



**HAL**  
open science

## Identification de coefficients d'élasticité : utilisation de jauge de contrainte diffuse

Stéphane Pagano, François Hild, Stéphane Roux

► **To cite this version:**

Stéphane Pagano, François Hild, Stéphane Roux. Identification de coefficients d'élasticité : utilisation de jauge de contrainte diffuse. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. pp.1-6. hal-00514584

**HAL Id: hal-00514584**

**<https://hal.science/hal-00514584>**

Submitted on 26 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Identification de coefficients d'élasticité : une jauge de contrainte diffuse

Stéphane Pagano<sup>(a)</sup>, François Hild<sup>(b)</sup> & Stéphane Roux<sup>(c)</sup>

(a): LMGC, UMR-CNRS 5508, Université Montpellier II,  
Case courrier 048, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5.  
stephane.pagano@lmgc.univ-montp2.fr  
(b): LMT-Cachan, ENS Cachan / CNRS-UMR 8535 / Université Paris 6,  
61 Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex.  
francois.hild@lmt.ens-cachan.fr  
(c): Unité Mixte de Recherche CNRS/Saint-Gobain,  
39 Quai Lucien Lefranc, 93303 Aubervilliers Cedex.  
stephane.roux@saint-gobain.com

### Résumé :

Une procédure d'identification de propriétés élastiques adaptée à un domaine non borné est proposée. Il s'agit d'exploiter un champ de déplacement mesuré au voisinage du point d'application d'une force normale sur la frontière. A partir d'une formulation par potentiels élastiques complexes bi-dimensionnels, les constantes élastiques d'un milieu homogène isotrope sont déterminées. Une analyse de la sensibilité au bruit de mesure est présentée.

### Abstract :

A procedure is proposed for the identification of elastic moduli suited to an unbounded domain. It consists in exploiting the displacement field measured on a discrete set of points close to a free boundary where a normal point load is applied. Based on a complex elastic potential formulation, the two elastic constants of a homogeneous isotropic medium are determined. Noise sensitivity is evaluated.

### Mots-clefs :

**identification; potentiels complexes; analyse de champ**

## 1 Introduction

L'exploitation des mesures de champs en mécanique des solides devient de plus en plus commune ; la photomécanique [1] a maintenant atteint un stade de maturité telle que ces mesures peuvent être rapprochées de calculs numériques complets. Ceci concerne des modes de chargement de plus en plus complexes, et ouvre sur la perspective de déterminer des propriétés élastiques inhomogènes.

De nombreuses procédures d'identification ont été introduites. Citons les techniques fondées sur *l'erreur en loi de comportement* [2, 3] utilisées en particulier pour des analyses de vibrations [4], l'identification de défaut [5], celle de champ d'endommagement [6], ou encore l'étude de chargements inhomogènes (e.g. essai brésilien [7]). Une alternative consiste en *la méthode des champs virtuels* utilisées en particulier pour des propriétés élastiques homogènes anisotropes de matériaux composites [8, 9]. Une autre méthode, basée sur *l'écart à la réciprocité* [10], est applicable à la détection de fissures [11] dans un milieu homogène. Dans la plupart de ces exemples une information fortement redondante est nécessaire car les données des déplacements et des efforts sur les bords du domaine sont exploitées. Ces conditions peuvent cependant être re-

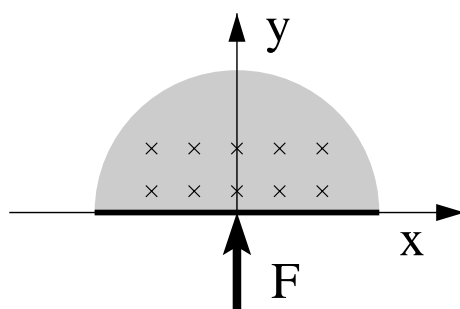


FIG. 1 – Une force ponctuelle  $F$  est appliquée normalement à la surface d'un solide (grisé). La mesure des déplacements sur un ensemble discret de points (indiqués par des croix), associée à la valeur de la force  $F$  donne accès aux constantes élastiques de ce solide supposé homogène sur cette région d'étude.

laxées (erreur en loi de comportement [6] ou champ virtuel [8]) en une simple relation intégrale sur les efforts.

Récemment, il a été proposé de déterminer des propriétés élastiques ou d'endommagement [12] (voire thermique [13]) spatialement inhomogènes en exploitant exclusivement des données cinématiques (ou de température dans le cas thermique) par la méthode dite *d'écart à l'équilibre* [14]. Puisqu'aucune échelle de contrainte (ou de flux) n'est fixée, seule des valeurs relatives peuvent être appréciées, et un simple facteur d'échelle global reste inconnu. Pour pallier cette difficulté, nous proposons ici une méthode qui permet via une seule mesure d'effort (force normale appliquée sur la frontière) d'apprécier les propriétés élastiques d'un milieu homogène isotrope ; procédure qui constitue une véritable jauge de contrainte, pour compléter une approche purement cinématique et atteindre une description complète.

## 2 Définition du problème

L'analyse qui suit est fondée sur l'étude d'un champ de déplacement bidimensionnel tel qu'il peut être estimée par corrélation d'images, et donc l'hypothèse d'élasticité plane (contrainte ou déformation plane) est adoptée. Comme illustré sur la Figure (1), une charge ponctuelle est appliquée normalement à la surface libre de l'éprouvette. Les mesures de déplacement en un nombre limité de points (de 10 à 100) sont exploitées pour déterminer le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

La spécificité de la question traitée ici consiste en la prise en compte d'un domaine ouvert, et d'une information statique particulièrement pauvre (une seule composante de force prise en compte). Nous utilisons ici un système de coordonnées schématisé sur la figure 1. De plus, les points du domaine seront représentés par leur affixe complexe  $z = x + iy$ , par rapport à l'origine (point d'application de l'effort) et le solide indenté correspond à  $\Im(z) > 0$  près de l'origine. Rappelons brièvement les notations et principaux résultats. Les potentiels complexes  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  sont deux fonctions holomorphes (i.e.,  $\partial\varphi/\partial\bar{z} = \partial\psi/\partial z = 0$ ), qui sont liées au champ de déplacement complexe  $\mathbf{U} = u_x + iu_y$  selon [15]

$$2\mu\mathbf{U} = \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (1)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement de Lamé.  $\kappa$  est un coefficient sans dimension relié au coef-

ficient de Poisson  $\nu$  par  $\kappa = (3 - 4\nu)$  pour des déformations planes, et  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  pour des contraintes planes. Le champ de déplacement ci-dessus est déterminé à un champ de déplacement rigide près (soit  $U_0 + i\Omega z$  avec  $\Omega$  réel en notations complexes).

Le problème de l'indentation normale d'un massif élastique semi-infini en deux dimensions a été résolu par Flamant [16, 17]. Les potentiels complexes prennent la forme suivante

$$\varphi(z) = \psi(z) = \frac{iF}{2\pi} \log(z) \quad (2)$$

et le champ de déplacement

$$\mathbf{U} = \frac{iF}{4\mu\pi} \left[ \kappa \log(z) + \frac{z}{z} + \log(\bar{z}) + U_0 \right] \quad (3)$$

où une translation  $U_0$  a été introduite.

### 3 Jauge de contrainte

Supposons que l'on connaisse le déplacement  $\mathbf{U}_n$  en  $N$  points d'affixe  $z_n$  pour  $n = 1, \dots, N$ . Pour s'affranchir du déplacement rigide inconnu, nous soustrayons à chacune des  $N$  conditions cinématiques la moyenne spatiale (notée  $\langle \dots \rangle$ ). Nous obtenons alors

$$\kappa[\log(z_n) - \langle \log(z) \rangle] + (4i\mu\pi/F)(\mathbf{U}_n - \langle \mathbf{U} \rangle) = -\overline{\log(z_n)} + \overline{\langle \log(z) \rangle} - \frac{z_n}{z_n} + \left\langle \frac{z}{z} \right\rangle \quad (4)$$

La rotation rigide est aisément supprimée en symétrisant le problème (imposant les déplacements  $-\bar{\mathbf{U}}_n$  aux points  $-\bar{z}_n$ ). Pour faciliter l'écriture, introduisons les notations suivantes

$$\begin{cases} A_n &= \log(z_n) - \langle \log(z) \rangle \\ B_n &= 4i\pi(\mathbf{U}_n - \langle \mathbf{U} \rangle)/F \\ C_n &= \overline{\log(z_n)} - \overline{\langle \log(z) \rangle} + z_n/\bar{z}_n - \langle z/\bar{z} \rangle \end{cases} \quad (5)$$

L'identification consiste à minimiser la fonction objectif suivante  $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}[\kappa, \mu] \equiv \sum_n |A_n\kappa + B_n\mu + C_n|^2 \quad (6)$$

par rapport à  $\kappa$  et  $\mu$ . Sous forme matricielle, nous devons résoudre

$$[\mathbf{M}](\boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{\chi}) = 0 \quad (7)$$

avec

$$[\mathbf{M}] = \sum_n \begin{bmatrix} |A_n|^2 & \Re[A_n\bar{B}_n] \\ \Re[A_n\bar{B}_n] & |B_n|^2 \end{bmatrix} \quad (\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \kappa \\ \mu \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{\chi}) = \sum_n \begin{pmatrix} \Re[A_n\bar{C}_n] \\ \Re[B_n\bar{C}_n] \end{pmatrix} \quad (8)$$

Il est important de noter que le problème donne lieu à une fonction quadratique en  $\kappa$  et  $\mu$ , une spécificité de la formulation potentielle utilisée ici. Notons également que dimensionnellement, seul  $\mu$  dépend (linéairement) de  $F$ . Il en résulte que  $\kappa$  et donc le coefficient de Poisson peut être déterminé sans connaître la valeur de force  $F$ .

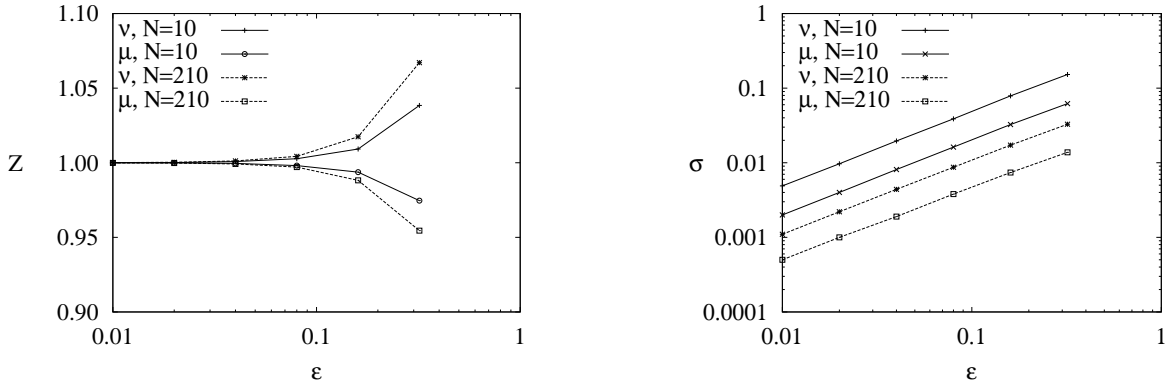


FIG. 2 – Gauche: Rapport entre propriétés moyennes déterminées et valeurs vraies, pour le coefficient de Poisson  $\nu$  (courbes hautes) et le module de cisaillement  $\mu$  (courbes basses).  $N$  désigne le nombre de points de mesure exploités.

Droite: Incertitude sur la détermination de  $\mu$  et  $\nu$  en fonction du nombre de points de mesure et de l'amplitude du bruit  $\epsilon$ .

Notons  $\alpha_{2n-1} = \Re[A_n]$  et  $\alpha_{2n} = \Im[A_n]$ , et de manière similaire  $\beta$  et  $\gamma$  pour  $B$  et  $C$ . L'expression de  $\kappa$  est

$$\kappa = \frac{|\beta|^2(\alpha \cdot \gamma) - (\alpha \cdot \beta)(\beta \cdot \gamma)}{|\alpha|^2|\beta|^2 - (\alpha \cdot \beta)^2} \quad (9)$$

et le module de cisaillement  $\mu$  vaut

$$\mu = \frac{|\alpha|^2(\beta \cdot \gamma) - (\alpha \cdot \beta)(\alpha \cdot \gamma)}{|\alpha|^2|\beta|^2 - (\alpha \cdot \beta)^2} \quad (10)$$

Ces deux dernières formules donnent le résultat final de la procédure proposée.

#### 4 Test numérique et sensibilité au bruit

Pour évaluer la robustesse de l'identification proposée, nous calculons les valeurs de  $\kappa$  et  $\mu$  numériquement à partir de données en déplacement bruitées avec un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart-type  $\epsilon$ . Les points où le déplacement est supposé connu sont distribués selon une grille régulière  $(i_x a; (i_y + 1/2)a)$  avec  $-n \leq i_x \leq n$  et  $0 \leq i_y \leq n - 1$  de manière que  $N = n(2n + 1)$ . Dans la suite, deux exemples sont traités,  $n = 2$  et  $n = 10$ , soit  $N = 10$  ou  $N = 210$  respectivement. Numériquement, nous choisissons  $a = 1$ ,  $\nu_{\text{vrai}} = 0.2$  et  $F/(4\pi a \mu \nu_{\text{vrai}}) = 1$ . Ceci fixe de manière unique la valeur des déplacements en chaque point de mesure. Il est important de noter que le niveau de déplacement moyen est dépendant de la grille de mesure choisie et donc de  $N$ . Dans les deux cas traités, la valeur moyenne du module du déplacement sur la grille vaut  $\langle |u| \rangle / a = 7.3$  et  $3.0$  respectivement pour  $N = 210$  et  $N = 10$  points. Les résultats sont caractérisés par le rapport sans dimension  $Z_\nu = \nu_{\text{est}} / \nu_{\text{vrai}}$  entre la valeur estimée,  $\nu_{\text{est}}$ , et connue,  $\nu_{\text{vrai}}$ , du coefficient de Poisson, et l'analogue pour le module de cisaillement  $\mu$ . A la fois la moyenne et l'écart-type de  $Z$  sont caractérisés à partir d'un échantillonnage de 10000 réalisations du bruit.

La Figure 2(gauche) montre la valeur moyenne de  $Z$  pour les deux ensembles de points, et différentes amplitudes de bruit. Comme attendu,  $Z$  tend vers l'unité lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. Lorsque le bruit augmente, l'erreur systématique  $|Z - 1|$  augmente de manière quadratique

avec  $\epsilon$ , comme le démontre un simple calcul de perturbation à partir des expressions ci-dessus (le terme linéaire est nul pour un bruit de moyenne nulle). L'influence du nombre de points de mesure,  $N$ , est faible mais paradoxalement, croît avec  $N$ . Le résultat le plus important dans la pratique concerne les écarts-types de  $Z$  représentés dans la figure 2(droite). Ils varient tous en proportion directe de  $\epsilon$  et selon  $1/\sqrt{N}$ . Ce dernier résultat peut être démontré dans un cadre de petites perturbations sur les valeurs du déplacement via le théorème de la limite centrale.

Il est à noter que la technique de corrélation d'images numériques à partir d'images codées sur 8 bits a une incertitude de 0.01 pixel [18]. Pour un déplacement moyen de l'ordre de quelques pixels, une incertitude de l'ordre de 1% devrait pouvoir être atteinte.

## 5 Conclusion

La technique décrite dans ce résumé constitue une véritable jauge de contrainte, délocalisée sur une zone d'étude au voisinage du point d'application d'un effort ponctuel, d'où le nom proposé de "jauge de contrainte diffuse". L'incertitude atteignable par cette approche semble extrêmement attractive, bien qu'elle nécessite encore une validation expérimentale.

Notons également qu'il est possible d'intégrer la démarche présentée ici à la détermination de champ de déplacement par corrélation d'images. Il suffit pour cela de prendre en compte la forme particulière du champ de déplacement associée à un poinçonnement normal. Une formulation théorique générale [19], adaptée à des formes de champ arbitraires, peut être utilisée à ce propos.

Enfin, la force de l'approche proposée est liée au choix des potentiels élastiques. Bien entendu, ceci peut être étendu à des champs de toute autre nature que le simple poinçonnement ponctuel. Des travaux sont actuellement en cours concernant d'autres applications, comme des fissures.

## Références

- [1] P. K. Rastogi, ed., *Photomechanics*, (Springer, Berlin (Germany), 2000), **77**.
- [2] P. Ladevèze, *Comparaison de modèles de milieux continus*, (thèse d'Etat, Université Paris 6, 1975). Voir aussi P. Ladevèze, *Updating of Complex Structure Models*, (Aérospatiale, les Mureaux (France), technical report 33.11.01.4, 1983).
- [3] R. V. Kohn et B. D. Lowe, A Variational Method for Parameter Identification, *Math. Mod. Num. Ana.* **22** [1] (1988) 119-158.
- [4] P. Ladevèze, D. Nedjar et M. Reynier, Updating of Finite Element Models Using Vibration Tests, *AIAA* **32** [7] (1994) 1485-1491.
- [5] H. D. Bui et A. Constantinescu, Spatial localization of the error of constitutive law for the identification of defects in elastic solids, *Arch. Mech.* **52** (2000) 511-522.
- [6] G. Geymonat, F. Hild et S. Pagano, Identification of elastic parameters by displacement field measurement, *C. R. Mécanique* **330** (2002) 403-408.
- [7] S. Calloch, D. Dureisseix et F. Hild, Identification de modèles de comportement de matériaux solides : utilisation d'essais et de calculs, *Technologies et Formations* **100** (2002) 36-41.
- [8] M. Grédiac, Principe des travaux virtuels et identification, *C. R. Acad. Sci. Paris* **309** [Série II] (1989) 1-5.

- [9] M. Grédiac, F. Pierron et Y. Surrel, Novel Procedure for Complete In-plane Composite Characterization Using a Single T-shaped Specimen, *Exp. Mech.* **39** [2] (1999) 142-149.
- [10] H. D. Bui, Sur quelques problèmes inverses élastiques en mécanique de l'endommagement, *C. R. 2<sup>e</sup> Colloque national de calcul des structures*, (Hermes, Paris (France), 1995), 25-35.
- [11] S. Andrieux, A. B. Abda et H. D. Bui, Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* [t. 324] (1997) 1431-1438. Voir aussi, S. Andrieux, A. B. Abda et H. D. Bui, Reciprocity Principle and Crack Identification, *Inverse Problems* **15** (1999) 59-65.
- [12] D. Claire, F. Hild et S. Roux, Identification of damage fields using kinematic measurements, *C. R. Mécanique* **330** (2002) 729-734.
- [13] D. Claire, S. Roux et F. Hild, Identification de conductivités thermiques et de propriétés élastiques locales par analyse de champs, *Méc. Ind.* **4** (2003) 655-665.
- [14] D. Claire, F. Hild et S. Roux, A finite element formulation to identify damage fields: The equilibrium gap method, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **61** [2] (2004) 189-208.
- [15] N. I. Muskhelishvili, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, in Russian, (Acad. Sci. USSR, Leningrad (USSR), 1933).
- [16] S. P. Timoshenko et J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, (McGraw-Hill (3rd edition), New York (USA), 1970).
- [17] K. L. Johnson, *Contact Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1985).
- [18] J.-N. Périé, S. Calloch, C. Cluzel et F. Hild, Analysis of a Multiaxial Test on a C/C Composite by Using Digital Image Correlation and a Damage Model, *Exp. Mech.* **42** [3] (2002) 318-328.
- [19] B. Wagne, S. Roux et F. Hild, Spectral approach to displacement determination from image analysis, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **17** (2002) 247-252