2 et de $X_1 \cap X_2$. En raisonnant sur le nombre d'ouverts affines d'un recouvrement de X, on se ramène au cas affine, traité par Monsky dans [M_2], sachant que **localement** les morphismes de Frobenius sont induits par un morphisme de complexes de de Rham. ■

Définition 13.4.4. — *Si la variété X est purement de dimension* $\dim X$, *on définit le nombre de Lefschetz $L(X)$ comme la somme alternée des traces de l'automorphisme gradué de la cohomologie* $q^{\dim X}(\boldsymbol{F}^\bullet)^{-1}$.

Le nombre $L(X)$ est bien défini comme un élément de K en vertu du théorème de finitude 6.6.2 [Me_2].

Corollaire 13.4.5. — *On a l'égalité $L(X) = N_1(X)$, où $N_1(X)$ est le nombre de points $\mathbb{F}_q$-rationnels de X.*

Démonstration. En considérant un recouvrement de X par des ouverts affines et en raisonnant par récurrence sur le nombre des ouverts affines du recouvrement, la suite longue de cohomologie du triangle de Mayer-Vietoris réduit la formule des traces $N_1(X) = L(X)$ au cas affine, traité dans [M_2], puisque les deux nombres sont additifs pour deux ouverts. ■

Soit $V \to V'$ une extension finie d'anneaux de valuation discrète complets de corps résiduels parfaits. Notons (k', K', X') le triplet obtenu à l'aide de ce changement de base à partir du triplet (k, K, X).

Lemme 13.4.6. — *Soit $V \to V'$ une telle extension. Alors, le morphisme canonique :*

$$\boldsymbol{R}\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \underset{K}{\otimes} K' \to \boldsymbol{R}\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X'^\dagger_{\mathrm{inf}}/K'},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X'^\dagger_{\mathrm{inf}}/K'}, \mathcal{O}_{X'^\dagger_{\mathrm{inf}}/K'})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Dans le cas affine, la cohomologie de de Rham p-adique commute au changement de base fini. La suite de Mayer-Vietoris ramène le cas général au cas affine. ■

On en déduit la première démonstration, à notre connaissance, de la factorisation p-adique de la fonction Zêta d'une variété algébrique lisse sur

un corps fini pour une variété algébrique lisse sur un corps fini, sans aucune autre restriction, ce qui constitue le véritable test de nos méthodes :

THÉORÈME 13.4.7. — *Supposons que k est un corps fini $\mathbb{F}_q$ et que $f = fr$ est le morphisme de Frobenius relatif à $\mathbb{F}_q$ d'une variété algébrique X lisse purement de dimension $\dim X$. On a alors la factorisation de la fonction Zêta de X :*

$$Z(X,t) = \prod_{i \text{ impair}} P_{p,i}(X) / \prod_{i \text{ pair}} P_{p,i}(X)$$

où $P_{p,i}(X) := \det(1 - q^{\dim X}(\boldsymbol{F}^i)^{-1}t) \in K[t]$ avec $0 \leqslant i \leqslant 2\dim X$, est le polynôme caractéristique de $q^{\dim X}(\boldsymbol{F}^i)^{-1}$ agissant sur la cohomologie $H^i_{DR}(X/K) := H^i_{DR}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$.

Démonstration. Pour $m \geqslant 1$, soit $V \to V_m$ l'extension non ramifiée relevant l'extension $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_{q^m}$. Par le lemme précédent, on obtient un isomorphisme :

$$H^i_{DR}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \otimes_K K_m \simeq H^i_{DR}(X_m/K_m, \mathcal{O}_{(X_m)^\dagger_{\mathrm{inf}}/K_m})$$

de K_m-espaces vectoriels compatible avec l'action de $(\boldsymbol{F}^i)^m$. D'où l'égalité :

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}\left((q^{\dim X}(\boldsymbol{F}^i)^{-1})^m, H^i_{DR}(X/K, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})\right) = L(X_m) = N_m$$

où N_m est le nombre de points de X à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^m}$, qui implique la factorisation de la fonction Zêta, par le raisonnement habituel, en comparant les dérivées logarithmiques des deux membres du théorème. ■

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, cette factorisation était connue auparavant dans le cas affine ([M_2]), complété par le théorème de finitude [Me_2], et dans le cas propre et lisse par la théorie cristalline [B_2].

Remarque 13.4.8. — Le morphisme de Frobenius **n'est pas défini** comme morphisme de complexes sur le complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ du site infinitésimal, parce que l'action de Frobenius **ne commute pas** à l'action du groupe $\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$. L'action de Frobenius n'est définie sur ce complexe qu'en **catégorie dérivée**, parce que ses faisceaux de cohomologies $\mathcal{E}xt^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ sont isomorphes aux faisceaux de Zariski $\mathcal{E}xt^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$. On ne voit pas a priori comment définir globalement l'action de Frobenius sur la cohomologie à partir du complexe $\Omega^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ sans passer par la catégorie des complexes spéciaux. C'est le point.

14. La suite exacte de Gysin en cohomologie de de Rham p-adique et la classe de cohomologie d'un cycle

Dans ce paragraphe nous allons établir la suite exacte de Gysin en cohomologie de de Rham p-adique sur K pour un couple $Y \subset X$ lisse sur k, généralisant la suite exacte de Gysin pour un couple de variétés affines lisses ([M$_1$], [Me$_2$]), et nous allons construire un morphisme gradué entre le groupe des cycles de X et l'algèbre graduée de la cohomologie de de Rham p-adique de X. Nous suivons la méthode, introduite dans le cas affine dans [Me$_2$], qui consiste d'abord à montrer un résultat de compatibilité des images directes différentielle et topologique pour le foncteur de de Rham local.

14.1. La compatibilité des foncteurs images directes topologique et différentielle

Nous allons d'abord démontrer le théorème de compatibilité entre le foncteur image directe des modules spéciaux et le foncteur image direct du complexe de de Rham local.

Théorème 14.1.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas lisses sur k, où X est séparé sur k, et soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un complexe de la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. Alors, il existe un isomorphisme canonique de la catégorie $D^+(K_X)$:*

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, f_*^{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})[\dim X] \simeq$$
$$\simeq \boldsymbol{R}f_*\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})[\dim Y].$$

Par construction, le foncteur image directe des modules spéciaux f_*^{diff} est le composé $p_*^{\mathrm{diff}} \circ i_*^{\mathrm{diff}}$ du foncteur image directe dans le cas d'une immersion fermée et dans le cas d'une projection. Le foncteur $\boldsymbol{R}f_*$ est le composé $\boldsymbol{R}p_* \circ \boldsymbol{R}i_*$. Pour monter le théorème précédent il suffit donc de le montrer dans le cas d'une immersion fermée puis dans le cas d'une projection.

Lemme 14.1.2. — *Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas lisses sur k, et soient $\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à droite spécial plat et $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$-module à gauche spécial. Il existe un isomorphisme canonique de projection de faisceaux de Zariski de V-modules sur X :*

$$\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} i_{*,0}^{\mathrm{diff}}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to i_*\big(i_{\mathrm{diff}}^{*,0}\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}\big).$$

Démonstration. Soient U un ouvert affine de X et W sa trace sur Y. Soit $\mathcal{U}^\dagger$ un relèvement de U et $\mathcal{W}^\dagger$ un relèvement de W. Par définition, la restriction à U du faisceau de Zariski $\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} i^{\mathrm{diff}}_{*,0}\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est le faisceau $\mathcal{P}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}} i_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{V}^\dagger} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger})$. De même, par construction, la restriction à U du faisceau de Zariski $i_*(i^{*,0}_{\mathrm{diff}}\mathcal{P}^\dagger_{\mathrm{inf}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est le faisceau $i_*(i^{-1}\mathcal{P}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \otimes_{i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger})$. Le morphisme du lemme est le morphisme naturel de projection :

$$\mathcal{P}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}{\otimes} i_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\otimes} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}\big) \to i_*\big(i^{-1}\mathcal{P}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \underset{i^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}}{\otimes} \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger\leftarrow\mathcal{W}^\dagger} \underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger/V}}{\otimes} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}\big),$$

lequel est un isomorphisme puisque i est une immersion fermée. Cet isomorphisme de projection est invariant par l'action du groupe $\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}$, et se recolle en un isomorphisme de faisceaux de V-modules sur X. ■

Comme le foncteur $i^{\mathrm{diff}}_{*,0}$ est exact, l'isomorphisme précédent se dérive de façon évidente en un isomorphisme de projection :

$$\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}} i^{\mathrm{diff}}_*\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to i_*(i^*_{\mathrm{diff}}\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}),$$

pour un complexe $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ de la catégorie $D^b(\text{Mod-}(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}))$ et un complexe $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ de la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp})\text{-Mod})$. Appliquons l'isomorphisme précédent au cas $\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}} = \omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ et tenons compte de l'isomorphisme du théorème 10.7.1. On trouve l'isomorphisme de projection :

$$\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}} i^{\mathrm{diff}}_*\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to i_*(\omega_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$$

et, en particulier, l'isomorphisme sur K :

$$\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}} i^{\mathrm{diff}}_*\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \to i_*(\omega_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}).$$

Mais le complexe :

$$\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}} i^{\mathrm{diff}}_*\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$$

est canoniquement isomorphe au complexe :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, i^{\mathrm{diff}}_*\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})[\dim X],$$

et la formule de projection précédente fournit l'isomorphisme du théorème 14.1.1 dans le cas d'une immersion fermée.

Considérons le cas d'une projection $p : Y \times_k X \to X$. Posons pour simplifier les notations $Z := Y \times_k X$. Supposons d'abord que Y et X sont affines et soient $\mathscr{Y}^\dagger$ et $\mathscr{X}^\dagger$ des relèvements plats sur V de Y et de X. Alors, $p_*^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{M}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ est canoniquement isomorphe au complexe :

$$\boldsymbol{R}p_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/K}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger}),$$

et le complexe de de Rham de $\mathcal{M}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ est canoniquement isomorphe au complexe :

$$\omega_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/K}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger}[-\dim Z].$$

Le morphisme de projection topologique :

$$\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes}} \boldsymbol{R}p_*\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger}\big) \to$$
$$\to \boldsymbol{R}p_*\big(p^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger}\big).$$

est un *isomorphisme*, parce que le $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$-module à droite $\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K}$ admet une résolution finie par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}$-modules localement libres de type fini. Mais en vertu du théorème 10.7.1, l'image inverse :

$$p^*_{\mathrm{diff}}\,\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K} := p^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/K}$$

est canoniquement isomorphe à $\omega_{\mathscr{Y}^\dagger \times_V \mathscr{X}^\dagger/K}$, ce qui fournit la compatibilité du théorème 14.1.1 dans ce cas-là.

Supposons que X est affine et soit $\mathscr{X}^\dagger$ un relèvement V-plat de X. Le complexe $p_*^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{M}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ se représente par construction par le complexe :

$$p_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{I}^\bullet_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}})\big)[\dim Y],$$

où $\mathcal{I}^\bullet_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est une résolution de $\mathcal{M}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{Z_{\mathrm{inf}}/K}$-modules à gauche spéciaux injectifs. La formule de projection fournit encore un isomorphisme :

$$\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes}} \boldsymbol{R}p_*\,\mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{I}^\bullet_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}})\big)[\dim Y] \simeq$$
$$\simeq \boldsymbol{R}p_*\big(p^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}{\otimes}} \mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\big(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{I}^\bullet_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}})\big)\big)[\dim Y].$$

Mais si Y est un ouvert affine et si $\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{Z_{\mathrm{inf}}/K}$-module spécial injectif, le faisceau :

$$\mathcal{T}or_i^{p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}\left(p^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\left(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})\right)\right)$$

est en vertu du cas précédent nul si $i \neq \dim Y$, et l'on a l'isomorphisme local :

$$\mathcal{T}or^{p^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/K}}_{\dim Y}\left(p^{-1}\omega_{\mathscr{X}^\dagger/K}, \mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\left(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})\right)\right) \simeq$$
$$\simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}}\left(\mathcal{O}_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}\times\mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})\right),$$

qui se recolle naturellement en un isomorphisme global au-dessus de $Y \times X$, fournissant ainsi l'isomorphisme du théorème dans le cas où X est affine.

Le cas où X est affine montre que si $\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{Z_{\mathrm{inf}}/K}$-module à gauche spécial et injectif, le faisceau de Zariski $\mathcal{T}or_i^{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, p^{\mathrm{diff}}_{*,0}\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ est nul si $i \neq \dim Y$, et l'on a l'isomorphisme local :

$$\mathcal{T}or^{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}_{\dim Y}(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, p^{\mathrm{diff}}_{*,0}\mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}) \simeq p_*\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{Z^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}}),$$

qui se recolle naturellement en isomorphisme global au-dessus de X. En prenant une résolution de $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{Z_{\mathrm{inf}}/K}$-modules spéciaux injectifs, on obtient un isomorphisme de complexes qui représente l'isomorphisme du théorème 14.1.1 dans le cas d'une projection.

14.2. La suite exacte de Gysin en cohomologie de de Rham p-adique

Nous allons établir d'abord l'analogue p-adique de l'isomorphisme de Thom, puis en déduire formellement la suite de Gysin.

THÉORÈME 14.2.1. — *Soit une immersion fermée $i : Y \to X$ de schémas lisses et séparés sur k, de complémentaire $j : U \to X$. Alors, il existe des isomorphismes canoniques :*

$$H^{\bullet-2\mathrm{codim}_X Y}_{DR}(Y/K) \simeq H^\bullet_{DR,Y}(X/K)$$

dont on déduit une suite exacte longue de Gysin :

$$\to H^{\bullet-2\mathrm{codim}_X Y}_{DR}(Y/K) \to H^\bullet_{DR}(X/K) \to H^\bullet_{DR}(U/K) \to \cdot$$

Démonstration. En vertu du théorème 12.4.14, et c'est là le point crucial, on a un isomorphisme canonique de la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$:

$$i_*^{\mathrm{diff}}\,\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})[\mathrm{codim}_X Y].$$

En vertu du théorème 14.1.1 appliqué à $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} = \mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ dans le cas d'une immersion fermée, on trouve un isomorphisme canonique de complexes de Zariski :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})) \simeq \\ \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})[-2\mathrm{codim}_X Y].\end{aligned}$$

L'hypercohomologie du membre de droite calcule par définition les espaces $H_{DR}^{\bullet-2\mathrm{codim}_X Y}(Y/K)$.

En vertu de la proposition 12.2.2, on a un isomorphisme canonique de complexes de Zariski :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\left(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})\right) \simeq \\ \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y\left(\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})\right).\end{aligned}$$

L'hypercohomologie du membre de droite calcule par définition les espaces $H^\bullet_{DR,Y}(X/K)$, ce qui fournit les isomorphismes de Thom.

Soient $j : U \to X$ le complémentaire de Y et le triangle de cohomologie locale :

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \to \boldsymbol{R}j_*^{\mathrm{inf}} j_{\mathrm{inf}}^{-1}\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K} \to ,$$

qui est un triangle distingué de la catégorie $D^+((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$. En vertu de la proposition 12.2.2, on a un isomorphisme canonique :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \boldsymbol{R}j_*^{\mathrm{inf}} j_{\mathrm{inf}}^{-1}\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \simeq \\ \simeq \boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}).\end{aligned}$$

On en déduit le triangle distingué de la catégorie $D^+(K)$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})[-2\mathrm{codim}_X Y] \to \\ \to \boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to \\ \to \boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{U^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) \to ,\end{aligned}$$

dont la suite longue de cohomologie fournit la suite exacte de Gysin pour le couple $Y \subset X$:

$$\cdots \to H_{DR}^{\bullet-2\mathrm{codim}_X Y}(Y/K) \to H^\bullet_{DR}(X/K) \to H^\bullet_{DR}(U/K) \to \cdots \qquad \blacksquare$$

Remarque 14.2.2. — Le lecteur prendra garde à ce que la suite exacte de Gysin n'a pas lieu pour la cohomologie de de Rham p-adique du site infinitésimal formel.

14.3. La classe de cohomologie d'un cycle

Soient X un schéma séparé et lisse sur k et Z un sous-k-schéma intègre de X. Notons $\mathrm{sing}(T)$ le lieu singulier du schéma **réduit** associé à un schéma T.

THÉORÈME 14.3.1. — *Si le corps de base est parfait, sous les conditions précédentes le morphisme de restriction :*

$$H_{DR}^{2\mathrm{codim}_X Z}(X/K) \to H_{DR}^{2\mathrm{codim}_X Z}(X - \mathrm{sing}(Z)/K)$$

est bijectif.

Démonstration. Comme Z est localement de type fini sur k, le lieu singulier $\mathrm{sing}(Z)$ est fermé en vertu du critère de Zariski, et la suite $\mathrm{sing}(Z) \supset (\mathrm{sing}(\mathrm{sing}Z))\dots$ est strictement décroissante. Si le corps de base k est parfait, le lieu non singulier coïncide avec le lieu lisse sur k et $Z - \mathrm{sing}(Z)$ est lisse sur k. En considérant la filtration $X - \mathrm{sing}(Z) \subset X - \mathrm{sing}(\mathrm{sing}(Z))\dots$, on se ramène à supposer que $\mathrm{sing}(Z)$ est lisse sur k.

Pour un sous-schéma fermé Y de X, lisse sur k, on a $H_{DR,Y}^{l}(X/K) = 0$ pour $l < 2\mathrm{codim}_X Y$. En effet, $H_{DR,Y}^{\bullet}(X/K)$ est par définition l'hypercohomologie du complexe de Zariski :

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Y\big(\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})\big) \simeq \\ \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}\big(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})\big),$$

qui est isomorphe, en vertu des résultats précédents, au complexe :

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, \mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})[-2\mathrm{codim}_X Y].$$

La suite exacte de cohomologie locale du couple $\mathrm{sing}(Z) \subset X$:

$$H_{DR,\mathrm{sing}(Z)}^{2\mathrm{codim}_X Z}(X/K) \to H_{DR}^{2\mathrm{codim}_X Z}(X/K) \to H_{DR}^{2\mathrm{codim}_X Z}(X - \mathrm{sing}(Z)/K) \to \\ \to H_{DR,\mathrm{sing}(Z)}^{2\mathrm{codim}_X Z+1}(X/K) \to$$

montre le théorème, puisque

$$2\mathrm{codim}_X Z < 2\mathrm{codim}_X Z + 1 < 2\mathrm{codim}_X \mathrm{sing}(Z)\,. \qquad \blacksquare$$

DÉFINITION 14.3.2. — *Soit X un schéma séparé et lisse sur k.*

1) *Si Y est un sous-schéma fermé de X lisse sur k, on définit la classe de cohomologie $c\ell(Y)$ de Y comme l'image du morphisme identique de $\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ par le morphisme canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}) =: H^0_{DR}(Y/K) \simeq H^{2\mathrm{codim}_X Y}_{DR,Y}(X/K) \to \\ \to H^{2\mathrm{codim}_X Y}_{DR}(X/K).$$

2) *Si le corps de base est parfait, on définit la classe de cohomologie $c\ell(Z)$ d'un sous-schéma Z intègre comme l'image inverse par l'isomorphisme du théorème précédent de la classe de cohomologie de $Z - \mathrm{sing}(Z)$ dans $H^{2\mathrm{codim}_X Z}_{DR}(X - \mathrm{sing}(Z)/K)$.*

La classe $c\ell(Z)$ est donc un élément bien défini de $H^{2\mathrm{codim}_X Z}_{DR}(X/K)$, dont l'image dans $H^{2\mathrm{codim}_X Z}_{DR}(X - Z/K)$ est nulle. On obtient donc par linéarité un morphisme gradué :

$$c\ell : \qquad C^\bullet(X) \to H^{2\bullet}_{DR}(X/K)$$

entre le groupe des cycles de X et le K-espace gradué de la cohomologie de de Rham p-adique de X. Naturellement, on s'attend à ce que l'intersection des cycles soit compatible avec la composition des classes de cohomologie.

15. Le lemme de Poincaré et la formule de Künneth pour l'espace affine

Soient X un schéma lisse sur k et $p : X \times_k A^n_k \to X$ la projection de l'espace affine au-dessus de X sur la base X. Nous allons déduire du théorème de compatibilité 14.1.1 le lemme de Poincaré, qui est aussi un cas particulier de la formule de Künneth.

THÉORÈME 15.0.3. — *Soit $\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$-module à gauche spécial* **parfait**. *Il existe alors un isomorphisme canonique :*

$$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}} \simeq p^{\mathrm{diff}}_* p^*_{\mathrm{diff}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}[-n]$$

de complexes spéciaux.

Démonstration. Par récurrence, on peut supposer que $n = 1$, que t est une coordonnée sur A^1_k et enfin que $\mathcal{A}^1_V$ est le relèvement associé d'algèbre $(V[t])^\dagger$. Cela entraîne que, pout tout ouvert $\mathcal{U}^\dagger$, les images directes supérieures topologiques $R^l p_* p^*_{\mathrm{diff}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger}$ sont nulles pour $l \geqslant 1$. En effet, localement sur la base, $p^*_{\mathrm{diff}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ admet une résolution finie par des sommes finies

du module $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}\times_V \mathcal{A}^1_V \to \mathcal{A}^1_V/K}$ qui est acyclique pour le foncteur p_*, en vertu du théorème du symbole total et du théorème d'acyclicité. Cela entraîne que, pour tout ouvert $\mathcal{U}^{\dagger}$, le complexe $p_*^{\mathrm{diff}}\, p^*_{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}}[-1]$ se représente par :

$$0 \to p_* p^*_{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}} \xrightarrow{\partial_t} p_* p^*_{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{U}^{\dagger}\times_V \mathcal{A}^1_V/K}} \Omega_{\mathcal{U}^{\dagger}\times_V \mathcal{A}^1_V/\mathcal{U}^{\dagger}/K} \to 0.$$

On en déduit un morphisme :

$$\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}} \to p_*^{\mathrm{diff}}\, p^*_{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}}[-1],$$

et il s'agit d'établir que c'est un quasi-isomorphisme. Le complexe précédent n'a de la cohomologie qu'en degré zéro, parce l'action de ∂_t sur $(A^{\dagger}[t])^{\dagger}_K$ est surjective, et il est facile de voir que le morphisme précédent induit un isomorphisme entre $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathcal{U}^{\dagger}}$ et le noyau du morphisme du complexe précédent. Ces isomorphismes locaux se recollent en un isomorphisme de modules spéciaux entre $\mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et la cohomologie de degré zéro du complexe concentré cohomologiquement en degré zéro $p_*^{\mathrm{diff}}\, p^*_{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}[-1]$. ■

Corollaire 15.0.4. — *Sous les conditions précédentes, l'isomorphisme précédent induit des isomorphismes canoniques :*

$$H^{\bullet}_{DR}(X/K, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}) \simeq H^{\bullet}_{DR}(X \times_k A^n_k/K, p^*_{\mathrm{diff}}\, \mathcal{M}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}).$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 14.1.1, dans le cas d'une projection, et du théorème précédent. ■

Corollaire 15.0.5. — *Sous les conditions précédentes, l'isomorphisme précédent induit des isomorphismes canoniques :*

$$H^{\bullet}_{DR}(X/K, \mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}) \simeq H^{\bullet}_{DR}(X \times_k A^n_k/K, \mathcal{O}_{(X\times_k A^n_k)^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}).$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 10.5.7 et du corollaire précédent, sachant que la résolution de Spencer du lemme 6.7.1 montre que $\mathcal{O}_{X^{\dagger}_{\mathrm{inf}}/K}$ est parfait. Autrement dit, le foncteur de de Rham p-adique est homotopiquement invariant, comme on dit aujourd'hui dans la littérature consacrée aux motifs. ■

BIBLIOGRAPHIE

[A] A. Arabia, "Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes". Commentarii Mathematici Helvetici 76 (2001), 607-639.

[A-M$_2$] A. Arabia, Z. Mebkhout, "Sur le Topos infinitésimal p-adique d'un schéma lisse II". À paraître.

[B$_1$] P. Berthelot, "Cohomologie p-cristalline des schémas : comparaison avec la cohomologie de de Rham". C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 269 (1969), 397-400.

[B$_2$] P. Berthelot, "*Cohomologie cristalline des schémas de car.* $p > 0$". Lecture Notes in Mathematics 407 , Springer-Verlag 1974.

[B$_3$] P. Berthelot, "Cohomologie rigide et cohomologie des variétés de caractéristique p". Bull. Soc. Math. France, Mémoire 23 (1986), 7-32.

[B-O] P. Berthelot, J. Ogus, "Isocristals and De Rham Cohomology I". Inv. Math. 72 (1983), 159-199.

[Bo] N. Bourbaki, "*Éléments de mathématiques. Algèbre commutative, chap. III-IV*". Actual. scient. et industr., Hermann, Paris 1961.

[C-M$_1$] G. Christol, Z. Mebkhout, "Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques I". Ann. Inst. Fourier 43 (1993), 1545-1574.

[C-M$_2$] G. Christol, Z. Mebkhout, "Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II". Annals of Math. 146 (1997), 345-410.

[C-M$_3$] G. Christol, Z. Mebkhout, "Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III". Annals of Math. 151 (2000), 385-457.

[C-M$_4$] G. Christol, Z. Mebkhout, "Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques IV". Inventiones Math. 143 (2001), 629-672.

[D] B. Dwork, "On the Rationality of the Zeta Function of an Algebraic Variety". Amer. J. Math. 82 (1960), 631-648.

[G$_1$] A. Grothendieck, "On the de Rham Cohomology of Algebraic Varieties". Publ, IHES 29 (1966), 95-105.

[G$_2$] A. Grothendieck, "Formule de Leschetz et rationalité des fonctions L". Séminaire Bourbaki, exposé 279 (Décembre 1964).

[G$_3$] A. Grothendieck, "Cristaux". Lettre à John Tate, 31 pages, datée du mois de mai 1966.

[G$_4$] A. Grothendieck, "Crystals and the De Rham Cohomology of Schemes". In Dix exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland Company Paris (1968), pp. 306-358.

[Me$_1$] Z. Mebkhout, "Théorème de dualité pour les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents". C. R. Acad. Sci. Paris (1977), 785-787.

[Me$_2$] Z. Mebkhout, "Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière". Amer. J. Math. 119 (1997), 1027-1081.

[Me$_3$] Z. Mebkhout, "Le théorème du symbole total d'un opérateur différentiel p-adique d'échelon $h \geqslant 0$". Revista Matemática Iberoamericana (à paraître).

[M-N$_1$] Z. Mebkhout, L. Narvaez, "Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques". In p-adic Analysis, Lecture Notes in Math. 1454 (1990), pp. 267-309.

[M-N$_2$] Z. Mebkhout, L. Narvaez, "La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer". Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 24 (1991), 227-256.

[M-N$_3$] Z. Mebkhout, L. Narvaez, "Le théorème du symbole total d'un opérateur différentiel p-adique". Revista Matemática Iberoamericana 26 (2010), no. 3, 825–859.

[Mr] D. Meredith, "Weak Formal Schemes". Nagoya Math. J. 45 (1972), 1-38.

[M-W$_0$] P. Monsky, G. Washnitzer, "The Construction of Formal Cohomology Sheaves". Proc. N.A.S. Vol. 52 (1964), 1511-1514.

[M-W] P. Monsky, G. Washnitzer, "Formal Cohomology I". Annals of Math. 88 (1968), 181-217.

[M$_1$] P. Monsky, "Formal Cohomology II". Annals of Math. 88 (1968), 218-238.

[M$_2$] P. Monsky, "Formal Cohomology III". Annals of Math. 93 (1971), 315-343.

[M$_3$] P. Monsky, "One Dimensional Formal Cohomology". Actes Congrès Intern. Math. (Nice 1970), Tome 1, pp 451-456, Gauthier-Villars Paris 1971.

[V] J.-L. Verdier, "*Des catégories dérivées des catégories abéliennes. Thèse soutenue le 14 juin 1967 et publiée en 1996*". S. M. F. Astérisque 239 (1996).

[EGA I] A. Grothendieck, J. A. Dieudonné, "Éléments de géométrie algébrique I". Publ. IHES 4 (1960).

[EGA III_1] A. Grothendieck, J. A. Dieudonné, "Éléments de géométrie algébrique III, première partie". Publ. IHES 11 (1961).

[EGA IV_4] A. Grothendieck, J. A. Dieudonné, "Éléments de géométrie algébrique IV, quatrième partie". Publ. IHES 32 (1967).

Liste des notations

$\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$-Mod 9
$(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod 9
$X \mapsto DR(X/K)$ 15
$X^\wedge_{\mathrm{inf}}$ 18
$\mathcal{O}_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}/V}$ 18
$\mathcal{G}_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}}$ 18
$\mathscr{D}^\dagger_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}/R}$ 18
$(\mathscr{D}^\dagger_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}/V}, \mathrm{Sp})$-Mod 18
$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\wedge/R}$ 18
$\mathcal{G}_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^\dagger_{X^\wedge_{\mathrm{inf}}/R}$ 19
$\mathscr{X}^\dagger = (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R})$ 23
$\mathcal{U}^\dagger$ 24
$\mathcal{U}^\dagger \mid W$ 24
$X_s := (X, \mathcal{O}_{\mathscr{X}^\dagger/R}/I^s), X_1 := X$ 27
$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ 28
$a_\alpha := \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-x)^\beta P(x^{\alpha-\beta})$. 29
$P(x, \Delta_x) := \sum_\alpha a_\alpha \Delta_x^\alpha$ 29
$\sigma_P(x, \xi) := \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$ 29
$X^\dagger_{\mathrm{inf}}$ 30
$\boldsymbol{Fais}(X^\dagger_{\mathrm{inf}}), \boldsymbol{Fam}(\mathcal{O}uv(X^\dagger_{\mathrm{inf}}))$ 34
$\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ 34
$\Omega^j_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ 34
$(\sharp)_{r^\dagger}$ 34
$\Omega^\bullet_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ 34
$\mathscr{T}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ 35
$\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ 35
$\mathscr{D}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ 35
$X^{\dagger,\mathrm{aff}}_{\mathrm{inf}}$ 36
$\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}$ 38
$\mathcal{G}_{\mathscr{X}^\dagger}$ 39
$R[\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}]$ 39
$G_{A^\dagger}$ 39
$\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ 39
$\mathcal{A}_{\mathscr{Y}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger}]$ 40
$\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ 40
$(\sharp)$ 41
$\mathcal{A}_{\mathcal{W}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger}] \bigotimes_{r^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{U}^\dagger}[\mathcal{G}_{\mathcal{U}^\dagger}]} r^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{U}^\dagger} \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{W}^\dagger}$ 41
$P_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{X}^\dagger}$ 42
$\mathscr{H}om_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}}(\mathcal{F}_{1\,\mathrm{inf}}, \mathcal{F}_{2\,\mathrm{inf}})$ 45
$\mathcal{F}_{1\,\mathrm{inf}} \otimes_{\mathcal{A}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}}} \mathcal{F}_{2\,\mathrm{inf}}$ 45
$\mathcal{G}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}} \hookrightarrow \mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ 47
$\mathscr{D}_{Y_s \xrightarrow{u_s} X_s/R_s}$ 48
$g := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a^\alpha \Delta_x^\alpha, a^\alpha := a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$ .. 48
$(\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})$-Mod 50
$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R}$ 50
$\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ 52
$(\diamond)$ 52
$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger/R} \bigotimes_{r^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/R}} r^{-1}\mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger} \to \mathcal{M}^\dagger_{\mathcal{W}^\dagger}$ ... 52
$P_{\mathscr{X}^\dagger}$ 55
$R_{\mathscr{X}^\dagger}$ 55
$D^*((\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp})\text{-Mod})$ 60
$\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 60
$H^\bullet_{DR}(X/R, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 60
$\boldsymbol{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ ... 61
$\boldsymbol{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ .. 61
$DR(X/R, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 61
P_X 62
$\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ 67
$\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ 67
$DR(X/K)$ 71
$\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/R}$ 74
$P(a, \Delta, \ldots, \Delta^{p^h})$ 75
$\sigma_{P,h}(x, \xi^0, \ldots, \xi^h) := P(a, \xi^0, \ldots, \xi^h)$ 75
$\mathscr{D}^{\dagger,h}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ 76

$\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}$ 77

$H^\bullet_{DR,h}(X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V, \mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}})$ 79

$\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathscr{D}^{\dagger,h}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}, \mathcal{M}^{\dagger,h}_{\mathrm{inf}})$ 79

$H^\bullet_{\mathrm{inf}}(X/R, \mathcal{F}_{\mathrm{inf}})$ 81

$g \mapsto \delta(g) := \mathrm{Log}({}^t g^{-1}(1))$ 85

$\mathcal{A}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ 88

$\mathcal{B}_{\mathscr{X}^\dagger/V}$ 88

$dR, dR_{\mathrm{inf}}(X/R, -)$ 89

$\mathcal{E}xt^j_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R},\mathrm{Sp}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 90

$\mathcal{E}xt^j_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 90

$\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ 90

$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger \leftarrow \mathcal{W}^\dagger/V}$ 96

$\mathcal{N}^\dagger_{\mathrm{inf}} \overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V},\mathrm{Sp}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ 100

$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}^\dagger \to \mathscr{X}^\dagger/R}$ 100

f^{diff}_* 113

$\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K})$ 114

$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger \leftarrow \mathscr{Y}^\dagger/V}$ 115

$R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 128

$p_* \mathscr{H}om_{q^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}}(q^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/R}, R_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}} \times \mathscr{X}^\dagger}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}))$ 128

f^*_{diff} 133

$f^{\mathrm{diff}}_* \mathcal{O}_{Y^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}$ 140

$\boldsymbol{R}\Gamma_Z(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}), \boldsymbol{R}j^{\mathrm{inf}}_* j^{-1}_{\mathrm{inf}} \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ 142

$\boldsymbol{R}\Gamma_Z(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}), \boldsymbol{R}j^{\mathrm{inf}}_* j^{-1}_{\mathrm{inf}} \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ 143

$\mathrm{Adj}^i_*(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 159

$\mathrm{Adj}^*_i(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 163

$\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}$ 164

$dR(f/K, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 164

$\mathbb{D}^\vee_{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V}}(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 168

$\mathbb{D}^i_*(\mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 168

$DR(f/K, \mathcal{M}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ 174

$DR(f/K)$ 174

$DR(-/K)$ 177

$\mathrm{Sp}^{\bullet,0}(\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/V})$ 177

$\boldsymbol{F}^\bullet$ 178

$\mathcal{T}or^{\mathscr{D}^\dagger_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K},\mathrm{Sp}}_{\dim Y}(\omega_{X^\dagger_{\mathrm{inf}}/K}, p^{\mathrm{diff}}_* \mathcal{I}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ .. 184

Alberto ARABIA
CNRS et Université Paris 7 - Denis Diderot
175, rue de Chevaleret
Paris, 75013
arabia@math.jussieu.fr

Zoghman MEBKHOUT
CNRS et Université Paris 7 - Denis Diderot
175, rue de Chevaleret
Paris, 75013
mebkhout@math.jussieu.fr