



**HAL**  
open science

## Identification de champs d'endommagement à partir de mesures cinématiques

Stéphane Roux, Damien Claire, François Hild, Stéphane Pagano

► **To cite this version:**

Stéphane Roux, Damien Claire, François Hild, Stéphane Pagano. Identification de champs d'endommagement à partir de mesures cinématiques. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. pp.1-6. hal-00514585

**HAL Id: hal-00514585**

**<https://hal.science/hal-00514585>**

Submitted on 26 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Identification de champs d'endommagement à partir de mesures cinématiques

Stéphane Roux<sup>1</sup>, Damien Claire<sup>1,2</sup>, François Hild<sup>2</sup> & Stéphane Pagano<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire "Surface du Verre et Interfaces", UMR CNRS/Saint Gobain 125  
39 quai Lucien Lefranc, 93303 Aubervilliers Cedex  
stephane.roux@saint-gobain.com

<sup>2</sup>LMT-Cachan, ENS de Cachan / CNRS-UMR 8535 / Université Paris 6  
61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex  
hild@lmt.ens-cachan.fr

<sup>3</sup>LMGC, UMR-CNRS 5508, Université Montpellier II,  
Case courrier 048, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5  
pagano@lmgc.univ-montp2.fr

### Résumé :

*Il est proposé d'identifier des variables d'endommagement et leur évolution avec un chargement en deux dimensions en utilisant uniquement des champs de déplacement. La méthode d'écart à l'équilibre permet d'estimer un champ d'endommagement durant un essai biaxial sur un composite. A partir de l'analyse d'une séquence de mesures, une loi d'évolution est proposée et identifiée.*

### Abstract :

*It is proposed to identify damage variables and their growth with loading in two dimensions by only using full-field displacement measurements. The equilibrium gap method is used to estimate the damage field during a biaxial experiment on a sample made of a composite material. From the analysis of a sequence of measurements, a proposed form of constitutive law is tested and identified.*

### Mots-clefs :

**Écart à l'équilibre ; identification ; endommagement isotrope ; essai multiaxial ; perte de raideur.**

## 1 Introduction

La mesure de champs cinématiques (1) ouvre la voie à l'identification de propriétés élastiques. Parmi les méthodes actuellement développées, citons l'erreur en relation de comportement (2; 3), la méthode des champs virtuels (4; 5), l'écart à la réciprocité (6; 7) ou la méthode d'écart à l'équilibre (8; 9). Cette dernière est développée ici pour identifier un champ d'endommagement isotrope et une loi d'évolution dans le cas d'un essai biaxial.

## 2 Modèle d'endommagement

Dans l'approche qui suit, on utilise une description isotrope de l'endommagement. Une seule variable  $D$  est utilisée. Sous conditions de transformations isothermes, l'état du matériau est décrit par le tenseur des déformations infinitésimales  $\epsilon$  et par la variable d'endommagement  $D$  de telle manière que le potentiel d'état  $\psi$  (*i.e.*, la densité d'énergie libre de Helmholtz) s'écrit

$$\psi = \frac{1}{2} \epsilon : (1 - D) \mathcal{K}_0 \epsilon, \quad (1)$$

où ‘:’ est le produit tensoriel contracté sur deux indices, et  $\mathcal{K}_0$  est le tenseur d’élasticité du matériau non endommagé. Les forces associées aux variables d’état sont définies par

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathcal{K}_0(1 - D)\boldsymbol{\epsilon}, \quad Y = -\frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \mathcal{K}_0\boldsymbol{\epsilon}, \quad (2)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy, et  $Y$  le taux de restitution de densité d’énergie (10). L’inégalité de Clausius-Duhem s’écrit  $Y\dot{D} \geq 0$ , et en notant que  $Y$  est une fonction positive, la loi d’évolution de l’endommagement est telle que  $\dot{D} \geq 0$ . La loi d’évolution de l’endommagement peut être formulée par

$$D(t) = H[\max_{0 \leq \tau \leq t} Y(\tau)], \quad (3)$$

où  $H$  est une fonction monotone croissante. Dans la suite, il est proposé de déterminer  $H$  à partir de l’analyse d’un essai hétérogène.

### 3 La méthode d’écart à l’équilibre

Une méthode d’identification est présentée dans laquelle les déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  sont connus et les propriétés élastiques sont inconnues (elles sont réduites ici à un champ d’endommagement isotrope  $D$ ).

#### 3.1 Problème à résoudre

Considérons une structure  $\Omega$  dans laquelle existent des discontinuités d’endommagement. Le théorème de l’énergie potentielle permet une formulation faible des équations d’équilibre qui dépendent linéairement des déplacements et des propriétés élastiques. On considère ici des éléments carrés pour lesquels chaque noeud correspond à un “point” de mesure. Lorsque la variable d’endommagement  $D_e$  est constante par élément  $e$  occupant un domaine  $\Omega_e$ , la matrice de raideur élémentaire s’écrit

$$[\mathbf{K}_{me}](D_e) = (1 - D_e) \times [\mathbf{K}_{me0}] \quad (4)$$

où  $[\mathbf{K}_{me0}]$  la matrice de raideur élémentaire d’un élément non endommagé. De même, l’énergie de déformation  $E_{me}$  s’exprime par

$$E_{me}(D_e) = \frac{1 - D_e}{2} \{\mathbf{u}_e\}^t [\mathbf{K}_{me0}] \{\mathbf{u}_e\}, \quad (5)$$

où  $\{\mathbf{u}_e\}$  est le vecteur colonne des déplacements nodaux et  $^t$  l’opérateur de transposition. En l’absence de chargement extérieur aux noeuds considérés, les conditions d’équilibre pour chaque noeud milieu “12” de deux éléments 1 et 2 deviennent

$$\frac{\partial E_{m12}}{\partial \mathbf{u}_{12}}(D_1, D_2) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

avec  $E_{m12}(D_1, D_2) = E_{m1}(D_1) + E_{m2}(D_2)$ , où  $D_1, D_2$  sont les variables d’endommagement des éléments 1 et 2, respectivement. En écrivant ces conditions pour tous les noeuds milieu, on obtient un système linéaire dans lequel les inconnues sont les variables d’endommagement, constantes par élément. En pratique, l’équation (6) n’est pas strictement satisfaite et une force résiduelle  $\mathbf{F}_r$  se produit

$$\mathbf{F}_r(\hat{D}_1, \hat{D}_2) = \frac{\partial E_{m1}}{\partial \mathbf{u}_{12}}(\hat{D}_1) + \frac{\partial E_{m2}}{\partial \mathbf{u}_{12}}(\hat{D}_2), \quad (7)$$

où  $\hat{D}_1$  et  $\hat{D}_2$  sont des valeurs test des inconnues  $D_1$  et  $D_2$ . La sous-section suivante présente une formulation pratique où il s'agit de minimiser l'écart à l'équilibre.

### 3.2 Formulation pratique

En notant que l'endommagement est isotrope, une formulation particulière peut être développée. Considérons  $\{\mathbf{p}_1\}$  le vecteur colonne des quantités nodales associées au premier élément et  $\{\mathbf{p}_2\}$  celui correspondant au second élément. La  $k^e$  condition d'équilibre s'écrit

$$\bar{g}_k(\{\mathbf{p}_1\})(1 - D_1) = \check{g}_k(\{\mathbf{p}_2\})(1 - D_2), \quad (8)$$

où  $\bar{g}$  et  $\check{g}$  sont des fonctions génériques dépendant des déplacements nodaux (9). En considérant toutes les équations d'équilibre, le système global suivant est obtenu

$$[\mathbf{G}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{g}\} \quad \text{with} \quad \{\mathbf{D}\}^t = \{D_1 \ D_2 \ \dots \ D_N\}, \quad (9)$$

où  $[\mathbf{G}]$  et  $\{\mathbf{g}\}$  sont connues et contiennent les déplacements nodaux (mesurés). L'avantage de cette écriture est qu'elle peut être ré-exprimée sous forme logarithmique

$$\ln(1 - D_1) - \ln(1 - D_2) = \ln|\check{g}_k(\{\mathbf{p}_2\})| - \ln|\bar{g}_k(\{\mathbf{p}_1\})|. \quad (10)$$

L'équation (10) satisfait automatiquement la condition  $D_e < 1$ . Le système à résoudre devient

$$[\mathbf{M}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{q}\}, \quad (11)$$

où  $\{\mathbf{d}\}$  est défini par

$$\{\mathbf{d}\}^t = \{\ln(1 - D_1) \ \ln(1 - D_2) \ \dots \ \ln(1 - D_N)\}, \quad (12)$$

$[\mathbf{M}]$  est la matrice assemblée correspondant à toutes les conditions (10) et  $\{\mathbf{q}\}$  est un vecteur qui tous les deux dépendent des déplacements nodaux. Le système (11) est sur-déterminé pour la description isotrope utilisée ici. Pour une structure  $\Omega$ , la norme suivante est minimisée

$$\mathcal{T} = \|[\mathbf{M}]\{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{q}\}\|_{2(\Omega)}^2 \quad (13)$$

par rapport à  $\{\mathbf{d}\}$ . Une certaine robustesse peut être anticipée grâce à la redondance des équations (8). La minimisation conduit au système linéaire suivant

$$([\mathbf{M}]^t[\mathbf{M}])\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{M}]^t\{\mathbf{q}\}. \quad (14)$$

Une variante de cette formulation consiste à introduire des poids pour pouvoir moduler les différentes contributions dans (13) en fonction du niveau de contrainte (9).

#### 4 Détermination d'une loi d'évolution de l'endommagement

Une matrice vinylester renforcée par des fibres de verre est analysé (figure 1-a). Une distribution quasi uniforme d'orientations conduit à un comportement élastique isotrope avant la fissuration matricielle et la rupture de fibres qui sont les mécanismes d'endommagement de ce type de matériau (11). Une éprouvette en croix est sollicitée dans une machine d'essai multiaxial (figure 1-b). L'essai est conduit de telle manière que la force appliquée suivant les deux directions est identique. Leur norme est notée  $F$ . Le champ de déplacement de la figure 1-c est mesuré par corrélation d'images.

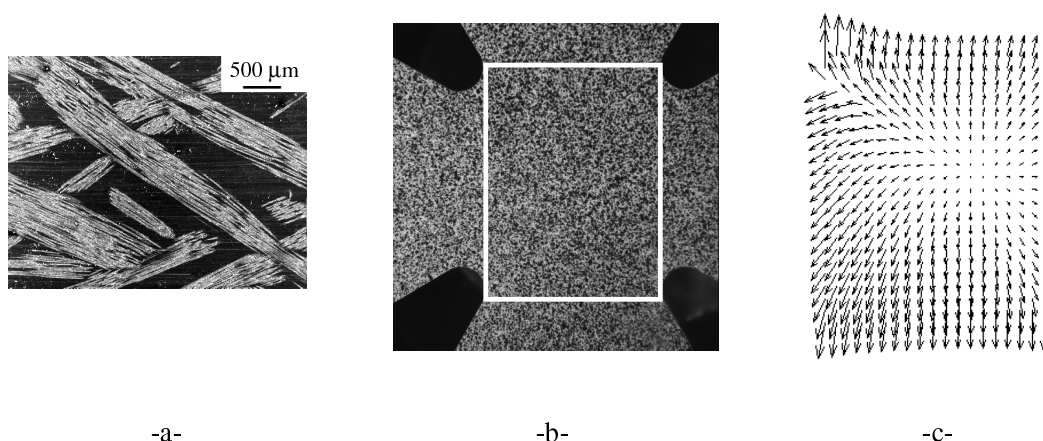


FIG. 1 – *a*-microstructure du composite. *b*-Éprouvette et région d'étude (rectangle blanc). *c*-Champ de déplacement mesuré par corrélation d'images pour un niveau d'effort (11 kN) proche de la rupture (11.1 kN).

Cinq niveaux d'effort ( $F = 5$  kN, 7 kN, 9 kN, 10 kN, et 11 kN) sont analysés. Pour chaque niveau d'effort,  $19 \times 23$  mesures de déplacement sont disponibles, desquelles  $9 \times 11$  valeurs d'endommagement sont estimées. En plus du champ  $1 - D$ , la force thermodynamique  $Y$  est calculée sous hypothèse de contrainte plane et sous forme adimensionnée

$$\frac{2Y}{E_0} = \frac{\epsilon_{11}^2 + 2\nu_0\epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{22}^2}{1 - \nu_0^2} + \frac{2\epsilon_{12}^2}{1 + \nu_0} \quad (15)$$

où les directions 1 et 2 sont associées à un référentiel plan,  $E_0$  est le module d'Young du matériau non endommagé et  $\nu_0$  le coefficient de Poisson correspondant (pris égal à 0.28). L'évolution de l'endommagement est écrite sous la forme de  $1 - D$  en fonction de  $2Y/E_0$ . Pour permettre une correction multiplicative du champ  $1 - D$  (car celui-ci est déterminé à une constante multiplicative près), la loi suivante est utilisée

$$1 - D = \min \left[ 1, A(F) \left( \frac{2Y}{E_0} \right)^\alpha \right] \quad (16)$$

où le paramètre  $A$  dépend du niveau de chargement, et  $\alpha$  est une puissance constante. On effectue une identification couplée pour les 5 niveaux de chargement en imposant la même valeur pour  $\alpha$  et en laissant le paramètre  $A$  libre. On impose également la cohérence thermodynamique, c'est-à-dire que seuls les points tels que  $\dot{D} \geq 0$  et  $\dot{Y} \geq 0$  sont considérés. Pour le premier niveau de chargement, tous les points sont considérés, pour le deuxième, un seul point est exclu,

pour le troisième 9 points sont à éliminer, pour le quatrième 18 points sont exclus et 17 points pour le cinquième. Ceci est essentiellement dû à l'amorçage et au début de propagation de la fissure dans le coin supérieur gauche. La figure 2 montre les résultats obtenus. La puissance  $\alpha$  est égale à  $-0.37$  l'écart quadratique moyen vaut 0.074.

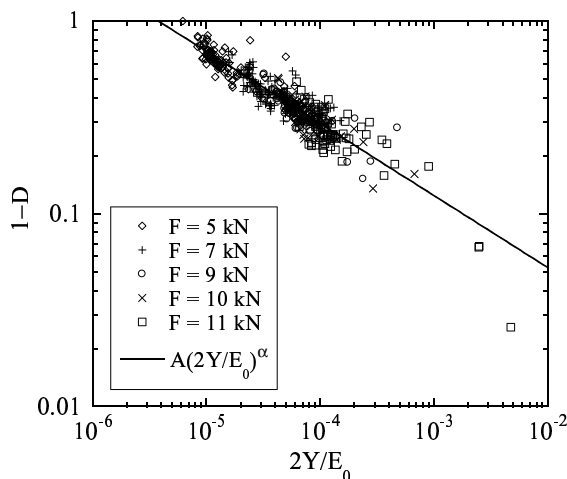


FIG. 2 – Evolution de  $1 - D$  après correction avec  $2Y/E_0$  lorsque tous les niveaux de chargement sont considérés et que seuls les données thermodynamiquement admissibles sont gardées. Les symboles sont les points d'identification et la droite est la prévision en utilisant l'équation (16).

Enfin, les champs  $(1 - D)$  peuvent être tracés à partir de la correction faite dans la figure 2, c'est-à-dire que la valeur minimale de  $D$  est imposée égale à zéro. La figure 3 montre les champs  $(1 - D)$  déterminés à partir des mesures cinématiques. Une raideur faible est anticipée et retrouvée pour les derniers niveaux de chargement. On observe également de très fortes valeurs d'endommagement pour le dernier niveau de chargement, en accord avec les mesures à ce niveau.

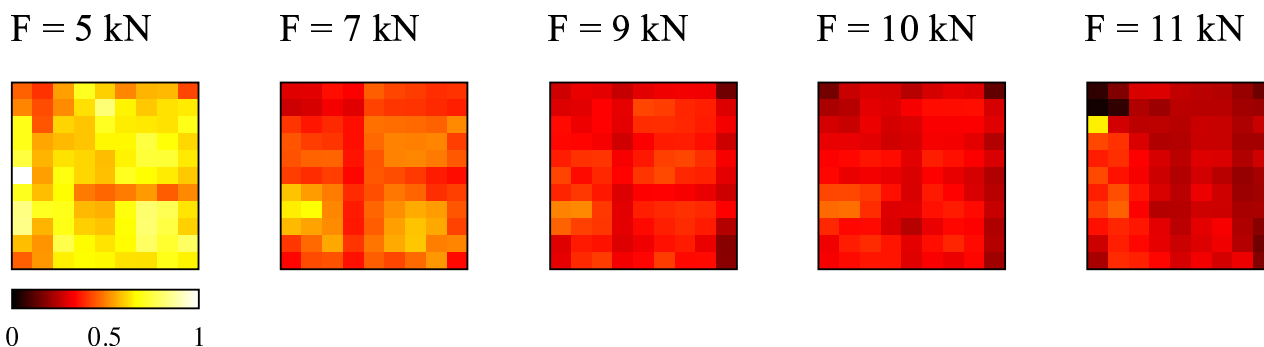


FIG. 3 – Champs  $(1 - D)$  corrigés pour 5 niveaux de chargement. Le maximum de  $(1 - D)$  est imposé à 1 pour le plus faible niveau d'effort.

## 5 Conclusions

Une procédure d'identification est utilisée pour évaluer des champs d'endommagement à partir de mesures de champs cinématiques. La méthode de l'écart à l'équilibre est une approche par éléments finis non standard dans laquelle les déplacements nodaux sont connus (car mesurés) et les propriétés élastiques (ou champ d'endommagement) sont à identifier. Ces dernières sont supposées uniformes par élément, mais variant d'élément à élément. Un système linéaire est à résoudre lorsque l'on minimise l'écart à l'équilibre. On a ainsi accès à un champ de propriétés élastiques et/ou un champ d'endommagement.

L'exemple d'une éprouvette en croix sollicitée dans deux directions perpendiculaires permet d'illustrer l'approche en analysant différents états d'endommagement et leur évolution. L'étape additionnelle proposée ici consiste à imposer des conditions supplémentaires liées à l'admissibilité thermodynamique traduisant le fait que l'endommagement ne peut pas évoluer de manière quelconque. Ceci permet de proposer une loi d'évolution qui décrit de manière satisfaisante l'essai analysé. Le fait de pouvoir utiliser une fonction unique décrivant l'évolution constitue une validation de l'approche d'identification et de l'hypothèse de description par un modèle continu de la dégradation du matériau analysé.

## Références

- [1] P. K. Rastogi, ed., *Photomechanics*, (Springer, Berlin (Germany), 2000).
- [2] P. Ladevèze, *Comparaison de modèles de milieux continus*, (thèse d'Etat, Université Paris 6, 1975). Voir aussi P. Ladevèze, *Updating of Complex Structure Models*, (Aérospatiale, les Mureaux (France), technical report 33.11.01.4, 1983).
- [3] G. Geymonat, F. Hild et S. Pagano, Identification of elastic parameters by displacement field measurement, *C. R. Mécanique* **330** (2002) 403-408.
- [4] M. Grédiac, Principe des travaux virtuels et identification, *C. R. Acad. Sci. Paris* **309** [Série II] (1989) 1-5.
- [5] M. Grédiac, The use of full-field measurement methods in composite material characterization: interest and limitations, *Composites: Part A* **35** (2004) 751-761.
- [6] H. D. Bui, Sur quelques problèmes inverses élastiques en mécanique de l'endommagement, *C. R. 2<sup>e</sup> Colloque national de calcul des structures*, (Hermès, Paris (France), 1995), 25-35.
- [7] S. Andrieux, A. B. Abda et H. D. Bui, Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocity, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* [t. 324] (1997) 1431-1438.
- [8] D. Claire, F. Hild et S. Roux, Identification of damage fields using kinematic measurements, *C. R. Mécanique* **330** (2002) 729-734.
- [9] D. Claire, F. Hild et S. Roux, A finite element formulation to identify damage fields: The equilibrium gap method, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **61** [2] (2004) 189-208.
- [10] J.-L. Chaboche, Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description du comportement viscoplastique et de la rupture par endommagement, *C. R. Problèmes non-linéaires de mécanique*, (Symposium franco-polonais, Cracow (Poland), 1977), 137-159.
- [11] F. Collin, Y. Berthaud et F. Hild, Visualisation par analyse d'images de la répartition des déformations et de l'amorçage dans un matériau composite, in: Y. Berthaud, M. Cottron, F. Morestin, P. Moucheron and M. Taroni, eds., *Proceedings Photomécanique 98*, (GAMAC, 1998), 241-248.