



**HAL**  
open science

# Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local, II Mesures ordonnées

Guy Rousseau

► **To cite this version:**

Guy Rousseau. Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local, II Mesures ordonnées. 2010.  
hal-00512853v1

**HAL Id: hal-00512853**

**<https://hal.science/hal-00512853v1>**

Preprint submitted on 31 Aug 2010 (v1), last revised 28 Feb 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local, II. Mesures ordonnées

Guy Rousseau

26 Août 2010

## Résumé

Pour un groupe de Kac-Moody déployé (au sens de J. Tits) sur un corps réellement valué quelconque, on construit une mesure affine ordonnée sur laquelle ce groupe agit. Cette construction généralise celle déjà effectuée par S. Gaussent et l'auteur quand le corps résiduel contient le corps des complexes [GR-08] et celle de F. Bruhat et J. Tits quand le groupe est réductif. On montre que cette mesure vérifie bien toutes les propriétés des mesures affines ordonnées comme définies dans [Ru-10]. On utilise le groupe de Kac-Moody maximal au sens d'O. Mathieu et on montre quelques résultats pour celui-ci sur un corps quelconque ; en particulier on prouve, dans certains cas, un résultat de simplicité pour ce groupe maximal.

## Abstract

For a split Kac-Moody group (in J. Tits' definition) over a field endowed with a real valuation, we build an ordered affine hovel on which the group acts. This construction generalizes the one already done by S. Gaussent and the author when the residue field contains the complex field [GR-08] and the one by F. Bruhat and J. Tits when the group is reductive. We prove that this hovel has all properties of ordered affine hovels (mesures affines ordonnées) as defined in [Ru-10]. We use the maximal Kac-Moody group as defined by O. Mathieu and we prove a few new results about it over any field; in particular we prove, in some cases, a simplicity result for this group.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le groupe de Kac-Moody minimal (à la Tits)</b>	<b>4</b>
1.1	Systèmes générateurs de racines . . . . .	5
1.2	Tores associés . . . . .	6
1.4	Relations dans $Aut(\mathfrak{g}_A)$ . . . . .	7
1.5	Foncteur de Steinberg . . . . .	8
1.6	Le groupe de Kac-Moody minimal $\mathfrak{G}_S$ (à la Tits) . . . . .	8
1.7	Un quotient du foncteur de Steinberg . . . . .	9
1.10	Fonctorialité . . . . .	11

<b>2</b>	<b>Algèbre enveloppante entière</b>	<b>12</b>
2.1	Rappels . . . . .	12
2.6	Poincaré-Birkhoff-Witt pour $\mathcal{U}$ . . . . .	15
2.8	Exponentielles tordues . . . . .	17
2.9	Unicité des exponentielles tordues . . . . .	17
2.10	Exponentielles tordues en poids nul . . . . .	18
2.11	Polynômes de Mitzman . . . . .	18
2.12	Exponentielles tordues dans les algèbres affines . . . . .	19
2.13	Sous-algèbres et complétions . . . . .	20
2.14	Modules intégrables à plus haut poids . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Les groupes de Kac-Moody maximaux (à la Mathieu)</b>	<b>21</b>
3.1	Groupes (pro-)unipotents . . . . .	21
3.4	Filtrations de $\mathcal{U}_{\Psi}^{ma}$ . . . . .	23
3.5	Groupes de Borel et paraboliques minimaux . . . . .	23
3.6	La construction de Mathieu . . . . .	24
3.7	Modules à plus haut poids et représentation adjointe . . . . .	24
3.8	Le cas classique . . . . .	25
3.10	Application au cas non classique . . . . .	26
3.11	Sous-groupes radiciels négatifs . . . . .	26
3.12	Comparaison avec le groupe à la Tits . . . . .	27
3.14	Comparaison des représentations . . . . .	28
3.16	Structure de $BN$ -paire raffinée sur $\mathfrak{G}^{pma}$ . . . . .	29
3.19	Changement de SGR . . . . .	30
3.20	Comparaison avec les groupes de Kac-Moody à la Kumar . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Appartement affine et sous-groupes parahoriques</b>	<b>32</b>
4.1	Comparaison avec [Ru-06] et [Ru-10] . . . . .	32
4.2	L'appartement affine témoin $\mathbb{A}$ . . . . .	32
4.3	Premiers groupes associés à un filtre $\Omega$ de parties de $\mathbb{A}$ . . . . .	34
4.4	Algèbres et modules associés au filtre $\Omega$ . . . . .	35
4.5	Groupes (pro-)unipotents associés au filtre $\Omega$ . . . . .	35
4.8	Représentations des groupes associés à $\Omega$ . . . . .	38
4.10	Conjugaison par $N$ . . . . .	38
4.15	Comparaison avec les raisonnements de [GR-08] . . . . .	42
<b>5</b>	<b>La mesure affine ordonnée</b>	<b>42</b>
5.2	Les groupes $G_{\Omega}$ . . . . .	42
5.7	Exemples de filtres avec de bons fixateurs . . . . .	43
5.8	Intersection d'appartements . . . . .	44
5.9	Paires conviviales . . . . .	45
5.11	Extension centrale finie du groupe . . . . .	46
5.13	Passage au simplement connexe . . . . .	47
5.14	Sous-groupes parahoriques et types de facettes . . . . .	47
5.15	Cheminées . . . . .	48

<b>6</b>	<b>Appendice : Comparaison et simplicité</b>	<b>50</b>
6.1	Le groupe complété à la Rémy-Ronan . . . . .	50
6.2	Le groupe complété à la Carbone-Garland . . . . .	51
6.3	Comparaison . . . . .	51
6.5	GK-simplicité . . . . .	52
6.10	Comparaison de $U^{ma+}$ et $\overline{U}^+$ . . . . .	55
6.13	Simplicité . . . . .	56

## Introduction

L'étude des groupes de Kac-Moody sur un corps local a été initiée par Howard Garland [Gd-95] pour certains groupes de lacets. Dans [Ru-06] on a construit un immeuble "microaffine" pour tous les groupes de Kac-Moody (minimaux au sens de J. Tits) sur un corps muni d'une valuation réelle. C'est un immeuble (en général non discret) avec les bonnes propriétés habituelles des immeubles. Cependant cet immeuble microaffine n'est pas l'analogue des immeubles de F. Bruhat et J. Tits pour les groupes réductifs. Il correspond plutôt à leur frontière dans la compactification de Satake ou compactification polyédrique. De plus il ne traduit pas les décompositions de Cartan de [Gd-95].

Une autre construction est envisageable pour un groupe de Kac-Moody sur un corps réellement valué. Elle est la généralisation directe de celle de Bruhat-Tits ([BT-72] et [BT-84]) et traduit les décompositions de Cartan de [Gd-95] dans le cas des groupes de lacets. Cependant, comme ces décompositions ne sont vérifiées qu'après torsion, l'espace  $\mathcal{I}$  ainsi construit à la Bruhat-Tits est tel que deux points quelconques ne sont pas toujours dans un même appartement. Il ne mérite donc pas le nom d'immeuble. Il s'est avéré cependant utile et a donc été considéré sous le nom de mesure (hovel).

La construction de cette mesure a été effectuée dans [GR-08] et on a pu l'utiliser pour des résultats en théorie des représentations. Le corps valué intéressant dans ce cadre est le corps des séries de Laurent complexes  $\mathbb{C}((t))$ . On s'est donc placé dans le cas d'un corps  $K$  muni d'une valuation discrète avec un corps résiduel contenant  $\mathbb{C}$ . Cette situation d'égale caractéristique 0 simplifie les raisonnements et permet, en particulier, d'utiliser les résultats du livre de S. Kumar [Kr-02]. On a cependant dû faire quelques hypothèses restrictives sur le groupe de Kac-Moody (en particulier la symétrisabilité).

Par ailleurs dans [Ru-10] on a élaboré une définition abstraite de mesure affine (inspirée de la définition abstraite des immeubles affines de [T-86]) et on a montré qu'elle est satisfaite par la plupart des mesures définies précédemment. De cette définition découlent des propriétés intéressantes : les résidus en chaque point sont des immeubles jumelés, à l'infini on trouve des immeubles jumelés et deux immeubles microaffines, il existe un préordre invariant sur la mesure.

Le but du présent article est de construire la mesure affine d'un groupe de Kac-Moody déployé sur un corps muni d'une valuation réelle non triviale et de montrer qu'elle satisfait aux axiomes abstraits de mesure affine ordonnée de [Ru-10]. Ceci est réalisé sans aucune restriction sur le groupe de Kac-Moody ni sur le corps valué. Pour cela on a essentiellement remplacé dans [GR-08] les groupes de Kac-Moody à la Kumar par ceux d'Olivier Mathieu [M-89] et la représentation adjointe dans l'algèbre de Lie par celle dans l'algèbre enveloppante entière, puisqu'on va considérer aussi de la caractéristique (résiduelle) positive.

Il y a en fait beaucoup de choix possibles pour les groupes de Kac-Moody, *cf.* [T-89]. On considère ici les groupes déployés "minimaux" tels que définis par Jacques Tits [T-87]; leurs propriétés essentielles sont expliquées dans [T-92] et aussi [Ry-02]. On a résumé celles-ci et prouvé quelques compléments (essentiellement sur les morphismes) dans la première partie de cet article.

La seconde partie est consacrée à l'algèbre enveloppante entière introduite par J. Tits pour construire ses groupes et à la représentation adjointe, déjà largement utilisée par B. Rémy. On y montre un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (avec des puissances divisées tordues) et on y construit des exponentielles tordues. Ces résultats tirent leur origine dans un travail de généralisation du théorème de simplicité de R. Moody [My-82], qui est expliqué dans l'appendice.

Les relations de commutation dans un groupe de Kac-Moody minimal  $G$  sont compliquées (voire inexistantes). Pour mener à bien des calculs on va raisonner dans un groupe maximal qui ici sera celui ( $G^{pma}$  ou  $G^{nma}$ ) défini par O. Mathieu. On a cependant besoin d'une connaissance plus concrète de celui-ci, c'est le but de la troisième partie. Il est en partie accompli grâce aux exponentielles tordues de la partie précédente.

Dans ces trois premières parties on étudie les groupes de Kac-Moody de manière générale sur un anneau quelconque, ou sur un corps si on veut plus de résultats de structure. On les considère ensuite sur un corps valué (mais aussi sur son anneau des entiers). Dans la quatrième partie on construit l'appartement témoin et les sous-groupes parahoriques (ou assimilés) associés aux sous-ensembles ou filtres de cet appartement témoin. C'est la partie la plus technique. Comme dans [GR-08], ces sous-groupes parahoriques du groupe de Kac-Moody  $G$  sont construits en plusieurs étapes en utilisant les groupes maximaux  $G^{pma}$  et  $G^{nma}$  contenant  $G$ . On a cependant dû apporter des changements substantiels aux raisonnements de [GR-08].

On récolte enfin dans la cinquième partie les fruits du travail précédent. Par un procédé classique utilisant l'appartement témoin et les sous-groupes parahoriques, on y construit la mesure affine (ordonnée) d'un groupe déployé sur un corps réellement valué. Et on montre les mêmes résultats qu'en [GR-08] ou [Ru-10]. Les raisonnements sont sans changement substantiel, mais, grâce aux parties précédentes, il n'y a plus d'hypothèse technique superflue.

L'appendice rassemble des résultats sur le groupe de Kac-Moody maximal à la Mathieu  $G^{pma}$  (sur un corps  $k$  quelconque) qui sont conséquences des résultats des parties 2 et 3. On y compare  $G^{pma}$  avec d'autres groupes de Kac-Moody maximaux définis par M. Ronan et B. Rémy [RR-06] ou L. Carbone et H. Garland [CG-03]. On y généralise aussi le théorème de simplicité d'un sous-quotient de  $G^{pma}$  dû à R. Moody [My-82] en caractéristique 0; on l'obtient ici en caractéristique  $p$  assez grande, pour un corps non algébrique sur  $\mathbb{F}_p$ .

Je remercie Bertrand Rémy pour m'avoir suggéré d'étudier l'article [My-82] de R. Moody et Olivier Mathieu pour m'avoir signalé son article [M-96] et pour quelques éclaircissements sur la construction de son groupe de Kac-Moody ou la simplicité des algèbres de Kac-Moody.

## 1 Le groupe de Kac-Moody minimal (à la Tits)

On introduit ici le groupe de Kac-Moody objet principal d'étude de cet article et on y étudie en particulier sa functorialité.

### 1.1 Systèmes générateurs de racines

1) Une *matrice de Kac-Moody* (ou matrice de Cartan généralisée) est une matrice carrée  $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ , à coefficients entiers, indexée par un ensemble fini  $I$  et qui vérifie :

- (i)  $a_{i,i} = 2 \quad \forall i \in I$ ,
- (ii)  $a_{i,j} \leq 0 \quad \forall i \neq j$ ,
- (iii)  $a_{i,j} = 0 \iff a_{j,i} = 0$ .

2) Un *système générateur de racines* (en abrégé SGR) [By-96] est un quadruplet  $\mathcal{S} = (A, Y, (\bar{\alpha}_i)_{i \in I}, (\alpha_i^\vee)_{i \in I})$  formé d'une matrice de Kac-Moody  $A$  indexée par  $I$ , d'un  $\mathbb{Z}$ -module libre  $Y$  de rang fini  $n$ , d'une famille  $(\bar{\alpha}_i)_{i \in I}$  dans son dual  $X$  et d'une famille  $(\alpha_i^\vee)_{i \in I}$  dans  $Y$ . Ces données sont soumises à la condition de compatibilité suivante :  $a_{i,j} = \bar{\alpha}_j(\alpha_i^\vee)$ .

On dit que  $|I|$  est le *rang* du SGR  $\mathcal{S}$  et  $n$  sa *dimension*.

On dit que le SGR  $\mathcal{S}$  est *libre* (ou *adjoint*) (resp. *colibre* (ou *coadjoint*)) si  $(\bar{\alpha}_i)_{i \in I}$  (resp.  $(\alpha_i^\vee)_{i \in I}$ ) est libre dans (ou engendre)  $X$  (resp.  $Y$ ).

Par exemple le SGR *simplement connexe*  $\mathcal{S}_A = (A, Y_A, (\bar{\alpha}_i)_{i \in I}, (\alpha_i^\vee)_{i \in I})$  avec  $Y_A$  de base les  $\alpha_i^\vee$  est le seul SGR colibre et coadjoint associé à  $A$ .

3) On introduit le  $\mathbb{Z}$ -module libre  $Q = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ . Il y a donc un homomorphisme de groupes *bar* :  $Q \rightarrow X$ ,  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$  tel que  $\text{bar}(\alpha_i) = \bar{\alpha}_i$ . On note  $Q^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i \subset Q$  et  $Q^- = -Q^+$ . Quand  $\mathcal{S}$  est libre on identifie  $Q$  à un sous-module de  $X$  et on ne fait pas de différence entre  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$ .

On note  $Q^\vee = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ . On dit que le SGR  $\mathcal{S}$  est *sans cotorsion* si  $Q^\vee$  est facteur direct dans  $Y$  i.e.  $Y/Q^\vee$  est sans torsion. C'est le cas de  $\mathcal{S}_A$  pour lequel  $Q^\vee = Y$ .

4) On note  $V = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  et  $V_{\mathbb{C}} = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ ; pour  $\alpha \in Q$  et  $h \in V_{\mathbb{C}}$ , on écrit  $\alpha(h) = \bar{\alpha}(h)$ . L'*algèbre de Kac-Moody complexe*  $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}$  associée à  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = V_{\mathbb{C}}$  et des éléments  $(e_i, f_i)_{i \in I}$  avec les relations suivantes (pour  $h, h' \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$  et  $i \neq j \in I$ ) :

$$(KMT1) \quad [h, h'] = 0; [h, e_i] = \alpha_i(h)e_i; [h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i; [e_i, f_i] = -\alpha_i^\vee.$$

$$(KMT2) \quad [e_i, f_j] = 0; (ad e_i)^{1-a_{i,j}}(e_j) = (ad f_i)^{1-a_{i,j}}(f_j) = 0.$$

On a alors une graduation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}$  par  $Q$  :  $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha})$  où  $\Delta \subset Q \setminus \{0\}$  est le *système de racines* de  $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}$ . On a  $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = (\mathfrak{g}_{\mathcal{S}})_0$ ,  $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$  et  $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ , de plus  $\mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathcal{S}} \mid [h, x] = \bar{\alpha}(x) \forall h \in \mathfrak{h}\}$  est non nul pour  $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ .

On sait que  $\Delta$  et les  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  ne dépendent que de  $A$  et non de  $\mathcal{S}$ . On note  $\mathfrak{g}_A = \mathfrak{g}_{\mathcal{S}_A}$ .

Les racines  $\alpha_i$  sont dites *simples*. Les racines de  $\Delta^+ = \Delta \cap Q^+$  (resp.  $\Delta^- = -\Delta^+$ ) sont dites *positives* (resp. *négatives*). On a  $\Delta = \Delta^- \sqcup \Delta^+$ .

La sous-algèbre *nilpotente* (resp. *de Borel*) *positive* est  $\mathfrak{n}_{\mathcal{S}}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$  (indépendante de  $\mathcal{S}$  et donc notée aussi  $\mathfrak{n}_A^+$ ) (resp.  $\mathfrak{b}_{\mathcal{S}}^+ = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{S}}^+$ ). On a de même des sous-algèbres négatives  $\mathfrak{n}_{\mathcal{S}}^- = \mathfrak{n}_A^-$  et  $\mathfrak{b}_{\mathcal{S}}^- = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{S}}^-$  avec la décomposition triangulaire  $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{n}_{\mathcal{S}}^- \oplus \mathfrak{h}_{\mathcal{S}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{S}}^+$ .

5) Le *groupe de Weyl (vectoriel)*  $W^v$  associé à  $A$  est un groupe de Coxeter de système de générateurs l'ensemble  $S = \{s_i \mid i \in I\}$  des automorphismes de  $Q$  définis par  $s_i(\alpha) = \alpha - \alpha(\alpha_i^\vee)\alpha_i$ . Il stabilise  $\Delta$  et agit aussi sur  $X$  et  $Y$  par des formules semblables.

On note  $\Phi = \Delta_{re}$  l'ensemble des *racines réelles* c'est à dire des éléments de  $\Delta$  ou  $Q$  de la forme  $\alpha = w(\alpha_i)$  avec  $w \in W^v$  et  $i \in I$ . Si  $\alpha \in \Phi$ , alors  $s_{\alpha} = w.s_i.w^{-1}$  est bien déterminé par  $\alpha$ , indépendamment du choix de  $w$  et de  $i$  tels que  $\alpha = w(\alpha_i)$ . Pour  $\beta \in Q$  on a  $s_{\alpha}(\beta) = \beta - \beta(\alpha^\vee)\alpha$  pour un  $\alpha^\vee \in Y$  avec  $\alpha(\alpha^\vee) = 2$ . Si  $\Phi^+ = \Phi \cap \Delta^+$  et  $\Phi^- = -\Phi^+$ , on a  $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ .

Les racines de  $\Delta_{im} = \Delta \setminus \Phi$  sont dites *imaginaires*.

Si on a deux parties  $\Psi \subset \Psi'$  de  $\Delta \cup \{0\}$ , on dit que  $\Psi$  est *close* (resp. un *idéal* de  $\Psi'$ ) si :  $\alpha, \beta \in \Psi$ , (resp.  $\alpha \in \Psi, \beta \in \Psi'$ ),  $p, q \geq 1, p\alpha + q\beta \in \Delta \cup \{0\} \Rightarrow p\alpha + q\beta \in \Psi$ . La partie  $\Psi$  est dite *prénilpotente* s'il existe  $w, w' \in W^v$  tels que  $w\Psi \subset \Delta^+$  et  $w'\Psi \subset \Delta^-$ , alors  $\Psi$  est finie et contenue dans la partie  $w^{-1}(\Phi^+) \cap (w')^{-1}(\Phi^-)$  de  $\Phi$  qui est *nilpotente* (i.e. prénilpotente et close).

6) Un *morphisme de SGR*,  $\varphi : \mathcal{S} = (A, Y, (\overline{\alpha}_i)_{i \in I}, (\alpha_i^\vee)_{i \in I}) \rightarrow \mathcal{S}' = (A', Y', (\overline{\alpha}'_i)_{i \in I'}, (\alpha_i^{\vee'})_{i \in I'})$  est une application linéaire  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  et une injection  $I \rightarrow I'$ ,  $i \mapsto i$  telles que  $A = A'_{|I \times I}$ ,  $\varphi(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^{\vee'}$  et  $\overline{\alpha}'_i \circ \varphi = \overline{\alpha}_i \forall i \in I$ . On note  $\varphi^* : X' \rightarrow X$  l'application duale

Cette définition de morphisme est duale de celle de [By-96, 4.1.1] qui est valable dans un cadre plus général.

Pour un morphisme de SGR  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ , on définit de manière évidente un morphisme  $\mathfrak{g}_\varphi : \mathfrak{g}_\mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{S}'}$  entre les algèbres de Lie correspondantes.

7) Soit  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  un morphisme de SGR. On dit que :

$\mathcal{S}$  est une *extension centrale torique* de  $\mathcal{S}'$  si  $\varphi$  est surjective et  $I = I'$ ; elle est dite de plus *scindée* si  $\text{Ker}(\varphi)$  a un supplémentaire contenant  $Q^\vee$ ,

$\mathcal{S}$  est une *extension centrale finie* de  $\mathcal{S}'$  si  $\varphi$  est injective,  $I = I'$  et les dimensions sont égales,

(dans ces deux cas  $\varphi^*$  est injective)

$\mathcal{S}$  est un *sous-SGR* de  $\mathcal{S}'$  si  $\varphi$  est injective et  $Y'/\varphi(Y)$  est sans torsion,

$\mathcal{S}'$  est une *extension semi-directe* (torique) de  $\mathcal{S}$  si  $\mathcal{S}$  est un sous-SGR de  $\mathcal{S}'$  et si  $I = I'$ . Elle est dite *directe* si, de plus, il existe un supplémentaire de  $\varphi(Y)$  dans  $Y'$  contenu dans  $\text{Ker}(\overline{\alpha}_i), \forall i \in I$ .

$\varphi$  est une *extension commutative* si  $I = I'$  (alors  $A = A'$  et  $Q = Q'$ ).

## 1.2 Tores associés

À un SGR  $\mathcal{S}$ , on associe un  $\mathbb{Z}$ -schéma en groupe  $\mathfrak{T}_\mathcal{S} = \mathfrak{T}_Y$  (vu comme foncteur en groupe sur la catégorie des anneaux) défini par  $\mathfrak{T}_Y(k) = Y \otimes_{\mathbb{Z}} k^*$  (pour tout anneau  $k$ ) ou par  $\mathfrak{T}_Y = \text{Spec}(\mathbb{Z}[X])$ . C'est un tore (isomorphe à  $(\mathfrak{M}ult)^{\dim(\mathcal{S})}$ ) de groupe de cocaractères (resp. caractères)  $Y$  (resp.  $X$ ), voir [DG-70].

Un morphisme  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  de SGR donne un homomorphisme  $\mathfrak{T}_\varphi : \mathfrak{T}_\mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}$  de tores. Le groupe de Weyl  $W^v$  agit sur  $\mathfrak{T}_\mathcal{S}$  via ses actions sur  $Y$  et  $X$ .

Si  $\varphi$  est extension centrale torique,  $\mathfrak{T}_\varphi$  est surjectif de noyau le tore  $\mathfrak{T}_{\text{Ker}(\varphi)}$ .

Si  $\varphi$  est extension centrale finie,  $\mathfrak{T}_\varphi$  est surjectif (au sens schématique) de noyau le groupe multiplicatif fini  $\mathfrak{Z}$  de groupe des caractères  $X/\varphi^*(X')$ . Le théorème des diviseurs élémentaires appliqué à  $\varphi^*(X') \subset X$  donne une description explicite de  $\mathfrak{Z}(k)$  comme produit de groupes de racines de l'unité. L'homomorphisme  $\mathfrak{T}_\varphi(k)$  n'est pas surjectif pour tout anneau  $k$ .

Si  $\mathcal{S}$  est un *sous-SGR* de  $\mathcal{S}'$ ,  $\mathfrak{T}_\varphi$  identifie  $\mathfrak{T}_\mathcal{S}$  à un sous-tore facteur direct de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}$ .

**Proposition 1.3.** *Soit  $\mathcal{S} = (A, X, Y, (\overline{\alpha}_i)_{i \in I}, (\alpha_i^\vee)_{i \in I})$  un SGR.*

a) *Il existe une extension centrale finie  $\mathcal{S}^s$  de  $\mathcal{S}$  qui est sans cotorsion. Si  $\mathcal{S}$  est libre alors  $\mathcal{S}^s$  aussi.*

b) *Le SGR  $\mathcal{S}^1 = (A, Q^\vee, (\overline{\alpha}_i|_{Q^\vee})_{i \in I}, (\alpha_i^\vee)_{i \in I})$  n'est en général pas libre. Le SGR  $\mathcal{S}^s$  (resp.  $\mathcal{S}_A$ ) en est extension semi-directe (resp. centrale torique).*

c) Il existe une extension centrale torique  $\mathcal{S}^{sc}$  de  $\mathcal{S}$  qui est sans cotorsion et colibre. Si  $\mathcal{S}$  est colibre et sans cotorsion, cette extension est scindée. Si  $\mathcal{S}$  est libre ou si  $Q$  est facteur direct dans  $X$ , alors c'est également vrai pour  $\mathcal{S}^{sc}$ .

d) Il existe une extension semi-directe  $\mathcal{S}^\ell$  de  $\mathcal{S}$  qui est libre (et avec  $Q^\ell$  facteur direct de  $X^\ell$ ). Si  $\mathcal{S}$  est libre et  $Q$  facteur direct de  $X$ , cette extension est directe. Si  $\mathcal{S}$  est colibre ou si  $Q^\vee$  est facteur direct dans  $Y$ , alors c'est également vrai pour  $\mathcal{S}^\ell$ .

e) Si  $\mathcal{S}$  est libre, colibre et sans cotorsion, alors  $\mathcal{S}$  est extension semi-directe d'un SGR  $\mathcal{S}^{mat}$  libre, colibre, sans cotorsion et de dimension  $2r - s$  où  $r$  est le rang de  $\mathcal{S}$  et  $s$  ( $\leq r$ ) le rang de la matrice  $A$ .

**Remarques.** 1) On a  $\mathcal{S}^{scl} = \mathcal{S}^{lsc}$  et les constructions de c) et d) sont fonctorielles en  $\mathcal{S}$ .

2) Le SGR  $\mathcal{S}^{mat}$  vérifie donc les hypothèses de [M-88a, p 16]. Mais  $\mathcal{S}$  n'est pas toujours extension directe de  $\mathcal{S}^{mat}$ .

3) Quand la matrice  $A$  est inversible (par exemple dans le cas classique d'une matrice de Cartan) tout SGR est libre, colibre et extension semi-directe (ou aussi centrale torique) d'un SGR de dimension égale au rang (*i.e.* semi-simple dans le cas classique).

*Démonstration.* On considère un supplémentaire  $Y_0$  de  $(Q^\vee \otimes \mathbb{Q}) \cap Y$  dans  $Y$  et on pose  $Y^s = Q^\vee \oplus Y_0$ . Les assertions a) et b) sont alors évidentes.

c) On définit  $Y^{sc} = Y \oplus (\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}u_i^\vee)$ , son dual est donc  $X^{sc} = X \oplus (\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}u_i)$  où les  $u_i$  forment une base duale des  $u_i^\vee$ . On note  $\alpha_i^{sc} = \alpha_i \in X$ ,  $\alpha_i^{sc\vee} = \alpha_i^\vee + u_i^\vee$  et  $\varphi$  est la projection de  $Y^{sc}$  sur  $Y$ . *cf.* [Ry-02, 7.1.2].

d) On définit  $Y^\ell = Y \oplus (\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}v_i^\vee)$ , son dual est donc  $X^\ell = X \oplus (\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}v_i)$  où les  $v_i$  forment une base duale des  $v_i^\vee$ . On note  $\alpha_i^\ell = \alpha_i + v_i$ ,  $\alpha_i^{\ell\vee} = \alpha_i^\vee$  et  $\varphi$  est l'injection canonique de  $Y$  dans  $Y^\ell$ .

e) Soit  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{Z}^r$ ,  $y \mapsto (\alpha_i(y))_{i \in I}$ . Comme  $\mathcal{S}$  est libre,  $\psi(Y)$  est de rang  $r$ , tandis que  $\psi(Q^\vee)$  est de rang  $s$ . Le module  $\mathbb{Q}\psi(Q^\vee) \cap \psi(Y)$  a un supplémentaire dans  $\psi(Y)$  de rang  $r - s$ ; on suppose que la base de ce supplémentaire est  $\psi(v_1), \dots, \psi(v_{r-s})$  pour des  $v_i \in Y$ . Comme  $\mathcal{S}$  est colibre  $Y^{mat} = Q^\vee \oplus (\oplus_{j=1}^{r-s} \mathbb{Z}v_j)$  est de rang  $2r - s$ . Comme le quotient de  $Y$  par  $Q^\vee$  est sans torsion, il en est de même pour  $Y^{mat}$ . On note  $\alpha_i^{mat} = \alpha_i|_{Y^{mat}}$  et  $\alpha_i^{mat\vee} = \alpha_i^\vee$ . L'injection de  $Y^{mat}$  dans  $Y$  fait bien de  $\mathcal{S}$  une extension semi-directe de  $\mathcal{S}^{mat}$  et  $\mathcal{S}^{mat}$  est colibre, sans cotorsion, de dimension  $2r - s$ . Comme  $\psi(Y^{mat}) = \psi(Q^\vee) \oplus (\oplus_{j=1}^{r-s} \mathbb{Z}\psi(v_j))$  est de rang  $r$ , les  $\alpha_i^{mat}$  sont bien libres dans  $X^{mat} = (Y^{mat})^*$ .  $\square$

## 1.4 Relations dans $Aut(\mathfrak{g}_A)$

*cf.* [T-87, 3.3 et 3.6]

Pour  $i \in I$ ,  $ad(e_i)$  et  $ad(f_i)$  sont localement nilpotents dans  $\mathfrak{g}_A$  ou  $\mathfrak{g}_S$ ,  $exp(ad(e_i))$ ,  $exp(ad(f_i))$  sont des automorphismes de  $\mathfrak{g}_A$  ou  $\mathfrak{g}_S$  et l'on a  $exp(ad(e_i)).exp(ad(f_i)).exp(ad(e_i)) = exp(ad(f_i)).exp(ad(e_i)).exp(ad(f_i))$ , que l'on note  $s_i^*$  ou  $s_{\alpha_i}^*$ . L'application  $s_i^* \mapsto s_i$  s'étend en un homomorphisme surjectif  $w^* \mapsto w$  du sous-groupe  $W^*$  de  $Aut(\mathfrak{g}_A)$  engendré par les  $s_i^*$  sur le groupe de Weyl  $W^\vee$ . Le groupe  $W^*$  stabilise  $\mathfrak{h}$  et permute les  $\mathfrak{g}_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta$ ; les actions induites sur  $\mathfrak{h}$  ou  $\Delta$  se déduisent des actions de  $W^\vee$  via l'homomorphisme précédent. En particulier  $W^*$  est le même qu'il soit défini sur  $\mathfrak{g}_A$  ou  $\mathfrak{g}_S$ .

Pour  $\alpha \in \Phi$ , l'espace  $\mathfrak{g}_\alpha$  est de dimension 1 et on peut choisir les éléments de base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$  de façon que  $e_{\alpha_i} = e_i$ ,  $[e_\alpha, f_\alpha] = -\alpha^\vee$  et  $w^*e_\alpha = \pm e_{w\alpha}$  pour  $\alpha \in \Phi$ ,  $i \in I$  et  $w^* \in W^*$ .

Si  $\alpha, \beta \in \Phi$  forment une paire prénilpotente de racines, l'ensemble  $[\alpha, \beta] = \{p\alpha + q\beta \in \Phi \mid p, q \in \mathbb{N}\}$  est fini. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont non colinéaires, on note  $|\alpha, \beta| = [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha, \beta\}$ , et on



l'ordonne, par exemple de façon que  $p/q$  soit croissant ; on a alors la formule suivante pour les commutateurs (pour  $r, r' \in \mathbb{C}$ ) :

$$(\exp(\text{ad}(re_\alpha)), \exp(\text{ad}(r'e_\beta))) = \prod \exp(\text{ad}(C_{p,q}^{\alpha,\beta} r^p r'^q e_\gamma))$$

où  $\gamma = p\alpha + q\beta$  parcourt  $]\alpha, \beta[$  et les  $C_{p,q}^{\alpha,\beta}$  sont des entiers bien définis.

## 1.5 Foncteur de Steinberg

cf. [T-87, 3.6]

Ce foncteur  $\mathfrak{St}_A$  de la catégorie des anneaux dans celle des groupes est engendré par  $|\Phi|$  exemplaires du groupe additif  $\mathfrak{Add}$ . Plus précisément, pour  $\alpha \in \Phi$ ,  $k$  un anneau et  $r \in k$ , on introduit le symbole  $\mathfrak{r}_\alpha(r)$  et le groupe  $\mathfrak{St}_A(k)$  est engendré par les éléments  $\mathfrak{r}_\alpha(r)$  pour  $\alpha \in \Phi$ ,  $r \in k$  soumis aux relations  $\mathfrak{r}_\alpha(r + r') = \mathfrak{r}_\alpha(r) \cdot \mathfrak{r}_\alpha(r')$  et aux relations de commutation :

$$(KMT3) \quad (\mathfrak{r}_\alpha(r), \mathfrak{r}_\beta(r')) = \prod \mathfrak{r}_\gamma(C_{p,q}^{\alpha,\beta} r^p r'^q)$$

pour  $r, r' \in k$ ,  $\{\alpha, \beta\}$  prénilpotente et  $\gamma$ ,  $C_{p,q}^{\alpha,\beta}$  comme ci-dessus en 1.4.

Si  $\Psi$  est une partie nilpotente de  $\Phi$  et si on remplace ci-dessus  $\Phi$  par  $\Psi$ , on définit un foncteur en groupes  $\mathfrak{U}_\Psi$ . C'est un groupe algébrique unipotent isomorphe comme schéma à  $(\mathfrak{Add})^{|\Psi|}$  et qui ne dépend que de  $\Psi$  et  $A$  (donc  $\Phi$ ) mais pas de  $\mathcal{S}$ . Si  $\alpha \in \Phi$  et  $\Psi = \{\alpha\}$ ,  $\mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{U}_{\{\alpha\}}$  est un sous-foncteur en groupes de  $\mathfrak{St}_A$  isomorphe à  $\mathfrak{Add}$  par  $\mathfrak{r}_\alpha$ . En fait  $\mathfrak{St}_A$  est l'amalgame des groupes  $\mathfrak{U}_\alpha$  et  $\mathfrak{U}_{[\alpha,\beta]}$  pour  $\alpha \in \Phi$  et  $\{\alpha, \beta\}$  prénilpotente.

Pour  $\alpha \in \Phi$ ,  $k$  un anneau et  $r \in k^*$ , on définit dans  $\mathfrak{St}_A(k)$ ,  $\tilde{s}_\alpha(r) = \mathfrak{r}_\alpha(r) \cdot \mathfrak{r}_{-\alpha}(r^{-1}) \cdot \mathfrak{r}_\alpha(r)$ ,  $\tilde{s}_\alpha = \tilde{s}_\alpha(1)$  et  $\alpha^*(r) = \tilde{s}_\alpha^{-1} \cdot \tilde{s}_\alpha(r^{-1})$ . On a  $\tilde{s}_\alpha(-r) = \tilde{s}_\alpha(r)^{-1} = \tilde{s}_\alpha \cdot \alpha^*(-r^{-1})$ . En particulier  $\tilde{s}_\alpha^{-1} = \tilde{s}_\alpha(-1)$ .

**Remarque.** Si jamais le quotient  $\bar{\mathfrak{g}}_A$  de  $\mathfrak{g}_A$  par son idéal gradué maximal d'intersection triviale avec  $\mathfrak{h}_A$  est différent de  $\mathfrak{g}_A$ , la différence n'affecte que les espaces radiciels imaginaires. Le remplacement de  $\mathfrak{g}_A$  par  $\bar{\mathfrak{g}}_A$  ne change donc pas  $\mathfrak{St}_A$  (ni  $\mathfrak{G}_\mathcal{S}$  défini ci-dessous) ; ce n'est par contre pas vrai pour le groupe  $\mathfrak{G}_\mathcal{S}^{pma}$  du § 3.

## 1.6 Le groupe de Kac-Moody minimal $\mathfrak{G}_\mathcal{S}$ (à la Tits)

cf. [T-87, 3.6], [Ry-02, 8.3.3]

Pour un anneau  $k$ , on définit le groupe  $\mathfrak{G}_\mathcal{S}(k)$  comme le quotient du produit libre  $\mathfrak{St}_A(k) * \mathfrak{T}_\mathcal{S}(k)$  par les 4 relations suivantes, pour  $\alpha$  racine simple,  $\beta \in \Phi$ ,  $r \in k$  et  $t \in \mathfrak{T}_\mathcal{S}(k)$  :

$$(KMT4) \quad t \cdot \mathfrak{r}_\alpha(r) \cdot t^{-1} = \mathfrak{r}_\alpha(\alpha(t)r),$$

$$(KMT5) \quad \tilde{s}_\alpha \cdot t \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = s_\alpha(t),$$

$$(KMT6) \quad \tilde{s}_\alpha(r^{-1}) = \tilde{s}_\alpha \cdot \alpha^\vee(r),$$

$$(KMT7) \quad \tilde{s}_\alpha \cdot \mathfrak{r}_\beta(r) \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = \mathfrak{r}_\gamma(\epsilon r),$$

si  $\gamma = s_\alpha(\beta)$  et  $s_\alpha^*(e_\beta) = \epsilon e_\gamma$  (avec  $\epsilon = \pm 1$ ).

**Remarque.** Les relations (KMT5) et (KMT7) permettent aussitôt de généraliser (KMT4) au cas où  $\alpha \in \Phi$  n'est pas simple.

**Propriétés.** 1) D'après [T-87, 3.10.b] il existe des foncteurs en groupes  $\mathfrak{G}_\#$  et  $\mathfrak{U}_\#^\pm$  satisfaisant aux axiomes (KMG 1 à 9) de *l.c.* . D'après le théorème 1 (i) p. 553 de *l.c.* , il en résulte que, pour tout anneau  $k$ , l'homomorphisme canonique de  $\mathfrak{T}_S(k)$  dans  $\mathfrak{G}_S(k)$  est injectif.

2) Pour tout  $\alpha \in \Phi$ , l'homomorphisme  $\mathfrak{r}_{\alpha k} : k \rightarrow \mathfrak{U}_\alpha(k) \rightarrow \mathfrak{G}_S(k)$  est injectif, voir la démonstration de [Ry-02, 9.6.1] si  $Y/\mathbb{Z}\alpha_i^\vee$  est sans torsion ( $\forall i \in I$ ) ou si  $k$  n'a pas d'éléments nilpotents; le cas général se traite comme dans la partie b) de la démonstration du lemme 4.11 ci-dessous. Plus généralement ces mêmes raisonnements montrent que, pour toute partie nilpotente  $\Psi$  de  $\Phi$ , l'homomorphisme canonique de  $\mathfrak{U}_\Psi(k)$  dans  $\mathfrak{G}_S(k)$  est injectif et aussi que, pour  $\alpha \neq \beta$  et  $r$  ou  $r'$  non nul  $\mathfrak{r}_\alpha(r) \neq \mathfrak{r}_\beta(r')$ .

3) On identifie donc  $\mathfrak{T}_S$ ,  $\mathfrak{U}_\alpha$  et  $\mathfrak{U}_\Psi$  à des sous-foncteurs en groupes de  $\mathfrak{G}_S$ ; si  $\Psi'$  est un idéal de  $\Psi$ ,  $\mathfrak{U}_{\Psi'}$  est distingué dans  $\mathfrak{U}_\Psi$ . De même on note  $\mathfrak{U}_S^\pm$  (resp.  $\mathfrak{B}_S^\pm$ ) le sous-foncteur en groupe de  $\mathfrak{G}_S$  tel que, pour un anneau  $k$ ,  $\mathfrak{U}_S^\pm(k)$  (resp.  $\mathfrak{B}_S^\pm(k)$ ) est le sous-groupe engendré par les  $\mathfrak{U}_\alpha(k)$  pour  $\alpha \in \Phi^\pm$  (resp. et par  $\mathfrak{T}_S(k)$ ).

4) On note  $\mathfrak{N}_S$  le sous-foncteur de  $\mathfrak{G}_S$  tel que  $\mathfrak{N}_S(k)$  soit le sous-groupe engendré par  $\mathfrak{T}_S(k)$  et les  $\tilde{s}_\alpha$  pour  $\alpha$  racine simple. On a un homomorphisme  $\nu^v$  de  $\mathfrak{N}_S$  sur  $W^v$  trivial sur  $\mathfrak{T}_S$  tel que  $\nu^v(\tilde{s}_\alpha) = s_\alpha$  et  $\mathfrak{N}_S(k)$  agit sur  $\mathfrak{T}_S$  et  $\Phi$  via  $\nu^v$ , cf. (KMT4), (KMT5), (KMT7) et 2) ci-dessus. D'après [T-87, 3.7.d] les  $\tilde{s}_{\alpha_i}$  satisfont aux relations de tresse, d'après (KMT6)  $(\tilde{s}_{\alpha_i})^2 \in \mathfrak{T}_S(k)$ , le noyau de  $\nu^v$  est donc égal à  $\mathfrak{T}_S(k)$ .

Si  $k$  est un corps avec au moins quatre éléments,  $\mathfrak{N}_S(k)$  est le normalisateur de  $\mathfrak{T}_S(k)$  dans  $\mathfrak{G}_S(k)$  [Ry-02, 8.4.1]. Si  $k$  est un corps infini, on sait de plus que tous les sous-tores  $k$ -déployés maximaux de  $\mathfrak{G}_S$  sont conjugués à  $\mathfrak{T}_S$  par  $\mathfrak{G}_S(k)$  [Ry-02, 10.4.1].

5) Les théorèmes 1 et 1' p. 553 de [T-87] montrent que, sur les corps,  $\mathfrak{G}_S$  vérifie les axiomes (KMG 1 à 9) de *l.c.* : il existe un homomorphisme  $\pi$  de foncteurs en groupes  $\mathfrak{G}_S \rightarrow \mathfrak{G}_\#$  qui est un isomorphisme sur les corps et vérifie  $\pi(\mathfrak{U}_S^\pm) \subset \mathfrak{U}_\#^\pm$ . En particulier (KMG4) dit que, pour une extension de corps  $k \rightarrow k'$ ,  $\mathfrak{G}_S(k)$  s'injecte dans  $\mathfrak{G}_S(k')$ .

Si  $k$  est un corps,  $(\mathfrak{G}_S(k), (\mathfrak{U}_\alpha(k))_{\alpha \in \Phi}, \mathfrak{T}_S(k))$  est une donnée radicielle de type  $\Phi$ , au sens de [Ru-06, 1.4], ou donnée radicielle jumelée entière [Ry-02, 8.4.1] (c'est plus précis que les données radicielles jumelées de *l.c.* , i.e. les RGD-systems de [AB-08, 8.6.1]). En particulier, pour  $u \in \mathfrak{U}_\alpha(k) \setminus \{1\}$ , il existe  $u', u'' \in \mathfrak{U}_{-\alpha}(k)$  tels que  $m(u) := u'uu''$  conjugue  $\mathfrak{U}_\beta(k)$  en  $\mathfrak{U}_{s_\alpha(\beta)}(k)$ ,  $\forall \beta \in \Phi$ , donc  $m(u) \in \mathfrak{N}_S(k)$ ; on a  $m(\mathfrak{r}_\alpha(r)) = \tilde{s}_{-\alpha}(r^{-1})$ . On montre que  $\mathfrak{B}_S^\pm(k)$  est produit semi-direct de  $\mathfrak{T}_S(k)$  et  $\mathfrak{U}_S^\pm(k)$  [Ry-02, 1.5.4]. Pour une partie nilpotente de la forme  $\Psi = \Phi^+ \cap w\Phi^-$ , on a  $\mathfrak{U}_\Psi(k) = \mathfrak{U}_S^+(k) \cap w\mathfrak{U}_S^-(k)w^{-1}$  cf. *l.c.* 3.5.4. Le centre de  $\mathfrak{G}_S(k)$  est  $\{t \in \mathfrak{T}_S(k) \mid \alpha_i(t) = 1, \forall i \in I\}$  cf. *l.c.* 8.4.3.

Toujours si  $k$  est un corps, la donnée radicielle ci-dessus permet de construire des immeubles combinatoires jumelés  $\mathcal{I}_+^v(k)$  et  $\mathcal{I}_-^v(k)$ , agités par  $\mathfrak{G}_S(k)$  : l'immeuble  $\mathcal{I}_e^v(k)$  de  $\mathfrak{G}_S$  sur  $k$  est associé au système de Tits  $(\mathfrak{G}_S(k), \mathfrak{B}_S^e(k), \mathfrak{N}_S(k))$ .

## 1.7 Un quotient du foncteur de Steinberg

Pour un anneau  $k$ , on définit  $\overline{\mathfrak{St}}_A(k)$  comme le quotient de  $\mathfrak{St}_A(k)$  par les relations suivantes, pour  $\alpha, \beta$  racines simples,  $\gamma \in \Phi$  et  $r, r' \in k$  :

$$(\overline{\text{KMT}}5) \quad \tilde{s}_\alpha \cdot \beta^*(r) \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = \beta^*(r) \cdot \alpha^*(r^{-\alpha(\beta^\vee)}),$$

$$(\overline{\text{KMT}}7) \quad \tilde{s}_\alpha(r) \cdot \mathfrak{r}_\gamma(r') \cdot \tilde{s}_\alpha(r)^{-1} = \mathfrak{r}_\delta(\epsilon \cdot r^{-\gamma(\alpha^\vee)} \cdot r'),$$

si  $\delta = s_\alpha(\gamma)$  et  $s_\alpha^*(e_\gamma) = \epsilon \cdot e_\delta$ ,

- ( $\overline{\text{KMT}}8$ ) a)  $\alpha^* : k^* \rightarrow \overline{\mathfrak{St}}_A(k)$  est un homomorphisme de groupes,  
 b)  $\alpha^*(r).\beta^*(r') = \beta^*(r').\alpha^*(r)$ , on note  $\mathfrak{T}_A(k)$  le groupe commutatif engendré par tous ces éléments (pour  $\alpha, \beta$  racines simples et  $r, r' \in k$ ),  
 c) La formule  $\gamma(\alpha^*(r)) = r^{\gamma(\alpha^\vee)}$  définit un homomorphisme de groupes  $\mathfrak{T}_A(k) \rightarrow k^*$ , noté  $\gamma$ .

On note de la même manière les éléments et leurs images dans  $\overline{\mathfrak{St}}_A(k)$ .

**Remarques.** 1) Dans le cas classique, Steinberg considère lui aussi un quotient de  $\mathfrak{St}_A$  un peu analogue : comparer ( $\overline{\text{KMT}}7$ ) et ( $\overline{\text{KMT}}8$ ) respectivement aux conditions (B') et (C) de [Sg-62] ou [Sg-68].

2) On n'a pas cherché ici un système minimal de relations pour  $\overline{\mathfrak{St}}_A(k)$ . Le lecteur trouvera des réductions faciles par lui-même et d'autres moins évidentes dans [T-87, 3.7 ou 3.8], [Sg-62] ou [Sg-68].

3) L'endomorphisme  $s'_\beta$  du groupe  $\mathfrak{T}_A(k)$  défini par  $s'_\beta(t) = t.\beta^*(\beta(t))^{-1}$  est une involution, car  $s'_\beta(s'_\beta(t)) = t.\beta^*(\beta(t))^{-1}.\beta^*(\beta(t.\beta^*(\beta(t))^{-1}))^{-1} = t.\beta^*(\beta(t))^{-1}.\beta^*(\beta(t))^{-1}.\beta^*(\beta(\beta^*(\beta(t)))) = t$  (car  $\beta \circ \beta^*$  est l'élevation au carré). En fait pour  $t = \gamma^*(r)$  on a  $s'_\beta(t) = s'_\beta(\gamma^*(r)) = \gamma^*(r).\beta^*(\beta(\gamma^*(r)))^{-1} = \gamma^*(r).\beta^*(r^{-\beta(\gamma^\vee)})$  ( $= (\gamma^* - \beta(\gamma^\vee)\beta^*)(r)$  avec une notation additive pour  $\text{Hom}(k^*, \overline{\mathfrak{St}}_A(k))$ ). En particulier ( $\overline{\text{KMT}}5$ ) et (KMT5) sont semblables.

4) La relation ( $\overline{\text{KMT}}4$ ) :  $t.\mathfrak{r}_\alpha(r).t^{-1} = \mathfrak{r}_\alpha(\alpha(t)r)$ , pour  $\alpha \in \Phi$ ,  $r \in k$  et  $t \in \mathfrak{T}_A(k)$  est conséquence des relations ci-dessus :

En effet pour  $\alpha, \beta$  racines simples,  $r \in k^*$ ,  $r' \in k$ , on a :  $\beta^*(r).\mathfrak{r}_\alpha(r').\beta^*(r)^{-1} = \tilde{s}_\beta^{-1}.\tilde{s}_\beta(r^{-1}).\mathfrak{r}_\alpha(r').\tilde{s}_\beta(r^{-1})^{-1}.\tilde{s}_\beta = \tilde{s}_\beta^{-1}.\mathfrak{r}_\gamma(\epsilon.r^{\alpha(\beta^\vee)}).r'.\tilde{s}_\beta = \mathfrak{r}_\alpha(r^{\alpha(\beta^\vee)}).r' = \mathfrak{r}_\alpha(\alpha(\beta^*(r)).r')$  (avec  $\gamma = s_\beta(\alpha)$  et  $s'_\beta(e_\alpha) = \epsilon.e_\gamma$ ).

Cette relation s'étend au cas  $\alpha$  non simple d'après ( $\overline{\text{KMT}}5$ ), ( $\overline{\text{KMT}}7$ ) et ( $\overline{\text{KMT}}8$ ) : si  $\alpha, \beta$  sont simples et  $\gamma$  satisfait à ( $\overline{\text{KMT}}4$ ), on a :

$$\begin{aligned} & \beta^*(r).\mathfrak{r}_{s_\alpha(\gamma)}((-1)^{\gamma(\alpha^\vee)}.\epsilon.r').\beta^*(r)^{-1} = \beta^*(r).\tilde{s}_\alpha^{-1}.\mathfrak{r}_\gamma(r').\tilde{s}_\alpha.\beta^*(r)^{-1} \\ & = \tilde{s}_\alpha^{-1}.\beta^*(r).\alpha^*(r^{-\alpha(\beta^\vee)}).\mathfrak{r}_\gamma(r').\alpha^*(r^{\alpha(\beta^\vee)}).\beta^*(r)^{-1}.\tilde{s}_\alpha \\ & = \tilde{s}_\alpha^{-1}.\mathfrak{r}_\gamma(r^{\gamma(\beta^\vee)}).(r^{-\alpha(\beta^\vee)})^{\gamma(\alpha^\vee)}.r'.\tilde{s}_\alpha = \mathfrak{r}_{s_\alpha(\gamma)}((-1)^{\gamma(\alpha^\vee)}.\epsilon.r^{\gamma(\beta^\vee) - \alpha(\beta^\vee) \cdot \gamma(\alpha^\vee)}).r' \\ & \text{et } \gamma(\beta^\vee) - \alpha(\beta^\vee) \cdot \gamma(\alpha^\vee) = s_\alpha(\gamma)(\beta^\vee). \text{ Donc } s_\alpha(\gamma) \text{ satisfait aussi à } (\overline{\text{KMT}}4). \end{aligned}$$

**Proposition 1.8.** 1) L'homomorphisme canonique de  $\mathfrak{St}_A$  dans  $\mathfrak{G}_S$  se factorise par  $\overline{\mathfrak{St}}_A$ , autrement dit les relations ( $\overline{\text{KMT}}5$ ), ( $\overline{\text{KMT}}7$ ) et ( $\overline{\text{KMT}}8$ ) sont satisfaites dans  $\mathfrak{G}_S$ .

2) Pour un anneau  $k$ ,  $\mathfrak{G}_S(k)$  est le quotient du produit libre  $\overline{\mathfrak{St}}_A(k) * \mathfrak{T}_S(k)$  par les 2 relations suivantes (pour  $\alpha$  racine simple,  $\beta \in \Phi$ ,  $r \in k$  et  $t \in \mathfrak{T}_S(k)$ ) :

$$\begin{aligned} (\text{KMT}4) \quad & t.\mathfrak{r}_\beta(r).t^{-1} = \mathfrak{r}_\beta(\beta(t).r), \\ (\overline{\text{KMT}}6) \quad & \alpha^*(r) = \alpha^\vee(r) \text{ si } r \in k^*. \end{aligned}$$

3) La relation ( $\overline{\text{KMT}}6$ ) induit un homomorphisme de foncteurs en groupes  $\psi : \mathfrak{T}_A \rightarrow \mathfrak{T}_S$  dont le noyau  $\mathfrak{Z}_S$  est central dans  $\mathfrak{St}_A$ . Le foncteur  $\mathfrak{G}_S$  est le quotient (comme foncteur en groupes) du produit semi-direct  $(\overline{\mathfrak{St}}_A/\mathfrak{Z}_S) \rtimes \mathfrak{T}_S$  par  $\mathfrak{T}_A/\mathfrak{Z}_S$  antidiagonal. En particulier le quotient (comme foncteur en groupes)  $\overline{\mathfrak{St}}_A/\mathfrak{Z}_S$  s'injecte dans  $\mathfrak{G}_S$ .

*Démonstration.* Par définition de  $\alpha^*(r)$  et (KMT6), la relation ( $\overline{\text{KMT}}6$ ) est bien satisfaite dans  $\mathfrak{G}_S(k)$ . On en déduit aussitôt la relation ( $\overline{\text{KMT}}8$ ) et que l'image de  $\mathfrak{T}_A(k)$  est dans  $\mathfrak{T}_S(k)$ . D'autre part les deux involutions  $s'_\beta$  et  $s_\beta$  coïncident sur cette image d'après les calculs de 1.7.3; ainsi ( $\overline{\text{KMT}}5$ ) est une conséquence de (KMT5). Enfin  $\tilde{s}_\alpha(r).\mathfrak{r}_\gamma(r').\tilde{s}_\alpha(r)^{-1} =$

$\tilde{s}_\alpha \cdot \alpha^*(r^{-1}) \cdot \mathfrak{r}_\gamma(r') \cdot \alpha^*(r) \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = \tilde{s}_\alpha \cdot \mathfrak{r}_\gamma(\gamma(\alpha^*(r^{-1})) \cdot r') \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = \tilde{s}_\alpha \cdot \mathfrak{r}_\gamma(r^{-\gamma(\alpha^\vee)} \cdot r') \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = \mathfrak{r}_\delta(\epsilon \cdot r^{-\gamma(\alpha^\vee)} \cdot r')$ , d'où  $(\overline{\text{KMT7}})$ .

On a ainsi montré 1) et que les relations (KMT4),  $(\overline{\text{KMT6}})$  sont vérifiées dans  $\mathfrak{G}_S(k)$ . Inversement il faut montrer que (KMT5), (KMT6) et (KMT7) sont des conséquences de  $(\overline{\text{KMT4}})$ ,  $(\overline{\text{KMT5}})$ ,  $(\overline{\text{KMT6}})$ ,  $(\overline{\text{KMT7}})$  et  $(\overline{\text{KMT8}})$ . La relation (KMT7) est un cas particulier de  $(\overline{\text{KMT7}})$ , (KMT6) découle de  $(\overline{\text{KMT6}})$  et de la définition de  $\alpha^*$ . Pour  $\alpha$  simple et  $t \in \mathfrak{T}_S(k)$ , on a :  $t^{-1} \cdot \tilde{s}_\alpha \cdot t \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = t^{-1} \cdot \mathfrak{r}_\alpha(1) \cdot \mathfrak{r}_{-\alpha}(1) \cdot \mathfrak{r}_\alpha(1) \cdot t \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = \mathfrak{r}_\alpha(\alpha(t)^{-1}) \cdot \mathfrak{r}_{-\alpha}(\alpha(t)) \cdot \mathfrak{r}_\alpha(\alpha(t)^{-1}) \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = \tilde{s}_\alpha(\alpha(t)^{-1}) \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = \tilde{s}_\alpha \cdot \alpha^*(\alpha(t)) \cdot \tilde{s}_\alpha^{-1} = \alpha^*(\alpha(t)^{-1}) = \alpha^\vee(\alpha(t)^{-1}) = t^{-1} \cdot s_\alpha(t)$ ; en effet pour  $t = \lambda(r)$  avec  $\lambda \in Y$  et  $r \in k^*$  on a :  $s_\alpha(\lambda(r)) = (\lambda - \alpha(\lambda)\alpha^\vee)(r) = \lambda(r) \cdot \alpha^\vee(r^{-\alpha(\lambda)}) = \lambda(r) \cdot \alpha^\vee(\alpha(\lambda(r))^{-1})$ . Ainsi (KMT5) est satisfaite.

3) On a vu en 1.6.1 que  $\mathfrak{T}_S$  s'injecte dans  $\mathfrak{G}_S$ , la relation  $(\overline{\text{KMT6}})$  n'induit donc aucun quotient dans  $\mathfrak{T}_S$ . Par contre, comme  $\mathfrak{T}_A$  est engendré par les  $\alpha^*$ , cette relation se traduit par un homomorphisme  $\psi : \mathfrak{T}_A \rightarrow \mathfrak{T}_S$ ; celui-ci est compatible avec les morphismes  $\gamma : \mathfrak{T}_A(k) \rightarrow k^*$  et  $\gamma : \mathfrak{T}_S(k) \rightarrow k^*$  (pour  $\gamma \in \Phi$ ), d'après  $(\overline{\text{KMT8c}})$  et la relation correspondante dans  $\mathfrak{T}_S$ . Ainsi la relation  $(\overline{\text{KMT4}})$  (1.7.4) montre que le noyau  $\mathfrak{Z}_S$  est central dans  $\mathfrak{G}_S$ . La relation (KMT4) montre que  $\mathfrak{G}_S$  est quotient du produit semi-direct indiqué par des relations induites par  $(\overline{\text{KMT6}})$ . La relation  $(\overline{\text{KMT4}})$  montre que ce quotient se limite à l'action antidiagonale de  $\mathfrak{T}_A/\mathfrak{Z}_S$ .  $\square$

**Corollaire 1.9.** 1) Pour le SGR simplement connexe  $\mathcal{S}_A$ , on a  $\mathfrak{T}_A = \mathfrak{T}_{\mathcal{S}_A}$  et  $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{T}_A} = \mathfrak{G}_{\mathcal{S}_A}$ , que l'on notera aussi  $\mathfrak{G}_A$  ou  $\mathfrak{G}^A$ .

2) Si  $k$  est un corps, l'homomorphisme canonique de  $\mathfrak{U}_{\mathcal{S}_A}^\pm(k)$  dans  $\mathfrak{U}_S^\pm(k)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* 1) Comme  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}_A}(k)$  est produit direct des groupes  $\alpha^\vee(k^*)$  (pour  $\alpha$  racine simple) et s'injecte dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}_A}(k)$ , la relation  $(\overline{\text{KMT6}})$  permet d'identifier  $\mathfrak{T}_A(k)$  et  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}_A}(k)$ . Alors (KMT4) se réduit à  $(\overline{\text{KMT4}})$  dont on sait qu'il est vérifié dans  $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{T}_A}(k)$  (1.7.4), on a donc bien l'identification proposée.

2) On sait dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}_A}(k)$  que  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}_A}(k)$  et  $\mathfrak{U}_{\mathcal{S}_A}^\pm(k)$  forment un produit semi-direct (1.6.5) le quotient par  $\mathfrak{Z}_S(k)$  n'affecte donc pas  $\mathfrak{U}_{\mathcal{S}_A}^\pm(k)$ .  $\square$

## 1.10 Functorialité

Si  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  est une extension commutative de SGR, la proposition 1.8 permet de définir un morphisme  $\mathfrak{G}_\varphi : \mathfrak{G}_\mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}$  de foncteurs. En effet  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  correspondent à la même matrice  $A$ , donc les mêmes  $\Phi$ ,  $\mathfrak{g}_A$ ,  $\mathfrak{G}_{\mathfrak{T}_A}(k)$  et  $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{T}_A}(k)$ . La compatibilité de  $\varphi$  avec les racines et coracines permet de définir  $\mathfrak{G}_\varphi(k)$  comme le passage au quotient de  $\text{Id} * \mathfrak{T}_\varphi(k)$ . Pour tout anneau  $k$ , les homomorphismes  $\mathfrak{G}_\varphi(k)$  et  $\mathfrak{T}_\varphi(k)$  ont même noyau; le groupe  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}(k)$  est engendré par  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}(k)$  et le sous-groupe (distingué) image de  $\mathfrak{G}_\varphi(k)$  (1.8.3); on a  $\mathfrak{N}_{\mathcal{S}'}(k) = \varphi(\mathfrak{N}_\mathcal{S}(k)) \cdot \mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}(k)$ . De plus l'image réciproque de  $\mathfrak{N}_{\mathcal{S}'}(k)$  (resp.  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}(k)$ ) dans  $\mathfrak{G}_\mathcal{S}(k)$  est égale à  $\mathfrak{N}_\mathcal{S}(k)$  (resp.  $\mathfrak{T}_\mathcal{S}(k)$ ). Par construction  $\mathfrak{G}_\varphi$  induit un isomorphisme de  $\mathfrak{U}_\mathcal{S}^+(k)$  sur  $\mathfrak{U}_{\mathcal{S}'}^+(k)$  et de  $\mathfrak{U}_\mathcal{S}^-(k)$  sur  $\mathfrak{U}_{\mathcal{S}'}^-(k)$ , pour tout corps  $k$  (1.9.2).

Sur un corps  $k$ , on voit facilement qu'il est possible d'identifier les immeubles  $\mathcal{I}_\pm^v$  de  $\mathfrak{G}_\mathcal{S}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}$  avec leurs facettes et leurs appartements. Les actions de  $\mathfrak{G}_\mathcal{S}(k)$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}(k)$  sont compatibles (via  $\mathfrak{G}_\varphi(k)$ ).

On va étudier quelques cas particuliers intéressants.

**Corollaire 1.11.** *Si le SGR  $\mathcal{S}'$  est extension semi-directe (resp. directe) du SGR  $\mathcal{S}$ , alors  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}$  est produit semi-direct (resp. direct) de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  par un tore  $\mathfrak{T}_Z$  où  $Z$  est un supplémentaire de  $Y$  dans  $Y'$  et, pour un anneau  $k$ , l'action de  $\mathfrak{T}_Z(k)$  sur  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(k)$  est donnée par les relations  $t.t'.t^{-1} = t'$  et  $t.\mathfrak{r}_\alpha(r).t^{-1} = \mathfrak{r}_\alpha(\alpha(t).r)$  pour  $t \in \mathfrak{T}_Z(k)$ ,  $t' \in \mathfrak{T}_{\mathcal{S}}(k)$ ,  $\alpha \in \Phi$  et  $r \in k$ .*

*Démonstration.* On a  $Y' = Y \oplus Z$ , donc  $\mathfrak{T}_{Y'} = \mathfrak{T}_Y \times \mathfrak{T}_Z \subset \mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}$ . Dans  $\overline{\mathfrak{St}}_A * (\mathfrak{T}_Y \times \mathfrak{T}_Z)$  la relation  $(\overline{\text{KMT}}6)$  n'implique que  $\overline{\mathfrak{St}}_A * \mathfrak{T}_Y$  et  $(\text{KMT}4)$  décrit l'action de  $\mathfrak{T}_Z$  sur  $\overline{\mathfrak{St}}_A$ , d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire 1.12.** *Si le SGR  $\mathcal{S}$  est extension centrale torique du SGR  $\mathcal{S}'$ , alors  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}$  est quotient (comme foncteur en groupes) de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  par un sous-tore facteur direct  $\mathfrak{T}'$  de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$ , central dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$ . Si l'extension centrale est scindée, alors  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  est isomorphe au produit direct de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}$  et  $\mathfrak{T}'$ .*

*Démonstration.* Comme  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  est surjective,  $Z = \text{Ker}\varphi$  est facteur direct dans  $Y$  et contenu dans les noyaux  $\text{Ker}\beta$  pour  $\beta \in \Phi$ . On pose  $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_Z$  et la première assertion est alors une conséquence directe de 1.8. Si l'extension est scindée,  $Z$  a un supplémentaire  $Y''$  contenant les coracines et  $\varphi$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{S}''$  sur  $\mathcal{S}'$ , d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire 1.13.** *Si  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  est une extension centrale finie, alors pour un anneau  $k$ ,  $\mathfrak{T}_\varphi(k) : \mathfrak{T}_{\mathcal{S}}(k) \rightarrow \mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}(k)$  a pour noyau le groupe fini  $\mathfrak{Z}(k) = \{z \in \mathfrak{T}_{\mathcal{S}}(k) \mid \chi \circ \mathfrak{T}_\varphi(z) = 1 \forall \chi \in X'\}$  contenu dans tous les noyaux de racines de  $\Phi$ . Ce groupe  $\mathfrak{Z}(k)$  est central dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(k)$ , le quotient  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(k)/\mathfrak{Z}(k)$  est un sous-groupe distingué de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}(k)$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}(k) = (\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(k)/\mathfrak{Z}(k)).\mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}(k)$ .*

**N.B.** Sauf si  $k$  est un corps algébriquement clos,  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}(k)$  n'est pas forcément égal à  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(k)/\mathfrak{Z}(k)$ , car  $\mathfrak{T}_\varphi(k)$  n'est pas forcément surjective, voir 1.2.

*Démonstration.* Là encore  $(\overline{\text{KMT}}6)$  dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}$  est conséquence de la même relation dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  et  $(\text{KMT}4)$  montre que  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}(k)$  normalise l'image de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(k)$ . L'injection de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}(k)$  dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}(k)$  permet de contrôler la situation.  $\square$

## 2 Algèbre enveloppante entière

Cette algèbre "enveloppante" est la base de la construction par J. Tits de son groupe de Kac-Moody étudié ci-dessus. On va prouver ci-dessous un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt et introduire des "exponentielles tordues" dans le complété de cette algèbre.

### 2.1 Rappels

cf. [T-87], [Ry-02], [M-88a], [B-Lie, VIII § 12].

1) Dans l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathcal{S}})$  de l'algèbre de Lie complexe  $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}$ , J. Tits [T-87, § 4] a introduit la sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre  $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$  engendrée par les éléments suivants :

$$e_i^{(n)} = \frac{e_i^n}{n!} \quad \text{pour } i \in I \text{ et } n \in \mathbb{N},$$

$$f_i^{(n)} = \frac{f_i^n}{n!} \quad \text{pour } i \in I \text{ et } n \in \mathbb{N},$$

$$\binom{h}{n} \quad \text{pour } h \in Y \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

La sous-algèbre  $\mathcal{U}_S^+$  (resp.  $\mathcal{U}_S^-, \mathcal{U}_S^0$ ) est engendrée par les éléments du premier type (resp. du second type, du troisième type). On oubliera souvent l'indice  $S$  dans les notations précédentes, d'ailleurs  $\mathcal{U}_S^+$  et  $\mathcal{U}_S^-$  ne dépendent que de  $A$  et non de  $S$ .

On sait que  $\mathcal{U}_S$  (resp.  $\mathcal{U}_S^+, \mathcal{U}_S^-, \mathcal{U}_S^0$ ) est une  $\mathbb{Z}$ -forme de l'algèbre enveloppante correspondante  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_S)$  (resp.  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}_S^+), \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}_S^-), \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}_S)$ ) et que l'on a la décomposition unique  $\mathcal{U}_S = \mathcal{U}_S^+ \mathcal{U}_S^0 \mathcal{U}_S^-$ .

2) La graduation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_S$  par  $Q$  induit une graduation de l'algèbre associative  $\mathcal{U}_S$  par  $Q$ ; le sous-espace de poids  $\alpha \in Q$  est noté  $\mathcal{U}_{S\alpha}$ . La sous-algèbre  $\mathcal{U}_S^+$  (resp.  $\mathcal{U}_S^-$ ) est graduée par  $Q^+$  (resp.  $Q^-$ ), la sous-algèbre  $\mathcal{U}_S^0$  est de poids 0.

L'algèbre  $\mathcal{U}_S$  est un sous- $\mathcal{U}_S$ -module pour la représentation adjointe  $ad$  de  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_S)$  sur elle-même. En effet  $(ad e_i^{(n)})(u) = \frac{(ad(e_i))^{(n)}}{n!} \cdot (u) = \sum_{p+q=n} (-1)^q \cdot e_i^{(p)} \cdot u \cdot e_i^{(q)}$  et, pour  $h \in Y$ ,  $ad \begin{pmatrix} h \\ n \end{pmatrix}$  agit sur  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_S)_\alpha$  par multiplication par  $\begin{pmatrix} \alpha(h) \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$ .

La filtration de  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_S)$  induit une filtration sur  $\mathcal{U}_S$ . Le niveau 1 de cette filtration est donc somme directe de  $\mathbb{Z}$  et de  $\mathfrak{g}_{S\mathbb{Z}} = \mathfrak{g}_S \cap \mathcal{U}_S$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{S\mathbb{Z}}$  est un sous- $\mathcal{U}_S$ -module pour l'action adjointe, elle a une décomposition triangulaire  $\mathfrak{g}_{S\mathbb{Z}} = \mathfrak{n}_{S\mathbb{Z}}^+ \oplus Y \oplus \mathfrak{n}_{S\mathbb{Z}}^-$  (où  $\mathfrak{n}_{S\mathbb{Z}}^\pm = \mathfrak{n}_S^\pm \cap \mathcal{U}_S^\pm$  et  $Y = \mathfrak{h}_{S\mathbb{Z}} = \mathfrak{h}_S \cap \mathcal{U}_S^0$ ) et une décomposition radicielle  $\mathfrak{g}_{S\mathbb{Z}} = Y \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{S\alpha\mathbb{Z}})$  (où  $\mathfrak{g}_{S\alpha\mathbb{Z}} = \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathcal{U}_S$ ).

3) L'algèbre  $\mathcal{U}_S$  (ou  $\mathcal{U}_S^+, \mathcal{U}_S^-, \mathcal{U}_S^0$ ) a une structure de  $\mathbb{Z}$ -bigèbre cocommutative, co-inversible, elle est non commutative (sauf  $\mathcal{U}_S^0$ ). Sa comultiplication  $\nabla$ , sa co-unité  $\epsilon$  et sa co-inversion (ou antiautomorphisme principal)  $\tau$  respectent la graduation et la filtration : elles sont données sur les générateurs par les formules suivantes (pour  $i \in I, h \in Y$  et  $n \in \mathbb{N}$ ) :

$$\begin{aligned} \nabla \begin{pmatrix} h \\ n \end{pmatrix} &= \sum_{p+q=n} \begin{pmatrix} h \\ p \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \epsilon \begin{pmatrix} h \\ n \end{pmatrix} = 0 \text{ pour } n > 0 \\ \text{et } \tau \begin{pmatrix} h \\ n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -h \\ n \end{pmatrix} = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} h+n-1 \\ n \end{pmatrix} = (-1)^n \cdot \sum_{p+q=n} \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \\ \nabla e_i^{(n)} &= \sum_{p+q=n} e_i^{(p)} \otimes e_i^{(q)}, \epsilon e_i^{(n)} = 0 \text{ pour } n > 0 \text{ et } \tau e_i^{(n)} = (-1)^n e_i^{(n)} \\ \nabla f_i^{(n)} &= \sum_{p+q=n} f_i^{(p)} \otimes f_i^{(q)}, \epsilon f_i^{(n)} = 0 \text{ pour } n > 0 \text{ et } \tau f_i^{(n)} = (-1)^n f_i^{(n)}. \end{aligned}$$

4) Les automorphismes  $s_i^*$  de 1.4 s'étendent à  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_S)$  et stabilisent  $\mathcal{U}_S$ . On a une action de  $W^*$  sur  $\mathcal{U}_S$ . Ainsi, pour une racine réelle  $\alpha$  et un  $e_\alpha$  base (sur  $\mathbb{Z}$ ) de  $\mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ , l'élément  $e_\alpha^{(n)} = \frac{e_\alpha^n}{n!}$  est dans  $\mathcal{U}_S$ ; c'est une base de  $\mathcal{U}_{S n\alpha} \cap \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_\alpha)$ . On a comme ci-dessus  $\nabla e_\alpha^{(n)} = \sum_{p+q=n} e_\alpha^{(p)} \otimes e_\alpha^{(q)}, \epsilon e_\alpha^{(n)} = 0$  pour  $n > 0$  et  $\tau e_\alpha^{(n)} = (-1)^n e_\alpha^{(n)}$ .

L'automorphisme  $\exp(ad(e_\alpha))$  de  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_S)$  stabilise  $\mathcal{U}_S$ , puisqu'on a  $\frac{(ad(e_\alpha))^n}{n!} \cdot (u) = \sum_{p+q=n} (-1)^q \cdot e_\alpha^{(p)} \cdot u \cdot e_\alpha^{(q)}$ . On note  $s_\alpha^*$  l'élément suivant  $\exp(ad(e_\alpha)) \cdot \exp(ad(f_\alpha)) \cdot \exp(ad(e_\alpha)) = \exp(ad(f_\alpha)) \cdot \exp(ad(e_\alpha)) \cdot \exp(ad(f_\alpha))$ ; cet élément de  $W^*$  dépend du choix de  $e_\alpha$  comme base de  $\mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ , si on change  $e_\alpha$  en  $-e_\alpha$ , on change  $s_\alpha^*$  en  $(s_\alpha^*)^{-1}$ .

Plus généralement le foncteur en groupe  $\mathfrak{G}_S$  admet une représentation adjointe  $Ad$  dans les automorphismes de  $\mathcal{U}_S$  respectant sa filtration et donc aussi dans les automorphismes de  $\mathfrak{g}_{S\mathbb{Z}}$  [Ry-02, 9.5]. Pour  $\alpha \in \Phi$  et  $r \in R$ ,  $\mathfrak{r}_\alpha(r)$  agit sur  $\mathcal{U}_{SR} = \mathcal{U}_S \otimes R$  comme  $\sum_{n \geq 0} ad(e_\alpha^{(n)}) \otimes r^n$ ; le groupe  $\mathfrak{T}_S$  agit selon la décomposition de  $\mathcal{U}_S$  ou  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  selon les poids.

5) L'algèbre  $\mathcal{U}^+$  est graduée par  $Q^+$ . On peut la graduer par un *degré total* dans  $\mathbb{N}$  dont chaque facteur regroupe un nombre fini d'anciens facteurs. Ainsi sa complétion positive (pour le degré total) est  $\widehat{\mathcal{U}}^+ = \prod_{\alpha \in Q^+} \mathcal{U}_\alpha^+$ ; c'est une algèbre pour le prolongement naturel de la multiplication de  $\mathcal{U}^+$ . On peut de même considérer l'algèbre  $\widehat{\mathcal{U}}_k^+ = \prod_{\alpha \in Q^+} \mathcal{U}_\alpha^+ \otimes k$  (en général différente de  $\widehat{\mathcal{U}}^+ \otimes k$ ) pour tout anneau  $k$ .

On peut considérer la complétion positive  $\widehat{\mathcal{U}}^p$  de  $\mathcal{U}$  selon le degré total (dans  $\mathbb{Z}$ ); c'est une algèbre contenant  $\widehat{\mathcal{U}}^+$ . On définit de même  $\widehat{\mathcal{U}}_k^p$  qui contient  $\widehat{\mathcal{U}}_k^+$ . L'algèbre  $\widehat{\mathcal{U}}_k^p$  contient l'algèbre de Lie  $\widehat{\mathfrak{g}}_k^p = (\oplus_{\alpha < 0} \mathfrak{g}_{\alpha k}) \oplus \mathfrak{h}_k \oplus (\prod_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_{\alpha k})$ .

L'action adjointe  $ad$  de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{U}$  respecte la graduation. On peut donc la prolonger en une action de  $\widehat{\mathcal{U}}^p$  (ou  $\widehat{\mathcal{U}}_k^p$ ) sur elle même. L'algèbre de Lie  $\widehat{\mathfrak{g}}_k^p$  est un sous- $ad(\widehat{\mathcal{U}}_k^p)$ -module.

Les résultats précédents et suivants sont bien sûr encore valables si on remplace  $\Delta^+$  par  $\Delta^-$  ou par un conjugué de  $\Delta^\pm$  par un élément du groupe de Weyl  $W^v$ . On peut en particulier définir des complétions négatives  $\widehat{\mathcal{U}}^-$ ,  $\widehat{\mathcal{U}}^n$  ou  $\widehat{\mathfrak{g}}^n$  (selon l'opposé du degré total).

**Proposition 2.2.** *L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  (resp.  $\mathfrak{n}_{\mathbb{Z}}^+$ ,  $\mathfrak{n}_{\mathbb{Z}}^-$ ) est le  $\mathcal{U}$ -module (resp.  $\mathcal{U}^+$ -module,  $\mathcal{U}^-$ -module) engendré par  $\mathfrak{h}_{S\mathbb{Z}} = Y$  et les  $e_i, f_i$  (resp. par les  $e_i$ , par les  $f_i$ ) pour  $i \in I$  (pour l'action adjointe de  $\mathcal{U}$ ). L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  contient la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^1$  engendrée par  $\mathfrak{h}_{S\mathbb{Z}}$  et les  $e_i, f_i$  pour  $i \in I$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  est une algèbre de Lie, elle contient  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^1$ ; comme c'est un sous- $\mathcal{U}$ -module de  $\mathcal{U}$  elle contient le  $\mathcal{U}$ -module  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^2$  engendré par  $\mathfrak{h}_{S\mathbb{Z}}$  et les  $e_i, f_i$ . Si jamais  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \neq \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^2$ , il existe un nombre premier  $p$  tel que l'image de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^2$  dans  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{F}_p$  n'est pas tout  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{F}_p$ . Mais ceci contredit [M-96, 1.7.2 p308]. Le raisonnement pour  $\mathfrak{n}^\pm$  est analogue.  $\square$

**Corollaire 2.3.** *a) Soit  $K$  un corps de caractéristique  $p$ . Si, pour tout coefficient de la matrice de Kac-Moody  $A$ , on a  $p > -a_{i,j}$  ou si  $p = 0$ , alors l'algèbre  $\mathfrak{g}_K^1 = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes K$  (engendrée par  $\mathfrak{h}_{S\mathbb{Z}} \otimes K$  et les  $e_i, f_i$  pour  $i \in I$ ) est égale à  $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes K$ . De même l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_K^+ = \mathfrak{n}_{\mathbb{Z}}^+ \otimes K$  (resp.  $\mathfrak{n}_K^- = \mathfrak{n}_{\mathbb{Z}}^- \otimes K$ ) est engendrée par les  $e_i$  (resp. les  $f_i$ ).*

*b) Dans le cas simplement lacé i.e. si  $|a_{i,j}| \leq 1$  pour  $i \neq j$ , on a  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^1 = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ .*

*Démonstration.* Le a) est clair pour  $p = 0$ ; pour  $p > 0$  c'est [M-96, 1.7.3 p308]. On en déduit alors facilement le b) comme dans la démonstration précédente. On peut aussi utiliser la proposition 2.2 et [MT-72, prop 1 p181] pour prouver a) et b). Voir aussi [T-81, prop 1].  $\square$

**Proposition 2.4.** *Soit  $x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ . Il existe des éléments  $x^{[n]} \in \mathcal{U}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , tels que  $x^{[0]} = 1$ ,  $x^{[1]} = x$  et (si on note  $x^{(n)} = x^n/n! \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_S)$ ) l'élément  $x^{[n]} - x^{(n)}$  est de filtration  $< n$  dans  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_S)$ . Si de plus  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ ,  $\alpha \in Q$ , on peut supposer  $x^{[n]} \in \mathcal{U}_{n\alpha}$ .*

**Remarque.** Pour  $x \in Y = \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ , on peut prendre  $x^{[n]} = \binom{h}{n}$ . Pour  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ ,  $\alpha \in \Phi$ , on peut prendre  $x^{[n]} = x^{(n)}$ . Le problème se pose pour  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ ,  $\alpha \in \Delta_{im}$ . Des calculs explicites sont faits dans [Mn-85]; on constate que  $x^{[n]}$  n'est pas forcément dans  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}x^n$ .

*Démonstration.* Pour  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $x, y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ , on a  $(ax + by)^{(n)} = \sum_{p+q=n} a^p b^q x^{(p)} y^{(q)}$  modulo filtration  $< n$ . On déduit ainsi l'existence des  $(ax + by)^{[n]}$  de celle des  $x^{[p]}, y^{[q]}$ . La démonstration se réduit donc au cas où  $x$  est homogène et l'un des générateurs du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ . Le résultat signalé en remarque pour  $x = e_i$ ,  $x = f_i$  ou  $x \in Y$  et la proposition 2.2 montrent qu'il suffit de démontrer le lemme suivant (le cas négatif est semblable).  $\square$

**Lemme 2.5.** Soient  $\beta \in \Delta^+$  et  $x \in \mathfrak{g}_{\beta\mathbb{Z}}$  tels qu'il existe des éléments  $x^{[n]} \in \mathcal{U}_{n\beta}$  satisfaisant aux conditions de la proposition précédente. Pour  $i \in I$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , notons  $y = (\text{ad}(e_i)^k/k!)(x) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  et  $\gamma = \beta + k\alpha_i$  ( $\in \Delta^+$  si  $y \neq 0$ ). Alors il existe des éléments  $y^{[n]} \in \mathcal{U}_{n\gamma}$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) satisfaisant aux conditions de la proposition précédente.

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ ; c'est vrai pour  $n = 0$  ou  $1$ . Si  $\beta$  et  $\alpha_i$  sont colinéaires, on a  $\beta = \alpha_i$ , donc  $y = 0$  pour  $k \geq 1$ . On peut donc supposer  $\beta$  et  $\alpha_i$  indépendants. On travaille dans l'algèbre  $\widehat{\mathcal{U}}_{\mathbb{C}}^+ = \prod_{\alpha \in Q^+} \mathcal{U}_{\alpha\mathbb{C}}^+$  et pour  $z \in \mathfrak{n}^+$  on note  $\text{exp } z = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^{(n)}$ .

On a alors  $(\text{exp } e_i).(\text{exp } x).(\text{exp } - e_i) = \text{exp}(\sum_{m \in \mathbb{N}} (\text{ad}(e_i)^m/m!)(x))$  et aussi  $(\text{exp } e_i).z.(\text{exp } - e_i) = \sum_{p,q} (-1)^q e_i^{(p)} z e_i^{(q)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} ((\text{ad } e_i)^n/n!)(z)$  pour  $z \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}}^+$ , voir [B-Lie, II § 6 ex.1 p90 et VIII § 12 lemme 2 p174].

Identifions les termes de poids  $n\gamma$  dans les 2 membres de la première relation ci-dessus, en calculant modulo filtration  $< n$ .

Dans le membre de gauche on trouve  $\sum_{p+q=nk} (-1)^q e_i^{(p)} x^{(n)} e_i^{(q)}$  qui n'est différent de  $\sum_{p+q=nk} (-1)^q e_i^{(p)} x^{[n]} e_i^{(q)} \in \mathcal{U}_{n\gamma}$  que par le terme de poids  $n\gamma$  de  $(\text{exp } e_i).z.(\text{exp } - e_i)$  (pour  $z = x^{[n]} - x^{(n)} \in \mathcal{U}_{n\gamma\mathbb{C}}$  de filtration  $< n$ ) c'est à dire par  $\sum_{p+q=nk} (-1)^q e_i^{(p)} z e_i^{(q)}$ . D'après la seconde relation ci-dessus ce dernier terme est de filtration  $< n$ . Ainsi le terme de poids  $n\gamma$  du membre de gauche est dans  $\mathcal{U}_{n\gamma}$  modulo filtration  $< n$ .

Dans le membre de droite les termes de poids dans  $n\beta - \mathbb{N}\alpha_i$  sont ceux de la somme  $(\sum_{m \in \mathbb{N}} ((\text{ad } e_i)^m/m!)(x))^n/n!$ , égale à  $\sum_{\sum p_j = n} \prod_{j \in \mathbb{N}} (((\text{ad } e_i)^j/j!)(x))^{(p_j)}$  modulo des termes de filtration  $< n$  et de mêmes poids. Pour sélectionner les termes de poids  $n\gamma$  dans cette dernière somme, on a 2 conditions sur les  $p_j$  :  $n = \sum p_j$  et  $nk = \sum j p_j$ . Ainsi  $p_j = 0$  pour  $j > nk$ ,  $p_j \leq n$  et  $j p_j \leq nk$ ; donc si  $p_j = n$  on a  $j = k$ . Ainsi la partie de poids  $n\gamma$  du membre de droite est, modulo filtration  $< n$ , la somme de  $y^{(n)}$  et de produits  $\prod_{j=0}^{j=kn} (((\text{ad } e_i)^j/j!)(x))^{(p_j)}$  avec des  $p_j < n$ . Par récurrence le  $j$ -ième terme de l'un de ces produits est dans  $\mathcal{U}$  modulo filtration  $< p_j$ , donc chacun de ces produits est dans  $\mathcal{U}_{n\gamma}$  modulo filtration  $< n$ .

Par comparaison des membres de gauche et de droite, on obtient que  $y^{(n)}$  est dans  $\mathcal{U}_{n\gamma}$  modulo filtration  $< n$ .  $\square$

## 2.6 Poincaré-Birkhoff-Witt pour $\mathcal{U}$

Pour  $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ , soit  $\mathcal{B}_{\alpha}$  une base de  $\mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$  sur  $\mathbb{Z}$ . Pour  $\alpha = \alpha_i$  racine simple, on choisit  $\mathcal{B}_{\alpha} = \{e_i\}$  et  $\mathcal{B}_{-\alpha} = \{f_i\}$ . Par conjugaison par  $W^v$ , pour  $\alpha \in \Phi$ , on peut choisir  $\mathcal{B}_{\alpha} = \{e_{\alpha}\}$  et  $\mathcal{B}_{-\alpha} = \{f_{\alpha}\}$  de façon que  $[e_{\alpha}, f_{\alpha}] = -\alpha^{\vee}$ . On ordonne la base  $\mathcal{B} = \cup \mathcal{B}_{\alpha}$  de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  de manière quelconque.

Pour  $x \in \mathcal{B}$  on choisit des éléments  $x^{[n]}$  comme en 2.4. Pour  $N = (N_x)_{x \in \mathcal{B}} \in \mathbb{N}^{(\mathcal{B})}$ , on définit  $[N] = \prod_{x \in \mathcal{B}} x^{[N_x]}$  (ce produit est pris dans l'ordre choisi et est en fait fini car presque tous les  $N_x$  sont nuls). Le poids de  $[N]$  (et, par définition, de  $N$ ) est la somme pondérée  $pds([N]) = \sum N_x pds(x) \in Q$  des poids des  $x \in \mathcal{B}$ .

**Proposition.** Ces éléments  $[N]$  forment une base de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathbb{Z}$ .

**Remarques.** 1) L'algèbre graduée  $gr(\mathcal{U})$  définie par la filtration de  $\mathcal{U}$  est donc une algèbre de polynômes divisés à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et dont les indéterminées sont les éléments de  $\mathcal{B}$ .

2) Bien sûr ces résultats sont encore valables sur un anneau  $R$  quelconque. Si  $R$  contient  $\mathbb{Q}$ , on peut remplacer  $x^{[n]}$  par  $x^{(n)}$  pour tout  $x \in \mathcal{B}$ .



*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de 2.4 d'après [B-Lie, VIII § 12 n°3 prop. 1] qui se généralise sans problème à la dimension infinie.  $\square$

**Proposition 2.7.** *Pour  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ ,  $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ , on peut modifier les  $x^{[n]}$  de la proposition 2.4 de façon à satisfaire aux relations supplémentaires suivantes :*

$$\nabla(x^{[n]}) = \sum_{p+q=n} x^{[p]} \otimes x^{[q]} \quad \text{et} \quad \epsilon(x^{[n]}) = 0 \quad \text{pour } n > 0.$$

**Définition.** Pour  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ ,  $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ , on dit que  $(x^{[n]})_{n \in \mathbb{N}}$  est une *suite exponentielle* associée à  $x$  si elle satisfait aux conditions des propositions 2.4 (y compris  $x^{[n]} \in \mathcal{U}_{n\alpha}$ ) et 2.7.

Plus généralement, si  $x \in \mathfrak{g}_k$  pour  $k$  un anneau, il existe des *suites exponentielles inhomogènes* associées à  $x$ ; on peut prendre  $(\lambda y + \mu z)^{[n]} = \sum_{p+q=n} \lambda^p \mu^q y^{[p]} z^{[q]}$ .

**Remarque.**  $\mathcal{U}$  (resp.  $gr(\mathcal{U})$ ) est donc isomorphe comme cogèbre graduée (resp. bigèbre graduée) à une algèbre de polynômes divisés, plus précisément à l'algèbre symétrique à puissances divisées  $S_{\mathbb{Z}}^{pd}(\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}})$ .

*Démonstration.* Quitte à soustraire  $\epsilon(x^{[n]})$ , on peut supposer  $\epsilon(x^{[n]}) = 0$ , pour  $n > 0$ . On raisonne par récurrence sur  $n$ ; c'est clair pour  $n = 0, 1$ . Supposons le résultat vrai pour  $m < n$ , alors pour  $N \in \mathbb{N}^{(\mathcal{B})}$  et  $d^\circ(N) := \sum_x N_x < n$  on a  $\nabla([N]) = \sum_{P+Q=N} [P] \otimes [Q]$  (avec des  $P, Q \in \mathbb{N}^{(\mathcal{B})}$ ). La propriété des  $x^{(n)}$  vis à vis de  $\nabla$  et la relation entre  $x^{(n)}$  et  $x^{[n]}$  montre qu'il existe des  $a_{P,R}^n \in \mathbb{C}$  tels que :

$$\nabla(x^{[n]}) = \sum_{p+q=n} x^{[p]} \otimes x^{[q]} + \sum_{d^\circ(P+R) < n} a_{P,R}^n [P] \otimes [R].$$

D'après la propriété de la co-unité  $\epsilon$ ,  $a_{P,R}^n = 0$  si  $P$  ou  $R = 0$ . Par co-commutativité,  $a_{P,R}^n = a_{R,P}^n$ . Enfin  $\nabla$  étant compatible à la graduation,  $a_{P,R}^n = 0$  si le poids de  $P + R$  (i.e. de  $[P].[R]$ ) est différent de  $n\alpha$ . D'après la co-associativité et la formule ci-dessus pour  $\nabla([N])$  quand  $d^\circ(N) < n$  on a :

$$\begin{aligned} \nabla(x^{[n]}) \otimes 1 + \sum_{p+q+r=n}^{r>0} x^{[p]} \otimes x^{[q]} \otimes x^{[r]} + \sum_{d^\circ(P+Q+R) < n} a_{P+Q,R}^n [P] \otimes [Q] \otimes [R] \\ = 1 \otimes \nabla(x^{[n]}) + \sum_{p+q+r=n}^{p>0} x^{[p]} \otimes x^{[q]} \otimes x^{[r]} + \sum_{d^\circ(P+Q+R) < n} a_{P,Q+R}^n [P] \otimes [Q] \otimes [R] \end{aligned}$$

Après remplacement de  $\nabla(x^{[n]})$  par son expression et simplification, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{d^\circ(P+Q) < n} a_{P,Q}^n [P] \otimes [Q] \otimes 1 + \sum_{d^\circ(P+Q+R) < n} a_{P+Q,R}^n [P] \otimes [Q] \otimes [R] \\ = \sum_{d^\circ(Q+R) < n} a_{Q,R}^n 1 \otimes [Q] \otimes [R] + \sum_{d^\circ(P+Q+R) < n} a_{P,Q+R}^n [P] \otimes [Q] \otimes [R] \end{aligned}$$

On identifie alors les coefficients de  $[P] \otimes [Q] \otimes [R]$  dans les 2 membres. Pour  $P = 0, Q = 0$  ou  $R = 0$ , on retrouve des relations connues. Pour  $P, Q, R \neq 0$ , on trouve que  $a_{P+Q,R}^n = a_{P,Q+R}^n$ . Sachant de plus que  $a_{P,R}^n = a_{R,P}^n$ , on en déduit que  $a_{P,R}^n$  (pour  $P, R \neq 0$ ) ne dépend que de  $P + R$ , on le note donc  $b_{P+R}^n$ . (On laisse au lecteur cet exercice élémentaire, mais nécessitant l'examen de plusieurs cas.)

L'élément  $x^{\{n\}} = x^{[n]} - \sum_{d^\circ(S) < n}^{S \neq 0} b_S^n [S]$  est bien égal à  $x^{(n)}$  modulo filtration  $< n$  et, comme  $b_S^n = 0$  pour  $pds(S) \neq n\alpha$ , son poids est bien  $n\alpha$ . On a :

$$\begin{aligned} \nabla x^{\{n\}} = \sum_{p+r=n} x^{[p]} \otimes x^{[r]} + \sum_{d^\circ(P+R) < n} a_{P,R}^n [P] \otimes [R] \\ - \sum_{d^\circ(S) < n}^{S \neq 0} b_S^n ([S] \otimes 1 + 1 \otimes [S]) - \sum b_S^n [P] \otimes [R] \end{aligned}$$

où la dernière somme porte sur les  $P, R$  tels que  $P + R = S$ ,  $d^\circ(S) < n$  et  $P, R \neq 0$ . Elle est donc égale à la seconde somme puisque  $a_{P,R}^n = b_{P+R}^n$  ou 0 selon que  $P$  et  $R \neq 0$  ou non. Ainsi :

$$\nabla x^{\{n\}} = x^{\{n\}} \otimes 1 + 1 \otimes x^{\{n\}} + \sum_{p+r=n}^{p,r \neq 0} x^{[p]} \otimes x^{[r]} \quad \square$$

## 2.8 Exponentielles tordues

On raisonne dans  $\widehat{\mathcal{U}}_R^+$  pour une racine  $\alpha \in \Delta^+$  (ou  $\widehat{\mathcal{U}}_R^-$  pour  $\alpha \in \Delta^-$ ) et un anneau  $R$ .

Si  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ ,  $\alpha \in \Delta^+$  et  $\lambda \in R$ , l'exponentielle tordue  $[exp]\lambda x = \sum_{n \geq 0} \lambda^n x^{[n]} \in \widehat{\mathcal{U}}_R^+$  n'est définie que modulo le choix de la suite exponentielle  $x^{[n]}$ .

Ses propriétés multiplicatives sont mauvaises :  $[exp](\lambda + \mu)x = \sum_{n \geq 0} (\lambda + \mu)^n x^{[n]}$  est en général différent de  $[exp]\lambda x \cdot [exp]\mu x$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{Z}$  il faudrait poser  $[exp]\lambda x = ([exp]x)^\lambda$  (voir ci-dessous pour  $\lambda < 0$ ), mais l'extension pour  $\lambda \in R$  pose problème. Pour tous  $x, y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ ,  $\lambda, \mu \in k$ ,  $[exp](\lambda x) \cdot [exp](\mu y)$  est un choix possible d'exponentielle tordue (inhomogène) pour  $\lambda x + \mu y$ .

Par contre  $\epsilon([exp]\lambda x) = 1$  et pour le coproduit  $\nabla[exp]\lambda x = [exp]\lambda x \widehat{\otimes} [exp]\lambda x$  : l'exponentielle tordue est un élément de type groupe. La co-inversion  $\tau$  vérifie  $prod \circ (Id \widehat{\otimes} \tau) \circ \nabla = \epsilon = prod \circ (\tau \widehat{\otimes} Id) \circ \nabla$ . Donc  $([exp]\lambda x) \cdot (\tau[exp]\lambda x) = 1 = (\tau[exp]\lambda x) \cdot ([exp]\lambda x)$  : l'exponentielle tordue est inversible dans  $\widehat{\mathcal{U}}_R^+$  et son inverse vaut  $\tau[exp]\lambda x = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \tau x^{[n]}$ . Bien sûr  $\tau x^{[n]}$  est l'une des suites exponentielles associées à  $\tau x = -x$ , comme la suite  $(-1)^n x^{[n]}$ , mais elle n'est pas clairement liée (en général) à cette dernière.

Pour  $R$  contenant  $\mathbb{Q}$ , ou  $\alpha \in \Phi$ , on peut considérer les exponentielles classiques  $exp(x) \in \widehat{\mathcal{U}}_R^\pm$  qui ont d'excellentes propriétés.

## 2.9 Unicité des exponentielles tordues

1) Pour  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ , cherchons s'il existe une suite exponentielle  $x^{\{n\}}$  autre que  $x^{[n]}$ . D'après la démonstration de 2.7, il suffit de se poser la question quand on change  $x^{[n+1]}$  sans changer  $x^{[m]}$  pour  $m \leq n$ . On a alors  $x^{\{n+1\}} = x^{[n+1]} + y$  avec  $y \in \mathcal{U}_{(n+1)\alpha\mathbb{Z}}$  de filtration  $\leq n$ . Sachant que  $\nabla x^{[n+1]} = \sum_{p+q=n+1} x^{[p]} \otimes x^{[q]}$ , on a  $\nabla x^{\{n+1\}} = \sum_{p+q=n+1} x^{\{p\}} \otimes x^{\{q\}}$  si et seulement si  $\nabla y = y \otimes 1 + 1 \otimes y$ , autrement dit si  $y$  est primitif dans la cogèbre  $\mathcal{U}$ , c'est à dire si  $y \in \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha\mathbb{Z}}$  [B-Lie, II § 1 n° 5 cor p13].

Ainsi la suite  $x^{[n]}$  n'est unique qu'à des éléments  $x_2 \in \mathfrak{g}_{2\alpha\mathbb{Z}}, \dots, x_m \in \mathfrak{g}_{m\alpha\mathbb{Z}}, \dots$  près. Autrement dit un autre choix pour  $[exp]x$  peut s'écrire  $[exp]'x = [exp]x \cdot [exp]x_2 \cdot [exp]x_3 \cdot \dots \cdot [exp]x_m \cdot \dots$ .

2) Pour  $\alpha$  racine réelle, il y a unicité puisque  $\mathfrak{g}_{m\alpha\mathbb{Z}} = 0$  pour  $m \geq 2$ , on a donc toujours  $x^{[n]} = x^{(n)}$  et  $[exp]x = exp x$ . Par contre il n'y a pas unicité des  $x^{[n]}$  pour  $\alpha = 0$  ou  $\alpha$  racine imaginaire. On verra en 2.12 dans des cas affines les bons choix proposés par D. Mitzman.

3) Pour  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$  mais en raisonnant dans  $\widehat{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}}^+$ , on obtient qu'il existe  $y_2 \in \mathfrak{g}_{2\alpha\mathbb{Q}}, \dots, y_m \in \mathfrak{g}_{m\alpha\mathbb{Q}}, \dots$  tels que  $[exp]x = exp(x) \cdot exp(y_2) \cdot \dots \cdot exp(y_m) \cdot \dots$ . En particulier  $([exp]x)^{-1} = \tau[exp]x = \dots \cdot exp(-y_m) \cdot \dots \cdot exp(-y_2) \cdot exp(-x)$ . Si les espaces  $\mathfrak{g}_{m\alpha}$  commutent, les exponentielles ci-dessus commutent.

Mais l'on a naturellement  $[exp]\lambda x = exp(\lambda x) \cdot exp(\lambda^2 y_2) \cdot \dots \cdot exp(\lambda^m y_m) \cdot \dots$  et non pas  $[exp]\lambda x = exp(\lambda x) \cdot exp(\lambda y_2) \cdot \dots \cdot exp(\lambda y_m) \cdot \dots$  (qui d'ailleurs n'est en général pas dans  $\widehat{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}}^+$ ). Il paraît donc difficile de faire de  $[exp]$  un sous-groupe à un paramètre pour  $\alpha \in \Delta^{im}$ .

4) **Remarque** : l'expression ci-dessus de  $[exp]x$  (pour  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ ,  $\alpha \in \Delta$ ) en terme d'exponentielles classiques, montre que,  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ,  $x^{[n]} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(\oplus_{r \geq 1} \mathfrak{g}_{r\alpha\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{U}_{n\alpha}$  et  $x^{[n]} \cdot x^{[m]} = \binom{n+m}{n} x^{[n+m]}$  modulo  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(\oplus_{r \geq 2} \mathfrak{g}_{r\alpha\mathbb{Q}})$ . Ce n'était pas clair auparavant pour  $\alpha$  imaginaire.

Ainsi la base de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathbb{Z}$  construite en 2.6, qui est compatible avec la graduation par les poids dans  $Q$ , est aussi compatible avec la décomposition de  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$  ou  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$  en produit tensoriel correspondant à la décomposition en somme directe  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha})$ , à condition de

regrouper une racine imaginaire et ses multiples positifs. Pour  $\alpha$  imaginaire, cette base est compatible à la filtration par les  $(\oplus_{n \geq N} \mathfrak{g}_{n\alpha})$ .

## 2.10 Exponentielles tordues en poids nul

On peut essayer de généraliser 2.8 et 2.9 pour  $\alpha = 0$  i.e.  $x = h \in Y = \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ . On travaille donc dans  $\mathcal{U}^0$  et, pour simplifier, on se place en rang 1 :  $Y$  est de base  $h$  et  $\mathcal{U}^0 = \sum_{i \geq 0} \mathbb{Z} \binom{h}{i}$ . On raisonne dans  $\widehat{\mathcal{U}}_R^0 = \prod_{i \geq 0} R \binom{h}{i}$  pour un anneau  $R$ ; ce n'est pas le complété de  $\mathcal{U}_R^0$  pour la graduation par  $Q$ ; la multiplication de  $\mathcal{U}_R^0$  se prolonge car  $\binom{h}{p} \binom{h}{q} \in \sum_{i=\sup(p,q)}^{i=p+q} \mathbb{Z} \binom{h}{i}$ . Ainsi  $\widehat{\mathcal{U}}_R^0$  est une algèbre commutative avec une comultiplication  $\nabla : \widehat{\mathcal{U}}_R^0 \rightarrow \widehat{\mathcal{U}}_R^0 \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{U}}_R^0$ , mais malheureusement sans co-inversion et dépendant du choix de  $h$  (au lieu de  $-h$ ), voir ci-dessous.

On sait que  $\mathcal{U}^0$  est la bigèbre des distributions à l'origine du groupe multiplicatif  $\mathfrak{M}\mathfrak{u}\mathfrak{l}\mathfrak{t}$ . La bigèbre affine de ce groupe est  $\mathbb{Z}[\mathfrak{M}\mathfrak{u}\mathfrak{l}\mathfrak{t}] = \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$  et la dualité entre ces 2 bigèbres est donnée par  $\binom{h}{i} T^m = \binom{m}{i}$  (en fait  $\binom{h}{i}$  est  $\frac{\partial}{\partial T^i} = \frac{1}{i!} (\frac{\partial}{\partial T})^i$  calculé en l'élément neutre) cf. [DG-70, II § 4 5.10].

Pour  $x \in R$ , on peut poser  $[x] = \sum_{i \geq 0} (x-1)^i \binom{h}{i} \in \widehat{\mathcal{U}}_R^0$  (c'est moralement  $(1 + (x-1))^h$ ). On a bien  $[x]T^n = x^n$  pour  $n \geq 0$ ; par contre pour  $n < 0$ , ceci n'a un sens que si  $x-1$  est nilpotent (donc  $x \in R^*$ ).

On a  $\nabla[x] = [x] \otimes [x] \in \widehat{\mathcal{U}}_R^0 \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{U}}_R^0$  : l'élément  $[x]$  est de type groupe.

Le prolongement naturel de  $\tau$  devrait donner :

$$\begin{aligned} \tau[x] &= \sum_{i \geq 0} (x-1)^i \binom{-h}{i} = \sum_{p,q} (1-x)^{p+q} \binom{p+q-1}{p} \binom{h}{q} \\ &= \sum_{q \geq 0} (1-x)^q \left( \sum_{p \geq 0} (1-x)^p \binom{p+q-1}{p} \right) \binom{h}{q}. \end{aligned}$$

Mais ce calcul n'a un sens dans  $\widehat{\mathcal{U}}_R^0$  que si  $1-x$  est nilpotent, auquel cas  $\tau[x]$  est bien égal à  $[x^{-1}] = \sum_{q \geq 0} (1-x)^q x^{-q} \binom{h}{q}$ , vu le calcul ci-dessus de  $x^{-q} = [x]T^{-q}$ .

Les exponentielles tordues en poids nul semblent donc trop imparfaites.

## 2.11 Polynômes de Mitzman

[Mn-85, p114-116]

On considère des indéterminées  $\underline{Z} = (Z_s)_{s \geq 1}$  et  $\zeta$ . Le polynôme  $\Lambda_s(\underline{Z})$  est le coefficient de  $\zeta^s$  dans le développement de l'expression formelle  $\exp(\sum_{j \geq 1} Z_j \frac{\zeta^j}{j})$ . C'est un polynôme en les  $Z_j$  à coefficients positifs dans  $\mathbb{Q}$ . Son poids total est  $s$  si  $Z_j$  est de poids  $j$ .

On a :  $\Lambda_0 = 1$ ,  $\Lambda_1 = Z_1$ ,  $\Lambda_2 = Z_1^{(2)} + (1/2)Z_2$ ,  $\Lambda_3 = Z_1^{(3)} + (1/2)Z_1Z_2 + (1/3)Z_3, \dots$

**Cas particuliers.** Pour certaines spécialisations des indéterminées, on a :

si  $Z_i = 0$  pour  $i \geq 2$ , alors  $\Lambda_n = Z_1^{(n)}$ ,

si  $Z_i = Z^i$  pour  $i \geq 1$ , alors  $\Lambda_n = Z^n$ ,

si  $Z_i = t^i Z$  pour  $i \geq 1$  et  $t \in R$ , alors  $\Lambda_n = t^n \binom{Z+n-1}{n} = (-t)^n \binom{-Z}{n}$ .

**Lemme.** a)  $n\Lambda_n = \sum_{p+q=n}^{p \geq 1} Z_p \Lambda_q$ , si  $n \geq 1$ .

b)  $\Lambda_n(\underline{Z} + \underline{Z}') = \sum_{p+q=n} \Lambda_p(\underline{Z}) \cdot \Lambda_q(\underline{Z}')$ .

c)  $\Lambda_n(\underline{Z})$  est congru à  $Z_1^{(n)}$  modulo des polynômes de degré total  $\leq n - 1$ . Pour  $n \geq 1$   $\Lambda_s(\underline{Z})$  n'a pas de terme constant.

*Démonstration.* La première assertion résulte de la troisième ligne de la démonstration de [Mn-85, 4.1.14] p.115 puisque  $\exp(\sum_{j \geq 1} Z_j \zeta^j / j) = \sum_{n \geq 0} \Lambda_n(\underline{Z}) \zeta^n$ . Pour la seconde assertion, on a  $\sum_{n \geq 0} \Lambda_n(\underline{Z} + \underline{Z}') \zeta^n = \exp(\sum_{j \geq 1} (Z_j + Z'_j) \zeta^j / j) = \exp(\sum_{j \geq 1} Z_j \zeta^j / j) \cdot \exp(\sum_{j \geq 1} Z'_j \zeta^j / j) = (\sum_{p \geq 0} \Lambda_p(\underline{Z}) \zeta^p) \cdot (\sum_{q \geq 0} \Lambda_q(\underline{Z}') \zeta^q)$ , d'où le résultat. Enfin la dernière assertion est claire.  $\square$

## 2.12 Exponentielles tordues dans les algèbres affines

Dans une  $\mathbb{Q}$ -algèbre de Lie graduée considérons une suite  $\underline{x} = (x_i)_{i \geq 1}$  d'éléments commutant deux à deux et de poids  $pds(x_i) = i \cdot pds(x_1)$ . Dans l'algèbre enveloppante on peut donc calculer  $x^{\{n\}} = \Lambda_n(\underline{x})$  qui est de poids  $n \cdot pds(x_1)$ . D'après le lemme la suite des  $x^{\{n\}}$  est exponentielle. On peut donc lui associer l'exponentielle tordue  $\{exp\}x = \sum_n x^{\{n\}} = \exp(\sum_j x_j / j) = \prod_j \exp(x_j / j)$ .

Revenons à la situation de 2.9 :  $\alpha \in \Delta$  et  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ . Supposons que les espaces  $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}, \dots, \mathfrak{g}_{i\alpha}, \dots$  commutent deux à deux. C'est vrai dans le cas des algèbres de Kac-Moody affines (ou semi-simples); mais malheureusement ce sont essentiellement les seuls cas où cela soit vérifié. Pour une suite exponentielle  $x^{\{n\}}$ , il existe des éléments  $y_i \in \mathfrak{g}_{i\alpha\mathbb{Q}}$  pour  $i \geq 2$  tels que  $[exp]x = \exp(x) \cdot \exp(y_2) \cdot \dots \cdot \exp(y_m) \cdot \dots = \exp(x + y_2 + \dots + y_m + \dots)$ . Posons  $x_1 = x, x_2 = 2y_2, \dots, x_m = my_m, \dots$ . On a alors  $[exp]x = \exp(\sum_{j \geq 1} x_j / j)$ . En identifiant les termes de poids  $n\alpha$ , on obtient  $x^{\{n\}} = \Lambda_n(\underline{x}) \in \mathcal{U}$ . Grâce à 2.11.a on en déduit facilement par récurrence que  $x_i \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}, \forall i$ ; mais les exemples ci-dessous montrent que  $y_i = x_i / i$  n'est en général pas dans  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ .

David Mitzman a calculé explicitement une base de l'algèbre enveloppante entière  $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$  dans le cas affine (et pour un certain SGR  $\mathcal{S}$ ) [Mn-85, 4.2.6 et 4.4.12]. Elle s'exprime comme la base de 2.6; avec  $h^{\{n\}} = \Lambda_n(h, h, \dots) = (-1)^n \binom{-h}{n}$  pour  $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$  et  $x^{\{n\}} = \Lambda_n(x, 0, \dots) = x^{\{n\}}$  pour  $x$  base de  $\mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Phi$ . Si  $\alpha \in \Delta_{im}$  et  $x \in \mathcal{B}_\alpha$  le choix de  $x^{\{n\}}$  est  $x^{\{n\}} = \Lambda_n(x, x_2, \dots, x_m, \dots)$  avec des  $x_i \in \mathfrak{g}_{i\alpha\mathbb{Z}}$ ; donc  $[exp]x = \exp(x) \cdot \prod_{j=2}^{\infty} \exp(\frac{1}{j} x_j)$ , par définition des  $\Lambda_n$ . On va décrire ces  $x_j$  dans le cas le plus facile, cf. l.c. 4.2.5 :  $\mathfrak{g}$  est simplement lacée (donc non tordue, de type  $\tilde{A}, \tilde{D}$  ou  $\tilde{E}$ ). Voir aussi le corollaire 2.3.b.

Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de l'un de ces types peut s'écrire comme extension centrale (avec centre de dimension 1) d'un produit semi-direct (avec  $\mathbb{C}$ ) d'une algèbre de lacets  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  où  $\mathfrak{g}_1$  est une algèbre de Lie simple complexe de type  $A, D$  ou  $E$ . Les racines imaginaires sont les multiples entiers d'une racine  $\delta$  et, pour  $n \neq 0$ , on a  $\mathfrak{g}_{n\delta} = \mathfrak{h}_1 \otimes t^n$  où  $\mathfrak{h}_1$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_1$ . Si  $h_1, \dots, h_\ell$  est une base de coracines dans  $\mathfrak{h}_1$ , l'espace  $\mathfrak{g}_{n\delta\mathbb{Z}}$  admet pour base  $\mathcal{B}_{n\delta} = \{h_{i,n} = h_i \otimes t^n \mid i = 1, \ell\}$ . Le bon choix (de Mitzman) pour  $(h_{i,n})^{[p]}$  est  $\Lambda_p(h_{i,n}, h_{i,2n}, \dots, h_{i,jn}, \dots)$ , cf. l.c. 3.9.1 et 4.2.3.

On peut remarquer que  $(h_{i,n})^{[p]} = \Lambda_p(h_i \otimes t^n, h_i \otimes t^{2n}, \dots, h_i \otimes t^{jn}, \dots)$  a pour image  $(h_i)^{[p]} \otimes t^{np} = \binom{h+p-1}{p} \otimes t^{np} = \binom{-h}{p} \otimes (-t^n)^p$  dans le quotient  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  de  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}')$  (troisième cas particulier de 2.11).

**L'exemple de  $\widetilde{SL}_2$**  : Pour le type  $\widetilde{A}_1$ , on peut préciser encore plus. On a  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \subset \text{End}_{\mathbb{C}[t, t^{-1}]}(\mathbb{C}[t, t^{-1}]^2)$ . Si  $h = \text{diag}(1, -1) \in \mathfrak{sl}_2$ , alors, pour  $n \neq 0$ ,  $\mathfrak{g}_{n\delta\mathbb{Z}}$  a pour base  $h_n = t^n h$ . La représentation naturelle de  $\mathfrak{g}'$  sur  $\mathbb{C}[t, t^{-1}]^2$  induit un homomorphisme  $\pi$  de  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}')$  dans  $\text{End}_{\mathbb{C}[t, t^{-1}]}(\mathbb{C}[t, t^{-1}]^2)$  ou de  $\widehat{\mathcal{U}}_{\mathbb{C}}^p$  dans  $\text{End}_{\mathbb{C}((t))}(\mathbb{C}((t))^2)$ . On a  $\pi(h_n^{[p]}) = (-t^n)^p \begin{pmatrix} -h & \\ & p \end{pmatrix} = t^{np} \begin{pmatrix} h + p - 1 & \\ & p \end{pmatrix} \in \text{End}_{\mathbb{Z}((t))}(\mathbb{Z}((t))^2)$ . On en déduit que  $\pi(\mathcal{U}) \subset \text{End}_{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]^2)$  et que, pour  $\lambda$  dans un anneau  $k$ ,  $\pi([\text{exp}]\lambda h_n) = \text{diag}(u, v) \in \text{End}_{k((t))}(k((t))^2)$  avec  $u = \sum_{p=0}^{\infty} (\lambda t^n)^p \binom{p}{p} = 1 + \lambda t^n + \lambda^2 t^{2n} + \dots$  et  $v = \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda t^n)^p \binom{1}{p} = 1 - \lambda t^n = u^{-1}$ . En particulier  $\pi([\text{exp}]\lambda h_n)$  est bien inversible et même dans  $SL_2(k((t)))$ .

## 2.13 Sous-algèbres et complétions

1) Pour  $\alpha \in \Delta$ ,  $\mathcal{U}^\alpha = \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\oplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_{n\alpha}) \cap (\oplus_{n \geq 0} \mathcal{U}_{n\alpha}) = \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\oplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_{n\alpha}) \cap \mathcal{U}$  est une sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre de  $\mathcal{U}$ . Pour  $\alpha \in \Phi$ ,  $\mathcal{U}^\alpha$  admet pour base sur  $\mathbb{Z}$  les  $e_\alpha^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $\alpha \in \Delta_{im}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on choisit une base  $\mathcal{B}_{n\alpha}$  de  $\mathfrak{g}_{n\alpha\mathbb{Z}}$  et des suites exponentielles  $x^{[p]}$  pour  $x \in \mathcal{B}_{n\alpha}$ . D'après 2.9.4 ci-dessus, ces  $x^{[p]}$  sont dans  $\mathcal{U}^\alpha$  et, d'après 2.6, les  $[N] = \prod_{x \in \mathcal{B}_{(\alpha)}} x^{[N_x]}$  (pour  $(\alpha) = \mathbb{N}^* \alpha \subset \Delta_{im}$ ,  $\mathcal{B}_{(\alpha)} = \cup_{\beta \in (\alpha)} \mathcal{B}_\beta$ ,  $N \in \mathbb{N}^{(\mathcal{B}_{(\alpha)})}$ ) forment une base de  $\mathcal{U}^\alpha$ . On en déduit, en particulier, que  $\mathcal{U}^\alpha$  est une sous- $\mathbb{Z}$ -bigèbre co-inversible de  $\mathcal{U}$ .

Si  $\Psi \subset \Delta \cup \{0\}$  est un ensemble clos,  $\mathfrak{g}_\Psi = \oplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$  est une algèbre de Lie ; l'algèbre  $\mathcal{U}(\Psi)$  engendrée par les  $\mathcal{U}^\alpha$  pour  $\alpha \in \Psi$  est une sous-bigèbre co-inversible de  $\mathcal{U}$  de base les  $[N]$  pour  $N \in \mathbb{N}^{(\mathcal{B}_\Psi)}$  avec  $\mathcal{B}_\Psi = \cup_{\alpha \in \Psi} \mathcal{B}_\alpha$ . L'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}_\Psi$  est  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\Psi) = \mathcal{U}(\Psi) \otimes \mathbb{C}$  et  $\mathcal{U}(\Psi) = \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\Psi) \cap \mathcal{U}$ . Les algèbres  $\mathcal{U}(\Psi)$  et  $\mathfrak{g}_{\Psi\mathbb{Z}} = \mathfrak{g}_\Psi \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  sont stables par l'action adjointe de  $\mathcal{U}(\Psi)$ . Pour  $\Psi = \Delta^+$  (resp  $\Psi = \Delta^+ \cup \{0\}$ ) on a  $\mathcal{U}(\Psi) = \mathcal{U}^+$  (resp  $\mathcal{U}(\Psi) = \mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{U}^+$ ). On a  $\mathcal{U}^\alpha = \mathcal{U}((\alpha))$ .

Pour un anneau  $k$ , on note  $\mathcal{U}_k^\alpha = \mathcal{U}^\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} k$  et  $\mathcal{U}_k(\Psi) = \mathcal{U}(\Psi) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ .

2) Si  $\Psi \subset \Delta^+$  est clos, l'algèbre  $\mathcal{U}(\Psi)$  est graduée par  $Q^+$ . On peut la graduer par le degré total. Sa complétion positive  $\widehat{\mathcal{U}}(\Psi) = \prod_{\alpha \in Q^+} \mathcal{U}(\Psi)_\alpha$  est une sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre de  $\widehat{\mathcal{U}}^+$ . On peut de même considérer l'algèbre  $\widehat{\mathcal{U}}_k(\Psi) = \prod_{\alpha \in Q^+} \mathcal{U}(\Psi)_\alpha \otimes k$  (en général différente de  $\widehat{\mathcal{U}}(\Psi) \otimes k$ ) pour tout anneau  $k$ .

Si  $\Psi \subset \Delta \cup \{0\}$  est clos, on peut considérer la complétion positive  $\widehat{\mathcal{U}}^p(\Psi)$  de  $\mathcal{U}(\Psi)$  selon le degré total (dans  $\mathbb{Z}$ ) ; c'est une sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre de  $\widehat{\mathcal{U}}^p = \widehat{\mathcal{U}}^p(\Delta \cup \{0\})$ . On définit de même  $\widehat{\mathcal{U}}_k^p(\Psi)$ . L'intersection de  $\widehat{\mathcal{U}}_k^p(\Psi)$  avec  $\widehat{\mathfrak{g}}_k^p$  est  $\widehat{\mathfrak{g}}_k^p(\Psi) = (\oplus_{\alpha \in \Psi}^{\alpha < 0} \mathfrak{g}_{\alpha k}) \oplus \mathfrak{h}_k \oplus (\prod_{\alpha \in \Psi}^{\alpha > 0} \mathfrak{g}_{\alpha k})$ . Bien sûr  $\widehat{\mathcal{U}}_k^p(\Psi)$  et  $\widehat{\mathfrak{g}}_k^p(\Psi)$  sont des sous- $ad(\widehat{\mathcal{U}}_k^p(\Psi))$ -modules de  $\widehat{\mathcal{U}}_k^p$ .

Si  $\Psi'$  est un idéal de  $\Psi$ ,  $\widehat{\mathcal{U}}_k^p(\Psi')$  (resp  $\mathcal{U}_k(\Psi')$ ) est un idéal de  $\widehat{\mathcal{U}}_k^p(\Psi)$  (resp  $\mathcal{U}_k(\Psi)$ ).

3) Les résultats précédents et suivants sont bien sûr encore valables si on remplace  $\Delta^+$  par  $\Delta^-$  ou par un conjugué de  $\Delta^\pm$  par un élément du groupe de Weyl  $W^v$ . On peut en particulier définir des complétions négatives  $\widehat{\mathcal{U}}^n(\Psi)$  (selon l'opposé du degré total).

## 2.14 Modules intégrables à plus haut poids

Soit  $\lambda$  un poids dominant de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$ , i.e.  $\lambda \in X^+ = \{ \lambda \in X \mid \lambda(\alpha_i^\vee) \geq 0, \forall i \in I \}$ . Considérons le  $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}$ -module irréductible  $L(\lambda)$  de plus haut poids  $\lambda$  [K-90, chap. 9 et 10]. Si  $v_\lambda$  est un vecteur non nul de poids  $\lambda$ ,  $L(\lambda)$  est un quotient du module de Verma  $V(\lambda) = \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{b}_{\mathcal{S}}^+)} \mathbb{C}v_\lambda$

(dans le cas non symétrisable, on prend plutôt pour  $L(\lambda)$  le quotient intégrable maximal de  $V(\lambda)$  comme en [M-88a, p28]). Le sous- $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ -module  $L_{\mathbb{Z}}(\lambda) = \mathcal{U}_{\mathcal{S}}.v_{\lambda} = \mathcal{U}_{\mathcal{S}}^{-}.v_{\lambda}$  est une  $\mathbb{Z}$ -forme de  $L(\lambda)$ ; on peut définir  $L_k(\lambda) = L_{\mathbb{Z}}(\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ , pour tout anneau  $k$ . Ces modules sont intégrables au sens de [T-81] et gradués par  $Q^{-}$  (à translation près) avec des espaces de poids de dimension finie. En particulier on a une représentation diagonalisable de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$  dans  $L_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ .

Il est clair que, pour tout anneau  $k$ ,  $L_k(\lambda)$  est en fait un  $\widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{S},k}^p$ -module.

On définit de même des modules intégrables à plus bas poids  $L_k(\lambda)$  pour  $\lambda \in -X^{+}$ ; ce sont des  $\widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{S},k}^n$ -modules.

### 3 Les groupes de Kac-Moody maximaux (à la Mathieu)

On va étudier ci-dessous deux groupes de Kac-Moody "maximaux" dits *positif* et *négatif* qui contiennent le groupe minimal étudié dans la première partie. Ils se déduisent l'un de l'autre par l'échange de  $\Delta^{+}$  et  $\Delta^{-}$ ; on va donc essentiellement se concentrer sur le groupe positif. Ce groupe sera noté  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}^{pma}$ , les sous-groupes ou les algèbres associées seront en général notés avec un exposant  $pma$  ou  $ma+$ . Les analogues pour  $\Delta^{-}$  seront notés avec un exposant  $nma$  ou  $ma-$ .

#### 3.1 Groupes (pro-)unipotents

Soit  $\Psi \subset \Delta^{+}$  un ensemble clos de racines. On considère l'algèbre  $\mathcal{U}(\Psi)$  de 2.13, qui ne dépend que de  $A$  et  $\Psi$  (et non de  $\mathcal{S}$ ). C'est une  $\mathbb{Z}$ -bigèbre co-inversible, cocommutative, graduée par  $Q^{+}$  :  $\mathcal{U}(\Psi) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}\Psi} \mathcal{U}(\Psi)_{\alpha}$ ; tous ses espaces de poids sont libres de dimension finie sur  $\mathbb{Z}$ . On considère son dual restreint  $\mathbb{Z}[\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}\Psi} \mathcal{U}(\Psi)_{\alpha}^{*}$ . C'est une  $\mathbb{Z}$ -bigèbre commutative et co-inversible (sa co-inversion est le dual de  $\tau$  encore noté  $\tau$ , qui est un isomorphisme d'algèbres); c'est à dire l'algèbre d'un schéma en groupe affine  $\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}$  que l'on verra comme un foncteur en groupes : pour un anneau  $R$ ,  $\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}(R) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-alg}}(\mathbb{Z}[\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}], R)$ . On note  $\mathfrak{U}^{ma+} = \mathfrak{U}_{\Delta^{+}}^{ma}$ . Pour  $\alpha \in \Delta_{im}^{+}$  on note  $\mathfrak{U}_{(\alpha)} = \mathfrak{U}_{\{n\alpha | n \geq 1\}}^{ma}$ , pour  $\alpha \in \Phi^{+}$  on note  $\mathfrak{U}_{\alpha} = \mathfrak{U}_{(\alpha)} = \mathfrak{U}_{\{\alpha\}}^{ma}$ ;  $\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}$  et  $\mathfrak{U}_{(\alpha)}$  sont des sous-schémas en groupe de  $\mathfrak{U}^{ma+}$ .

La définition de  $\mathbb{Z}[M] = \mathbb{Z}[\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}]$  dans [M-88a, p 19-21] est plus compliquée car elle ne se limite pas à  $\Psi \subset \Delta^{+}$ . Dans notre cas le lemme 3 de *l.c.* dit bien que  $\mathbb{Q}[M]$  est le  $\mathbb{Q}$ -dual restreint de  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(\Psi)$  et alors  $\mathbb{Z}[M]$  (défini page 21 de *l.c.*) est bien le dual restreint de  $\mathcal{U}(\Psi)$ .

La base de  $\mathcal{U}(\Psi)$  indexée par des  $N \in \mathbb{N}^{(\mathcal{B}_{\Psi})}$  expliquée en 2.13.1 fournit par dualité une base  $(Z^N)_N$  de  $\mathbb{Z}[\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}]$ , indexée par les mêmes  $N$ . Comme  $\nabla[N] = \sum_{P+Q=N} [P] \otimes [Q]$ , on a  $Z^P.Z^Q = Z^{P+Q}$ . Ainsi  $\mathbb{Z}[\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}]$  est une algèbre de polynômes sur  $\mathbb{Z}$  dont les indéterminées  $Z_x$  sont indexées par les  $x \in \mathcal{B}_{\Psi}$ .

On retrouve ainsi un résultat de Olivier Mathieu [M-89, lemme 2 p41]. Inversement si on admet ce résultat,  $\mathbb{Z}[\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}]$  admet comme base des monômes, son dual restreint  $\mathcal{U}(\Psi)$  admet une base graduée qui a de bonnes propriétés pour le coproduit  $\nabla$ . Un raisonnement analogue au raisonnement d'unicité de 2.9 permet alors de construire des suites exponentielles.

**Proposition 3.2.** *Pour  $\Psi$  comme ci-dessus et  $R$  un anneau,  $\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}(R)$  s'identifie au sous-groupe multiplicatif de  $\widehat{\mathcal{U}}_R(\Psi)$  formé des produits  $\prod_{x \in \mathcal{B}_{\Psi}} [\exp] \lambda_x x$ , pour des  $\lambda_x \in R$ , le produit étant pris dans l'ordre (quelconque) choisi sur  $\mathcal{B}$ . L'écriture d'un élément de  $\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}(R)$  sous la forme d'un tel produit est unique.*

**Remarques.** 1) Si  $\Psi$  est fini et donc formé de racines réelles, on retrouve le groupe de sommes formelles de [Ry-02, 9.2], c'est à dire l'unique schéma en groupe lisse connexe unipotent d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\Psi\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ , cf. [T-87, prop. 1 p547] et aussi 3.4 ci-dessous. Dans ce cas les exponentielles sont classiques et les produits sont finis.

2) Pour  $\alpha \in \Phi^+$ , le choix de l'élément de base  $e_\alpha$  de  $\mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$  détermine un isomorphisme  $\mathfrak{r}_\alpha$  du groupe additif  $\mathfrak{Add}$  sur  $\mathfrak{U}_\alpha$  donné par  $\mathfrak{r}_\alpha(r) = \exp(r.e_\alpha)$ .

3) Dans les produits infinis proposés et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tous les facteurs sauf un nombre fini sont égaux à 1 modulo des termes de degré total  $\geq n$ . Ces produits infinis sont donc bien dans  $\widehat{\mathcal{U}}_R(\Psi)$ .

*Démonstration.* Le  $R$ -dual de  $R[\mathfrak{U}_\Psi^{ma}]$  est  $\widehat{\mathcal{U}}_R(\Psi)$ . Donc  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}(R)$  s'identifie à l'ensemble des éléments  $y \in \widehat{\mathcal{U}}_R(\Psi)$  tels que  $1 = \epsilon(y)$  ( $= y(1)$ ) et  $y(\varphi.\varphi') = y(\varphi).y(\varphi')$  pour tous  $\varphi, \varphi' \in R[\mathfrak{U}_\Psi^{ma}]$  i.e.  $y \circ \nabla^* = \text{prod} \circ (y \otimes y)$  ou encore  $\nabla y = y \otimes y$ . Ainsi  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}(R)$  est l'ensemble des éléments de  $\widehat{\mathcal{U}}_R(\Psi)$  de terme constant 1 et de type groupe. Parmi ces éléments il y a les produits infinis de l'énoncé. Mais  $R[\mathfrak{U}_\Psi^{ma}]$  est une algèbre de polynômes d'indéterminées  $Z_x$ ,  $x \in \mathcal{B}_\Psi$ . Par définition  $Z_x(\prod_y [\exp]_{\lambda_y} y) = \lambda_x$ . Ainsi ces produits infinis fournissent une et une seule fois toutes les applications de  $\mathcal{B}_\Psi$  dans  $R$ , donc tous les homomorphismes de  $R[\mathfrak{U}_\Psi^{ma}]$  dans  $R$ .  $\square$

**Lemme 3.3.** Soient  $\Psi' \subset \Psi \subset \Delta^+$  des sous-ensembles clos de racines.

a)  $\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}$  est un sous-groupe fermé de  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  et  $\mathbb{Z}[\mathfrak{U}_\Psi^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}]$  est une algèbre de polynômes d'indéterminées indexées par  $\mathcal{B}_\Psi \setminus \mathcal{B}_{\Psi'}$ .

b) Si  $\Psi \setminus \Psi'$  est également clos, alors on a une décomposition unique  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma} = \mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma} . \mathfrak{U}_{\Psi \setminus \Psi'}^{ma}$ .

c) Si  $\Psi'$  est un idéal de  $\Psi$ , alors  $\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}$  est un sous-groupe distingué de  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  et on a un produit semi-direct si, de plus,  $\Psi \setminus \Psi'$  est clos.

d) Si  $\Psi \setminus \Psi'$  est réduit à une racine  $\alpha$ , alors le quotient  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}$  est isomorphe au groupe additif  $\mathfrak{Add}$  pour  $\alpha$  réelle et au groupe unipotent commutatif  $\mathfrak{Add}^{\text{mult}(\alpha)}$  pour  $\alpha$  imaginaire.

e) Si  $\alpha, \beta \in \Psi$ ,  $\alpha + \beta \in \Psi$  implique  $\alpha + \beta \in \Psi'$ , alors  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}$  est commutatif. Le groupe  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}(R)$  est isomorphe au groupe additif  $\prod_{\alpha \in \Psi \setminus \Psi'} \mathfrak{g}_{R\alpha}$ .

f) Si  $\Psi'' \subset \Psi'$  est un autre sous-ensemble clos et si  $\alpha \in \Psi'$ ,  $\beta \in \Psi$ ,  $\alpha + \beta \in \Delta$  implique  $\alpha + \beta \in \Psi''$ , alors  $\mathfrak{U}_{\Psi''}^{ma}$  contient le groupe de commutateurs  $(\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}, \mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma})$

*Démonstration.* a)  $\mathcal{U}(\Psi')$  est une sous-bigèbre co-inversible de  $\mathcal{U}(\Psi)$ , donc  $\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$ . Ce sous-groupe est fermé, défini par l'annulation des indéterminées  $Z_x$  pour  $x \in \mathcal{B}_\Psi \setminus \mathcal{B}_{\Psi'}$ . Pour la dernière assertion il suffit dans 3.2 d'ordonner  $\mathcal{B}$  de façon que  $\mathcal{B}_{\Psi'}$  soit en dernier (à droite).

L'assertion b) résulte aussitôt de la proposition 3.2

c) Plaçons nous d'abord sur  $\mathbb{C}$  (ou un anneau contenant  $\mathbb{Q}$ ). On peut alors remplacer dans 3.2 les exponentielles tordues par les exponentielles habituelles. Des calculs classiques montrent alors que  $\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}(\mathbb{C})$  est distingué dans  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}(\mathbb{C})$ . En fait il est clair que  $\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}(\mathbb{C})$  ou  $\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}(\mathbb{C})$  est le groupe introduit dans [Kr-02, 6.1.1] presque sous le même nom et on peut donc faire référence à [Kr-02, 6.1.2]. Le normalisateur de  $\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}$  dans  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  est fermé dans  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  [DG-70, II § 1 3.6b]. Comme  $\mathbb{Z}[\mathfrak{U}_\Psi^{ma}]$  est une algèbre de polynômes et que l'on vient de voir que ce normalisateur est égal à  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  sur  $\mathbb{C}$ , il en est de même sur  $\mathbb{Z}$ .

d) Ordonnons  $\mathcal{B}_\Psi$  de manière que  $\mathcal{B}_\alpha$  soit en premier. Alors, d'après 2.6 et 3.2, un élément de  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}(R)$  s'écrit de manière unique sous la forme  $(\prod_{x \in \mathcal{B}_\alpha} [\exp]_{\lambda_x} x)z$  avec des  $\lambda_x \in R$  et  $z \in \mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}(R)$ . Soit  $\Theta = \{n\alpha \in \Delta \mid n \geq 2\} \subset \Psi'$  (vide si  $\alpha$  est réelle); il reste à montrer que

$(\prod_x [exp]\lambda_x x) \cdot (\prod_x [exp]\lambda'_x x) = \prod_x [exp](\lambda_x + \lambda'_x)x$  (modulo  $\mathfrak{U}_\Theta^{ma}(R)$ ). Mais on a vu dans la remarque 2.9.4 que, pour  $x, y \in \mathcal{B}_\alpha$ ,  $x^{[n]}, y^{[m]} \in \mathcal{U}^\alpha$  (ces éléments commutent donc modulo  $\mathcal{U}(\Theta)$ ), et que  $x^{[n]} \cdot x^{[m]} = \binom{n+m}{n} x^{[n+m]}$  modulo  $\mathcal{U}(\Theta)$ . Le résultat est alors clair.

e) Il est clair que les éléments de  $\widehat{\mathcal{U}}_R^p(\Psi)$  commutent modulo l'idéal  $\widehat{\mathcal{U}}_R^p(\Psi')$ . Vus 3.2 et les bonnes propriétés de la base des  $[N]$  (2.9.4),  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}(R)/\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}(R)$  est commutatif isomorphe au produit direct des groupes  $\mathfrak{U}_{(\alpha)}^{ma}(R)/\mathfrak{U}_{(\alpha)\setminus\{\alpha\}}^{ma}(R)$  pour  $\alpha \in \Psi \setminus \Psi'$ .

f) Comme en c) on a le résultat sur  $\mathbb{C}$ . Le centralisateur de  $\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi''}^{ma}$  dans  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi''}^{ma}$  est donc égal à  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi''}^{ma}$  sur  $\mathbb{C}$ . Mais ce centralisateur est fermé dans  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi''}^{ma}$  [DG-70, II § 1 3.6c]. Comme  $\mathbb{Z}[\mathfrak{U}_\Psi^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi''}^{ma}]$  est un anneau de polynômes, ce centralisateur est égal à  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi''}^{ma}$ .  $\square$

### 3.4 Filtrations de $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$

Soient  $\Psi$  un sous-ensemble clos de  $\Delta^+$  et  $n$  le plus petit des degrés totaux ( $deg(\alpha) = \sum n_i$ ) des  $\alpha = \sum n_i \alpha_i \in \Psi$ . Choisissons  $\alpha \in \Psi$  de degré total  $n$ , alors  $\Psi' = \Psi \setminus \{\alpha\}$  est un idéal de  $\Psi$ . Ainsi  $\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}$  est un sous-groupe distingué de  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  et le quotient  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi'}^{ma}$  est isomorphe au groupe additif  $\mathfrak{Add}$  ou à  $\mathfrak{Add}^{mult(\alpha)}$ . Si  $\alpha$  est réelle on a un produit semi-direct.

Ce procédé fournit une numérotation de  $\Psi$  par  $\mathbb{N}$  (ou un intervalle  $[0, N]$  de  $\mathbb{N}$ ) :  $\Psi = \{\beta_i\}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\Psi_n = \{\beta_i \mid i \geq n\}$ . D'après le lemme 3.3 le groupe  $\mathfrak{U}_{\Psi_n}^{ma}$  est distingué dans  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  et  $\mathfrak{U}_{\Psi_n}^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi_{n+1}}^{ma}$  est isomorphe à  $\mathfrak{Add}^{mult(\beta_n)}$ . La proposition 3.2 montre que  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  est limite projective des  $\mathfrak{U}_{\Psi_n}^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi_n}^{ma}$ . Ainsi  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  est un groupe pro-unipotent (ou même unipotent si  $\Psi$  est fini).

Pour  $d \in \mathbb{N}$ , notons  $\Psi(d)$  l'ensemble des racines de  $\Psi$  de degré total  $\geq d$ . Alors les  $\mathfrak{U}_{\Psi(d)}^{ma}$  sont distingués dans  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  et  $\mathfrak{U}_{\Psi(d)}^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi(d+1)}^{ma}(R)$  est isomorphe au groupe additif  $\bigoplus_{\alpha \in \Psi(d) \setminus \Psi(d+1)} \mathfrak{g}_{R\alpha}$ . Le groupe  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}(R)$  est limite projective des  $\mathfrak{U}_{\Psi(d)}^{ma}/\mathfrak{U}_{\Psi(d)}^{ma}(R)$ .

### 3.5 Groupes de Borel et paraboliques minimaux

Le groupe de Borel  $\mathfrak{B}_S^{ma+}$  est par définition le produit semi-direct  $\mathfrak{T}_S \ltimes \mathfrak{U}^{ma+}$  pour l'action suivante de  $\mathfrak{T}_S$  sur  $\mathfrak{U}^{ma+}$ . Pour un anneau  $R$ ,  $\mathfrak{T}_S(R)$  agit sur  $\mathcal{U}_{SR}$  par des automorphismes de bigèbre : sur  $\mathcal{U}_{S\alpha R}$ , l'action  $Ad(t)$  de  $t \in \mathfrak{T}_S(R)$  est la multiplication par  $\alpha(t) \in R^*$ . On en déduit aussitôt l'action sur  $\mathfrak{U}^{ma+}(R) : Int(t) \cdot [exp]\lambda x = [exp]\alpha(t)\lambda x$  si  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha R}$ . Il est clair que les groupes  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$  de 3.3 sont stables par l'action de  $\mathfrak{T}_S$ .

Si  $\alpha = \alpha_i$  est une racine simple on a  $\mathfrak{U}^{ma+} = \mathfrak{U}_\alpha \ltimes \mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha\}}^{ma}$ . On définit comme ci-dessus  $\mathfrak{U}_{-\alpha}$  avec  $\mathbb{Z}[\mathfrak{U}_{-\alpha}]$  dans le dual de  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathcal{U}_S$  et isomorphe à  $\mathfrak{Add}$  par  $\mathfrak{r}_{-\alpha} : \mathfrak{Add} \rightarrow \mathfrak{U}_{-\alpha}$ ,  $\mathfrak{r}_{-\alpha}(r) = exp(rf_\alpha)$ . O. Mathieu définit un schéma en groupe affine *parabolique minimal*  $\mathfrak{P}_i^{pma} = \mathfrak{P}_\alpha^{pma}$  (contenant  $\mathfrak{B}_S^{ma+}$  et associé à  $\Delta^+ \cup \{0, -\alpha\}$ ) et un sous-groupe fermé  $\mathfrak{A}_\alpha^Y = \mathfrak{A}_i^Y$  (associé à  $\{0, \pm\alpha\}$ ); il montre que  $\mathfrak{P}_\alpha^{pma} = \mathfrak{A}_\alpha^Y \ltimes \mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha\}}^{ma}$  [M-88a, lemme 8 p26].

Le schéma en groupe  $\mathfrak{A}_\alpha^Y$  contient les sous-groupes fermés  $\mathfrak{T}_S$ ,  $\mathfrak{U}_\alpha$  et  $\mathfrak{U}_{-\alpha}$ , plus précisément  $\mathbb{Z}[\mathfrak{A}_\alpha^Y]$  est contenu dans le dual de  $\mathcal{U}_S \cap \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g}_{-\alpha})$  et sa restriction à  $\mathcal{U}_S \cap \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\pm\alpha})$  (resp.  $\mathcal{U}_S \cap \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$ ) est  $\mathbb{Z}[\mathfrak{U}_{\pm\alpha}]$  (resp.  $\mathbb{Z}[\mathfrak{T}_S]$ ). Il est clair (cf. e.g. [l.c. lemme 7.2]) que  $\mathfrak{A}_\alpha^Y$  est le groupe réductif de SGR ((2),  $Y, \alpha, \alpha^\vee$ ) il agit sur  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  et est isogène au produit de  $SL_2$  par un tore déployé.

L'élément  $\tilde{s}_i = \mathfrak{r}_\alpha(1) \cdot \mathfrak{r}_{-\alpha}(1) \cdot \mathfrak{r}_\alpha(1)$  de  $\mathfrak{A}_\alpha^Y(\mathbb{Z})$  normalise  $\mathfrak{T}_S$ , vérifie  $\tilde{s}_i^2 = \alpha^\vee(-1) \in \mathfrak{T}_S(\mathbb{Z})$  et échange  $\mathfrak{r}_\alpha, \mathfrak{r}_{-\alpha}$ ; il agit sur  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  comme  $s_i^*$  (cf. 1.4). Enfin la double classe (grosse cellule)



$\mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_S^{ma+} \cdot \tilde{s}_i \cdot \mathfrak{B}_S^{ma+}$  de  $\mathfrak{P}_i^{pma}$  est un ouvert dense et se décompose de manière unique sous la forme  $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{U}_{\alpha_i} \cdot \tilde{s}_i \cdot \mathfrak{B}_S^{ma+} = \tilde{s}_i \cdot \mathfrak{U}_{-\alpha_i} \cdot \mathfrak{B}_S^{ma+}$ .

**Remarque.** Mathieu se place dans le cas d'un SGR  $\mathcal{S}$  libre, colibre, sans cotorsion et de dimension  $2|I| - \text{rang}(A)$ . Bien sûr ces hypothèses sont inutiles pour la plupart de ses résultats (c'est particulièrement clair pour la dernière). On se placera cependant dans ce cadre (depuis l'alinéa précédent) jusqu'à la fin de ce paragraphe où on examinera la généralisation grâce aux résultats de 1.3.

On abandonne en général dans la suite (et jusqu'en 3.17) l'indice  $\mathcal{S}$  et on abrège parfois  $\mathfrak{B}^{ma+}$  en  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{P}_i^{pma}$  en  $\mathfrak{P}_i$ ,  $\mathfrak{A}_i^Y$  en  $\mathfrak{A}_i$ , etc.

### 3.6 La construction de Mathieu

cf. [M-88a, XVIII § 2], [M-88b], [M-89, I et II]

On considère des schémas sur  $\mathbb{Z}$ , même si on n'aura essentiellement besoin de raisonner que sur des (sous-anneaux de) corps, éventuellement de caractéristique positive.

Soient  $w \in W^v$  et  $\tilde{w} = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$  une décomposition réduite de  $w$ . On considère le schéma  $\mathfrak{E}(\tilde{w}) = \mathfrak{P}_{i_1} \times^{\mathfrak{B}} \mathfrak{P}_{i_2} \times^{\mathfrak{B}} \cdots \times^{\mathfrak{B}} \mathfrak{P}_{i_n}$  et le schéma de Demazure  $\mathfrak{D}(\tilde{w}) = \mathfrak{E}(\tilde{w})/\mathfrak{B}$ .

Le schéma  $\mathfrak{B}(w)$  est l'affinisé de  $\mathfrak{E}(\tilde{w})$ , c'est à dire  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\mathfrak{E}(\tilde{w})])$ , il ne dépend que de  $w$  [M-89, p 40, l -15 à -1]. En particulier  $\mathfrak{B}(s_i) = \mathfrak{P}_i$ .

Si  $w' \leq w$  (pour l'ordre de Bruhat-Chevalley), il existe une décomposition réduite  $\tilde{w}'$  de  $w'$  extraite de  $\tilde{w}$ . Si dans l'écriture de  $\mathfrak{E}(\tilde{w})$ , on remplace par  $\mathfrak{B}$  les  $\mathfrak{P}_{i_j}$  correspondant à des  $s_{i_j}$  absents de  $\tilde{w}'$ , on obtient un sous-schéma fermé de  $\mathfrak{E}(\tilde{w})$  clairement isomorphe à  $\mathfrak{E}(\tilde{w}')$ . L'immersion fermée  $\mathfrak{E}(\tilde{w}') \rightarrow \mathfrak{E}(\tilde{w})$  induit un morphisme  $\mathfrak{B}(w') \rightarrow \mathfrak{B}(w)$  entre les affinisés ; c'est aussi une immersion fermée, indépendante des choix de  $\tilde{w}$  et  $\tilde{w}'$  [M-88a, bas de page 255].

On a donc un système inductif de schémas  $\mathfrak{B}(w)$  et on note  $\mathfrak{G}^{pma}$  le ind-schéma limite inductive de ce système ; c'est le *groupe de Kac-Moody positivement maximal* associé à  $\mathcal{S}$ . Chaque morphisme  $\mathfrak{B}(w) \rightarrow \mathfrak{G}^{pma}$  est une immersion fermée. On verra essentiellement  $\mathfrak{G}^{pma}$  comme un foncteur sur la catégorie des anneaux :  $\mathfrak{G}^{pma}(R) = \varinjlim \mathfrak{B}(w)(R)$ .

En fait  $\mathfrak{G}^{pma}$  est un ind-schéma en groupe : pour des décompositions réduites  $\tilde{w} = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$  et  $\tilde{w}' = s_{j_1} \cdots s_{j_m}$ , il existe un morphisme naturel de  $\mathfrak{P}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_n} \times \mathfrak{P}_{j_1} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{j_m}$  dans  $\mathfrak{B}(\psi(w, w'))$  pour un certain  $\psi(w, w') \leq w.w'$  [M-89, p 41 et 45]. Ce morphisme se factorise donc par  $\mathfrak{B}(w) \times \mathfrak{B}(w')$ . Ceci permet de définir la multiplication dans  $\mathfrak{G}^{pma}$ . La définition de l'inversion est claire. Pour cette structure de groupe le composé  $\mathfrak{P}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_n} \rightarrow \mathfrak{E}(\tilde{w}) \rightarrow \mathfrak{B}(w) \hookrightarrow \mathfrak{G}^{pma}$  est simplement la multiplication.

### 3.7 Modules à plus haut poids et représentation adjointe

1) Pour  $\lambda \in X^+$ , on a défini en 2.14 un  $\mathcal{U}_S$ -module à plus haut poids  $L_{\mathbb{Z}}(\lambda)$  qui est intégrable, donc un  $\mathfrak{T}_S$ -module. Pour un anneau  $k$  le module  $L_k(\lambda)$  est stable par  $\widehat{\mathcal{U}}_{S_k}^p$  donc par  $\mathfrak{U}^{ma+}(k)$ . On obtient ainsi une représentation de  $\mathfrak{B}^{ma+}$  dans  $L_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ . L'intégrabilité de  $L_{\mathbb{Z}}(\lambda)$  [T-81] montre en fait que  $L_{\mathbb{Z}}(\lambda)$  est un  $\mathfrak{A}_i$ -module donc aussi un  $\mathfrak{P}_i$ -module ( $\forall i \in I$ ). Ce module est "localement fini", plus précisément pour tout sous- $\mathbb{Z}$ -module  $M$  de rang fini de  $L_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ , il existe un sous- $\mathbb{Z}$ -module facteur direct de rang fini  $M'$  de  $L_{\mathbb{Z}}(\lambda)$  contenant  $M$ , tel que  $M' \otimes k$  soit un  $\mathfrak{P}_i(k)$ -module pour tout anneau  $k$ . On en déduit aussitôt un

morphisme de  $\mathfrak{B}(w)$  dans  $\mathfrak{GL}(L_{\mathbb{Z}}(\lambda))$ ,  $\forall w \in W$ . On obtient ainsi une représentation de  $\mathfrak{G}^{pma}$  dans  $\mathfrak{GL}(L_{\mathbb{Z}}(\lambda))$ .

2) Soit  $M = L_{\mathbb{Z}}(\lambda)$  le module à plus haut poids précédent :  $M = \bigoplus_{\nu \in Q^+} M_{\lambda-\nu}$ . Pour un anneau  $k$ , on définit le complété négatif  $\widehat{M}_k^n$  de  $M \otimes k$  :  $\widehat{M}_k^n = \prod_{\nu \in Q^+} M_{\lambda-\nu} \otimes k$ . Il est clair que  $\widehat{M}_k^n$  est un  $\widehat{U}_k^n$ -module gradué ; en particulier c'est un  $\mathfrak{U}^{ma-}(k)$ -module.

3) Pour un anneau  $k$ , l'action adjointe  $ad$  de l'algèbre  $\widehat{U}_k^p$  sur elle même (2.1.5) induit une action, dite adjointe et notée  $Ad$ , du groupe  $\mathfrak{U}^{ma+}(k) \subset \widehat{U}_k^p$  sur  $\widehat{U}_k^p$ . L'action de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}(k)$  est définie par les poids, d'où la représentation adjointe  $Ad$  de  $\mathfrak{B}^{ma+}(k)$  sur  $\widehat{U}_k^p$ . Cette action stabilise évidemment  $\widehat{\mathfrak{g}}_k^p$  et  $\widehat{U}_k^+$ .

Pour  $\alpha \in \Phi$ ,  $r \in k$  et  $u \in \widehat{U}_k^p$ ,  $Ad(\mathfrak{r}_{\alpha}(r))(u) = \sum_{n \geq 0} (ad e_{\alpha}^{(n)}) . r^n u = \sum_{p, q \geq 0} e_{\alpha}^{(p)} . r^n u . e_{\alpha}^{(q)}$ .

### 3.8 Le cas classique

Supposons la matrice  $A$  de Cartan *i.e.*  $\Delta = \Phi$  fini et  $W^v$  fini. Soit  $\mathfrak{G}$  le groupe réductif déployé sur  $\mathbb{Z}$  de SGR  $\mathcal{S}$  ; d'après l'hypothèse de Mathieu il est semi-simple simplement connexe. Le groupe  $\mathfrak{B}_{\mathcal{S}}^{ma+} = \mathfrak{T}_{\mathcal{S}} \times \mathfrak{U}^{ma+}$  est le sous-groupe de Borel  $\mathfrak{B}$  de  $\mathfrak{G}$  (*cf.* 3.2.1) et  $\mathfrak{P}_{\alpha_i}^{pma} = \mathfrak{U}_{\alpha_i}^Y \times \mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}}^{ma}$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $\mathfrak{G}$ .

Pour une décomposition réduite  $\tilde{w} = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$  dans  $W^v$ , le produit définit un morphisme  $\pi : \mathfrak{C}(\tilde{w}) = \mathfrak{P}_{\alpha_{i_1}} \times^{\mathfrak{B}} \cdots \times^{\mathfrak{B}} \mathfrak{P}_{\alpha_{i_n}} \rightarrow \mathfrak{G}$ . Si on restreint  $\pi$  aux grosses cellules, on obtient un isomorphisme de  $\Omega(\tilde{w}) = \mathfrak{C}_{i_1} \times^{\mathfrak{B}} \cdots \times^{\mathfrak{B}} \mathfrak{C}_{i_n}$  sur son image  $\mathfrak{U}_{\alpha_{i_1}} . \tilde{s}_{i_1} \cdots \mathfrak{U}_{\alpha_{i_n}} . \tilde{s}_{i_n} . \mathfrak{B} = \tilde{s}_{i_1} \cdots \tilde{s}_{i_n} . \mathfrak{U}_{-s_{i_n} \cdots s_{i_2}(\alpha_{i_1})} \cdots \mathfrak{U}_{-s_{i_n}(\alpha_{i_{n-1}})} . \mathfrak{U}_{-\alpha_{i_n}} . \mathfrak{B}$ .

Si  $w = w_0$  est l'élément de plus grande longueur de  $W^v$ , cette image est un ouvert dense : la grosse cellule  $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$  de  $\mathfrak{G}$ . On a donc la suite de morphismes :  $\Omega(\tilde{w}_0) \xrightarrow{i} \mathfrak{C}(\tilde{w}_0) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{G}$  avec  $i$  et  $\pi \circ i$  des immersions ouvertes. De plus l'image  $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$  de  $\pi \circ i$  rencontre toutes les fibres  $\mathfrak{G}_{\mathbb{F}_p}$  de  $\mathfrak{G}$  pour  $p$  premier.

**Proposition 3.9.** *Dans ces conditions  $\pi$  identifie  $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$  à  $\mathbb{Z}[\mathfrak{C}(\tilde{w}_0)]$ . Ainsi  $\mathfrak{G}$  s'identifie à  $\mathfrak{B}(w_0)$  lui même égal à  $\mathfrak{G}^{pma}$ .*

**N.B.** Si  $w \neq w_0$ , on trouve de la même manière que  $\mathfrak{B}(w)$  est la sous-variété de Schubert de  $\mathfrak{G}$  associée à  $w$  (au moins sur  $\mathbb{C}$ ).

*Démonstration.* Regardons d'abord sur  $\mathbb{C}$ . Comme  $\mathfrak{G}$  est un groupe affine,  $\pi$  se factorise par  $\mathfrak{B}(\tilde{w}_0)$ . On a donc la suite de morphismes :

$$\Omega(\tilde{w}_0)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{i} \mathfrak{C}(\tilde{w}_0)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{Aff} \mathfrak{B}(\tilde{w}_0)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}^{pma} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$$

$\pi$

Ce composé est une immersion ouverte d'image dense. Pour les algèbres de fonctions, comme  $i$  est d'image dense  $i^*$  est injectif et  $Aff^*$  est l'identité par définition. Donc  $(Aff \circ i)^*$  est injectif et  $Aff \circ i$  est dominant. Ainsi l'image de  $Aff \circ i$  contient un ouvert dense  $\Omega'$  de  $\mathfrak{B}(\tilde{w}_0)(\mathbb{C})$ . Soit  $\gamma \in \text{Ker } \tilde{\pi}$ ,  $\gamma \Omega' \cap \Omega' \neq \emptyset$ , il existe donc  $g', g'' \in \Omega'$  tels que  $\gamma g' = g''$ , ainsi  $\tilde{\pi}(g') = \tilde{\pi}(g'')$ . Mais  $\tilde{\pi} \circ Aff \circ i$  est injectif, on en déduit que  $g' = g''$ ,  $\gamma = 1$  *i.e.*  $\tilde{\pi}$  est injectif. Ainsi  $\mathfrak{G}^{pma}$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{G}$  contenant un ouvert dense : on a  $\mathfrak{G}^{pma} = \mathfrak{G}$ .

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}[\Omega(\tilde{w}_0)] & \xleftarrow{i^*} & \mathbb{Z}[\mathfrak{C}(\tilde{w}_0)] & \xleftarrow{\pi^*} & \mathbb{Z}[\mathfrak{G}] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[\Omega(\tilde{w}_0)] & \xleftarrow{i^*} & \mathbb{C}[\mathfrak{C}(\tilde{w}_0)] & \xleftarrow{=} & \mathbb{C}[\mathfrak{G}] \end{array}$$

Les flèches horizontales sont injectives car  $i^*$  et  $(\pi \circ i)^*$  le sont. Le schéma  $\Omega(\tilde{w}_0)$  est produit de groupes additifs et multiplicatifs, la flèche verticale de gauche est donc injective. Ainsi toutes les flèches sont injectives.

Pour montrer que  $\mathbb{Z}[\mathfrak{E}(\tilde{w}_0)] = \pi^*\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$  il suffit donc de montrer que  $\mathbb{Z}[\Omega(\tilde{w}_0)] \cap \mathbb{C}[\mathfrak{G}] = \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$ . Ceci est clairement vrai si on remplace  $\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Q}$ . Donc si ce n'est pas vrai pour  $\mathbb{Z}$ , il existe  $n \geq 2$  et  $\varphi \in \mathbb{Z}[\Omega(\tilde{w}_0)] \cap \mathbb{Q}[\mathfrak{G}]$  tels que  $\varphi \notin \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$  mais  $n\varphi \in \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$ . Soit  $p$  un diviseur premier de  $n$ ; quitte à modifier  $\varphi$  on peut supposer  $n = p$ . Mais alors  $\overline{p\varphi}$  est une fonction non identiquement nulle sur  $\mathfrak{G}_{\mathbb{F}_p}$  alors qu'elle est nulle sur  $\Omega(\tilde{w}_0)_{\mathbb{F}_p}$ . C'est absurde car  $\Omega(\tilde{w}_0)_{\mathbb{F}_p}$  est un ouvert dense de  $\mathfrak{G}_{\mathbb{F}_p}$ .  $\square$

### 3.10 Application au cas non classique

Soit  $J \subset I$ . On note  $\Delta(J) = \Delta \cap (\bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z}\alpha_i)$ ,  $\Delta^\pm(J) = \Delta(J) \cap \Delta^\pm$ ,  $\Delta_J^\pm = \Delta^\pm \setminus \Delta^\pm(J)$ ,  $\mathfrak{U}^{ma+}(J) = \mathfrak{U}_{\Delta^+(J)}^{ma}$  et  $\mathfrak{U}_J^{ma+} = \mathfrak{U}_{\Delta_J^+}^{ma}$ . D'après 3.3 on a  $\mathfrak{U}^+ = \mathfrak{U}^{ma+}(J) \times \mathfrak{U}_J^{ma+}$ .

Supposons  $J$  de type fini et notons  $\mathfrak{G}(J)$  le groupe réductif déployé sur  $\mathbb{Z}$  de SGR  $\mathcal{S}(J) = (A|_J, Y, (\alpha_i)_{i \in J}, (\alpha_i^\vee)_{i \in J})$ . Il est clair que son groupe unipotent maximal positif est  $\mathfrak{U}^{ma+}(J) =: \mathfrak{U}^+(J)$  et son sous-groupe de Borel positif  $\mathfrak{B}^+(J) = \mathfrak{T}_Y \times \mathfrak{U}^+(J)$ . Enfin, pour  $j \in J$ , son parabolique minimal associé à  $j$  est  $\mathfrak{P}_j(J) = \mathfrak{A}_j \times \mathfrak{U}_{\Delta^+(J) \setminus \{j\}}^{ma}$ , il vérifie  $\mathfrak{P}_j = \mathfrak{P}_j(J) \times \mathfrak{U}_J^{ma+}$ .

Le groupe de Weyl (fini)  $W^v(J) = \langle s_i \mid i \in J \rangle \subset W^v$  admet un élément de plus grande longueur  $w_0^J$ .

**Corollaire.**  $\mathfrak{B}(w_0^J)$  est isomorphe au sous-groupe parabolique  $\mathfrak{P}(J) = \mathfrak{G}(J) \times \mathfrak{U}_J^{ma+}$  de  $\mathfrak{G}^{pma}$ .

**Remarque.** Si  $J$  n'est pas forcément de type fini, la démonstration ci-dessous prouve que le ind-schéma en groupe limite inductive des  $\mathfrak{B}(w)$  pour  $w \in W^v(J)$  est le sous-groupe parabolique  $\mathfrak{P}(J) = \mathfrak{G}^{pma}(J) \times \mathfrak{U}_J^{ma+}$  produit semi-direct par  $\mathfrak{U}_J^{ma+}$  du groupe de Kac-Moody  $\mathfrak{G}^{pma}(J) = \mathfrak{G}_{\mathcal{S}(J)}^{pma}$ .

*Démonstration.* On a  $\mathfrak{E}(\tilde{w}_0) = \mathfrak{P}_{j_1} \times^{\mathfrak{B}^{ma+}} \mathfrak{P}_{j_2} \times^{\mathfrak{B}^{ma+}} \dots \times^{\mathfrak{B}^{ma+}} \mathfrak{P}_{j_n}$ ,  $\mathfrak{P}_{j_k} = \mathfrak{P}_{j_k}(J) \times \mathfrak{U}_J^{ma+}$  et  $\mathfrak{B}^{ma+} = \mathfrak{B}^+(J) \times \mathfrak{U}_J^{ma+}$ . On en déduit facilement que  $\mathfrak{E}(\tilde{w}_0) = \mathfrak{P}_{j_1}(J) \times^{\mathfrak{B}^+(J)} \mathfrak{P}_{j_2}(J) \times^{\mathfrak{B}^+(J)} \dots \times^{\mathfrak{B}^+(J)} \mathfrak{P}_{j_n}(J) \times \mathfrak{U}_J^{ma+}$ , et, comme l'affinisé d'un produit est le produit des affinisés,  $\mathfrak{B}(w_0^J) = \mathfrak{G}(J) \times \mathfrak{U}_J^{ma+}$ .  $\square$

### 3.11 Sous-groupes radiciels négatifs

On a défini  $\mathfrak{U}_\alpha$  et  $\mathfrak{r}_\alpha : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{U}_\alpha$  pour  $\alpha \in \Phi^+$  (en 3.2.2) ou pour  $-\alpha = \alpha_i$  simple (en 3.5).

Pour  $i \in I$ ,  $\tilde{s}_i = \mathfrak{r}_{\alpha_i}(1) \cdot \mathfrak{r}_{-\alpha_i}(1) \cdot \mathfrak{r}_{\alpha_i}(1) \in \mathfrak{A}_{\alpha_i}^Y(\mathbb{Z}) \subset \mathfrak{P}_{\alpha_i}^{pma}(\mathbb{Z}) \subset \mathfrak{G}^{pma}(\mathbb{Z})$  est un élément du normalisateur dans  $\mathfrak{G}^{pma}$  de  $\mathfrak{T}_Y$ ; il induit sur  $\mathfrak{T}_Y$  la réflexion  $s_i$ . De plus  $\tilde{s}_i$  agit sur  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  comme  $s_i^*$  (cf. 1.4 et 3.7.3).

Si  $\alpha \in \Phi$  et  $e_\alpha$  est une base de  $\mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$ , il existe  $w \in W^v$  tel que  $w^{-1}\alpha = \alpha_j$  est une racine simple. On considère une décomposition  $w = s_{i_1} \dots s_{i_n}$ ,  $\overline{w} = \tilde{s}_{i_1} \dots \tilde{s}_{i_n}$  et on a  $e_\alpha = \overline{w}(e_{\alpha_j})$  avec  $\epsilon = \pm 1$ . On pose alors  $\mathfrak{U}_\alpha = \overline{w} \cdot \mathfrak{U}_{\alpha_j} \cdot \overline{w}^{-1}$  et  $\mathfrak{r}_\alpha(r) = \overline{w} \cdot \mathfrak{r}_{\alpha_j}(\epsilon r) \cdot \overline{w}^{-1}$ , pour  $r$  dans un anneau  $R$ .

**Lemme.** Ces définitions de  $\mathfrak{U}_\alpha$  et  $\mathfrak{r}_\alpha$  ne dépendent que de  $\alpha$  et  $e_\alpha$  (et non des autres choix effectués). Pour  $\alpha \in \Phi^+$  (ou  $-\alpha$  simple) elles coïncident avec celles de 3.1, 3.2 ou 3.5.

*Démonstration.* Supposons que  $e_\alpha = \tilde{s}_{i_1} \cdots \tilde{s}_{i_n}(\epsilon e_{\alpha_j}) = \tilde{s}_{i'_1} \cdots \tilde{s}_{i'_m}(\epsilon' e_{\alpha_{j'}})$ , donc  $e_{\alpha_{j'}} = \overline{w}(\epsilon \epsilon' e_{\alpha_j})$  pour  $\overline{w} = \tilde{s}_{i'_m}^{-1} \cdots \tilde{s}_{i'_1}^{-1} \tilde{s}_{i_1} \cdots \tilde{s}_{i_n}$ . On doit montrer que  $\mathfrak{r}_{\alpha_j}(r)$  est conjugué de  $\mathfrak{r}_{\alpha_{j'}}(\epsilon \epsilon' r)$  par  $\overline{w}$ . Mais on sait que les  $s_i^* = \tilde{s}_i$  vérifient les relations de tresse ([T-87, (d) p551] ou calcul classique dans le groupe réductif  $\mathfrak{G}(\{i, j\})$  quand  $s_i s_j$  est d'ordre fini), que  $\tilde{s}_i^2 = \alpha_i^\vee(-1) \in \mathfrak{T}_Y(\mathbb{Z})$  et on connaît les relations de commutation entre les  $\tilde{s}_i$  et les éléments du tore. Ainsi, pour toute expression réduite  $w = s_{j_1} \cdots s_{j_p}$  de  $w = s_{i'_m} \cdots s_{i'_1} s_{i_1} \cdots s_{i_n}$ , on peut réduire l'expression ci-dessus de  $\overline{w}$  sous la forme  $\overline{w} = \tilde{s}_{j_1} \cdots \tilde{s}_{j_p} t$  avec  $t \in \mathfrak{T}_Y(\mathbb{Z})$ .

Il suffit donc de montrer que si  $w(\alpha_j) = \alpha_{j'}$ , il existe une décomposition réduite  $w = s_{j_1} \cdots s_{j_p}$  de  $w$  pour laquelle un  $\overline{w}$  comme ci-dessus vérifie la relation  $e_{\alpha_{j'}} = \overline{w} \epsilon'' e_{\alpha_j}$  et  $\mathfrak{r}_{\alpha_{j'}}(r) = \overline{w} \mathfrak{r}_{\alpha_j}(\epsilon'' r) \overline{w}^{-1}$ . D'après [T-87, 3.3.1] ou, pour un énoncé plus précis [He-91, 2.17 p85], on est ramené à l'un des deux cas suivants :  $j_1, \dots, j_p \in \{j, j'\} = J$  de type fini ou  $j = j'$  et  $j_1, \dots, j_p \in \{j, j''\} = J$  de type fini. Tout se passe alors dans le groupe réductif  $\mathfrak{G}(J)$  et le résultat est connu.

Si  $-\alpha$  est simple, la coïncidence des deux définitions de  $\mathfrak{r}_\alpha$  et  $\mathfrak{U}_\alpha$  est claire. Si  $\alpha \in \Phi^+$ , il existe une suite  $i_1, \dots, i_n \in I$  telle que  $s_{i_n} \cdots s_{i_1} \alpha$  est une racine simple et  $\forall j s_{i_j} \cdots s_{i_1} \alpha \in \Phi^+$ . Pour vérifier la coïncidence des deux définitions de  $\mathfrak{r}_\alpha$  et  $\mathfrak{U}_\alpha$ , on doit vérifier que, si  $i \in I$ ,  $\alpha \in \Phi^+$ ,  $\beta = s_i \alpha \in \Phi^+$  et  $e_\beta = \tilde{s}_i \epsilon e_\alpha$ , alors  $\exp(re_\beta) = \tilde{s}_i \exp(\epsilon r e_\alpha) \tilde{s}_i^{-1}$ ; c'est la définition précise du produit semi-direct  $\mathfrak{P}_i^{pma} = \mathfrak{A}_i^Y \ltimes \mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}}^{ma}$  de 3.5.  $\square$

### 3.12 Comparaison avec le groupe à la Tits

On a défini en 1.6 le groupe de Kac-Moody minimal  $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\mathcal{S}$ . On choisit toujours  $\mathcal{S}$  comme à la remarque 3.5 et on prend les  $e_\alpha, f_\alpha$  de 1.4 dans la base  $\mathcal{B}$  de 2.6.

Pour un anneau  $k$ , les générateurs de  $\mathfrak{G}(k)$  sont les  $\mathfrak{r}_\alpha(r)$ ,  $\alpha \in \Phi$ ,  $r \in k$  et  $t \in \mathfrak{T}_Y(k)$ , on les envoie sur les éléments de même nom dans  $\mathfrak{G}^{pma}(k)$ .

**Proposition.** *On obtient ainsi un homomorphisme de foncteurs en groupes  $i : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}^{pma}$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de vérifier les relations (KMT3) à (KMT7) dans  $\mathfrak{G}^{pma}(k)$ . La relation (KMT3) espérée entre  $\mathfrak{r}_\alpha(r)$  et  $\mathfrak{r}_\beta(r')$  provient de la relation constatée entre  $\exp(ad r e_\alpha)$  et  $\exp(ad r' e_\beta)$  dans  $\text{Aut}(\mathfrak{g}_A)$ . Comme  $\{\alpha, \beta\}$  est une paire prénilpotente, il existe  $\Psi$  finie close dans  $\Phi$  contenant  $\alpha$  et  $\beta$ . D'après 3.11 on peut supposer  $\Psi \subset \Phi^+$ . D'après la remarque 3.2.1 cette relation est en fait constatée dans  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}$ , d'où le résultat.

Les relations (KMT4) à (KMT6) n'impliquent que des éléments du groupe réductif de rang 1  $\mathfrak{A}_\alpha^Y$ , elles sont trivialement satisfaites.

Enfin (KMT7) est clair d'après 3.11.  $\square$

**Remarques.** 1) L'homomorphisme  $i$  envoie aussi  $\tilde{s}_\alpha$  sur l'élément de même nom de  $\mathfrak{G}^{pma}(\mathbb{Z})$  (pour  $\alpha$  racine simple). L'image  $i(\mathfrak{N})$  de  $\mathfrak{N}$  est donc engendrée par  $\mathfrak{T}_\mathcal{S}$  et les  $\tilde{s}_\alpha$  pour  $\alpha$  racine simple. Par construction  $i$  est un isomorphisme sur  $\mathfrak{T}_\mathcal{S}$  et  $\tilde{s}_{i_1} \cdots \tilde{s}_{i_n} \neq 1$  si la décomposition  $s_{i_1} \cdots s_{i_n}$  est réduite (second alinéa de 3.8). Donc  $i$  est un isomorphisme de  $\mathfrak{N}$  sur  $i(\mathfrak{N})$  (que l'on note encore  $\mathfrak{N}$ ).

2) En conjuguant par un élément  $n$  de  $\mathfrak{N}(\mathbb{Z})$  tel que  $v\nu(n) = w \in W^v$ , on trouve dans  $\mathfrak{G}^{pma}$  un sous-groupe analogue à  $\mathfrak{U}^{ma+}$  mais associé à  $w\Delta^+$ . Ainsi  $\mathfrak{G}^{pma}$  ne dépend pas du choix de  $\Delta^+$  dans sa classe de  $W^v$ -conjugaison. Par contre l'algèbre  $\widehat{U}^p$  dépend a priori de ce choix et si on change  $\Delta^+$  en  $\Delta^-$ , le groupe obtenu  $\mathfrak{G}^{nma}$  est différent.

3) L'homomorphisme  $i$  induit un isomorphisme du groupe  $\mathfrak{U}_\alpha$  sur le sous-groupe de même nom de  $\mathfrak{G}^{pma}$  : c'est clair par définition pour  $\alpha \in \Phi^+$ , on s'y ramène pour  $\alpha \in \Phi^-$  grâce à 3.11.

**Proposition 3.13.** *Si  $k$  est un corps, alors  $i_k$  est injectif.*

**N.B.** Si  $k$  est un corps, on notera souvent avec la lettre romaine correspondante l'ensemble des points sur  $k$  d'un schéma. La proposition nous permet donc d'identifier  $G = \mathfrak{G}(k)$  à un sous-groupe de  $G^{pma} = \mathfrak{G}^{pma}(k)$ .

*Démonstration.* D'après [Ry-02, prop. 8.4.1]  $G$  est muni d'une donnée radicielle jumelée entière et donc d'un système de Tits  $(G, B^+, N, S)$  avec  $B^+ \cap N = T$ . Alors  $B^+ \cdot \text{Ker}(i)$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ , mais par construction il ne peut contenir aucun  $U_{-\alpha}$  pour  $\alpha$  simple, donc  $B^+ \cdot \text{Ker}(i) = B^+$  et  $\text{Ker}(i)$  est contenu dans  $B^+$  et tous ses conjugués. D'après [Ry-02, 1.5.4 et 1.2.3.v], l'intersection de tous ces conjugués est réduite à  $T$ . Mais par construction  $i|_T$  est injectif, d'où le résultat.  $\square$

### 3.14 Comparaison des représentations

1) On a vu en 3.7.3 que, pour un anneau  $k$ ,  $\widehat{\mathfrak{U}}_k^p$  est un  $\mathfrak{B}^{ma+}(k)$ -module. D'après 2.1.4 la restriction à  $\mathfrak{B}^+(k)$  de cette représentation stabilise  $\mathcal{U}_k$  (et  $\mathfrak{g}_k$ ) et y induit la même représentation que la représentation adjointe de  $\mathfrak{G}(k)$ .

2) Pour  $\lambda \in X^+$ , on a construit en 3.7.1 le module à plus haut poids  $M = L(\lambda)$  pour  $\mathfrak{G}^{pma}$ . Il est clair que la restriction à  $\mathfrak{G}$  (via  $i$ ) de cette représentation est la représentation classique à plus haut poids de  $\mathfrak{G}$ .

3) En 3.7.2 on a construit une représentation de  $\mathfrak{U}^{ma-}$  sur le complété négatif  $\widehat{M}_k^n$  de  $M$ . Il est clair que la restriction à  $\mathfrak{U}^-$  (via  $i$ ) de cette représentation est le complété de la représentation de  $\mathfrak{G}$  ci-dessus (restreinte à  $\mathfrak{U}^-$ ).

**Proposition 3.15.** *Soit  $\tilde{w} = s_{i_1} \cdots s_{i_m}$  une décomposition réduite de  $w \in W^v$  et  $\mu : \mathfrak{F}(\tilde{w}) := \mathfrak{P}_{\alpha_{i_1}} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{\alpha_{i_m}} \rightarrow \mathfrak{B}(w)$  le morphisme de multiplication. Si  $k$  est un corps, alors  $\mu_k$  est surjectif.*

*Démonstration.* Il faut revenir un peu sur les définitions de 3.6. Le groupe  $(\mathfrak{B}^{ma+})^{m-1}$  agit sur  $\mathfrak{F}(\tilde{w})$  par  $(b_1, \cdots, b_{m-1}) \cdot (p_1, \cdots, p_m) = (p_1 b_1^{-1}, b_1 p_2 b_2^{-1}, \cdots, b_{m-1} p_m)$  et  $\mathfrak{E}(\tilde{w})$  est le quotient schématique; on note  $\pi$  le morphisme de passage au quotient. Le schéma  $\mathfrak{B}(w)$  est l'affinisé de  $\mathfrak{E}(\tilde{w})$ , on note  $\nu : \mathfrak{E}(\tilde{w}) \rightarrow \mathfrak{B}(w)$  le morphisme naturel. On a donc  $\mu = \nu \circ \pi$ . On se place maintenant sur le corps  $k$  (sans forcément le noter dans les noms).

Soit  $\lambda \in X^+$  un poids dominant entier régulier et  $L(\lambda)$  la représentation intégrable de plus haut poids  $\lambda$  (cf. [M-88a, p246] ou 3.7 ci-dessus); les groupes  $\mathfrak{B}^{ma+}$  et  $\mathfrak{P}_i$  agissent dessus. On choisit un vecteur de plus haut poids  $e_\lambda$ ; pour  $w \in W^v$ ,  $e_{w\lambda} = w e_\lambda \in L(\lambda)_{w\lambda}$  est défini au signe près et le sous-espace vectoriel  $E_w(\lambda) = \mathcal{U}_k^+ \cdot e_{w\lambda}$  est de dimension finie. De plus  $E_v(\lambda) \subset E_w(\lambda)$  si  $v \leq w$  pour l'ordre de Bruhat-Chevalley, mais si  $v < w$ ,  $E_v(\lambda)$  a une composante nulle sur  $ke_{w\lambda}$ . On note  $\Sigma_w$  l'adhérence de  $\mathfrak{B}^{ma+}(k) \cdot ke_{w\lambda}$  dans  $E_w(\lambda)$ ; c'est une sous-variété affine fermée de  $E_w(\lambda)$ . On a  $\Sigma_w = \mathfrak{B}(w)(k) \cdot ke_\lambda$  il contient donc  $\Sigma_v$  si  $v \leq w$  (cf. [M-88a, p64] formulé en caractéristique 0, mais qui se généralise). Ainsi  $\Sigma_w^c := \Sigma_w \setminus \bigcup_{v < w} \Sigma_v$ , contient l'ouvert de  $\Sigma_w$  défini par la non nullité de la coordonnée sur  $e_{w\lambda}$ .

On a un morphisme  $\zeta$  de  $\mathfrak{F}(\tilde{w})$  dans  $\Sigma_w$  donné par la "formule naïve"  $\zeta(p_1, \cdots, p_m) = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m \cdot e_\lambda$ , il se factorise en un morphisme  $\eta$  de  $\mathfrak{E}(\tilde{w})$  dans  $\Sigma_w$  (cf. [M-88a, p65, 66]

en caractéristique 0) puis, comme  $\Sigma_w$  est affine et  $\nu$  une affinisaton, en un morphisme  $\xi : \mathfrak{B}(w) \rightarrow \Sigma_w$ , simplement donné par l'action de  $\mathfrak{B}(w) \subset \mathfrak{G}^{pma}$  sur  $e_\lambda$  cf. 3.7.1. On a donc le diagramme :

$$\zeta : \mathfrak{F}(\tilde{w}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{E}(\tilde{w}) \xrightarrow{\nu} \mathfrak{B}(w) \xrightarrow{\xi} \Sigma_w \\ \xrightarrow{\mu} \mathfrak{B}(w) \end{array}$$

Si  $v \leq w$ , il existe une décomposition réduite  $\tilde{v}$  de  $v$  "extraite" de  $\tilde{w}$ . Le sous-schéma fermé de  $\mathfrak{F}(\tilde{w})$  formé des éléments dont le  $j$ -ème facteur est 1 si  $s_{i_j}$  est omis dans  $\tilde{v}$  est isomorphe à  $\mathfrak{F}(\tilde{v})$ . On obtient ainsi un diagramme dont toutes les flèches verticales sont injectives :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{\mu} & & & & \\ & & \mathfrak{F}(\tilde{w}) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{E}(\tilde{w}) & \xrightarrow{\nu} & \mathfrak{B}(w) & \xrightarrow{\xi} & \Sigma_w \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \mathfrak{F}(\tilde{v}) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{E}(\tilde{v}) & \xrightarrow{\nu} & \mathfrak{B}(v) & \xrightarrow{\xi} & \Sigma_v \end{array}$$

On note  $\mathfrak{E}(w) = \mathfrak{B}(w) \setminus \bigcup_{v < w} \mathfrak{B}(v)$  qui contient  $\xi^{-1}(\Sigma_w^c)$ . Par récurrence il suffit de montrer que  $\mu(\mathfrak{F}(\tilde{w})) \supset \mathfrak{E}(w)$ .

On note  $\mathfrak{F}^c(\tilde{w}) = \mathfrak{E}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{E}_{i_m}$  ouvert de  $\mathfrak{F}(\tilde{w})$  saturé pour le quotient par  $(\mathfrak{B}^{ma+})^{m-1}$ . Mais  $\mathfrak{E}_{i_j} = \mathfrak{B}^{ma+} \cdot s_{i_j} \cdot \mathfrak{B}^{ma+} = \mathfrak{U}_{i_j} \cdot s_{i_j} \cdot \mathfrak{B}^{ma+}$  et cette dernière décomposition est unique. Donc  $\mathfrak{U}_{i_1} \cdot s_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{U}_{i_m} \cdot s_{i_m} \cdot \mathfrak{B}^{ma+}$  est un système de représentants de  $\mathfrak{E}^c(\tilde{w}) := \mathfrak{F}^c(\tilde{w}) / (\mathfrak{B}^{ma+})^{m-1} = \pi(\mathfrak{F}^c(\tilde{w}))$  et  $(\mathfrak{B}^{ma+})^{m-1}$  agit librement sur  $\mathfrak{F}^c(\tilde{w})$ . Ainsi  $\mathfrak{E}^c(\tilde{w}) \simeq \mathfrak{U}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{U}_{i_m} \times \mathfrak{B}^{ma+}$  est un ouvert affine de  $\mathfrak{E}(\tilde{w})$ .

D'autre part  $\zeta(u_{i_1} \cdot s_{i_1}, \dots, u_{i_m} \cdot s_{i_m} \cdot b) = s_{i_1} \cdots s_{i_m} \cdot u'_1 \cdots u'_m \cdot b e_\lambda$  avec  $u'_j \in \mathfrak{U}_{\beta_j}$  pour  $\beta_j = s_{i_1} \cdots s_{i_j}(\alpha_{i_j}) \in \Phi$ . En particulier la coordonnée de cet élément sur  $e_{w\lambda}$  est non nulle ; il appartient donc à  $\Sigma_w^c$  : on a  $\zeta(\mathfrak{F}^c(\tilde{w})) = \eta(\mathfrak{E}^c(\tilde{w})) \subset \Sigma_w^c$  ; donc  $\mu(\mathfrak{F}^c(\tilde{w})) \subset \xi^{-1}(\Sigma_w^c) \subset \mathfrak{E}(w)$ .

Le complémentaire de  $\mathfrak{F}^c(\tilde{w})$  est réunion de sous-schémas fermés obtenus en remplaçant dans  $\mathfrak{F}(\tilde{w})$  l'un des facteurs  $\mathfrak{P}_i$  par  $\mathfrak{B}^{ma+}$ , ce qui, dans l'image par  $\pi$  revient à supprimer ce facteur. Alors le processus de multiplication décrit dans [M-89, p45] montre que l'image par  $\mu$  de ce sous-schéma fermé est dans un  $\mathfrak{B}(v)$  pour  $v < w$ . Ainsi  $\mathfrak{F}^c(\tilde{w}) \supset \mu^{-1}(\mathfrak{E}(w))$  et finalement  $\mathfrak{F}^c(\tilde{w}) = \mu^{-1}(\mathfrak{E}(w))$ . De plus  $\pi(\mathfrak{F}^c(\tilde{w})) = \mathfrak{E}^c(\tilde{w})$ . Donc  $\mathfrak{E}^c(\tilde{w}) = \nu^{-1}(\mathfrak{E}(w))$ .

Soit  $\mathfrak{B}(w)_f$  un ouvert principal de  $\mathfrak{B}(w)$  contenu dans  $\mathfrak{E}(w)$ . Alors  $\nu^{-1}(\mathfrak{B}(w)_f) = \mathfrak{E}(\tilde{w})_{f \circ \nu} = \mathfrak{E}^c(\tilde{w})_{f \circ \nu}$ , ouvert principal donc affine de  $\mathfrak{E}^c(\tilde{w})$ . On a donc  $k[\mathfrak{B}(w)_f] = k[\mathfrak{B}(w)][f^{-1}] = k[\mathfrak{E}(\tilde{w})][(f \circ \nu)^{-1}] \subset k[\mathfrak{E}^c(\tilde{w})][(f \circ \nu)^{-1}] = k[\mathfrak{E}^c(\tilde{w})_{f \circ \nu}] = k[\mathfrak{E}(\tilde{w})_{f \circ \nu}]$ . Mais  $\mathfrak{E}(\tilde{w})$  est réunion de  $2^m$  ouverts affines (démonstration par récurrence selon l'esquisse des pages 54, 55 de [M-88a]) ; donc  $k[\mathfrak{E}(\tilde{w})_{f \circ \nu}] \subset k[\mathfrak{E}(\tilde{w})][(f \circ \nu)^{-1}]$ . Ainsi  $k[\mathfrak{B}(w)_f] = k[\mathfrak{E}(\tilde{w})_{f \circ \nu}]$ . Cela prouve que  $\nu$  induit un isomorphisme de  $\nu^{-1}(\mathfrak{B}(w)_f)$  sur  $\mathfrak{B}(w)_f$  et donc aussi de  $\mathfrak{E}^c(\tilde{w}) = \nu^{-1}(\mathfrak{E}(w))$  sur  $\mathfrak{E}(w)$ . On sait de plus que  $\pi$  induit un isomorphisme du sous-schéma fermé  $\mathfrak{U}_{i_1} \cdot s_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{U}_{i_m} \cdot s_{i_m} \cdot \mathfrak{B}$  de  $\mathfrak{F}(\tilde{w})$  sur  $\mathfrak{E}^c(\tilde{w})$ . Donc  $\pi_k$  est surjectif.  $\square$

### 3.16 Structure de BN-paire raffinée sur $\mathfrak{G}^{pma}$

On note  $\mathfrak{U}^+$  (resp.  $\mathfrak{U}^-$ ) le sous-foncteur en groupe de  $\mathfrak{G}^{pma}$  engendré par les sous-groupes  $\mathfrak{U}_\alpha$  pour  $\alpha \in \Phi^+$  (resp.  $\alpha \in \Phi^-$ ) ; il s'identifie via  $i$  (au moins sur un corps) avec le sous-groupe de même nom de  $\mathfrak{G}$ . On a  $\mathfrak{U}^+ \subset \mathfrak{U}^{ma+}$ . On rappelle que  $S = \{s_i \mid i \in I\}$  est le système de générateurs de  $W^v$  et que  $\mathfrak{N}$  est l'image par  $i$  du groupe de même nom de  $\mathfrak{G}$  (remarque 3.12.1).

**Proposition.** *Si  $k$  est un corps, le sextuplet  $(G^{pma}, N, U^{ma+}, U^-, T, S)$  est une  $BN$ -paire raffinée (refined Tits system).*

**Remarque.** On a donc (cf. e.g. [Ry-02, 1.2]) un système de Tits  $(G^{pma}, B^{ma+} = TU^{ma+}, N, S)$ , une décomposition de Bruhat  $G^{pma} = \coprod_{n \in N} U^+ n U^{ma+} = \coprod_{n \in N} U^{ma+} n U^{ma+}$ , une décomposition de Birkhoff  $G^{pma} = \coprod_{n \in N} U^- n U^{ma+}$  et  $U^- \cap N U^{ma+} = N \cap U^{ma+} = \{1\}$ .

*Démonstration.* Vérifions les axiomes de [KP-85], voir aussi [Ry-02].

(RT1) : le groupe  $G^{pma}$  admet bien  $N$ ,  $U^{ma+}$ ,  $U^-$  et  $T$  comme sous-groupes. Le groupe  $T$  normalise les  $U_\alpha$  ( $\alpha \in \Phi$ ) donc aussi  $U^-$  et  $U^{ma+}$ , il est distingué dans  $N$  et  $N/T = W^v$  est engendré par les éléments de  $S$  qui sont d'ordre 2. Par construction  $G^{pma}$  est réunion des  $B(w)$  qui sont engendrés par des sous-groupes  $P_i$  (d'après 3.15). On a vu que  $P_i$  est engendré par  $U_{-\alpha_i} = \tilde{s}_i \cdot U_{\alpha_i} \cdot \tilde{s}_i^{-1}$  et  $B^{ma+} = TU^{ma+}$ . Donc  $G^{pma}$  est engendré par  $N$  et  $U^{ma+}$ .

(RT2) Pour  $s = s_i \in S$ ,  $U_s = U^{ma+} \cap s U^- s$  est dans  $G$  qui est muni d'une donnée radicielle jumelée  $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \Phi}, T)$  [Ry-02, prop 8.4.1] et d'après le théorème 1.5.4 de *l.c.* on a  $U_{s_i} = U_{\alpha_i}$ . Un résultat classique dans le groupe  $A_i$  donne donc (RT2a) ; tandis que (RT2b) est clair. Enfin (RT2c) résulte de 3.3 (voir aussi 3.5).

(RT3) Soient  $u^- \in U^-$ ,  $u^+ \in U^{ma+}$  et  $n \in N$  tels que  $u^- n u^+ = 1$ . Alors  $n$  et  $u^-$  sont dans  $G$  ainsi donc que  $u^+$ . On déduit de l'axiome (RT3) dans  $G$  [Ry-02, 1.5.4] que  $u^- = u^+ = n = 1$ .  $\square$

**Corollaire 3.17.** *Si  $k$  est un corps,  $U^+ = \mathfrak{U}^+(k) = \mathfrak{G}(k) \cap \mathfrak{U}^{ma+}(k)$  et  $B^+ = \mathfrak{B}^+(k) = \mathfrak{G}(k) \cap \mathfrak{B}^{ma+}(k)$ .*

**Remarque.** Le sextuplet  $(G, N, U^+, U^-, T, S)$  est aussi une  $BN$ -paire raffinée (1.6.5 et [Ry-02, 1.5.4]).

*Démonstration.* On a deux systèmes de Tits  $(G^{pma}, B^{ma+}, N, S)$  et  $(G, B^+, N, S)$ , cf. 1.6.5. Donc  $G^{pma} = \coprod_{w \in W^v} B^{ma+} w B^{ma+}$  et  $G = \coprod_{w \in W^v} B^+ w B^+$ . Comme  $B^+ \subset B^{ma+}$ , on a  $B^{ma+} \cap G = B^+$ . Mais  $B^{ma+} = T \rtimes U^{ma+}$  et  $B^+ = T \rtimes U^+$  donc  $B^+ \cap U^{ma+} = U^+$ .  $\square$

**Corollaire 3.18.** *Si  $k$  est un corps, l'injection  $i$  induit un isomorphisme simplicial  $\mathfrak{G}(k)$ -équivariant de l'immeuble  $\mathcal{I}_+^v$  associé à  $\mathfrak{G}$  sur  $k$  sur l'immeuble  $\widehat{\mathcal{I}}_+^v$  associé au système de Tits  $(G^{pma}, B^{ma+}, N, S)$ . Plus précisément ces deux immeubles ont les mêmes facettes et les appartements de  $\mathcal{I}_+^v$  sont des appartements de  $\widehat{\mathcal{I}}_+^v$ , mais, en général,  $\widehat{\mathcal{I}}_+^v$  a plus d'appartements.*

*Démonstration.* Les appartements sont isomorphes car associés au même groupe  $N$ . D'après 3.17  $G/B^+$  s'injecte dans  $G^{pma}/B^{ma+}$ , d'où une injection  $\mathcal{I}_+^v \hookrightarrow \widehat{\mathcal{I}}_+^v$ . Mais, par construction, si  $\alpha$  est simple, c'est le même groupe  $U_\alpha$  qui est transitif sur les chambres (de  $\mathcal{I}_+^v$  ou  $\widehat{\mathcal{I}}_+^v$ )  $s_\alpha$ -adjacentes à la chambre fondamentale  $C_f^v$  (associée à  $B^+$ ), ce sont donc les mêmes chambres. Par récurrence sur la longueur de galeries, on en déduit que  $\mathcal{I}_+^v = \widehat{\mathcal{I}}_+^v$ .  $\square$

### 3.19 Changement de SGR

1) On a décrit ci-dessus le groupe à la Mathieu  $\mathfrak{G}_S^{pma}$  associé à un SGR  $\mathcal{S}$  libre, colibre, sans cotorsion et vérifiant de plus une certaine condition de dimension (cf. 3.5). Il est clair que cette condition n'intervient pas dans les constructions de Mathieu, on peut donc s'en affranchir. On a d'ailleurs vu en 1.3 que si  $\mathcal{S}$  est libre, colibre, sans cotorsion il est extension semi-directe d'un SGR  $\mathcal{S}^{mat}$  vérifiant de plus cette condition de dimension. On en a déduit

en 1.11 que  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  est produit semi-direct de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{mat}}$  par un tore  $\mathfrak{T}_1$ . De même  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}^{pma}$  est produit semi-direct de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{mat}}^{pma}$  par ce tore  $\mathfrak{T}_1$ . Ces décompositions en produit semi-direct proviennent de la même décomposition  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{T}_{\mathcal{S}^{mat}} \times \mathfrak{T}_1$  et sont donc compatibles avec les morphismes de foncteurs  $i$  de 3.12.

2) Soit  $\mathcal{S}$  un SGR quelconque. D'après 1.3 il existe une extension centrale torique  $\mathcal{S}^{sc}$  de  $\mathcal{S}$  et une extension semi-directe  $\mathcal{S}^{scl}$  de  $\mathcal{S}^{sc}$  qui est libre, colibre et sans cotorsion. D'après les corollaires 1.11 et 1.12  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  est quotient de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{sc}}$  par un sous-tore central  $\mathfrak{T}_2$  de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}^{sc}}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{scl}}$  est produit semi-direct de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{sc}}$  par un sous-tore  $\mathfrak{T}_3$  de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}^{scl}}$ . Inversement  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{sc}}$  est le noyau d'un homomorphisme  $\theta$  de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{scl}}$  sur  $\mathfrak{T}_3$ .

L'homomorphisme  $\theta$  s'étend au groupe  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{scl}}^{pma}$  (construit ci-dessus) : on prend  $\theta$  trivial sur  $\mathfrak{U}_{\mathcal{S}^{scl}}^{ma+}$ , on connaît  $\theta$  sur  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}^{scl}}$  et les groupes  $\mathfrak{A}_i$  de 3.5, donc  $\theta$  est défini sur  $\mathfrak{B}_{\mathcal{S}^{scl}}^{ma+}$  et les paraboliques  $\mathfrak{P}_i$ ; son extension à  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{scl}}^{pma}$  découle alors de la construction de 3.6. On définit donc  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{sc}}^{pma}$  comme le noyau de  $\theta$ . Enfin  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}^{pma}$  est le quotient (comme foncteur en groupe) de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{sc}}^{pma}$  par le tore  $\mathfrak{T}_2$ .

On a ainsi défini  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}^{pma}$  et un morphisme de foncteurs  $i_{\mathcal{S}} : \mathfrak{G}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{S}}^{pma}$  pour tout SGR  $\mathcal{S}$ .

Si  $\mathcal{S}$  est libre, colibre et sans cotorsion on a ainsi deux définitions de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}^{pma}$ . Mais alors, d'après 1.3, 1.11 et 1.12,  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{sc}}$  est produit direct de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  par  $\mathfrak{T}_2$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{scl}}$  produit semi-direct de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{sc}}$  par  $\mathfrak{T}_3$ . Il est clair que  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{sc}}^{pma}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{scl}}^{pma}$  comme définis en 1) s'écrivent de la même manière comme produit semi-direct. D'où l'identification avec les groupes définis comme ci-dessus.

3) **Fonctorialité.** La construction de Mathieu est clairement fonctorielle en  $\mathcal{S}$  pour les SGR libres, colibres, sans cotorsion et les extensions commutatives de SGR. On a remarqué en 1.3.1 que les constructions  $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^{sc}$  et  $\mathcal{S}^{sc} \mapsto \mathcal{S}^{scl}$  sont fonctorielles. Une extension commutative  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_*$  définit donc un morphisme de foncteurs en groupes  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{scl}}^{pma} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{S}_*^{scl}}^{pma}$ . Ce morphisme est compatible avec les homomorphismes  $\theta$  sur les tores  $\mathfrak{T}_3$  correspondants, il induit donc un morphisme  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^{sc}}^{pma} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{S}_*^{sc}}^{pma}$ . Ce dernier morphisme échange les tores  $\mathfrak{T}_2$  correspondants, ce qui donne le morphisme  $\mathfrak{G}_{\varphi}^{pma} : \mathfrak{G}_{\mathcal{S}}^{pma} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{S}_*}^{pma}$  cherché.

Le groupe  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}^{pma}$  est donc fonctoriel en  $\mathcal{S}$  pour les extensions commutatives de SGR (de manière compatible avec la fonctorialité des groupes  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  et les morphismes  $i_{\mathcal{S}}$ ). Par construction, si  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  est un tel morphisme,  $\mathfrak{G}_{\varphi}^{pma}$  induit un isomorphisme de  $\mathfrak{U}_{\mathcal{S}}^{ma+}$  sur  $\mathfrak{U}_{\mathcal{S}'}^{ma+}$  et le morphisme  $\mathfrak{T}_{\varphi}$  de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$  dans  $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}$ . Si  $k$  est un corps,  $\mathfrak{G}_{\varphi k}^{pma}$  induit l'isomorphisme  $\mathfrak{G}_{\varphi k}$  de  $\mathfrak{U}_{\mathcal{S}}^{\pm}(k)$  sur  $\mathfrak{U}_{\mathcal{S}'}^{\pm}(k)$  cf. 1.10 et 3.12.

### 3.20 Comparaison avec les groupes de Kac-Moody à la Kumar

Dans [Kr-02, 6.1.6 et 1.1.2] S. Kumar considère un SGR vérifiant les mêmes conditions que celles demandées par O. Mathieu (cf. 3.5). On reste donc dans ce cadre et bien sûr on se place, comme Kumar, sur le corps  $\mathbb{C}$ .

Pour  $\Theta$  clos dans  $\Delta^+$ , les groupes  $U_{\Theta}$ ,  $T$  et  $N$  définis dans l.c. 6.1 s'identifient clairement à  $U_{\Theta}^{pma}$ ,  $T$  et  $N$  définis ci-dessus. De même pour une partie de type fini  $J$  de  $I$ , le groupe parabolique  $P_J$  de Kumar s'identifie au groupe  $P(J) = G(J) \times U_J^{ma+}$  de 3.10, en particulier les deux définitions des paraboliques minimaux  $P_i$  coïncident.

On a vu que  $(G^{pma}, B^{ma+} = TU^{ma+}, N, S)$  est un système de Tits. D'après l.c. 5.1.7  $G^{pma}$  est le produit amalgamé des sous-groupes  $N$  et  $P_i$ . Mais c'est exactement la définition de l.c. 6.1.16 du groupe de Kac-Moody à la Kumar. Donc sur  $\mathbb{C}$  les groupes à la Kumar et à la Mathieu coïncident.

L'injection  $i_{\mathbb{C}}$  de 3.12 permet d'identifier  $\mathfrak{G}(\mathbb{C})$  et le groupe minimal à la Kumar [Kr-02,



7.4.1].

## 4 Appartement affine et sous-groupes parahoriques

On considère dorénavant un SGR fixe  $\mathcal{S}$  qui est libre et le groupe de Kac-Moody  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  associé sur un corps  $K$ . On a vu en 1.3 et 1.11 que si  $\mathcal{S}$  est un SGR non libre,  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  est un sous-groupe d'un groupe  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^\ell}$  avec  $\mathcal{S}^\ell$  libre. Toute action de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^\ell}(K)$  sur une mesure induira donc une action de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(K)$  sur celle-ci. On peut noter que l'essentialisé de la mesure de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}^\ell}(K)$  ne dépend pas du choix de  $\mathcal{S}^\ell$  : les appartements sont des espaces affines sous  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q, \mathbb{R})$ . C'est le choix fait par B. Rémy pour ses réalisations coniques d'immeubles jumelés.

On abrégera fréquemment  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(K)$  en  $G_{\mathcal{S}}$  ou même  $G$ . On notera avec la lettre romaine correspondante les points sur  $K$  d'un foncteur en groupe noté avec une lettre gothique ; de même pour les morphismes de foncteurs.

À partir de 4.2, le corps  $K$  sera supposé muni d'une valuation réelle  $\omega$ .

### 4.1 Comparaison avec [Ru-06] et [Ru-10]

Le quintuplet  $(V, W^v, (\alpha_i)_{i \in I}, (\alpha_i^\vee)_{i \in I}, \Delta_{im})$  de 1.1 satisfait aux conditions de [Ru-10, 1.1 et 1.2.1], on est dans le cas Kac-Moody (modérément imaginaire). On peut en particulier définir dans  $V$  des facettes vectorielles et des cônes de Tits positif ou négatif  $\pm \mathcal{T}$  [Ru-10, 1.3]. Ces notions sont également introduites dans [Ru-06, 1.1 à 1.3] où  $\mathcal{T}$  est noté  $\mathbb{A}^v$ . On note  $C_f^v = \{v \in V \mid \alpha(v) > 0, \forall \alpha \in \Phi^+\}$  la chambre vectorielle fondamentale, donc  $\mathcal{T} = W^v \cdot \overline{C}_f^v$ . Une facette vectorielle est dite sphérique si son fixateur (dans  $W^v$ ) est fini *i.e.* si elle est contenue dans  $\pm \mathcal{T}^\circ$  (intérieur du cône de Tits).

D'après 1.6 le groupe de Kac-Moody  $G$  contient un sous-groupe  $T$  et des sous-groupes radiciels  $U_\alpha$  pour  $\alpha \in \Phi$ , chacun isomorphe au groupe additif  $(K, +)$  par un isomorphisme  $x_\alpha$ . Le triplet  $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \Phi}, T)$  est une donnée radicielle de type  $\Phi$  au sens de [Ru-06, 1.4]. Le groupe  $N$  défini dans [Ru-06, 1.5.3] coïncide avec celui de 1.6.4, il est muni d'une application surjective  $\nu^v : N \rightarrow W^v$  de noyau  $T$ .

On reprend, sauf exception signalée, les notations de [Ru-06, § 1]. On a en particulier un immeuble  $\mathcal{I}_+^v$  dont les appartements sont isomorphes à  $\mathbb{A}^v = \mathcal{T}$ , mais aussi un immeuble  $\mathcal{I}_-^v$  dont les appartements sont isomorphes à  $-\mathcal{T}$ . Ces deux immeubles sont jumelés [Ry-02] ; comme dans [Ru-06] on ne garde que les facettes sphériques dans  $\mathcal{I}_\pm^v$ . On a déjà vu ces immeubles de manière combinatoire en 1.6.5, mais on les verra désormais sous la forme de ces réalisations coniques. En 3.18 on a vu que  $G^{pma}$  (resp  $G^{nma}$ ) agit sur  $\mathcal{I}_+^v$  (resp.  $\mathcal{I}_-^v$ ).

### 4.2 L'appartement affine témoin $\mathbb{A}$

1) On suppose dorénavant le corps  $K$  muni d'une valuation réelle non triviale  $\omega$ , et ainsi  $\Lambda = \omega(K^*)$  est un sous-groupe non trivial de  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers de  $(K, \omega)$  et  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal.

On note  $\mathbb{A}$  l'espace vectoriel  $V$  considéré comme espace affine ; on note cependant toujours  $0$  l'élément neutre de  $V$ .

Le groupe  $T = \mathfrak{T}(K)$  agit sur  $\mathbb{A}$  par translations : si  $t \in T$ ,  $\nu(t)$  est l'élément de  $V$  tel que  $\chi(\nu(t)) = -\omega(\chi(t))$ ,  $\forall \chi \in X$ . Cette action est  $W^v$ -équivariante. D'après le raisonnement de [Ru-06, 2.9.2] on a :

**2) Lemme.** *Il existe une action affine  $\nu$  de  $N$  sur  $\mathbb{A}$  qui induit la précédente sur  $T$  et telle que, pour  $n \in N$ ,  $\nu(n)$  est une application affine d'application linéaire associée  $\nu^\nu(n)$ .*

3) L'image de  $N$  est  $\nu(N) = W_{Y\Lambda} = W^v \times (Y \otimes \Lambda)$ . Son noyau est  $H = \text{Ker}(\nu) = \mathcal{O}^* \otimes Y = \mathfrak{T}(\mathcal{O})$ .

4) Par construction le point 0 est fixé par les éléments  $m(x_{\alpha_i}(\pm 1)) = \tilde{s}_{-\alpha_i}^{\pm 1}$  et donc (par conjugaison : (KMT7) ) par tous les  $\tilde{s}_\alpha$ , pour  $\alpha \in \Phi$ . D'après (KMT6) pour  $u \neq 0$ ,  $m(x_\alpha(u)) = \tilde{s}_{-\alpha}(u^{-1}) = \tilde{s}_{-\alpha} \cdot (-\alpha)^\vee(u) = \alpha^\vee(u) \cdot \tilde{s}_{-\alpha}$  et  $\alpha(\nu(\alpha^\vee(u))) = -\omega(\alpha(\alpha^\vee(u))) = -\omega(u^2) = -2\omega(u)$ . Donc  $\nu(m(x_\alpha(u)))$  est la réflexion  $r_{\alpha, \omega(u)}$  par rapport à l'hyperplan  $M(\alpha, \omega(u)) = \{y \in V \mid \alpha(y) + \omega(u) = 0\}$ , c'est à dire l'application affine d'application linéaire associée  $s_\alpha$  et d'ensemble de points fixes  $M(\alpha, \omega(u))$ .

5) **Définitions.** L'appartement affine témoin  $\mathbb{A}$  est l'espace affine  $\mathbb{A}$  (sous l'espace vectoriel  $V$  muni de  $W^v$ ,  $\Phi$  et  $\Delta$ ) muni de l'ensemble  $\mathcal{M}$  des murs (réels)  $M(\alpha, k) = \{y \in V \mid \alpha(y) + k = 0\}$  pour  $\alpha \in \Phi$  et  $k \in \Lambda$  et de l'ensemble  $\mathcal{M}^i$  des murs imaginaires  $M(\alpha, k)$  pour  $\alpha \in \Delta_{im}$  et  $k \in \Lambda$ . L'espace  $D(\alpha, k) = \{y \in V \mid \alpha(y) + k \geq 0\}$ , défini pour  $\alpha \in X$  et  $k \in \mathbb{R}$  est un demi-appartement si  $\alpha \in \Phi$  et  $k \in \Lambda$ . On note  $D^\circ(\alpha, k) = \{y \in V \mid \alpha(y) + k > 0\}$ .

Ainsi  $\mathbb{A}$  satisfait aux conditions de [Ru-10, 1.4] (à une variante près pour  $\mathcal{M}^i$ , cf. l.c. 1.6.2); il est semi-discret si et seulement si la valuation  $\omega$  est discrète. On choisit  $x_0 = 0$  comme point spécial privilégié. On reprend les notations de [Ru-10] (sauf pour  $P^\vee$ ,  $Q^\vee$  et  $cl$ , voir ci-dessous). On notera les ressemblances et différences avec [Ru-06, § 2]. Le cas  $\Lambda = \mathbb{Z}$  est traité dans [GR-08, § 2 et 3.1].

On note  $Q^\vee = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$  et  $P^\vee = \{y \in V \mid \alpha_i(y) \in \mathbb{Z}, \forall i\}$ . Donc  $Q^\vee \subset Y \subset P^\vee \subset V$ .

Pour un filtre  $F$  de parties de  $\mathbb{A}$ , on considère comme dans [Ru-10] ou [GR-08] plusieurs variantes d'enclos : si  $\mathcal{P} \subset X \setminus \{0\}$ ,  $cl_{\mathcal{P}}(F)$  est le filtre formé des sous-ensembles de  $\mathbb{A}$  contenant un élément de  $F$  de la forme  $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{P}} D(\alpha, k_\alpha)$  avec pour chaque  $\alpha$ ,  $k_\alpha \in \Lambda \cup \{+\infty\}$  (en particulier chaque  $D(\alpha, k_\alpha)$  contient  $F$ ). On note  $cl(F) = cl_\Delta(F)$ ,  $cl^{si}(F) = cl_\Phi(F)$ . On définit aussi (selon Charignon [Cn-10])  $cl^\#(F)$  comme le filtre formé des sous-ensembles de  $\mathbb{A}$  contenant un élément de  $F$  de la forme  $\bigcap_{i=1}^n D(\alpha_i, k_i)$  où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi$  et  $k_i \in \Lambda \cup \{\infty\}$ . On a  $cl^\#(F) \supset cl^{si}(F) \supset cl(F) \supset \overline{\text{conv}}(F)$  (enveloppe convexe fermée de  $F$ );  $cl(F)$  et  $cl^{si}(F)$  coïncident avec ceux définis dans [Ru-10]. Un filtre  $F$  est dit *clos* si  $F = cl(F)$  et, quand on ne précise pas, l'enclos de  $F$  désigne  $cl(F)$ .

Une *facette locale* de  $\mathbb{A}$  est associée à un point  $x$  de  $\mathbb{A}$  et une facette vectorielle  $F^v$  dans  $V$ ; c'est le filtre  $F^\ell(x, F^v) = \text{germ}_x(x + F^v)$ . La *facette* associée à  $F^\ell(x, F^v)$  est le filtre  $F(x, F^v)$  formé des ensembles contenant une intersection de demi-espaces  $D(\alpha, k_\alpha)$  ou  $D^\circ(\alpha, k_\alpha)$  (un seul  $k_\alpha \in \Lambda \cup \{+\infty\}$  pour chaque  $\alpha \in \Delta$ ), cette intersection devant contenir  $F^\ell(x, F^v)$  i.e. un voisinage de  $x$  dans  $x + F^v$ . La facette fermée  $\overline{F}(x, F^v)$  est l'adhérence de  $F(x, F^v)$  et aussi  $cl(F^\ell(x, F^v)) = cl(F(x, F^v))$ . Les facettes  $F^\ell(x, F^v)$ ,  $F(x, F^v)$  et  $\overline{F}(x, F^v)$  sont dites *sphériques* si  $F^v$  l'est.

S'il existe  $\alpha \in \Delta_{im}$  avec  $\alpha(x) \notin \Lambda$ , il se pourrait que  $F(x, F^v)$  soit légèrement plus gros que la facette définie dans [Ru-10], cf. l.c. 1.6.2.

6) **Le groupe de Weyl.** Pour  $\alpha \in \Phi$ , il est clair que le groupe de Weyl  $W$ , engendré par les réflexions par rapports aux murs, contient les translations de vecteur dans  $\Lambda\alpha^\vee$ . Ainsi  $Q^\vee \otimes \Lambda$  (noté  $Q^\vee$  dans [Ru-10]) est un groupe de translations de  $V$ , contenu dans  $W$  et invariant par  $W^v$ . On a  $W = W^v \times (Q^\vee \otimes \Lambda)$ .

Le groupe  $P_\Lambda^\vee = \Lambda \cdot P^\vee = \{y \in V \mid \alpha_i(y) \in \Lambda, \forall i\}$  est noté  $P^\vee$  dans [Ru-10]. Ainsi  $W_P = W^v \times P_\Lambda^\vee$  est le plus grand sous-groupe de  $W_{\mathbb{R}}^e = W^v \times V$  stabilisant  $\mathcal{M}$  (et  $\mathcal{M}^i$ ).

Comme  $N$  est engendré par  $T$  et les  $\tilde{s}_\alpha$ , il est clair que  $\nu(N) = W_Y = W^v \times (Y \otimes \Lambda)$ . On a :  $W \subset W_Y \subset W_P \subset W_{\mathbb{R}}^e$ .

7) **Valuation des groupes radiciels.** Pour  $\alpha \in \Phi$  et  $u \in U_\alpha$ , on pose  $\varphi_\alpha(u) = \omega(r)$  si  $u = x_\alpha(r)$  avec  $r \in K$ . Les  $\varphi_\alpha$  forment une valuation de la donnée radicielle  $(G, (U_\alpha), T)$  [Ru-06, 2.2]. Voir aussi [Cn-10]

On considère le monoïde ordonné  $\tilde{\mathbb{R}}$  de [BT-72, 6.4.1] formé d'éléments  $r, r^+$  (pour  $r \in \mathbb{R}$ ) et  $\infty$  vérifiant  $r < r^+ < s < s^+ < \infty$  si  $r < s$ . On note  $\tilde{\Lambda}$  l'ensemble des éléments de  $\tilde{\mathbb{R}}$  qui sont borne inférieure d'une partie minorée de  $\Lambda$ . On a  $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\infty\}$  si  $\Lambda$  est discret et  $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\infty\} \cup \{r^+ \mid r \in \mathbb{R}\}$  sinon. Les idéaux fractionnaires de  $\mathcal{O}$  sont indexés par  $\tilde{\Lambda}$  : à  $\lambda \in \tilde{\Lambda}$  on associe  $K_\lambda = \{r \in K \mid \omega(r) \geq \lambda\}$ .

Pour  $\lambda \in \tilde{\Lambda}$  et  $\alpha \in \Phi$ ,  $U_{\alpha, \lambda} = \{u \in U_\alpha \mid \varphi_\alpha(u) \geq \lambda\}$  est un sous-groupe de  $U_\alpha$ ; on a  $U_{\alpha, \infty} = \{1\}$ .

### 4.3 Premiers groupes associés à un filtre $\Omega$ de parties de $\mathbb{A}$

Soit  $\Omega$  un tel filtre.

1) Pour  $\alpha \in X$ , soit  $f_\Omega^\Lambda(\alpha) = f_\Omega(\alpha) = \inf\{\lambda \in \Lambda \mid \Omega \subset D(\alpha, \lambda)\} = \inf\{\lambda \in \Lambda \mid \alpha(\Omega) + \lambda \subset [0, +\infty[ \} \in \tilde{\Lambda}$ . Pour  $\alpha \in \Delta$  (resp.  $\Phi, X$ )  $f_\Omega(\alpha)$  ne dépend que de  $cl(\Omega)$  (resp.  $cl^{si}(\Omega)$  ou  $cl^\#(\Omega)$ ,  $\overline{conv}(X) \supset \overline{\Omega}$ ). Si  $\Omega$  est un ensemble,  $f_\Omega(\alpha) \neq \lambda^+, \forall \alpha \in X, \forall \lambda \in \Lambda$ . Cette fonction  $f_\Omega$  est *concave* [BT-72] :  $\forall \alpha, \beta \in X, f_\Omega(\alpha + \beta) \leq f_\Omega(\alpha) + f_\Omega(\beta)$  et  $f_\Omega(0) = 0$ .

On dit que  $\Omega$  est *presque-ouvert* si  $\forall \alpha \in \Phi, f_\Omega(\alpha) + f_\Omega(-\alpha) > 0$ . On dit que  $\Omega$  est *étroit* si aucun mur ne sépare  $\Omega$  en deux, autrement dit si  $\forall \alpha \in \Phi, f_\Omega(\alpha) + f_\Omega(-\alpha) = 0$  ou  $0^+$  ou (dans le cas discret)  $\inf\{\lambda \in \Lambda \mid \lambda > 0\}$  et s'il n'existe pas de  $\lambda \in \Lambda$  avec  $f_\Omega(\alpha) = \lambda^+$  et  $f_\Omega(-\alpha) = (-\lambda)^+$ .

2) Pour  $\alpha \in \Phi$ , on note  $U_{\alpha, \Omega} = U_{\alpha, f_\Omega(\alpha)}$ ;  $U_\Omega^{(\alpha)}$  est le groupe engendré par  $U_{\alpha, \Omega}$  et  $U_{-\alpha, \Omega}$  et on note  $N_\Omega^{(\alpha)} = N \cap U_\Omega^{(\alpha)}$ .

On définit  $U_\Omega$  comme le groupe engendré par les  $U_{\alpha, \Omega}$  (pour  $\alpha \in \Phi$ ) et  $U_\Omega^\pm = U_\Omega \cap U^\pm$ ; on verra (4.12) que  $U_\Omega^+$  (resp.  $U_\Omega^-$ ) n'est pas forcément égal au groupe  $U_\Omega^{++}$  (resp.  $U_\Omega^{--}$ ) engendré par les  $U_{\alpha, \Omega}$  pour  $\alpha \in \Phi^+$  (resp.  $\alpha \in \Phi^-$ ).

Le groupe  $N_\Omega^u (\subset N \cap U_\Omega)$  est engendré par tous les  $N_\Omega^{(\alpha)}$  pour  $\alpha \in \Phi$ .

Tous ces groupes sont normalisés par  $H$  et on peut donc définir  $N_\Omega^{min} = HN_\Omega^u$  et  $P_\Omega^{min} = HU_\Omega$ . Ces groupes ne dépendent que de l'enclos  $cl(\Omega)$  de  $\Omega$  et même que de  $cl^\#(\Omega)$ . Si  $\Omega \subset \Omega'$ , on a  $U_\Omega \supset U_{\Omega'}$ , etc.

**3) Lemme.** Soient  $\alpha \in \Phi$  et  $\Omega$  un filtre comme ci-dessus.

$$a) U_\Omega^{(\alpha)} = U_{\alpha, \Omega} \cdot U_{-\alpha, \Omega} \cdot N_\Omega^{(\alpha)} = U_{-\alpha, \Omega} \cdot U_{\alpha, \Omega} \cdot N_\Omega^{(\alpha)}.$$

b) Si  $f_\Omega(\alpha) + f_\Omega(-\alpha) > 0$ , alors  $N_\Omega^{(\alpha)} \subset H$ . Si  $f_\Omega(\alpha) = -f_\Omega(-\alpha) = k \in \Lambda$ , alors  $\nu(N_\Omega^{(\alpha)}) = \{r_{\alpha, k}, 1\}$ .

c)  $N_\Omega^{(\alpha)}$  fixe  $\Omega$ , i.e.  $\forall n \in N_\Omega^{(\alpha)}$ , il existe  $S \in \Omega$  fixe point par point par  $\nu(n)$ .

*Démonstration.* cf. [GR-08, lemma 3.3] □

4) Le groupe  $W_\Omega^{min} = \nu(N_\Omega^{min}) = N_\Omega^{min}/H$  est engendré par les réflexions  $r_{\alpha, k}$  pour  $\alpha \in \Phi$  et  $k \in \Lambda$  tels que  $\Omega \subset M(\alpha, k)$ . Il est contenu dans le fixateur  $W_\Omega$  de  $\Omega$  dans  $W$ . Il y a bien sûr égalité si  $\Omega$  est réduit à un point spécial, mais aussi si  $\Omega$  est une facette sphérique et si  $\Lambda$  est discret. En effet dans ce dernier cas l'image de  $W_\Omega$  dans  $W^v$  fixe une facette vectorielle

sphérique et on est ramené au cas classique où  $W$  est produit semi-direct d'un groupe de Weyl fini par un groupe discret de translations ; ce cas est traité dans [BT-72, 7.1.10].

#### 4.4 Algèbres et modules associés au filtre $\Omega$

1) Pour  $\alpha \in \Delta$  et  $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ , on pose  $\mathfrak{g}_{\alpha,\lambda} = \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}} \otimes K_\lambda$  et  $\mathfrak{g}_{\alpha,\Omega} = \mathfrak{g}_{\alpha, f_\Omega(\alpha)}$ . De même  $\mathfrak{h}_\mathcal{O} = \mathfrak{h}_\mathbb{Z} \otimes \mathcal{O}$ . Par concavité de  $f_\Omega$ , il est clair que  $\mathfrak{g}_\Omega = \mathfrak{h}_\mathcal{O} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha,\Omega})$  est une sous- $\mathcal{O}$ -algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g}_\mathbb{Z} \otimes K$ .

On peut de même considérer les complétions positive et négative :  $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega^p = (\bigoplus_{\alpha < 0} \mathfrak{g}_{\alpha,\Omega}) \oplus \mathfrak{h}_\mathcal{O} \oplus (\prod_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_{\alpha,\Omega})$  et  $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega^n = (\bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_{\alpha,\Omega}) \oplus \mathfrak{h}_\mathcal{O} \oplus (\prod_{\alpha < 0} \mathfrak{g}_{\alpha,\Omega})$  si  $\Omega$  est un ensemble, sinon  $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega^p = \cup_{\Omega' \in \Omega} \widehat{\mathfrak{g}}_{\Omega'}^p$  et  $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega^n = \cup_{\Omega' \in \Omega} \widehat{\mathfrak{g}}_{\Omega'}^n$ .

Ces algèbres ne dépendent que de  $cl(\Omega)$ . Par contre  $cl^{si}(\Omega)$  ou  $cl^\#(\Omega)$  pourraient être insuffisants pour les déterminer.

2) L'algèbre enveloppante entière  $\mathcal{U}_S$  est graduée par  $Q \subset X$ . On peut donc définir  $\mathcal{U}_\Omega = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathcal{U}_{\alpha,\Omega}$  avec  $\mathcal{U}_{\alpha,\Omega} = \mathcal{U}_{S,\alpha} \otimes_{\mathbb{Z}} K_{f_\Omega(\alpha)}$ . C'est une sous- $\mathcal{O}$ -bigèbre graduée de  $\mathcal{U}_{S,K} = \mathcal{U}_S \otimes_{\mathbb{Z}} K$ . Le terme de niveau 1 de la filtration induite par celle de  $\mathcal{U}_{S,K}$  est  $\mathcal{O} \oplus \mathfrak{g}_\Omega$ . On peut avoir  $\mathcal{U}_\Omega \neq \mathcal{U}_{cl(\Omega)}$ .

On peut considérer la complétion positive  $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p$  (resp. négative  $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^n$ ) de  $\mathcal{U}_\Omega$  pour le degré total (resp. son opposé) ; c'est une sous-algèbre de  $\widehat{\mathcal{U}}_K^p$  (resp.  $\widehat{\mathcal{U}}_K^n$ ).

3) Soit  $\lambda$  un poids dominant de  $\mathfrak{T}_S$  (*i.e.*  $\lambda \in X^+$ ). On a construit en 2.14 une forme entière  $L_\mathbb{Z}(\lambda)$  du module intégrable  $L(\lambda)$  de plus haut poids  $\lambda$ . Tout poids de  $M = L(\lambda)$  est de la forme  $\mu = \lambda - \nu$  avec  $\nu \in Q^+$ . Pour  $\mu \in X$  et  $r \in \tilde{\Lambda}$ , on pose  $M_{\mu,r} = L_\mathbb{Z}(\lambda)_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} K_r$  puis  $M_{\mu,\Omega} = M_{\mu, f_\Omega(\mu)}$  et  $M_\Omega = \bigoplus_{\mu \in X} M_{\mu,\Omega}$  ; en particulier  $M_{\lambda,\Omega} = K_{f_\Omega(\lambda)} \cdot v_\lambda$ . Par concavité de  $f_\Omega$ , il est clair que  $M_\Omega$  est un sous- $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p$ -module gradué de  $M \otimes K$ . On peut avoir  $M_\Omega \neq M_{cl(\Omega)}$ , mais  $M_\Omega$  ne dépend que de  $cl_{\mathcal{P}(M)}(\Omega)$  où  $\mathcal{P}(M)$  est l'ensemble des poids de  $M$ .

On peut considérer la complétion négative de  $M_\Omega$  :  $\widehat{M}_\Omega^n = \prod_{\nu \in Q^+} M_{\lambda-\nu,\Omega}$  si  $\Omega$  est un ensemble et  $\widehat{M}_\Omega^n = \cup_{\Omega' \in \Omega} \widehat{M}_{\Omega'}^n$  sinon. Il est clair que  $\widehat{M}_\Omega^n$  est un sous- $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^n$ -module gradué de  $\widehat{M} \otimes K$ .

Bien sûr on construit aussi  $M_\Omega$  et sa complétion positive  $\widehat{M}_\Omega^p$  pour un module intégrable  $M$  à plus bas poids  $\lambda \in -X^+$ .

#### 4.5 Groupes (pro-)unipotents associés au filtre $\Omega$

1) Soit  $\Psi \subset \Delta^+$  un ensemble clos de racines. On lui a associé une  $\mathbb{Z}$ -bigèbre  $\mathcal{U}(\Psi)$  (2.13.2 et 3.1). On peut donc définir  $\mathcal{U}(\Psi)_\Omega = \bigoplus_{\alpha \in Q^+} \mathcal{U}(\Psi)_{\alpha,\Omega}$  (avec  $\mathcal{U}(\Psi)_{\alpha,\Omega} = \mathcal{U}(\Psi)_\alpha \otimes K_{f_\Omega(\alpha)}$ ) ; c'est une sous- $\mathcal{O}$ -bigèbre de  $\mathcal{U}_\Omega$  et de  $\mathcal{U}(\Psi) \otimes K$  (plus précisément leur intersection).

2) Le plus simple pour associer à  $\mathcal{U}(\Psi)_\Omega$  un sous-groupe de  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}(K)$  semble être de procéder comme suit :

Si  $\Omega$  est un ensemble on considère la complétion  $\widehat{\mathcal{U}}(\Psi)_\Omega = \prod_{\alpha \in Q^+} \mathcal{U}(\Psi)_{\alpha,\Omega}$  ; c'est une sous-algèbre de  $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p$  et de  $\widehat{\mathcal{U}}_K(\Psi)$  et elle contient  $[exp]\lambda x$  pour  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$  et  $\lambda \in K_{f_\Omega(\alpha)}$ . Le monoïde  $U_\Omega^{ma}(\Psi)$  est l'intersection de  $\widehat{\mathcal{U}}(\Psi)_\Omega$  ou  $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p$  et de  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}(K)$  (qui est un sous-groupe des éléments inversibles de  $\widehat{\mathcal{U}}_K(\Psi)$ ). On sait que l'inverse d'un élément de  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}(K)$  est son image par la co-inversion  $\tau$  et il est clair que  $\widehat{\mathcal{U}}(\Psi)_\Omega$  est stable par  $\tau$  (car  $\tau$  est graduée et stabilise  $\mathcal{U}(\Psi)$ ). Ainsi  $U_\Omega^{ma}(\Psi)$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{U}_\Psi^{ma}(K)$ . D'après 3.2 il est clair que

$U_{\Omega}^{ma}(\Psi)$  est formé des produits  $\prod_{x \in \mathcal{B}_{\Psi}} [exp]\lambda_x \cdot x$  pour  $\lambda_x \in K_{f_{\Omega}(pds(x))}$  (il suffit de raisonner par récurrence sur le degré total).

Si  $\Omega$  est un filtre, le groupe  $U_{\Omega}^{ma}(\Psi)$  est la réunion des  $U_{\Omega'}^{ma}(\Psi)$  pour  $\Omega' \in \Omega$ , donc encore l'intersection de  $\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}(K)$  et de  $\widehat{\mathcal{U}}(\Psi)_{\Omega} = \cup_{\Omega' \in \Omega} \widehat{\mathcal{U}}(\Psi)_{\Omega'}$ .

3) On sait que  $G$  et  $\mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}(K)$  s'injectent dans  $\mathfrak{G}^{pma}(K)$  (3.3a, 3.6 et 3.13). On note donc  $U_{\Omega}^{pmm}(\Psi) = G \cap U_{\Omega}^{ma}(\Psi)$ . On a aussi  $U_{\Omega}^{pmm}(\Psi) = U^+ \cap U_{\Omega}^{ma}(\Psi)$  puisque  $U^+ = G \cap U^{ma+}$  (3.17). Pour un filtre on a  $U_{\Omega}^{pmm}(\Psi) = \cup_{\Omega' \in \Omega} U_{\Omega'}^{pmm}(\Psi)$ . Bien sûr  $U_{\Omega}^{pmm+} := U_{\Omega}^{pmm}(\Delta^+)$  contient  $U_{\Omega}^+$  (et  $U_{\Omega}^{nmm-} := U_{\Omega}^{nmm}(\Delta^-) \supset U_{\Omega}^-$ ).

4) **Remarques** : a) Le sous-groupe  $H = \mathfrak{T}(\mathcal{O})$  de  $T = \mathfrak{T}(K)$  stabilise les algèbres et modules construits en 4.4 ou ci-dessus. Ainsi  $H$  normalise  $U_{\Omega}^{ma}(\Psi)$  et  $U_{\Omega}^{pmm}(\Psi)$ .

b) Comme  $\widehat{\mathcal{U}}(\Psi)_{\Omega}$  est une sous-algèbre de  $\widehat{\mathcal{U}}_{\Omega}^p$  et de  $\widehat{\mathcal{U}}_K(\Psi)$ , il est clair que les groupes  $U_{\Omega}^{ma}(\Psi)$  et  $U_{\Omega}^{pmm}(\Psi)$  stabilisent  $\widehat{\mathcal{U}}_{\Omega}^p$  et  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\Omega}^p$  pour l'action adjointe de  $U_{\Psi}^{ma}(K)$  sur  $\widehat{\mathcal{U}}_K^p$ , cf. 3.7.3.

c) Pour  $\alpha \in \Phi$  et  $\Psi = \{\alpha\}$ ,  $U_{\Omega}^{ma}(\Psi)$  est le sous-groupe  $U_{\alpha, \Omega}$  de  $U_{\alpha} \subset G$  isomorphe à  $K_{f_{\Omega}(\alpha)}$  par  $x_{\alpha} : r \mapsto exp(re_{\alpha})$  (défini en 4.2.7).

d) Si  $\Omega \subset \Omega'$ , on a  $U_{\Omega}^{ma}(\Psi) \supset U_{\Omega'}^{ma}(\Psi)$  et  $U_{\Omega}^{pmm}(\Psi) \supset U_{\Omega'}^{pmm}(\Psi)$ . Si  $\Omega$  est la réunion d'une famille  $(\Omega_i)_{i \in N}$  de filtres, alors  $f_{\Omega}$  est le sup (pris dans  $\widetilde{\Lambda}$ ) des  $f_{\Omega_i}$  et  $\mathcal{U}(\Psi)_{\Omega} = \cap_{i \in N} \mathcal{U}(\Psi)_{\Omega_i}$ . Ainsi  $U_{\Omega}^{ma}(\Psi) = \cap_{i \in N} U_{\Omega_i}^{ma}(\Psi)$  et  $U_{\Omega}^{pmm}(\Psi) = \cap_{i \in N} U_{\Omega_i}^{pmm}(\Psi)$ .

e) Pour  $\Omega = \{0\} \subset \mathbb{A}$ , on a  $\mathcal{U}_{\Omega} = \mathcal{U}_{\mathcal{S}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{U}(\Psi)_{\Omega} = \mathcal{U}_{\mathcal{S}}(\Psi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}$ ,  $U_{\Omega}^{ma}(\Psi) = \mathfrak{U}_{\Psi}^{ma}(\mathcal{O})$ .

f)  $U_{\Omega}^{ma}(\Psi)$  et  $U_{\Omega}^{pmm}(\Psi)$  ne dépendent que de  $cl(\Omega)$  (cela pourrait être faux pour  $cl^{si}(\Omega)$  ou  $cl^{\#}(\Omega)$ ).

5) **Lemme.** Soient  $\Psi' \subset \Psi \subset \Delta^+$  des sous-ensembles clos de racines.

a)  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{ma}(\Psi')$  (resp.  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm}(\Psi')$ ) est un sous-groupe de  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{ma}(\Psi)$  (resp.  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm}(\Psi)$ ).

b) Si  $\Psi \setminus \Psi'$  est également clos, alors on a des décompositions uniques  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{ma}(\Psi) = \mathfrak{U}_{\Omega}^{ma}(\Psi') \cdot \mathfrak{U}_{\Omega}^{ma}(\Psi \setminus \Psi')$  et  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm}(\Psi) = \mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm}(\Psi') \cdot \mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm}(\Psi \setminus \Psi')$ .

c) Si  $\Psi'$  est un idéal de  $\Psi$ , alors  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{ma}(\Psi')$  (resp.  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm}(\Psi')$ ) est un sous-groupe distingué de  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{ma}(\Psi)$  (resp.  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm}(\Psi)$ ) et on a un produit semi-direct si, de plus,  $\Psi \setminus \Psi'$  est clos.

d) Si  $\alpha \in \Delta^+$  est une racine simple, on a  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{ma+} = U_{\alpha, \Omega} \times \mathfrak{U}_{\Omega}^{ma}(\Delta^+ \setminus \{\alpha\})$  et  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm+} = U_{\alpha, \Omega} \times \mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm}(\Delta^+ \setminus \{\alpha\})$ . Les groupes  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{ma}(\Delta^+ \setminus \{\alpha\})$  et  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm}(\Delta^+ \setminus \{\alpha\})$  sont normalisés par  $HU_{\Omega}^{(\alpha)}$ .

*Démonstration.* Le a) est clair. Pour le b) et le c) on a des décompositions analogues dans  $U_{\Psi}^{ma}(K)$  (3.3) et, par exemple,  $U_{\Omega}^{ma}(\Psi') = U_{\Psi'}^{ma}(K) \cap \widehat{\mathcal{U}}_{\Omega}^p$ , d'où les résultats par intersection (puisque  $\mathcal{U}_{\Omega}^p$  est graduée). La première partie de d) résulte de c). On sait donc que  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{ma}(\Delta^+ \setminus \{\alpha\})$  et  $\mathfrak{U}_{\Omega}^{pmm}(\Delta^+ \setminus \{\alpha\})$  sont normalisés par  $H$  et  $U_{\alpha, \Omega}$ . Le même raisonnement avec  $\Delta^+$  remplacé par  $s_{\alpha}(\Delta^+) = \Delta^+ \cup \{-\alpha\} \setminus \{\alpha\}$  montre qu'ils sont aussi normalisés par  $U_{-\alpha, \Omega}$ , d'où la conclusion.  $\square$

6) On a vu en 3.5 que  $\mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha\}}^{ma}(K)$  est normalisé par  $G^{(\alpha)} = \mathfrak{U}_{\alpha}^Y(K) = \langle T, U_{\alpha}, U_{-\alpha} \rangle$ . Cela signifie en particulier que  $\mathfrak{U}_{-\alpha} \times \mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha\}}^{ma} = s_{\alpha}(\mathfrak{U}_{\Delta^+}^{ma})$ . On peut donc ainsi définir dans  $\mathfrak{G}^{pma}$  un groupe  $\mathfrak{U}^{ma}(w\Delta^+)$  pour tout  $w \in W^v$ .

7) Dans toutes les notations précédentes un  $+$  (resp. un  $-$ ) peut remplacer  $\Psi$  quand  $\Psi = \Delta^+$  (resp.  $\Psi = \Delta^-$ ).

On considère aussi le groupe de Kac-Moody négativement maximal  $\mathfrak{G}^{nma}$  construit comme  $\mathfrak{G}^{pma}$  en échangeant  $\Delta^+$  et  $\Delta^-$ . Plus généralement on peut changer  $p$  en  $n$  et  $\pm$  en  $\mp$  dans

ce qui précède pour obtenir des groupes similaires (avec des propriétés similaires) dans le cas négatif.

**Proposition 4.6.** *Soit  $\Omega$  un filtre de parties de  $\mathbb{A}$ . Il y a trois sous-groupes de  $G$  associés à  $\Omega$  et indépendants du choix de  $\Delta^+$  dans sa classe de  $W^v$ -conjugaison.*

- 1) Le groupe  $U_\Omega$  (engendré par tous les  $U_{\alpha,\Omega}$ ) est égal à  $U_\Omega = U_\Omega^- \cdot U_\Omega^+ \cdot N_\Omega^u = U_\Omega^+ \cdot U_\Omega^- \cdot N_\Omega^u$ .
- 2) Le groupe  $U_\Omega^{pm}$  (engendré par les groupes  $U_\Omega^{pm+}$  et  $U_\Omega$ ) est égal à  $U_\Omega^{pm} = U_\Omega^{pm+} \cdot U_\Omega^- \cdot N_\Omega^u$ .
- 3) Symétriquement le groupe  $U_\Omega^{nm}$  (engendré par les groupes  $U_\Omega^{nm-}$  et  $U_\Omega$ ) est égal à  $U_\Omega^{nm} = U_\Omega^{nm-} \cdot U_\Omega^+ \cdot N_\Omega^u$ .

4) On a :

$$\begin{array}{ll} i) U_\Omega \cap N = N_\Omega^u & ii) U_\Omega^{pm} \cap N = N_\Omega^u \\ iii) U_\Omega \cap (N \cdot U^\pm) = N_\Omega^u \cdot U_\Omega^\pm & iv) U_\Omega^{pm} \cap (N \cdot U^+) = N_\Omega^u \cdot U_\Omega^{pm+} \\ v) U_\Omega \cap U^\pm = U_\Omega^\pm & vi) U_\Omega^{pm} \cap U^+ = U_\Omega^{pm+} \end{array}$$

et symétriquement pour  $U_\Omega^{nm}$ .

*Démonstration.* On refait la preuve de [GR-08, prop. 3.4] en utilisant 4.5.5, 4.3.3 et la remarque 3.16.  $\square$

**Remarques.** a) Le groupe  $H$  normalise  $U_\Omega$ ,  $U_\Omega^+$ ,  $U_\Omega^-$ ,  $N_\Omega^u$ ,  $U_\Omega^{pm+}$ ,  $U_\Omega^{nm-}$ ,  $U_\Omega^{pm}$  et  $U_\Omega^{nm}$ . Le groupe  $N_\Omega^{min} = HN_\Omega^u$  est contenu dans le fixateur  $\widehat{N}_\Omega$  de  $\Omega$ . On note  $P_\Omega^{min} = HU_\Omega$ ,  $P_\Omega^{pm} = HU_\Omega^{pm}$  et  $P_\Omega^{nm} = HU_\Omega^{nm}$ . Ces trois groupes vérifient les mêmes décompositions que 1), 2) et 3) ci-dessus en remplaçant  $N_\Omega^u$  par  $N_\Omega^{min}$ . On verra en 5.14.2 que  $P_\Omega^{pm} = P_\Omega^{nm}$  quand  $\Omega$  est un point spécial ou quand  $\Omega$  est une facette sphérique et la valuation est discrète.

b) L'égalité  $U_\Omega^+ = U_\Omega^{pm+}$  est équivalente à  $U_\Omega^{pm} = U_\Omega$ ; on verra en 5.7.3 qu'elle n'est pas toujours satisfaite.

c) On montre également au cours de la preuve de 4.6 que  $U_\Omega^{pm+} \cdot U_\Omega^{nm-} \cdot N_\Omega^u$  ou  $U_\Omega^{nm-} \cdot U_\Omega^{pm+} \cdot N_\Omega^u$  ne dépend pas du choix de  $\Delta^+$  dans sa classe de  $W^v$ -conjugaison.

d) Dans le cas classique des groupes réductifs, on a  $G = G^{pma} = G^{nma}$ ,  $U_\Omega^{++} = U_\Omega^+ = U_\Omega^{ma+} = U_\Omega^{pm+}$  et  $U_\Omega^{--} = U_\Omega^- = U_\Omega^{ma-} = U_\Omega^{nm-}$ . De plus  $U_\Omega$  ( $= U_\Omega^{pm} = U_\Omega^{nm}$ ) est le même que le groupe défini en [BT-72, 6.4.2 et 6.4.9]. Le groupe  $P_\Omega^{min}$  est noté  $P_\Omega$  par Bruhat et Tits.

**Proposition 4.7.** *Décomposition d'Iwasawa*

*Supposons  $\Omega$  étroit, alors  $G = U^+NU_\Omega$ .*

*Supposons de plus  $\Omega$  presque-ouvert, alors l'application naturelle de  $\nu(N) = W_{Y\Lambda} = N/H$  sur  $U^+ \backslash G/HU_\Omega$  est bijective*

*Démonstration.* Voir la preuve de [GR-08, prop. 3.6]  $\square$

**Remarques.** 1) On a aussi  $G = U^-NU_\Omega$  et, de la même façon avec les groupes maximaux  $G^{pma} = U^{ma+}NU_\Omega$  et  $G^{nma} = U^{ma-}NU_\Omega$ .

2) Ainsi quand  $\Omega$  est étroit, tout sous-groupe  $P$  de  $G$  contenant  $U_\Omega$  peut s'écrire  $P = (P \cap U^+N) \cdot U_\Omega$ . Si de plus  $P \cap U^+N = U_P^+ \cdot N_P$  avec  $U_P^+ = P \cap U^+$  et  $N_P = P \cap N$  on a  $P = U_P^+ \cdot N_P \cdot U_\Omega$  et, si  $N_P \subset \widehat{N}_\Omega$ ,  $P = U_P^+ \cdot U_\Omega^- \cdot N_P$  cf. 4.10.

## 4.8 Représentations des groupes associés à $\Omega$

1) Supposons que  $\Omega$  est un ensemble. D'après 4.5.4b le groupe  $U_\Omega^{ma+}$  stabilise  $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p$  et  $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega^p$  pour l'action de  $U^{ma+}$  sur  $\widehat{\mathcal{U}}_K^p$ . Le groupe  $U^+$  stabilise  $\mathcal{U}_K$  et  $\mathfrak{g}_K$  pour l'action adjointe de  $G$  et  $U^+$  cf. 2.1.4. Les deux actions coïncident sur  $U^+ \subset G \cap U^{ma+}$ . Donc  $U_\Omega^{pm+} = G \cap U_\Omega^{ma+} = U^+ \cap U_\Omega^{ma+}$  (4.5.3) stabilise  $\mathcal{U}_\Omega = \widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p \cap \mathcal{U}_K$  et  $\mathfrak{g}_\Omega = \widehat{\mathfrak{g}}_\Omega^p \cap \mathfrak{g}_K$  pour l'action adjointe de  $G$ .

De même  $U_\Omega^{nm-}$  stabilise  $\mathcal{U}_\Omega$  et  $\mathfrak{g}_\Omega$ . Ainsi  $\mathcal{U}_\Omega$  et  $\mathfrak{g}_\Omega$  sont stables par  $U_{\alpha,\Omega}$  pour tout  $\alpha \in \Phi$  et donc par  $U_\Omega$ .

Finalement on sait que  $\mathcal{U}_\Omega$  et  $\mathfrak{g}_\Omega$  sont stables par les groupes  $U_\Omega$ ,  $U_\Omega^{pm}$ ,  $U_\Omega^{nm}$  et  $H$  (qui normalise les trois autres) (4.5.4a et 4.6a). Ce résultat est encore vrai si  $\Omega$  est un filtre, car alors tous ces objets sont réunion filtrante des objets correspondant à  $\Omega' \in \Omega$ .

2) Soit  $M = L_{\mathbb{Z}}(\lambda)$  un  $\mathcal{U}$ -module à plus haut poids comme en 4.4.3. Supposons dans un premier temps que  $\Omega$  est un ensemble. Comme  $M_\Omega$  est un  $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p$ -module, le groupe  $U_\Omega^{ma+} \subset (\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p)^*$  stabilise  $M_\Omega$  pour l'action de  $G^{pma}$  cf. 3.7. Ce module  $M_\Omega$  est en particulier stable par  $U_\Omega^{pm+}$  et les groupes  $U_{\alpha,\Omega}$  pour  $\alpha \in \Phi^+$ .

Comme  $\widehat{M}_\Omega^n$  est un  $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^n$ -module, le groupe  $U_\Omega^{ma-}$  stabilise  $\widehat{M}_\Omega^n$ , pour la représentation de  $U^{ma-}$  sur  $\widehat{M}_K^n$  (cf. 3.7) qui induit sur  $U^-$  la même action que  $G$  (3.14.3). Comme  $G$  stabilise  $M_K$ , le groupe  $U_\Omega^{nm-} = G \cap U_\Omega^{ma-} = U^- \cap U_\Omega^{ma-}$  stabilise  $M_\Omega = M_K \cap \widehat{M}_\Omega^n$ .

Ainsi le sous-module  $M_\Omega$  de  $M_K$  est stable par l'action de  $U_\Omega^{pm+}$  et  $U_\Omega^{nm-}$ . Ce résultat est encore vrai quand  $\Omega$  est un filtre.

Le groupe  $U_\Omega$  est engendré par les  $U_{\alpha,\Omega}$  pour  $\alpha \in \Phi$  qui sont dans  $U_\Omega^{pm+}$  ou  $U_\Omega^{nm-}$ . Ainsi  $M_\Omega$  est stable par  $U_\Omega$ ,  $U_\Omega^\pm$ ,  $U_\Omega^{pm}$  et  $U_\Omega^{nm}$ . On sait aussi qu'il est stable par  $H$ .

3) Ces résultats sont encore vrais, mutatis mutandis, pour des modules à plus bas poids.

**Définition 4.9.** Si  $\Omega$  est un ensemble, on considère le sous-groupe  $\widetilde{P}_\Omega$  de  $G$  formé des éléments stabilisant  $\mathcal{U}_\Omega$  et  $M_\Omega$  pour tout module  $M$  à plus haut ou plus bas poids (comme en 4.4.3). On note  $\widetilde{N}_\Omega = N \cap \widetilde{P}_\Omega$ .

D'après 4.8 le groupe  $\widetilde{P}_\Omega$  contient  $U_\Omega$ ,  $U_\Omega^\pm$ ,  $U_\Omega^{pm}$ ,  $U_\Omega^{nm}$  et  $H$ . D'après la remarque 4.7.2 il est utile de déterminer  $\widetilde{P}_\Omega \cap U^\pm N$ , voir 4.11.

On note  $\mathcal{P}$  la réunion de  $\Delta$  et de tous les ensembles de poids des modules  $M$  ci-dessus. Le groupe  $\widetilde{P}_\Omega$  ne dépend que de  $cl_{\mathcal{P}}(\Omega)$  (et non seulement de  $cl(\Omega)$ ).

## 4.10 Conjugaison par $N$

Soit  $n \in N$ , on peut écrire  $n = n_0 t$  avec  $n_0$  dans  $N_0 = \mathfrak{N}(\mathbb{Z})$  (le groupe engendré par les  $m(x_\alpha(\pm 1))$  qui fixe 0) cf. 4.2.4,  $\nu^v(n) = w \in W^v$  et  $t \in T$ .

1) Pour  $M = L_K(\lambda)$  un module à plus haut ou plus bas poids ou  $M = \mathfrak{g}_K$  ou  $M = \mathcal{U}_K$ ,  $\mu \in X$  et  $r \in \mathbb{R}$ , on a  $nM_{\mu,r} = M_{w\mu, r + \omega(\mu(t))}$ . Considérons également l'action sur  $\mathbb{A} : nD(\mu, r) = n_0 D(\mu, r + \omega(\mu(t))) = D(w\mu, r + \omega(\mu(t)))$ . Donc  $r \geq f_\Omega(\mu) \Leftrightarrow \Omega \subset D(\mu, r) \Leftrightarrow \nu(n).\Omega \subset D(w\mu, r + \omega(\mu(t))) \Leftrightarrow r + \omega(\mu(t)) \geq f_{\nu(n).\Omega}(w\mu)$  et ainsi  $f_{\nu(n).\Omega}(w\mu) = f_\Omega(\mu) + \omega(\mu(t))$ . Finalement  $nM_\Omega = M_{\nu(n).\Omega}$ .

Ainsi  $\widetilde{P}_{\nu(n).\Omega} = n\widetilde{P}_\Omega n^{-1}$ ; en particulier le fixateur  $\widehat{N}_\Omega$  de  $\Omega$  dans  $N$  (pour l'action  $\nu$ ) normalise  $\widetilde{P}_\Omega$ . On a vu en 4.3.4 que  $N_\Omega^{min} = HN_\Omega^u \subset \widehat{N}_\Omega$ .

2) On a aussi  $nU_{\alpha,r} n^{-1} = U_{w\alpha, r + \omega(\mu(t))}$ , donc  $nU_\Omega n^{-1} = U_{\nu(n).\Omega}$ ,  $nN_\Omega^u n^{-1} = N_{\nu(n).\Omega}^u$  et  $\widehat{N}_\Omega$  normalise les groupes  $U_\Omega$ ,  $P_\Omega$ ,  $N_\Omega^u$  et  $N_\Omega^{min}$ .

3) D'après 1) on a  $Ad(n)\mathcal{U}_\Omega(\Psi) = \mathcal{U}_{\nu(n),\Omega}(w\Psi)$  pour  $\Psi \subset \Delta^+$ . Pour  $n = m(x_\alpha(\pm 1))$  ( $\alpha$  racine simple) et  $\Psi_\alpha = \Delta^+ \cap s_\alpha(\Delta^+) = \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$ , on peut passer aux complétés :  $Ad(n).\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p(\Psi_\alpha) = \widehat{\mathcal{U}}_{\nu(n),\Omega}^p(\Psi_\alpha)$ . Donc  $nU_\Omega^{ma}(\Psi_\alpha)n^{-1} = U_{\nu(n),\Omega}^{ma}(\Psi_\alpha)$ ; plus précisément pour  $\beta \in \Psi_\alpha$ ,  $x \in \mathfrak{g}_{\beta\mathbb{Z}}$  et  $\lambda \in K$ ,  $n.[exp]\lambda x.n^{-1}$  est une exponentielle tordue associée à  $\lambda' = \lambda\beta(t) \in K$  et  $Ad(n_0).x \in \mathfrak{g}_{s_\alpha(\beta)\mathbb{Z}}$  et cela passe aux produits infinis.

D'après 2) et 4.5.6 on a  $nU_\Omega^{ma}(\Delta^+)n^{-1} = U_{\nu(n),\Omega}^{ma}(w\Delta^+)$  si  $w = s_\alpha$ . Ce résultat s'étend alors au cas général pour  $w$ . Par intersection avec  $G$ , on a  $nU_\Omega^{pm}(\Delta^+)n^{-1} = U_{\nu(n),\Omega}^{pm}(w\Delta^+)$ .

D'après 4.6, on a  $nU_\Omega^{pm}n^{-1} = U_{\nu(n),\Omega}^{pm}$  et  $nU_\Omega^{nm}n^{-1} = U_{\nu(n),\Omega}^{nm}$ . En particulier  $\widehat{N}_\Omega$  normalise  $U_\Omega^{pm}$  et  $U_\Omega^{nm}$ .

**Lemme 4.11.** *Si  $\Omega$  est un ensemble,  $\widetilde{P}_\Omega \cap U^+N = U_\Omega^{pm+}.\widetilde{N}_\Omega$  et  $\widetilde{P}_\Omega \cap U^-N = U_\Omega^{nm-}.\widetilde{N}_\Omega$ . De plus  $\widetilde{N}_\Omega$  est le stabilisateur (dans  $N$  pour l'action  $\nu$  sur  $\mathbb{A}$ ) du  $\mathcal{P}$ -enclos  $cl_{\mathcal{P}}(\Omega)$  de  $\Omega$ , il normalise  $U_\Omega$ ,  $U_\Omega^{pm+}$ ,  $U_\Omega^{nm-}$ , ...*

**N.B.** En particulier  $\widetilde{N}_\Omega \supset \widehat{N}_\Omega \supset N_\Omega^{min}$ .

*Démonstration.* On refait la preuve de [GR-08, 3.10] car il y a quelques changements substantiels.

a) Soient  $n \in N$  et  $u \in U^+$  tels que  $un \in \widetilde{P}_\Omega$  et  $w = \nu^v(n)$ . Pour  $\mathcal{M} = M_\Omega$  ou  $\mathfrak{g}_\Omega$  ou  $\mathcal{U}_\Omega$ ,  $g \in \widetilde{P}_\Omega$  et  $\mu, \mu' \in X$ , on définit  ${}_{\mu'}g|_\mu$  comme la restriction de  $g$  à  $\mathcal{M}_\mu$  suivie de la projection sur  $\mathcal{M}_{\mu'}$  (parallèlement aux autres espaces de poids). Pour tout  $\mu \in X$ ,  ${}_{w\mu}|un|_\mu = {}_{w\mu}|n|_\mu$  et  $n = \bigoplus_{\mu} {}_{w\mu}|n|_\mu$  (en un sens évident), donc  $n \in \widetilde{N}_\Omega$ . Ainsi  $\widetilde{P}_\Omega \cap U^+N = (\widetilde{P}_\Omega \cap U^+).\widetilde{N}_\Omega$ . Il reste à déterminer  $\widetilde{N}_\Omega$  et  $\widetilde{P}_\Omega \cap U^+$  (ainsi que  $\widetilde{P}_\Omega \cap U^-$ ).

b) On a vu en 4.8 que  $U_\Omega^{pm+} \subset \widetilde{P}_\Omega \cap U^+$ . Inversement soit  $u \in U^{ma+}$  stabilisant  $\mathcal{U}_\Omega$  et donc  $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p$ . On peut écrire  $u = \prod_{\alpha \in \Delta^+} u_\alpha$  avec les conventions suivantes : l'ordre des facteurs  $u_\alpha$  est tel que la hauteur croît de droite à gauche et, pour  $\alpha \in \Delta^+$ ,  $u_\alpha = [exp]t_{\alpha 1}e_{\alpha 1} \cdots [exp]t_{\alpha s}e_{\alpha s}$  avec  $e_{\alpha 1}, \dots, e_{\alpha s}$  une base de  $\mathfrak{g}_{\alpha\mathbb{Z}}$  et les  $t_{\alpha i}$  dans  $K$  (si  $\alpha \in \Phi^+$  on a  $s = 1$  et  $[exp] = exp$ ). Nous allons montrer que  $u \in U_\Omega^{ma+}$  et pour cela que,  $\forall \alpha \in \Delta^+$ ,  $\omega(t_{\alpha i}) \geq f_\Omega(\alpha)$ . Par récurrence on peut supposer que c'est vrai pour  $u_{\alpha'}$  à droite de  $u_\alpha$ , alors ces  $u_{\alpha'}$  sont dans  $U_\Omega^{ma+}$  et stabilisent  $\widehat{\mathcal{U}}_\Omega^p$ , on peut donc les supposer égaux à 1. Donc  $u = (\prod_{ht(\beta) \geq ht(\alpha)}^{\beta \neq \alpha} u_\beta).u_\alpha$  et ainsi  ${}_\alpha|u|_0 = {}_\alpha|u_\alpha|_0$ .

Choisissons un élément  $h \in \mathcal{B}_0$  (base de  $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}$ ) tel que  $\alpha(h) = m \neq 0$ ; quitte à changer  $h$  en  $-h$  et donc à utiliser une autre base de  $\mathcal{U}_\mathbb{Z}$ , on peut supposer  $m > 0$ . Par ailleurs

$$Ad([exp]t_{\alpha i}e_{\alpha i}) = \sum_{p=0}^{\infty} t_{\alpha i}^p ad(e_{\alpha i}^{[p]}) \text{ et } Ad(u_\alpha) \binom{h}{n} \text{ a pour terme de poids } \alpha \text{ l'expression}$$

$$\sum_{i=1}^s t_{\alpha i} ad(e_{\alpha i}) \binom{h}{n} = \sum_{i=1}^s t_{\alpha i} (e_{\alpha i} \binom{h}{n} - \binom{h}{n} e_{\alpha i}) = - \sum_{i=1}^s t_{\alpha i} e_{\alpha i} \binom{h + \alpha(h)}{n} - \binom{h}{n}$$

$$\binom{h}{n} = - \sum_{i=1}^s t_{\alpha i} e_{\alpha i} \left( \sum_{q=0}^{n-1} \binom{h}{q} \binom{\alpha(h)}{n-q} \right) \text{ et doit être dans } \mathcal{U}_{\alpha,\Omega}. \text{ Comme les } e_{\alpha i} \binom{h}{q}$$

pour  $1 \leq i \leq s$  et  $q \in \mathbb{N}$  font partie d'une base de  $\mathcal{U}_\mathbb{Z}$ , on doit avoir  $\omega(t_{\alpha i} \binom{\alpha(h)}{n-q}) \geq f_\Omega(\alpha)$  pour  $1 \leq i \leq s$  et  $q \leq n-1$ . Pour  $n = m$  et  $q = 0$  on obtient le résultat cherché  $\omega(t_{\alpha i}) \geq f_\Omega(\alpha)$

c) Reprenons les notations de 4.10 :  $nM_{\mu,r} = M_{w\mu,r+\omega(\mu(t))}$  et  $nD(\mu,r) = D(w\mu,r + \omega(\mu(t)))$ . Donc  $n \in \widetilde{P}_\Omega$  si et seulement si,  $\forall \mu \in \mathcal{P}$ ,  $f_\Omega(\mu) + \omega(\mu(t)) = f_\Omega(w\mu)$  c'est à dire  $nD(\mu, f_\Omega(\mu)) = D(w\mu, f_\Omega(w\mu))$ ; c'est équivalent au fait que  $n$  stabilise l'ensemble  $cl_{\mathcal{P}}(\Omega)$ .



Le groupe  $\widetilde{N}_\Omega$  normalise  $U_\Omega, U_\Omega^{pm+}, U_\Omega^{nm-}, \dots$  car ces groupes ne dépendent que de  $cl_{\mathcal{P}}(\Omega)$ .  $\square$

**Exemples 4.12.** 1) Soit  $x$  un point spécial de  $\mathbb{A}$  et  $\Omega = \{x\}$ , alors  $cl_{\mathcal{P}}(x)$  est une partie bornée de  $\{y \in \mathbb{A} \mid \alpha(y) = \alpha(x), \forall \alpha \in \Phi\} = cl(x)$ , car tout élément de  $X$  est combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{Q}^+$  d'éléments de  $\mathcal{P}$ . Donc  $\widetilde{N}_x = \widehat{N}_x = N_x^{min}$  (car  $\nu^v(N_x^{min}) = W^v$  cf. 4.3). D'après 4.7 et 4.11, on a  $\widetilde{P}_x = U_x^{pm+} \cdot N_x^{min} \cdot U_x = U_x^{pm+} \cdot U_x \cdot N_x^{min} = P_x^{pm} = P_x^{nm}$ .

2) Si de plus  $x = 0$  est l'origine de  $\mathbb{A}$ , on a  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}$  et  $M_0 = M_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}$  pour tout module à plus haut ou plus bas poids. Il est clair que ces modules sont stables par  $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$  (3.7 et 3.14). Donc  $\widetilde{P}_0 \supset \mathfrak{G}(\mathcal{O})$ . On a  $H, U_0 \subset \mathfrak{G}(\mathcal{O})$  par construction et aussi  $U_0^{++} = \mathfrak{U}^+(\mathcal{O})$ . Comme  $U_0^{ma+} = \mathfrak{U}^{ma+}(\mathcal{O})$  (3.2 et 4.5.2), on a  $U_0^{pm+} = \mathfrak{U}^+(K) \cap \mathfrak{U}^{ma+}(\mathcal{O})$ .

On se demande si cette dernière intersection est égale à  $\mathfrak{U}^+(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{U}_\#^+(\mathcal{O})$  (resp.  $\mathfrak{U}_\#^+(\mathcal{O})$ ) (voir 1.6.5). Cela prouverait que  $\widetilde{P}_0 = P_0^{pm} = P_0^{nm} = \mathfrak{G}(\mathcal{O})$  (resp. peut-être  $\mathfrak{G}_\#(\mathcal{O})$ ). Un résultat analogue a été prouvé dans [GR-08, 3.14] quand le corps résiduel de  $K$  contient  $\mathbb{C}$ . Mais il concerne le groupe minimal  $\mathfrak{G}$  à la Kumar avec sa structure de ind-groupe (sur  $\mathbb{C}$  mais étendue aux  $\mathbb{C}$ -algèbres). Il pourrait donc ne pas avoir de rapport avec le résultat cherché ici, car 3.20 ne donne une identification que pour les points rationnels sur  $\mathbb{C}$  des groupes maximaux ou minimaux. Le foncteur en groupes minimal  $\mathfrak{G}$  n'est pas forcément le meilleur choix sur tous les anneaux, un foncteur  $\mathfrak{G}_\#$ , comme en 1.6.1, peut être plus adapté, voir 3) ci-dessous.

D'après 3.17 et 1.6.5 (KMG7), on a toujours  $\mathfrak{G}(K) \cap \mathfrak{U}^{ma+}(K) = \mathfrak{U}^+(K)$  et  $\mathfrak{U}_\#^+(\mathcal{O}) = \mathfrak{U}^+(K) \cap \mathfrak{G}_\#(\mathcal{O})$  mais cela ne permet pas de répondre aux questions.

3) Cas de  $\widetilde{SL}_2$  : On considère le SGR  $\mathcal{S} = \left( \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, Y = \mathbb{Z}h, \bar{\alpha}_0 = -\bar{\alpha}_1, \alpha_0^\vee = -\alpha_1^\vee = -h \right)$ . L'algèbre de Kac-Moody correspondante est  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ , voir 2.12. Si on pose  $\delta = \alpha_0 + \alpha_1 \in Q$ , on a  $\Delta_{im}^+ = \mathbb{N}^* \delta$ ,  $\Delta_{re}^+ = \{\alpha_1 + n\delta, \alpha_0 + n\delta \mid n \in \mathbb{N}\}$  et les espaces propres sont, pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathfrak{g}_{n\delta} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} t^n & 0 \\ 0 & -t^n \end{pmatrix}$ ,  $\mathfrak{g}_{\alpha_1+n\delta} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & t^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathfrak{g}_{\alpha_0+n\delta} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$ .

a) La représentation naturelle  $\pi$  de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  sur  $End_{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]^2)$  (2.12) induit une identification de  $G = \mathfrak{G}(K)$  et  $SL_2(K[t, t^{-1}])$  qui envoie  $U^+ = \mathfrak{U}^+(K)$  sur le groupe des matrices de  $SL_2(K[t])$  qui sont triangulaires supérieures strictes modulo  $t$ . Le foncteur en groupe  $\mathfrak{G}_\#$  de 1.6.1 peut être choisi tel que  $\mathfrak{G}_\#(k) = SL_2(k[t, t^{-1}])$  pour tout anneau  $k$ . On sait que le groupe  $U^+$  est produit libre des sous-groupes  $\begin{pmatrix} 1 & K[t] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle U_{\alpha_1+n\delta}(K) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$  et

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ tK[t] & 0 \end{pmatrix} = \langle U_{\alpha_0+n\delta}(K) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ , cf. [T-87, 3.10d]; et on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varpi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \varpi t & t \\ -\varpi^2 t & 1 + \varpi t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varpi^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varpi^2 t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\varpi^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où on note  $\varpi$  un élément non nul de l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}$  (e.g. une uniformisante dans le cas discret).

Cet élément  $g \in G$  est dans  $U_0$  (d'après l'expression de gauche) et dans  $U^+$  (expression du milieu ou de droite) donc dans  $U_0^+$ . Cependant l'expression de droite montre que  $g$  n'est pas dans  $U_0^{++}$ , puisqu'il y a unicité des décompositions dans le produit libre  $U^+$ . On a donc une inclusion stricte :  $\mathfrak{U}^+(\mathcal{O}) = U_0^{++} \subsetneq U_0^+$ .

b) La représentation naturelle  $\pi$  permet d'identifier  $G^{pma} = \mathfrak{G}^{pma}(K)$  à  $SL_2(K((t)))$ ; voir [Kr-02, 13.2.8] pour un résultat voisin. Dans cette identification  $\mathfrak{U}^{ma+}(K)$  (resp.  $\mathfrak{U}^{ma+}(\mathcal{O})$ )

devient le groupe des matrices de  $SL_2(K[[t]])$  (resp.  $SL_2(\mathcal{O}[[t]])$ ) qui sont triangulaires supérieures strictes modulo  $t$  (l'ingrédient essentiel de la démonstration a été expliqué en 2.12). On s'est demandé en 2) si  $U_0^{pm+} = \mathfrak{U}^{ma+}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{U}^+(K) = \mathfrak{U}^{ma+}(\mathcal{O}) \cap SL_2(K[t, t^{-1}])$  est égal à  $\mathfrak{U}^+(\mathcal{O})$  (c'est impossible d'après a) ) ou éventuellement à  $\mathfrak{U}_\#^+(\mathcal{O}) = \mathfrak{U}^+(K) \cap \mathfrak{G}_\#(\mathcal{O})$ . Ce dernier groupe est formé des matrices de  $SL_2(\mathcal{O}[t])$  qui sont triangulaires supérieures strictes modulo  $t$ , il est donc bien égal à  $U_0^{pm+} = \mathfrak{U}^{ma+}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{G}(K)$ .

On a donc :

$$\mathfrak{U}^+(\mathcal{O}) = U_0^{++} \subsetneq U_0^+ = U_0 \cap U^+ \subset \mathfrak{G}(\mathcal{O}) \cap U^+ \subset \mathfrak{G}_\#(\mathcal{O}) \cap U^+ = \mathfrak{U}_\#^+(\mathcal{O}) = U_0^{pm+}.$$

En particulier  $\mathfrak{U}^+ \neq \mathfrak{U}_\#^+$ . Mais en fait  $U_0 = \mathfrak{G}_\#(\mathcal{O})$  et  $U_0^{pm+} = U_0^+ = \mathfrak{U}_\#^+(\mathcal{O})$ , car  $U_0$  est le groupe engendré par les matrices élémentaires de  $SL_2(\mathcal{O}[t, t^{-1}])$  et on sait que celui-ci est égal à  $SL_2(\mathcal{O}[t, t^{-1}]) = \mathfrak{G}_\#(\mathcal{O})$  [Cu-84, th. 3.1]<sup>1</sup>.

**Définition 4.13.** Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{A}$ . On définit le groupe  $\widehat{P}_\Omega$  comme l'intersection des groupes  $\widehat{P}_{\Omega'}$  où  $\Omega'$  est une partie non vide de  $\overline{\Omega}$ ,  $L/K$  une extension valuée et  $\widehat{P}_{\Omega'}^L$  est le groupe construit de manière analogue à  $\widehat{P}_{\Omega'}$  dans  $\mathfrak{G}(L)$ . (On sait que  $\mathfrak{G}(K)$  s'injecte fonctoriellement dans  $\mathfrak{G}(L)$  cf. 1.6.)

Si  $\Omega$  est un filtre de parties de  $\mathbb{A}$ , on définit  $\widehat{P}_\Omega = \cup_{\Omega' \in \Omega} \widehat{P}_{\Omega'}$ .

Si  $\Omega$  est un point ou une facette de  $\mathbb{A}$ , on dira que  $\widehat{P}_\Omega$  est le "fixateur" de  $\Omega$  voir ci-dessous 5.1 et 5.7.2.

**Propriétés.** 1) On a une functorialité évidente en le corps des différents groupes ou algèbres définis jusqu'en 4.6 (i.e. sauf  $\widehat{P}_\Omega$  et  $\widehat{P}_\Omega$ ). En particulier le sous-groupe  $\widehat{P}_\Omega$  de  $\widehat{P}_\Omega^L$  contient les groupes  $P_\Omega^{pm}$ ,  $P_\Omega^{nm}$ ,  $P_\Omega$  et  $\widehat{N}_\Omega$ . D'après 4.10, pour  $n \in N$  on a  $\widehat{P}_{\nu(n)\Omega} = n\widehat{P}_\Omega n^{-1}$ . Bien sûr si  $\Omega \subset \Omega'$ , on a  $\widehat{P}_\Omega \supset \widehat{P}_{\Omega'}$ .

2) Soient  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{A}$  et  $x$  un point de  $\overline{\Omega}$ . Il existe une extension valuée  $L/K$  telle que  $x$  soit un point spécial de  $\mathbb{A}^L$  (e.g. si  $\omega(L^*) = \mathbb{R}$ ). D'après 4.12.1 on a  $N(L) \cap \widehat{P}_x^L = \widehat{\mathfrak{N}}(L)_x$ , donc  $N \cap \widehat{P}_\Omega = \widehat{N}_\Omega = \widehat{N}_\Omega$ . Cette relation est encore valable si  $\Omega$  est un filtre. Par contre, même pour un ensemble, on ne sait pas si l'inclusion  $\cap_{x \in \Omega} \widehat{P}_x \subset \widehat{P}_\Omega$  est toujours une égalité.

3) Si  $\Omega$  est un ensemble,  $U_\Omega^{pm+} \cdot \widehat{N}_\Omega \subset \widehat{P}_\Omega \cap U^+ N \subset \cap_{\Omega', L} \widehat{P}_{\Omega'}^L \cap \mathfrak{U}^+(L) \mathfrak{N}(L) = \cap_{\Omega', L} \mathfrak{U}_{\Omega'}^{pm+}(L) \widehat{N}_{\Omega'}^L = (\cap_{\Omega', L} \mathfrak{U}_{\Omega'}^{pm+}(L)) \cdot (\cap_{\Omega', L} \widehat{N}_{\Omega'}^L) = U_\Omega^{pm+} \cdot \widehat{N}_\Omega$ , d'après 1), 2) ci-dessus, 4.11 et l'unicité dans les décompositions de 3.16. Donc  $\widehat{P}_\Omega \cap U^+ N = U_\Omega^{pm+} \cdot \widehat{N}_\Omega$ ,  $\widehat{P}_\Omega \cap U^+ = U_\Omega^{pm+}$  et ceci est encore valable pour un filtre.

4) Si  $\Omega$  est étroit on a, d'après 4.7,  $\widehat{P}_\Omega = U_\Omega^{pm+} \cdot \widehat{N}_\Omega \cdot U_\Omega = U_\Omega^{pm+} \cdot U_\Omega \cdot \widehat{N}_\Omega = U_\Omega^{pm+} \cdot U_\Omega^- \cdot \widehat{N}_\Omega = U_\Omega^{nm-} \cdot U_\Omega^+ \cdot \widehat{N}_\Omega$ . Ainsi  $\widehat{P}_\Omega = P_\Omega^{pm} \cdot \widehat{N}_\Omega = P_\Omega^{nm} \cdot \widehat{N}_\Omega$ .

5) On ne va utiliser  $\widehat{P}_\Omega$  que si  $\Omega$  est un point ou une facette et, dans ce cas, on ne définira que plus tard (5.14) le sous-groupe parahorique  $P_\Omega$  (avec  $P_\Omega^{pm} = P_\Omega^{nm} = P_\Omega \subset \widehat{P}_\Omega$ ).

Les propriétés des groupes  $\widehat{P}_x$  sont résumées dans la proposition suivante.

**Proposition 4.14.** Les groupes  $\widehat{P}_x$  associés aux points de  $\mathbb{A}$  satisfont aux propriétés suivantes :

(P1)  $\widehat{P}_x \cap N = \widehat{N}_x$  (le fixateur de  $x$  dans  $N$ ).

(P2)  $n\widehat{P}_x n^{-1} = \widehat{P}_{\nu(n)x}$ .

(P3)  $\widehat{P}_x = U_x^{pm+} \cdot U_x^{nm-} \cdot \widehat{N}_x = U_x^{nm-} \cdot U_x^{pm+} \cdot \widehat{N}_x$  avec  $U_x^{pm+} = \widehat{P}_x \cap U^+$  et  $U_x^{nm-} = \widehat{P}_x \cap U^-$ .

On a en fait (P3')  $\widehat{P}_x = U_x^{pm+} \cdot U_x^- \cdot \widehat{N}_x = U_x^{nm-} \cdot U_x^+ \cdot \widehat{N}_x$

1. Merci à Leonid Vaserstein pour cette référence.

#### 4.15 Comparaison avec les raisonnements de [GR-08]

La généralisation des résultats de [GR-08] (en particulier le lemme 4.11) à la caractéristique résiduelle positive a nécessité, sans surprise, le remplacement de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_\Omega$  par l'algèbre "enveloppante"  $\mathcal{U}_\Omega$ .

Les raisonnements de [GR-08, sect. 3.7] sont compliqués, entachés d'une ou deux erreurs (dont je suis responsable) et utilisent la symétrisabilité. C'était sans doute trop ambitieux de définir à ce stade les groupes  $P_\Omega$  au lieu des groupes  $\widehat{P}_\Omega$ . On a pu simplifier et généraliser en restreignant l'ambition et en utilisant des extensions de corps (comme suggéré par les travaux de Cyril Charignon [Cn-10] ou [Cn-10b]).

### 5 La mesure affine ordonnée

Dans cette section on ne va utiliser que les propriétés (P1) à (P3) des groupes  $\widehat{P}_x$  indiquées dans la proposition 4.14. La mention qui sera faite des groupes  $\widehat{P}_\Omega$  plus généraux n'est pas indispensable au raisonnement.

**Définition 5.1.** La *mesure*  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathfrak{G}, K)$  de  $\mathfrak{G}$  sur  $K$  est le quotient de l'ensemble  $G \times \mathbb{A}$  par la relation :

$$(g, x) \sim (h, y) \Leftrightarrow \text{il existe } n \in N \text{ tel que } y = \nu(n).x \text{ et } g^{-1}hn \in \widehat{P}_x.$$

Il est clair que  $\sim$  est une relation d'équivalence [BT-72, 7.4.1].

L'application  $\mathbb{A} \rightarrow \mathcal{I}$ ,  $x \mapsto cl(1, x)$  est injective d'après (P1). Elle identifie  $\mathbb{A}$  à son image  $A(T) = A(T, K)$ , l'appartement de  $T$  dans  $\mathcal{I}$ .

L'action à gauche de  $G$  sur  $G \times \mathbb{A}$  induit une action de  $G$  sur  $\mathcal{I}$ . Les appartements de  $\mathcal{I}$  sont les  $g.A(T)$  pour  $g \in G$ . L'action de  $N$  sur  $A(T)$  se fait via  $\nu$ ; en particulier  $H$  fixe (point par point)  $A(T)$ . Par construction le fixateur de  $x \in \mathbb{A}$  est  $G_x = \widehat{P}_x$  et, pour  $g \in G$  on a  $gx \in \mathbb{A} \Leftrightarrow g \in N\widehat{P}_x$ .

Comme  $\widehat{P}_x$  contient  $U_x$ , il est clair que,  $\forall \alpha \in \Phi$ ,  $\forall r \in K$ ,  $x_\alpha(r)$  fixe  $D(\alpha, \omega(r))$ . Donc, pour  $k \in \mathbb{R}$ , le groupe  $HU_{\alpha, k}$  fixe  $D(\alpha, k)$ .

#### 5.2 Les groupes $G_\Omega$

Pour  $\Omega$  une partie de  $\mathbb{A}$ , on note  $G_\Omega = \bigcap_{x \in \Omega} \widehat{P}_x$  et pour  $\Omega$  un filtre,  $G_\Omega = \bigcup_{\Omega' \in \Omega} G_{\Omega'}$ . Le groupe  $G_\Omega$  est le fixateur de  $\Omega$  (pour l'action de  $G$  sur  $\mathcal{I}$  qui contient  $\mathbb{A}$ ).

Par construction de  $\widehat{P}_\Omega$ , on a  $G_\Omega \supset \widehat{P}_\Omega$  (donc  $G_\Omega \supset U_\Omega^{pm+}, U_\Omega^{nm-}$ ) et  $G_\Omega \cap N = \widehat{N}_\Omega = \widehat{P}_\Omega \cap N$ .

D'après 4.5.4d et (P3) on a  $G_\Omega \cap U^+ = U_\Omega^{pm+}$  et  $G_\Omega \cap U^- = U_\Omega^{nm-}$ .

**Lemme.** *Le sous-ensemble  $G(\Omega \subset \mathbb{A})$  de  $G$  consistant en les  $g \in G$  tels que  $g\Omega \subset \mathbb{A}$  est  $G(\Omega \subset \mathbb{A}) = \bigcup_{\Omega' \in \Omega} (\bigcap_{x \in \Omega'} N\widehat{P}_x)$ .*

*Démonstration.*  $g\Omega \subset \mathbb{A} \Leftrightarrow \exists \Omega' \in \Omega, g\Omega' \subset \mathbb{A} \Leftrightarrow \exists \Omega' \in \Omega, \forall x \in \Omega', gx \in \mathbb{A} \Leftrightarrow \exists \Omega' \in \Omega, \forall x \in \Omega', g \in N\widehat{P}_x$ .  $\square$

**Définition 5.3.** On considère les conditions suivantes :

$$(GF+) \quad G_\Omega = U_\Omega^{pm+} \cdot U_\Omega^{nm-} \cdot \widehat{N}_\Omega.$$

$$(GF-) \quad G_\Omega = U_\Omega^{nm-} \cdot U_\Omega^{pm+} \cdot \widehat{N}_\Omega.$$

$$(TF) \quad G(\Omega \subset \mathbb{A}) = NG_\Omega.$$

On dit que  $\Omega$  a un *fixateur transitif* s'il satisfait (TF).

On dit que  $\Omega$  a un *assez bon fixateur* s'il satisfait (TF) et (GF+) ou (GF-).

On dit que  $\Omega$  a un *bon fixateur* s'il satisfait (TF), (GF+) et (GF-).

D'après la remarque 4.6c, cette définition ne dépend pas du choix de  $\Delta^+$  dans sa classe de  $W^v$ -conjugaison. La condition (GF+) ou (GF-) implique que  $G_\Omega = \widehat{P}_\Omega$  (4.13.1); le groupe  $N$  permute les filtres satisfaisant (GF+), (GF-) ou (TF) et les fixateurs correspondants (cf. 4.13.1).

D'après (P3) et 5.1 un point a toujours un bon fixateur.

**Lemme 5.4.** *Soit  $\Omega$  un filtre de parties de  $\mathbb{A}$ . Si  $\Omega$  a un fixateur transitif, alors  $G_\Omega$  est transitif sur les appartements contenant  $\Omega$ .*

*Démonstration.* C'est classique et dans [GR-08, Rem. 4.2]. □

**Conséquence.** Alors  $G_\Omega$  et tous ses sous-groupes normaux ne dépendent pas du choix de l'appartement contenant  $\Omega$ .

**Proposition 5.5.** *1) Supposons  $\Omega \subset \Omega' \subset cl(\Omega)$ . Si  $\Omega$  dans  $\mathbb{A}$  a un bon (ou assez bon) fixateur, alors c'est également vrai pour  $\Omega'$  et  $G_\Omega = \widehat{N}_\Omega.G_{\Omega'}$ ,  $N.G_\Omega = N.G_{\Omega'}$ . En particulier tout appartement contenant  $\Omega$  contient aussi son enclos  $cl(\Omega)$ .*

*Inversement si  $\mathbb{A} = \text{supp}(\Omega)$ , le plus petit espace affine contenant  $\Omega$ , (ou si  $\text{supp}(\Omega') = \text{supp}(\Omega)$ , donc  $\widehat{N}_{\Omega'} = \widehat{N}_\Omega$ ),  $\Omega$  a un assez bon fixateur et  $\Omega'$  a un bon fixateur, alors  $\Omega$  a un bon fixateur.*

*2) Si un filtre  $\Omega$  dans  $\mathbb{A}$  est engendré par une famille  $\mathcal{F}$  de filtres (i.e.  $S \in \Omega \Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{F}, S \in F$ ) avec des bons (ou assez bons) fixateurs, alors  $\Omega$  a un bon (ou assez bon) fixateur  $G_\Omega = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} G_F$ .*

*3) Supposons que le filtre  $\Omega$  dans  $\mathbb{A}$  est la réunion d'une suite croissante  $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (i.e.  $S \in \Omega \Leftrightarrow S \in F_i, \forall i$ ) de filtres avec de bons (ou assez bons) fixateurs et que, pour un certain  $i$ , l'espace  $\text{supp}(F_i)$  a un fixateur fini  $W_0$  dans  $\nu(N) = W_{Y_\Lambda}$ , alors  $\Omega$  a un bon (ou assez bon) fixateur  $G_\Omega = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_{F_i}$ .*

*4) Soient  $\Omega$  et  $\Omega'$  deux filtres dans  $\mathbb{A}$ . Supposons que  $\Omega'$  satisfait à (GF+) (resp. (GF+) et (TF)) et qu'il existe un nombre fini de chambres vectorielles fermées positives  $\overline{C}_1^v, \dots, \overline{C}_n^v$  telles que  $\Omega \subset \bigcup_{i=1,n} \Omega' + \overline{C}_i^v$ . Alors  $\Omega \cup \Omega'$  satisfait à (GF+) (resp. (GF+) et (TF)) et  $G_{\Omega \cup \Omega'} = G_\Omega \cap G_{\Omega'}$ .*

*Démonstration.* Voir [GR-08, prop. 4.3] □

**Remarque 5.6.** Dans 4) ci-dessus, les mêmes résultats sont vrais si on change + en -.

Si  $\Omega'$  a un bon fixateur,  $\Omega \subset \bigcup_{i=1,n} \Omega' + \overline{C}_i^v$  et  $\Omega \subset \bigcup_{i=1,n} \Omega' - \overline{C}_i^v$ , alors  $\Omega \cup \Omega'$  a un bon fixateur.

Si  $\Omega$  satisfait à (GF-),  $\Omega'$  satisfait à (GF+),  $\Omega$  ou  $\Omega'$  satisfait à (TF),  $\Omega \subset \bigcup_{i=1,n} \Omega' + \overline{C}_i^v$  et  $\Omega' \subset \bigcup_{i=1,n} \Omega - \overline{C}_i^v$ , alors  $\Omega \cup \Omega'$  a un bon fixateur.

## 5.7 Exemples de filtres avec de bons fixateurs

Pour les preuves manquantes ci-dessous, voir [GR-08, sect. 4.2].

1) Si  $x \leq y$  ou  $y \leq x$  dans  $\mathbb{A}$  i.e. si  $y-x \in \pm \mathcal{T}$  (cône de Tits), alors  $\{x, y\}$ ,  $[x, y]$  et  $cl(\{x, y\})$  ont de bons fixateurs (5.6 et (P3)). De plus, si  $x \neq y$ ,  $[x, y] = [x, y] \setminus \{x\}$  a un bon fixateur

et le germe de segment  $[x, y) = \text{germ}_x([x, y])$  ou le germe d'intervalle  $]x, y) = \text{germ}_x(]x, y])$  est dit *préordonné* et a un bon fixateur (5.5.2).

Si  $x \overset{\circ}{\leq} y$  ou  $y \overset{\circ}{\leq} x$  dans  $\mathbb{A}$  i.e. si  $y - x \in \pm\mathcal{T}^\circ$  (intérieur du cône de Tits), la demi-droite  $\delta$  d'origine  $x$  et contenant  $y$  est dite *générique* et a un bon fixateur. En effet  $\delta$  est réunion croissante des segments  $[x, x + n(y - x)]$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et, si  $n > 0$ , ce segment a un fixateur fini dans  $W$  (car  $y - x \in \pm\mathcal{T}^\circ$ ); on peut donc appliquer 5.5.3. De même la droite contenant  $x$  et  $y$  a aussi un bon fixateur.

2) Une facette locale  $F^\ell(x, F^v)$ , une facette  $F(x, F^v)$  ou une facette fermée  $\overline{F}(x, F^v)$  a un bon fixateur. Ici et dans la suite  $F^v$  désigne une facette vectorielle et  $C^v$  une chambre vectorielle de  $V$ .

3) Un quartier  $\mathfrak{q} = x + C^v$  a un bon fixateur.

On notera que le fixateur du quartier  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{x, +\infty} = x + C_f^v$  est  $G_{\mathfrak{q}} = HU_{\mathfrak{q}}^{pm} = HU_{\mathfrak{q}}^{pm+}$ , alors que  $HU_{\mathfrak{q}}^{nm} = HU_{\mathfrak{q}}^+ = HU_x^{++}$ , car  $U_{\mathfrak{q}}^{nm-} = \{1\}$  et  $\widehat{N}_{\mathfrak{q}} = H$ . On a vu en 4.12.3 que  $U_x^{++}$  peut être plus petit que  $U_x^+ \subset U_{\mathfrak{q}}^{pm+}$ . On peut donc avoir  $G_{\mathfrak{q}} = HU_{\mathfrak{q}}^{pm} \neq HU_{\mathfrak{q}}^{nm} = HU_{\mathfrak{q}}$ .

4) Un germe de quartier  $\mathfrak{Q} = \text{germ}_\infty(x + C^v)$  a un bon fixateur (5.5.2). Le fixateur de  $\mathfrak{Q}_{\pm\infty} = \text{germ}_\infty(x \pm C_f^v)$  est  $HU^\pm$  car tout élément de  $U^\pm$  est un produit fini d'éléments de groupes  $U_\alpha$  pour  $\alpha \in \Phi^\pm$ . Par contre  $U^{ma+}$  n'est pas la réunion des  $U_\Omega^{ma+}$  pour  $\Omega \in \mathfrak{Q}_\infty$ , on n'a sans doute pas d'action de  $G^{pma}$  sur  $\mathcal{I}$ .

5) L'appartement  $\mathbb{A}$  lui-même a un bon fixateur  $G_{\mathbb{A}} = H$ . Par définition le stabilisateur de  $\mathbb{A}$  est donc  $G(\mathbb{A} \subset \mathbb{A}) = N$ . Comme le corps  $K$  est infini, il résulte alors de 1.6.4 que les appartements de  $\mathcal{I}$  sont en bijection avec les sous-tores déployés maximaux de  $\mathfrak{G}$ .

6) Un mur  $M(\alpha, k)$  a un bon fixateur : soit  $x \in M(\alpha, k)$  et  $\xi$  dans une cloison vectorielle de  $\text{Ker}\alpha$ , alors  $M(\alpha, k)$  est réunion croissante des  $cl(\{x - n\xi, x + n\xi\})$  dont le support  $M(\alpha, k)$  a un fixateur fini ( $\{1, r_{\alpha, k}\}$ ) dans  $W_{Y_\Lambda}$ , on conclut grâce à 1) ci-dessus et 5.5.3. Ce résultat s'étend au cas du support d'une facette sphérique. Le (bon) fixateur de  $M(\alpha, k)$  est  $U_{\alpha, k} \cdot U_{-\alpha, k} \cdot \{1, r_{\alpha, k}\} \cdot H$ .

7) Un demi-appartement  $D(\alpha, k)$  est l'enclos de deux quartiers dont des cloisons sont dans  $M(\alpha, k)$  et opposées, d'après 3) ci-dessus et 5.5.1, 5.5.4, il a un bon fixateur, qui est égal à  $U_{\alpha, k} \cdot H$ .

8) Si  $x_1 \overset{\circ}{\leq} x_2$  i.e. si  $x_2 - x_1 \in \mathcal{T}^\circ$ , alors  $cl(F(x_1, F_1^v), F(x_2, F_2^v))$  a un bon fixateur pour toutes facettes vectorielles  $F_1^v$  et  $F_2^v$  de signes quelconques : d'après 2) ci-dessus on peut appliquer la remarque 5.6 aux facettes locales  $F^\ell(x_1, F_1^v)$  et  $F^\ell(x_2, F_2^v)$ , on conclut grâce à 5.5.1.

9) L'enclos  $cl(F(x, F_1^v), F(x, F_2^v))$  a un bon fixateur dès que les facettes vectorielles  $F_1^v$  et  $F_2^v$  sont de signe opposés ou si l'une d'elles est sphérique. En effet le premier cas est clair par 2) ci-dessus et la remarque 5.6. Si la facette vectorielle  $F_1^v$  est sphérique, elle est contenue dans le cône de Tits ouvert  $\mathcal{T}^\circ$  (ou  $-\mathcal{T}^\circ$ ), il existe donc une chambre  $C^v$  et un  $\xi \in F_1^v$  tels que,  $\forall t > 0$ ,  $\overline{C^v}$  contient  $t\xi - \mathcal{V}_t$  pour un voisinage  $\mathcal{V}_t$  de 0 dans  $F_2^v$ . Alors  $F^\ell(x, F_1^v) \subset x + \overline{C^v}$  et  $F^\ell(x, F_2^v) \subset F^\ell(x, F_1^v) - \overline{C^v}$ . D'après 2) ci-dessus et la remarque 5.6  $F^\ell(x, F_2^v) \cup F^\ell(x, F_1^v)$  a un bon fixateur et on conclut par 5.5.1.

## 5.8 Intersection d'appartements

Soient  $A = g.A(T) = g.\mathbb{A}$  un appartement de  $\mathcal{I}$  et  $x, y \in A$ , la relation  $g^{-1}x \leq g^{-1}y$  (resp.  $g^{-1}x \overset{\circ}{\leq} g^{-1}y$ ) dans  $\mathbb{A}$  ne dépend pas du choix de  $g$  d'après 5.7.5, car  $N$  stabilise le cône de

Tits et son intérieur ; on note cette relation  $x \leq_{Ay}$  (resp.  $x \overset{\circ}{\leq}_A y$ ).

Soient  $A_1, A_2$  deux appartements de  $\mathcal{I}$  et  $x, y \in A_1 \cap A_2$  tels que  $x \leq_{A_1} y$ . Alors  $x \leq_{A_2} y$  (car  $\{x, y\}$  a un bon fixateur). On définit donc ainsi une relation  $\leq$  (et aussi  $\overset{\circ}{\leq}$ ) sur  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  ; on verra en 5.17 que c'est un préordre. Il résulte de 5.5.1 que  $A_1 \cap A_2$  contient  $cl(\{x, y\})$  (calculé dans  $A_1$  ou  $A_2$ ) et en particulier le segment  $[x, y]$  (qui est le même dans  $A_1$  et  $A_2$ ) ; on dit qu'une intersection d'appartements est *convexe pour le préordre  $\leq$* .

## 5.9 Paires conviviales

1) On dit qu'une paire  $(F_1, F_2)$  formée de deux filtres de parties de  $\mathcal{I}$  est *conviviale* s'il existe un appartement contenant ces deux filtres et si deux appartements  $A, A'$  contenant  $F_1, F_2$  sont isomorphes par un isomorphisme fixant l'enclos de  $F_1$  et  $F_2$  (calculé dans  $A$  ou  $A'$ ).

On ne considérera ici que des paires *G-conviviales*, *i.e.* telles que les isomorphismes d'appartements soient induits par des éléments de  $G$ . Une paire  $(F_1, F_2)$  est donc *G-conviviale* dès que  $F_1 \cup F_2$  est contenu dans un appartement et y a un assez bon fixateur.

**2) Lemme.** *Soient  $F_1, F_2$  deux filtres de parties de  $\mathbb{A}$ .*

*Supposons  $G = G_{F_1}.N.G_{F_2}$ , alors pour tous  $g_1, g_2 \in G$ ,  $g_1F_1$  et  $g_2F_2$  sont contenus dans un même appartement.*

*Si  $G = G_{F_1}.N.G_{F_2}$  ou si  $F_1$  ou  $F_2$  a un fixateur transitif, alors  $F_1$  et  $F_2$  sont conjugués par  $G$  si et seulement si ils le sont par  $N$ .*

*Démonstration.* Les conséquences de  $G = G_{F_1}.N.G_{F_2}$  sont classiques, *cf. e.g.* [Ru-06, 3.6 et 3.7]. La dernière assertion résulte de 5.4 et 5.7.5.  $\square$

3) Il résulte donc de la décomposition d'Iwasawa 4.7 et de 5.7.4 qu'un filtre étroit dans un appartement et un germe de quartier sont toujours dans un même appartement. D'après 5.7 et 5.5.4 une facette (ou un germe de segment, un germe d'intervalle, une facette locale, une facette fermée) et un germe de quartier forment une paire *G-conviviale*.

4) Par convexité ordonnée un appartement contenant un point  $x$  et un germe de quartier  $\mathfrak{Q} = germ_\infty(y + C^v)$ , contient le quartier  $\mathfrak{q} = x + C^v$  et son enclos donc son adhérence  $x + \overline{C^v}$ . On en déduit qu'une facette  $F(x, F^v)$  et un filtre étroit  $F$  contenant  $x$  sont toujours dans un même appartement. Ainsi, d'après 5.7.9, deux facettes  $F(x, F_1^v)$  et  $F(x, F_2^v)$  en le même point forment une paire *G-conviviale* dès que  $F_1^v$  et  $F_2^v$  sont de signes opposés ou si l'une d'elles est sphérique.

5) Soient  $C = F(x, C^v)$  une chambre de  $\mathbb{A}$  et  $M(\alpha, k)$  l'un de ses murs (avec  $C \subset D(\alpha, k)$ ). Alors  $U_{\alpha, k} = U_{\alpha, C}$  agit transitivement sur les chambres  $C' \neq C$  adjacentes à  $C$  le long de  $M(\alpha, k)$  ; en particulier n'importe laquelle de ces chambres  $C'$  est dans un même appartement que le demi-appartement  $D(\alpha, k)$ , *cf.* [GR-08, 4.3.4]. De plus  $C'$  et  $D(\alpha, k)$  forment une paire conviviale : si  $C' \subset \mathbb{A}$ ,  $C' \cup D(\alpha, k)$  a un bon fixateur  $H.U_{\alpha, k+}$  (5.7.7).

6) On a vu en [GR-08, 6.10] que deux points de la mesure  $\mathcal{I}$  ne sont pas toujours contenus dans un même appartement. C'est pour cette raison que l'on a abandonné le nom d'immeuble pour  $\mathcal{I}$  ; une définition abstraite des mesures affines n'est pas possible dans des termes approchant ceux de [Ru-08], d'où la définition de [Ru-10] inspirée de [T-86]. On reproduit ci-dessous cette définition dans une formulation utilisant la notion de paire conviviale.

Une paire de points ou une paire de facettes de  $\mathcal{I}$  n'est pas toujours conviviale. De plus pour l'exemple 4.12.3 de  $\widetilde{SL}_2$ , on peut trouver deux points de  $\mathbb{A}$  dont le fixateur n'est pas

assez bon. Par contre il est peut-être possible que le fixateur de deux points de  $\mathbb{A}$  soit toujours transitif.

**Définition 5.10.** Une *mesure affine* de type  $\mathbb{A}$  est un ensemble  $\mathcal{I}$  muni d'un recouvrement par un ensemble  $\mathcal{A}$  de sous-ensembles appelés *appartements* tel que :

(MA1) Tout  $A \in \mathcal{A}$  est muni d'une structure d'appartement de type  $\mathbb{A}$  (au sens de [Ru-10, 1.13] *i.e.* est "isomorphe" à  $\mathbb{A}$ ).

(MA2) Si  $F$  est un point, un germe d'intervalle préordonné, une demi-droite générique ou une cheminée solide d'un appartement  $A$ , alors  $(F, F)$  est une paire conviviale.

(MA3+4) Si  $\mathfrak{R}$  est un germe de cheminée évasée, si  $F$  est une facette ou un germe de cheminée solide, alors  $(\mathfrak{R}, F)$  est une paire conviviale.

(La notion de cheminée, utilisée ci-dessus, ne sera définie qu'en 5.15.1.)

La mesure affine  $\mathcal{I}$  est dite *ordonnée* si elle vérifie l'axiome supplémentaire suivant :

(MAO) Soient  $x, y$  deux points de  $\mathcal{I}$  et  $A, A'$  deux appartements les contenant ; si  $x \leq y$  (dans  $A$ ), alors les segments  $[x, y]_A$  et  $[x, y]_{A'}$  définis par  $x$  et  $y$  dans  $A$  et  $A'$  sont égaux.

La mesure affine  $\mathcal{I}$  est dite *épaisse* si toute cloison de  $\mathcal{I}$  est dans l'adhérence d'au moins trois chambres.

## 5.11 Extension centrale finie du groupe

Contrairement aux conventions depuis 4.0, on va modifier le SGR.

Soit  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  un morphisme de SGR libres qui est une extension centrale finie. On abrégera  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}$  en  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}'}$  en  $\mathfrak{G}'$ ,  $\mathfrak{G}_{\varphi}$  en  $\varphi$ , etc.

Alors  $Y$  est un sous-module de  $Y'$  de même rang, donc  $V = V'$  et, comme  $I = I'$ , on a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ ,  $\Phi = \Phi'$ . Le morphisme  $\varphi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}'$  est décrit en 1.10 et 1.13, en particulier  $G' = T' \cdot \varphi(G)$ ,  $\varphi^{-1}(N') = N$  et le noyau de  $\varphi$  est dans  $T$  et même dans  $H$  puisqu'il est fini.

Par construction (4.2) les appartements affines  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{A}'$  sont identiques, les actions  $\nu$  et  $\nu'$  de  $N$  et  $N'$  sont compatibles et on a les mêmes murs puisque pour  $\alpha \in \Phi$ ,  $\mathfrak{G}_{\varphi} \circ \mathfrak{r}_{\alpha} = \mathfrak{r}'_{\alpha}$  et  $\mathfrak{G}_{\varphi}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}'$ . Les images  $\nu(N) = W_{Y\Lambda} = W^v \times (Y \otimes \Lambda)$  et  $\nu'(N') = W_{Y'\Lambda} = W^v \times (Y' \otimes \Lambda')$  sont en général différentes (4.2.6), mais on a  $T = \varphi^{-1}(T')$  et  $N' = \varphi(N)T'$ .

Pour  $\Omega \subset \mathbb{A}$ , les algèbres de Lie  $\mathfrak{g}_{\Omega}$  et  $\mathfrak{g}'_{\Omega}$  ont les mêmes composantes de poids non nul, *cf.* 2.2 (ce n'est pas vrai en poids nul : si  $K$  est de caractéristique positive l'application de  $\mathfrak{h}_K$  dans  $\mathfrak{h}'_K$  peut même ne pas être injective). Ainsi l'isomorphisme  $\varphi$  de  $U^{\text{ma}+}$  sur  $U'^{\text{ma}+}$  (3.19.3) induit un isomorphisme de  $U_{\Omega}^{\text{ma}+}$  sur  $U'_{\Omega}{}^{\text{ma}+}$  et aussi de  $U_{\Omega}^{\text{pm}+}$  sur  $U'_{\Omega}{}^{\text{pm}+}$ , on identifie ces groupes. On a les résultats symétriques pour  $U_{\Omega}^{\text{nm}-}$  et  $U'_{\Omega}{}^{\text{nm}-}$ , etc. Comme les actions de  $N$  et  $N'$  sur  $\mathbb{A}$  sont compatibles et  $\text{Ker}\varphi \subset T$ , on a  $\widehat{N}_{\Omega} = \varphi^{-1}(\widehat{N}'_{\Omega})$ . Pour  $x \in \mathbb{A}$ , on a donc  $\widehat{P}_x = U_x^{\text{pm}+} \cdot U_x^{\text{nm}-} \cdot \widehat{N}'_x = \varphi(\widehat{P}_x) \cdot \widehat{N}'_x$  et  $\varphi^{-1}(\widehat{P}_x) = \widehat{P}_x$  car  $\text{Ker}\varphi \subset H \subset \widehat{N}_x$ .

Les relations ci-dessus permettent facilement de montrer que l'application  $\varphi \times \text{Id} : G \times \mathbb{A} \rightarrow G' \times \mathbb{A}$  passe au quotient en une bijection de la mesure  $\mathcal{I}$  sur la mesure  $\mathcal{I}'$ . Cette bijection est compatible avec  $\varphi$  et les actions de  $G$  et  $G'$ ; elle échange les facettes. Comme  $G' = \varphi(G)T'$  et  $N = \varphi^{-1}(N')$  les appartements de  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{I}'$  sont les mêmes. On identifie ces deux mesures.

**Proposition 5.12.** Soient  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  une extension centrale finie de SGR libres et  $\Omega$  un filtre de parties de  $\mathbb{A}$ . Alors  $\Omega$  a un bon (ou assez bon) fixateur  $G_{\Omega}$  pour  $G = G_{\mathcal{S}}$  si et seulement si il en a un  $G'_{\Omega}$  pour  $G' = G_{\mathcal{S}'}$ . Dans ce cas  $G'_{\Omega} = \varphi(G_{\Omega}) \cdot \widehat{N}'_{\Omega}$ .

*Démonstration.* Comme les actions de  $G$  et  $G'$  sur  $\mathcal{I}$  sont compatibles, on a  $\varphi^{-1}(G'_{\Omega}) = G_{\Omega}$ .

Supposons que  $G'_\Omega$  est un (assez) bon fixateur (pour le signe +). On a  $G'_\Omega = U_\Omega^{pm+}.U_\Omega^{nm-}.\widehat{N}'_\Omega$ , donc  $G_\Omega = \varphi^{-1}(G'_\Omega) = U_\Omega^{pm+}.U_\Omega^{nm-}.\varphi^{-1}(\widehat{N}'_\Omega) = U_\Omega^{pm+}.U_\Omega^{nm-}.\widehat{N}_\Omega$ , d'où (GF+) pour  $\Omega$  et  $G$ . Soit  $\Omega' \in \Omega$ ,  $G(\Omega' \subset \mathbb{A}) = \cap_{x \in \Omega'} N\widehat{P}_x \subset \varphi^{-1}(\cap_{x \in \Omega'} N'\widehat{P}'_x) \subset \varphi^{-1}(N'G'_\Omega) = \varphi^{-1}(N'.U_\Omega^{nm-}.U_\Omega^{pm+}) = \varphi^{-1}(N').U_\Omega^{nm-}.U_\Omega^{pm+} = N.G_\Omega$ . Donc (TF) est satisfait par le filtre  $\Omega$  et le groupe  $G$ .

Supposons que  $G_\Omega$  est un (assez) bon fixateur (pour le signe +). Soit  $g' \in G'(\Omega \subset \mathbb{A})$ , quitte à multiplier à gauche  $g'$  par un élément de  $T'$  on peut supposer  $g' \in \varphi(G)$ . Donc il existe  $\Omega' \in \Omega$  tel que  $g' \in (\cap_{x \in \Omega'} N'\widehat{P}'_x) \cap \varphi(G) = \cap_{x \in \Omega'} (N'\widehat{P}'_x \cap \varphi(G)) = \cap_{x \in \Omega'} (N' \cap \varphi(G)).\varphi(\widehat{P}_x) = \cap_{x \in \Omega'} \varphi(N).\varphi(\widehat{P}_x) = \varphi(\cap_{x \in \Omega'} N\widehat{P}_x) = \varphi(N.G_\Omega) = \varphi(N).U_\Omega^{nm-}.U_\Omega^{pm+} \subset N'G'_\Omega$ . D'où (TF) pour  $\Omega$  et  $G'$ .

Pour  $g' \in G'_\Omega$ , ce calcul montre que  $g' \in T'.\varphi(N).U_\Omega^{nm-}.U_\Omega^{pm+} = N'.U_\Omega^{nm-}.U_\Omega^{pm+}$ . Mais  $U_\Omega^{nm-}, U_\Omega^{pm+}$  sont dans  $G'_\Omega$ , donc  $g' \in (N' \cap G'_\Omega).U_\Omega^{nm-}.U_\Omega^{pm+} = \widehat{N}'_\Omega.U_\Omega^{nm-}.U_\Omega^{pm+} = \widehat{N}'_\Omega.\varphi(G_\Omega)$ . D'où (GF+) pour  $\Omega$  et  $G'$ , plus la dernière assertion de l'énoncé.  $\square$

### 5.13 Passage au simplement connexe

1) D'après 1.3 on a une suite d'extensions commutatives de SGR  $\mathcal{S}_A \rightarrow \mathcal{S}^1 \hookrightarrow \mathcal{S}^s \rightarrow \mathcal{S}$  qui sont successivement centrale torique, semi-directe et centrale finie. On note  $G^A, G^1, G^s, G$  les groupes correspondants et  $\psi$  le composé des morphismes  $G^A \rightarrow G^1 \hookrightarrow G^s \rightarrow G$ .

D'après 5.11,  $G^s$  et  $G$  ont la même mesure  $\mathcal{I}$ . Par contre  $\mathcal{S}_A$  et  $\mathcal{S}^1$  ne sont en général pas libres, on considère les actions de  $G^A$  et  $G^1$  sur  $\mathcal{I}$  via leurs morphismes dans  $G$ .

2) On a  $G = \psi(G^A).T$  (1.8.3) ; on en déduit aussitôt que le groupe simplement connexe  $G^A$  permute transitivement les appartements de  $\mathcal{I}$ . Le stabilisateur de  $\mathbb{A}$  dans  $G^A$  est le groupe  $\psi^{-1}(N) = N^A = N_{\mathcal{S}_A}$  (1.10) et, d'après la construction de 4.2,  $\nu(N^A) = W = W^v \times (Q^\vee \otimes \Lambda)$ . Ainsi tout appartement de  $\mathcal{I}$  est muni d'une unique structure d'appartement de type  $\mathbb{A}$  telle que  $G^A$  induise des isomorphismes d'appartements (au sens de [Ru-10, 1.13]).

3) Dans [Ru-10, 6.1 et 6.2] on se place dans le cas  $\mathcal{S} = \mathcal{S}^s$  (libre) et le groupe  $G_1$  qui y est défini est égal à  $G^1.H = \psi(G^A).H$ .

### 5.14 Sous-groupes parahoriques et types de facettes

1) Si  $\Omega \subset \mathbb{A}$  a un assez bon fixateur, on a  $G_\Omega = (\psi(G^A) \cap G_\Omega)\widehat{N}_\Omega$ , puisque  $U_\Omega^{pm+}, U_\Omega^{nm-}, \dots$  ne dépendent pas du SGR à extension commutative près. En particulier le fixateur  $G_\Omega^A$  de  $\Omega$  dans  $G^A$  agit transitivement sur les appartements de  $\mathcal{I}$  contenant  $\Omega$ . On note  $P_\Omega = \psi(G_\Omega^A).H$ . Ainsi  $G_\Omega = \widehat{P}_\Omega = P_\Omega.\widehat{N}_\Omega$ . Le groupe  $N_\Omega = N \cap P_\Omega = \widehat{N}_\Omega \cap P_\Omega$  a pour image via  $\nu$  le fixateur  $W_\Omega$  de  $\Omega$  dans  $W$ . On a aussi  $P_\Omega = P_\Omega^{pm}.N_\Omega = P_\Omega^{nm}.N_\Omega$ .

2) Si  $\Omega$  est une facette (éventuellement fermée) ou  $\Omega = \{x\}$  est réduit à un point,  $P_\Omega$  est le *sous-groupe parahorique* associé à  $\Omega$  (on parle de *sous-groupe d'Iwahori* si  $\Omega$  est une chambre). Il est clair que  $F(x, F^v)$  et  $\overline{F}(x, F^v)$  ont le même fixateur dans  $W$ , donc ces deux facettes ont le même sous-groupe parahorique associé.

Si  $\Omega$  est réduit à un point spécial ou si  $\Omega$  est une facette sphérique et si la valuation est discrète, on a vu en 4.3.4 que  $W_\Omega = W_\Omega^{min}$ , on a donc alors  $P_\Omega = P_\Omega^{pm} = P_\Omega^{nm}$ , voir aussi 4.12.1.

3) Le *type* d'un filtre de  $\mathcal{I}$  qui a un assez bon fixateur (en particulier une facette) est son orbite sous  $G^A$ . Dans un appartement  $A$  de  $\mathcal{I}$  deux filtres (assez bien fixés) ont même type si et seulement si ils sont conjugués par le groupe de Weyl  $W_A$  de  $A$  (cf. le 1), 5.9.2 et 5.13.2). Pour les facettes (ou les filtres étroits assez bien fixés) la relation "avoir le même



type” est la relation engendrée par transitivité à partir des relations précédentes dans les appartements. En effet, étant données deux facettes  $F_1, F_2$  il existe toujours un quartier  $\mathfrak{q}$  et des appartements  $A_1, A_2$  contenant  $\mathfrak{q}$  et respectivement  $F_1, F_2$  (cf. 5.9.3); de plus  $\mathfrak{q}$  contient forcément un  $W_{A_i}$ -conjugué de  $F_i$ .

### 5.15 Cheminées

1) Une *cheminée* dans  $\mathbb{A}$  est associée à une facette  $F = F(x, F_0^v)$  (sa base) et une facette vectorielle  $F^v$  (sa direction), c’est le filtre  $\mathfrak{r}(F, F^v) = cl(F + F^v) = cl(\overline{F} + F^v) = cl(F^\ell(x, F_0^v) + F^v) \supset \overline{F} + \overline{F}^v$ .

La cheminée  $\mathfrak{r}(F, F^v)$  est dite *évasée* si  $F^v$  est sphérique, son signe est alors celui de  $F^v$ . Cette cheminée est dite *solide* (resp. *pleine*) si la direction de tout sous-espace affine la contenant a un fixateur fini dans  $W^v$  (resp. est  $V$ ). Une cheminée évasée est solide. L’enclos d’un quartier est une cheminée pleine.

Si  $F_0^v = F^v$  la cheminée  $\mathfrak{r}(F(x, F^v), F^v)$  est l’enclos de la face de quartier  $x + F^v$ ; cette face est dite sphérique si  $F^v$  est sphérique..

Un raccourci de la cheminée  $\mathfrak{r}(F, F^v)$  est défini par un élément  $\xi \in \overline{F}^v$ , c’est la cheminée  $cl(F + \xi + F^v)$ . Le *germe* de la cheminée  $\mathfrak{r}(F, F^v)$  est le filtre  $\mathfrak{R}(F, F^v) = germ_\infty(\mathfrak{r}(F, F^v))$  formé des parties de  $\mathbb{A}$  contenant un de ses raccourcis.

Si  $F^v$  est la facette vectorielle minimale, on a  $\mathfrak{r}(F, F^v) = \mathfrak{R}(F, F^v) = F$ .

2) À la facette vectorielle  $F^v$  est associé un sous-groupe parabolique  $P(F^v)$  de  $G$  avec une décomposition de Lévi  $P(F^v) = M(F^v) \rtimes U(F^v)$ . Le groupe  $M(F^v)$  est engendré par  $T$  et les  $U_\alpha$  pour  $\alpha \in \Phi$  et  $\alpha(F^v) = 0$ , cf. [Ru-10, 6.4] ou [Ry-02, 6.2].

Si  $F^v = F^v(J) = \{v \in \overline{C}_f^v \mid \alpha_j(v) = 0, \forall j \in J\}$  pour  $J \subset I$  (cf. 4.1), le groupe  $M(F^v)$  est clairement un quotient du groupe de Kac-Moody minimal  $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}(J)}(K) = G(J)$  (notations de 3.10). D’après la remarque 3.10 et 3.13 on a en fait égalité :  $M(F^v) = G(J)$ . Ce groupe  $G(J)$  induit sur  $\mathbb{A}$  une structure d’appartement  $\mathbb{A}(J)$  dont les murs sont les  $M(\alpha, k)$  pour  $\alpha \in \Delta(J)$  et  $k \in \Lambda$ . L’enclos correspondant  $cl_J(F)$  est une facette fermée de  $\mathbb{A}(J)$ , on note  $M(F, F^v)$  son fixateur dans  $G(J)$ . Cette construction se réalise aussi si  $F^v$  est une autre facette vectorielle ou si  $F$  est réduit à un point  $F = \{x\}$  (ou  $F = F(x, F^v)$ ).

Le sous-groupe ”parahorique” de  $G$  associé à  $\mathfrak{r}$  est le produit semi-direct  $P^\mu(\mathfrak{r}) = M(F, F^v) \rtimes U(F^v)$ . Il ne dépend en fait que du germe  $\mathfrak{R}(F, F^v)$ , on le note donc aussi  $P^\mu(\mathfrak{R})$ .

Les résultats suivants se démontrent comme dans [Ru-10, § 6].

**3) Proposition.** *Le groupe  $P^\mu(\mathfrak{R})$  fixe (point par point) le germe de cheminée  $\mathfrak{R}$ .*

**4) Proposition.** *Soient  $\mathfrak{R}_1$  et  $\mathfrak{R}_2$  deux germes de cheminées de  $\mathbb{A}$  avec  $\mathfrak{R}_1$  évasé, alors  $G = P^\mu(\mathfrak{R}_1).N.P^\mu(\mathfrak{R}_2)$ .*

**5) Proposition.** *Une cheminée solide et son germe ont de bons fixateurs. Il en est de même pour une face de quartier sphérique  $x + F^v$  et son germe (à l’infini); le fixateur (point par point) de  $germ_\infty(x + F^v)$  est  $M(x, F^v).U(F^v)$ .*

**6) Proposition.** *Soient  $\mathfrak{R}_1$  un germe de cheminée évasée et  $\mathfrak{R}_2$  un germe de cheminée solide ou une facette dans  $\mathbb{A}$ , alors  $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$  a un assez bon fixateur (et même un bon fixateur si  $\mathfrak{R}_2$  est évasé).*

**7) Remarque.** On obtient donc de nouvelles paires  $G$ -conviviales dans  $\mathcal{I}$  : un germe de cheminée évasée et un germe de cheminée solide ou un germe de cheminée évasée et une

facette. Cela permet en particulier de définir des rétractions de  $\mathcal{I}$  sur un appartement  $A$  avec pour centre un germe de cheminée évasée pleine de  $A$  (par exemple un germe de quartier) [Ru-10, 2.6].

**Théorème 5.16.** *La mesure affine  $\mathcal{I}$  construite en 5.1 est une mesure affine ordonnée épaisse au sens de [Ru-10] ou 5.10. Elle est semi-discrète si la valuation  $\omega$  de  $K$  est discrète.*

*Démonstration.* L'axiome (MA1) résulte de 5.13.2 et (MA2) résulte de ce que l'on a vu en 5.7 ou 5.15.5 : les filtres impliqués dans (MA2) ont de bons fixateurs. Enfin (MA3+4) résulte de 5.15.7. Les dernières assertions se montrent comme dans [Ru-10, 6.11]. On notera cependant que l'épaisseur d'une cloison est le cardinal du corps résiduel de  $K$  et donc peut être finie dans notre cas, plus général que celui de [GR-08].  $\square$

**Remarques 5.17.** 1) La mesure  $\mathcal{I}$  a donc toutes les propriétés démontrées dans [Ru-10], un certain nombre d'entre elles ont déjà été prouvées ci-dessus. On obtient cependant au moins deux propriétés intéressantes supplémentaires : les relations  $\leq$  et  $\overset{\circ}{\leq}$  de 5.8 sont des préordres (elles sont transitives) et les résidus en chaque point de  $\mathcal{I}$  ont une structure d'immeubles jumelés.

2) On notera les propriétés de l'action du groupe  $G$  : il est transitif sur les appartements et tous les isomorphismes entre appartements dont l'existence est exigée par les axiomes de [Ru-10] ou 5.10 sont induits par des éléments de  $G$ . On peut dire que l'action de  $G$  est *fortement transitive*. Dans le cas classique d'une action de groupe sur un immeuble affine discret, cette notion de forte transitivité entraîne clairement la notion classique (et lui est sans doute équivalente).

**Proposition 5.18.** *Les immeubles jumelés à l'infini associés à la mesure  $\mathcal{I}$  en [Ru-10, § 3] s'identifient (avec leurs appartements et leur action de  $G$ ) aux immeubles jumelés de  $G$  définis par J. Tits (1.6.5).*

*L'immeuble microaffine positif (resp. négatif) à l'infini associé à la mesure  $\mathcal{I}$  en [Ru-10, § 4] s'identifie (avec ses appartements et son action de  $G$ ) à l'immeuble microaffine de [Ru-06] (dans sa réalisation de Satake) associé à  $G$  et à la valuation  $\omega$  de  $K$  (resp. l'analogue obtenu en changeant le cône de Tits en son opposé).*

**Remarque.** Cyril Charignon construit directement dans [Cn-10] un objet immobilier contenant  $\mathcal{I}$ , les immeubles microaffines ci-dessus et d'autres mesures affines associées aux sous-groupes paraboliques non sphériques de  $G$ . C'est la généralisation au cas Kac-Moody de la compactification de Satake (ou compactification polyédrique) des immeubles de Bruhat-Tits. Cette dernière a été construite abstraitement (sans l'aide d'un groupe) dans [Cn-08].

*Démonstration.* On identifie facilement l'appartement canonique (et son action de  $N$ ) d'un immeuble de [Ru-10] avec celui qui doit lui correspondre, cf. [Ru-10, 3.3.3 et 4.4]. Il reste donc à identifier les fixateurs de points de ces appartements.

Le fixateur de la facette vectorielle (sphérique)  $F^v$  dans l'immeuble de 1.6.5 est le sous-groupe parabolique  $P(F^v)$  engendré par  $T$  et les  $U_\alpha$  pour  $\alpha(F^v) \geq 0$ . Il est clair qu'un élément de chacun de ces groupes transforme une face de quartier de  $\mathbb{A}$  de direction  $F^v$  en une face parallèle (dans  $\mathcal{I}$ ). Ainsi  $P(F^v)$  fixe la classe de parallélisme des faces de quartier correspondant à  $F^v$ .

Un point de l'appartement  $\mathbb{A}^s$  de l'immeuble de [Ru-06] est de la forme  $x^s = (F^v, \tilde{y})$  avec  $F^v$  une facette vectorielle sphérique positive de  $V$ ,  $\langle F^v \rangle$  l'espace vectoriel engendré et

$\tilde{y} \in V/\langle F^v \rangle$  [l.c. , 4.2]. On lui associe le germe (à l'infini) de la face de quartier  $y + F^v$  pour  $y \in \tilde{y}$ . Le fixateur de  $x^s$  est engendré par  $U(F^v)$ , le groupe  $M(x, F^v)$  et le sous-groupe de  $T$  induisant dans  $\mathbb{A}$  des translations de vecteur dans  $\langle F^v \rangle$  [l.c. , 4.2.3]. Les deux premiers groupes engendrent le fixateur point par point du germe de la face de quartier  $y + F^v$  (5.15.5) et le troisième groupe stabilise évidemment ce germe.

Ces inclusions entre les fixateurs de points permettent de définir des applications surjectives et  $G$ -équivariantes des immeubles de 1.6.5 ou [Ru-06] vers les immeubles correspondants de [Ru-10]. Mais un point  $x$  et son transformé  $gx$  sont toujours dans un même appartement et les applications ci-dessus sont injectives sur les appartements. Les inclusions entre fixateurs sont donc des égalités et on a bien les identifications d'immeubles annoncées.  $\square$

## 6 Appendice : Comparaison et simplicité

Pour la construction des mesures nous avons plongé le groupe de Kac-Moody  $\mathfrak{G}_S$  dans le groupe de Kac-Moody maximal à la Mathieu  $\mathfrak{G}_S^{pma}$ . Plaçons nous sur un corps quelconque  $k$  et notons  $G = \mathfrak{G}_S(k)$ ,  $G^{pma} = \mathfrak{G}_S^{pma}(k)$ , etc. Alors  $G^{pma}$  apparaît comme le complété de  $G$  pour une certaine filtration. D'autres groupes maximaux ont été définis par Rémy et Ronan [RR-06] ou Carbone et Garland [CG-03] à l'aide d'autres filtrations, on va essayer de les comparer en tirant parti des résultats des sections 2 et 3.

Par ailleurs Moody, dans un preprint non publié [My-82], a démontré la simplicité d'un groupe analogue à  $G^{pma}$  en caractéristique 0. Là encore on va utiliser les sections 2 et 3 pour montrer dans certains cas la simplicité d'un sous-quotient de  $G^{pma}$  (théorème 6.19).

### 6.1 Le groupe complété à la Rémy-Ronan

1) Ce groupe  $G^{rr}$  est l'adhérence de l'image de  $G$  dans le groupe des automorphismes de son immeuble positif  $\mathcal{I}_+^v$  [RR-06]. Il contient donc le quotient de  $G$  par le noyau  $Z'(G) = \bigcap_{g \in G} gB^+g^{-1}$  de l'action de  $G$  sur cet immeuble. Ce groupe  $Z'(G)$  est en fait le centre de  $G$  :  $Z'(G) = Z(G) = \{t \in T \mid \alpha_i(t) = 1, \forall i \in I\}$  (1.6.5 et [RR-06, lemma 1B1]).

On va s'intéresser plutôt à une variante de  $G^{rr}$  définie par Caprace et Rémy [CR-09, 1.2]. Ce groupe  $G^{crr}$  contient  $G$  et le groupe  $G^{rr}$  en est un quotient.

2) Pour  $r \in \mathbb{N}$ , soit  $D(r)$  (resp.  $C(r)$ ) la réunion des chambres fermées de l'immeuble  $\mathcal{I}_+^v$  (resp. de son appartement standard  $\mathbb{A}^v$ ) qui sont à distance numérique  $\leq r$  de la chambre fondamentale  $C_0$ . Les fixateurs  $U_{D(r)}^+$  et  $U_{C(r)}^+$  de  $D(r)$  et  $C(r)$  dans  $U^+ = \mathfrak{U}^+(k)$  forment deux filtrations de  $U^+$  qui sont exhaustives ( $U_{D(0)}^+ = U_{C(0)}^+ = U^+$ ) et séparées (le système de Tits  $(G, B^+, N, S)$  est saturé *i.e.* le fixateur de  $\mathbb{A}^v$  dans  $G$  est  $T$  [Ru-06, 1.9] et  $T \cap U^+ = \{1\}$  : 1.6.5). De plus  $U_{D(r)}^+$  est le plus grand sous-groupe distingué de  $U^+$  contenu dans  $U_{C(r)}^+$ .

Les deux filtrations sont en fait très liées car, d'après [CR-09, 2.1], il existe une fonction croissante  $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tendant vers l'infini telle que, pour  $\alpha \in \Phi^+$ ,  $U_\alpha \subset U_{C(r)}^+ \Rightarrow U_\alpha \subset U_{D(r(R))}^+$ .

3) On définit de la même manière des fixateurs  $U_{D(r)}^{ma+}$  et  $U_{C(r)}^{ma+}$ , pour l'action de  $U^{ma+}$  sur  $\mathcal{I}_+^v$  (3.18). Les filtrations correspondantes de  $U^{ma+}$  sont plus différentes : l'intersection des  $U_{C(r)}^{ma+}$  contient les groupes  $\mathfrak{U}_{\mathbb{N}^* \alpha}^{ma}(k)$  pour  $\alpha \in \Delta_{im}^+$  (le système de Tits  $(G^{pma}, B^{ma+}, N, S)$  est rarement saturé) et celle des  $U_{D(r)}^{ma+}$  est souvent triviale (*cf.* 6.5).

4) Le groupe  $U^{rr+}$  est le complété de  $U^+$  pour sa filtration par les  $U_{D(r)}^+$ . Plus généralement le groupe  $G^{crr}$  est le complété de  $G$  pour sa filtration (non exhaustive) par les  $U_{D(r)}^+$ ; il est muni de la topologie correspondante. En particulier  $U^{rr+}$  est ouvert dans  $G^{crr}$ .

Le groupe  $G^{rr}$  est le séparé-complété de  $G$  pour la filtration par les fixateurs  $G_{D(r)} \subset B^+$ . C'est un quotient de  $G^{crr}$  par un sous-groupe  $Z'(G^{crr})$  contenant  $Z(G)$  (cf. 1); il contient  $U^{rr+}$ . Si le corps  $k$  est fini,  $Z'(G^{crr}) = Z(G)$  [CR-09, prop.1].

## 6.2 Le groupe complété à la Carbone-Garland

Soit  $\lambda \in X^+$  un poids dominant régulier (*i.e.*  $\lambda(\alpha_i^\vee) > 0, \forall i \in I$ ). On considère la représentation  $\pi_\lambda$  de  $G$  ou  $G^{pma}$  (de plus haut poids  $\lambda$ ) dans  $V^\lambda = L_{\mathbb{Z}}(\lambda) \otimes k$  (3.7.1). Le groupe  $G^{cg\lambda}$  défini par Carbone et Garland [CG-03] est le séparé-complété de  $G$  pour la filtration définie par les fixateurs de parties finies de  $V^\lambda$ , *i.e.* par les fixateurs de sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $V^\lambda$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  soit  $V(n)$  la somme des sous-espaces de  $V^\lambda$  de poids  $\lambda - \alpha$  avec  $\alpha \in Q^+$  et  $\deg(\alpha) \leq n$ . Ainsi  $G^{cg\lambda}$  est le séparé-complété de  $G$  pour la filtration définie par les fixateurs  $G_{V(n)}$  de  $V(n)$ .

Cette filtration n'est pas séparée :  $\cap_n G_{V(n)} = \text{Ker}\pi_\lambda$ . Si  $v_\lambda$  est un vecteur de plus haut poids et si  $g \in \text{Ker}\pi_\lambda$ , il fixe  $v_\lambda$  et  $\tilde{s}_i(v_\lambda) \forall i \in I$ , donc est de la forme  $g = tu$  avec  $t \in T$ ,  $u \in U^+$  et  $\lambda(t) = \tilde{s}_i(\lambda)(t) = 1$ . Mais  $\tilde{s}_i(\lambda) = \lambda - \lambda(\alpha_i^\vee)\alpha_i$  et  $\lambda(\alpha_i^\vee) \neq 0$ , donc  $\lambda(t) = \alpha_i(t) = 1 \forall i \in I : t \in Z(G) \cap \text{Ker}(\lambda)$  (1.6.5). Inversement  $Z(G) \cap \text{Ker}(\lambda)$  agit trivialement sur  $V^\lambda$ , donc  $\text{Ker}\pi_\lambda = (Z(G) \cap \text{Ker}(\lambda)) \cdot (U^+ \cap \text{Ker}\pi_\lambda)$ . On verra plus loin que  $U^+ \cap \text{Ker}\pi_\lambda = \{1\}$  (6.3.4).

Si l'on veut une filtration séparée et donc plonger  $G$  dans son complété, on modifie la construction en faisant agir  $G$  sur la somme directe  $V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_r}$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  engendrent  $X$ ; on note alors  $V(n)$  la somme des  $V(n)$  correspondant aux différents facteurs. Le complété de Carbone-Garland modifié  $G^{cgm}$  ainsi obtenu est donc défini par une filtration contenue dans  $U^+$ , celle des  $U_{V(n)}^+ = U^+ \cap G_{V(n)}$ .

Pour comparer  $G^{cgm}$  et  $G^{crr}$  on va comparer cette filtration sur  $U^+$  avec celle des  $U_{D(r)}^+$ .

On note  $U^{cg+}$  le séparé complété de  $U^+$  pour la filtration par les  $U_{V(n)}^+$ .

## 6.3 Comparaison

1) D'après 3.2, 3.3 et 3.4,  $U^{ma+}$  est complet pour la filtration par les sous-groupes distingués  $U_n^{ma+} = \mathfrak{U}_{\Psi(n)}^{ma}(k)$  où  $\Psi(n) = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \deg(\alpha) \geq n\}$ . On note  $\overline{U}^+$  l'adhérence de  $U^+$  dans  $U^{ma+}$  pour la topologie associée; c'est aussi le complété de  $U^+$  pour la filtration par les  $U_n^+ = U^+ \cap U_n^{ma+}$ .

2) Pour  $i \in I$  et  $\alpha \in \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$ , on a  $s_i(\alpha) \in \Delta^+$  et  $\deg(s_i(\alpha)) \leq (1+M)\deg(\alpha)$ , où  $M$  est le maximum des valeurs absolues de coefficients non diagonaux de la matrice de Kac-Moody  $A$ . Ainsi  $U_{n(1+M)}^{ma+} \subset \tilde{s}_i(U_n^{ma+}) \subset U_{n/(1+M)}^{ma+}$  et  $\tilde{s}_i$  est un automorphisme du groupe topologique  $\mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}}^{ma+}(k)$ .

3) Dès que  $\deg(\alpha) \geq (1+M)^d$ , on a  $\deg(s_{i_1} \dots s_{i_d}(\alpha)) \geq \frac{\deg(\alpha)}{(1+M)^d}$  pour toute suite  $i_1, \dots, i_d \in I$ . On en déduit que, pour  $n \geq (1+M)^d$ ,  $U_n^{ma+}$  est dans le conjugué de  $U^{ma+}$  par  $s_{i_1} \dots s_{i_d}$  et donc  $U_n^{ma+}$  fixe  $C(d)$  pour l'action de  $G^{pma}$  sur  $\mathcal{I}_+^v$ . On a  $U_n^{ma+} \subset U_{C(d)}^{ma+}$  et même  $U_n^{ma+} \subset U_{D(d)}^{ma+}$ , car  $U_n^{ma+}$  est distingué dans  $U^{ma+}$ . En particulier  $U_n^+ \subset U_{D(d)}^+ \subset U_{C(d)}^+$ .

4) Vue la forme de l'action de  $U^{ma+} \subset \widehat{U}_k^+$  sur  $V^\lambda$ , on a  $U_{n+1}^{ma+} \subset U_{V(n)}^{ma+}$ . Par ailleurs, pour  $b \in B^{ma+}$  et  $i_1, \dots, i_d \in I$ , le fixateur de  $b.s_{i_1} \dots s_{i_d}(v_\lambda)$  dans  $U^{ma+}$  est dans  $U^{ma+} \cap$

$b.s_{i_1} \cdots s_{i_d} B^{ma+}$ , c'est à dire dans le fixateur (dans  $U^{ma+}$ ) de  $b.s_{i_1} \cdots s_{i_d}(C_0)$ . Comme en 2) ci-dessus on montre que le poids de  $s_{i_1} \cdots s_{i_d}(v_\lambda)$  est  $\lambda - \alpha$  avec  $\deg(\alpha) \leq \frac{M'}{M}((1+M)^d - 1)$  si  $M' = \text{Max}\{\lambda(\alpha_i^\vee) \mid i \in I\}$ . Donc, si  $u \in U_{V(n)}^{ma+}$  avec  $n \geq \frac{M'}{M}(1+M)^d$ ,  $u$  fixe toutes les chambres de la forme  $b.s_{i_1} \cdots s_{i_d}(C_0)$ , c'est à dire les chambres de  $D(d)$ .

Ainsi  $U_{n+1}^{ma+} \subset U_{V(n)}^{ma+} \subset U_{D(d)}^{ma+}$  et  $U_{n+1}^+ \subset U_{V(n)}^+ \subset U_{D(d)}^+$  pour  $n \geq \frac{M'}{M}(1+M)^d$ . Comme la filtration par les  $U_{D(d)}^+$  est séparée, il en est de même de celle par les  $U_{V(n)}^+$ ; en particulier  $U^+ \cap \text{Ker}\pi_\lambda = \{1\}$ .

5) De ces comparaisons de filtrations on déduit des homomorphismes continus :

$\phi : \overline{U}^+ \xrightarrow{\gamma} U^{cg+} \xrightarrow{\rho} U^{rr+}$ . Le problème de la comparaison des groupes  $U^{ma+}$ ,  $U^{cg+}$  et

$U^{rr+}$  se traduit donc en deux questions : A-t'on  $U^{ma+} = \overline{U}^+$ ? (voir 6.10 et 6.11)

$\phi$ ,  $\gamma$  et  $\rho$  sont-ils des isomorphismes de groupes topologiques? (voir 6.7 à 6.9)

Si  $k$  est un corps fini,  $U^{ma+}$  et donc  $\overline{U}^+$  sont compacts. Comme  $U^{cg+}$  et  $U^{rr+}$  sont séparés, les homomorphismes  $\phi$ ,  $\gamma$  et  $\rho$  sont surjectifs, fermés et ouverts. Ce sont donc des isomorphismes de groupes topologiques si et seulement si ils sont injectifs.

6) **Remarques** a) La filtration  $(U_n^{ma+})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $U^{ma+}$  permet de définir une métrique invariante à gauche sur  $G^{pma}$ , pour laquelle  $G^{pma}$  est complet et dont les boules ouvertes sont les  $gU_n^{ma+}$ . D'après la décomposition de Bruhat, le fait que  $U^{ma+} \triangleleft B^{ma+}$  et la relation de 2) impliquant les  $\tilde{s}_i$ , cette métrique est équivalente à celle, invariante à droite, dont les boules ouvertes sont les  $U_n^{ma+}g$ . Ainsi  $G^{pma}$  est un groupe topologique, dans lequel  $U^{ma+}$  est ouvert. L'adhérence  $\overline{G}$  de  $G$  dans  $G^{pma}$  est le séparé-complété de  $G$  pour la filtration induite.

b) Comme  $\overline{G}$ ,  $G^{cgm}$  et  $G^{err}$  sont des séparés-complétés pour les filtrations dans  $U^+$  de 4) ci-dessus, les homomorphismes de 5) ci-dessus se prolongent en  $\phi : \overline{G} \xrightarrow{\gamma} G^{cgm} \xrightarrow{\rho} G^{err}$ .

Par définition  $\text{Ker}\phi = \overline{U}^+ \cap Z'(G^{pma})$  où  $Z'(G^{pma}) = \bigcap_{g \in G^{pma}} gB^{ma+}g^{-1}$  est le noyau de l'action de  $G^{pma}$  sur l'immeuble  $\mathcal{I}_+^v$ .

c) Le groupe  $Z(G)$  s'envoie trivialement dans  $G^{rr}$ . D'après les calculs de 6.2 on a donc un homomorphisme continu  $G^{cg\lambda} \rightarrow G^{rr}$ . Celui-ci est surjectif, fermé et ouvert si le corps est fini (résultat de U. Baumgartner et B. Rémy cf. [CER-08, Th. 2.6]).

**Proposition 6.4.** *Les centres  $Z(G)$ ,  $Z(G^{pma})$  ainsi que  $Z'(G^{pma}) = \bigcap_{g \in G^{pma}} gB^{ma+}g^{-1}$  vérifient  $Z(G) \subset Z(G^{pma}) \subset Z'(G^{pma})$  et  $Z'(G^{pma}) = Z(G).(Z'(G^{pma}) \cap U^{ma+})$ ,  $Z(G^{pma}) = Z(G).(Z(G^{pma}) \cap U^{ma+})$ . De plus  $Z'(G^{pma}) \cap U^{ma+}$  est distingué dans  $G^{pma}$ .*

*Démonstration.* Comme  $Z(G)$  centralise  $U^{ma+}$  il est contenu dans  $Z(G^{pma})$ . Mais  $B^{ma+}$  est égal à son normalisateur (car il fait partie d'un système de Tits) on a donc  $Z(G^{pma}) \subset B^{ma+}$  et même  $Z(G^{pma}) \subset Z'(G^{pma})$ . Soit  $h \in Z'(G^{pma})$ . On écrit  $h = tu$  avec  $t \in T$  et  $u \in U^{ma+}$ . Soit  $i \in I$ , on peut alors écrire  $u = \exp(ae_i).v$  avec  $a \in k$  et  $v \in \mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}}^{ma}(k)$ . Soient  $\lambda \in k$  et  $y_\lambda = \exp(\lambda f_i)$ , alors  $y_\lambda h y_\lambda^{-1} = t.\exp((\alpha_i(t) - 1)\lambda f_i).y_\lambda.\exp(ae_i).y_\lambda^{-1}.y_\lambda.v.y_\lambda^{-1}$  avec  $y_\lambda.v.y_\lambda^{-1} \in \mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}}^{ma}(k)$ . Un calcul rapide dans  $SL_2$  montre alors que  $y_\lambda u y_\lambda^{-1} \in B^{ma+} \forall \lambda \in k$  si et seulement si  $\alpha_i(t) = 1$  et  $a = 0$ ; donc  $t \in Z(G)$  et  $Z'(G^{pma}) \subset Z(G).U_2^{ma+}$ .

Cette dernière assertion montre que le groupe  $Z'(G^{pma}) \cap U^{ma+}$  est normalisé par les  $U_{-\alpha_i}$  (pour  $i \in I$ ); comme il est normalisé par  $B^{ma+}$ , il est distingué dans  $G^{pma}$ .  $\square$

## 6.5 GK-simplicité

On dit que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_S \otimes_{\mathbb{Z}} k$  est simple au sens du théorème de Gabber-Kac (ou *GK-simple*) si tout sous- $\mathcal{U}_k$ -module gradué non trivial de  $\mathfrak{g}_k$  contenu dans  $\mathfrak{n}_k^+$  est réduit

à  $\{0\}$ .

De même on dit que le groupe  $G^{pma}$  est *GK-simple* si tout sous-groupe distingué de  $G^{pma}$  contenu dans  $U^{ma+}$  est réduit à  $\{1\}$ , i.e. si  $Z'(G^{pma}) \cap U^{ma+} = \cap_{r \in \mathbb{N}} U_{D(r)}^{ma+} = \{1\}$  ou si  $Z'(G^{pma}) = Z(G)$ . On espère que  $G^{pma}$  est toujours GK-simple (voir 6.9.1 ou 6.8). L'assertion correspondante pour  $G$  est toujours satisfaite (6.1.1).

**Remarque.** En caractéristique 0,  $\mathfrak{g}_k$  est GK-simple dans le cas symétrisable (et même conjecturalement dans tous les cas). Mais, comme me l'a indiqué O. Mathieu, cela n'implique pas la GK-simplicité en caractéristique  $p$ ; voir ci-dessous l'exemple des lacets de  $SL_n$  (6.8). On voit facilement que  $\mathfrak{g}_k$  est GK-simple si et seulement si  $\forall \alpha \in \Delta_{im}^+$  tout  $X \in \mathfrak{g}_{k\alpha}$  tel que,  $\forall j \in I, \forall q \in \mathbb{N}^* \text{ ad}(f_j^{(q)})X = 0$  est forcément nul. L'ensemble de ces  $X \in \mathfrak{g}_{k\alpha}$  est déterminé par des équations linéaires à coefficients entiers indépendantes de  $k$ . Si  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  est GK-simple, un déterminant déterminé par ces équations est non nul. Ainsi la condition ci-dessus est vérifiée pour  $\mathfrak{g}_{k\alpha}$  si la caractéristique  $p$  de  $k$  ne divise pas ce déterminant. Malheureusement  $\Delta_{im}^+$  est vide ou infini, on pourrait donc avoir  $\mathfrak{g}_k$  non GK-simple quelque soit la caractéristique. Par contre dans le cas affine on n'a qu'un nombre fini de déterminants à considérer car il y a périodicité des espaces radiciels imaginaires. En effet, pour le type affine  $X_n^{(k)}$ ,  $\mathfrak{g}_A'' = \mathfrak{g}_A / \text{centre}$  est réalisé comme sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{s} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  où  $\mathfrak{s}$  est l'algèbre simple de type  $X_n$ ; d'après [K-90] (resp. les calculs explicites de [Mn-85])  $\mathfrak{g}_A''$  (resp.  $(\mathfrak{g}_A'')_{\mathbb{Z}}$ ) est stable par multiplication par  $t^{\pm k}$ .

Si la matrice de Kac-Moody  $A$  a tous ses facteurs de type affine (ou de type fini), alors  $\mathfrak{g}_k$  est GK-simple si la caractéristique  $p$  de  $k$  est assez grande.

**Proposition 6.6.** *Supposons  $\mathfrak{g}_k$  GK-simple et  $k$  infini. Soit  $u \in U_n^{ma+} \setminus U_{n+1}^{ma+}$  avec  $n \geq 1$ . Alors il existe  $j \in I$  et  $y \in U_{-\alpha_j}$  tels que  $yuy^{-1} \notin B^{ma+}$  (si  $n = 1$ ) ou  $yuy^{-1} \in U_n^{ma+} \setminus U_n^{ma+}$  (si  $n \geq 2$ ).*

*Démonstration.* (cf. [My-82, prop. 8] en caractéristique 0)

On calcule dans l'algèbre  $\widehat{U}_k^p(\Delta^+) = \widehat{U}_k^+$  qui est graduée par les poids dans  $Q^+$  et le degré total dans  $\mathbb{N}$  (2.13.2) et aussi dans  $\widehat{U}_k^p(s_j(\Delta^+))$ . Soit  $u \in U_n^{ma+} \setminus U_{n+1}^{ma+} \subset \widehat{U}_k^p(\Delta^+)$ ; sa composante  $u_n$  de degré  $n$  est dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_k$ . Soit  $\alpha \in \Delta^+$  de degré  $n$  tel que la composante  $u_\alpha$  de  $u_n$  sur  $\mathfrak{g}_{k\alpha}$  soit non nulle. Comme  $\mathfrak{g}_k$  est GK-simple, il existe  $j \in I$  et  $q \geq 1$  tels que  $\text{adf}_j^{(q)}u_\alpha \neq 0$  (sinon  $\text{ad}(\mathcal{U}_k)u_\alpha$  est de plus bas degré  $n$ ).

Si  $n = 1$ , on a  $\alpha = \alpha_j$ ,  $u = \exp(u_\alpha)u'$  avec  $u' \in \mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha_j\}}^{ma}(k)$ . Soit  $y = \exp f_j$ , alors  $yuy^{-1} = y.\exp u_\alpha.y^{-1}.y.u'.y^{-1}$  avec  $y.u'.y^{-1} \in \mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha_j\}}^{ma}(k)$  et  $y.\exp u_\alpha.y^{-1} \notin B^{ma+}$ . Donc  $yuy^{-1} \notin B^{ma+}$ .

Si  $n \geq 2$ ,  $u \in \mathfrak{U}_{\Delta^+ \setminus \{\alpha_j\}}^{ma}(k)$  et ce groupe est normalisé par  $U_{-\alpha_j}$  (contenu dans  $\mathfrak{U}_{s_j(\Delta^+)}^{ma}(k)$ ) cf. 3.3. Soient  $\lambda \in k$  et  $y_\lambda = \exp(\lambda f_j) \in U_{-\alpha_j}$ , alors  $y_\lambda u y_\lambda^{-1} \in U^{ma+}$  vaut  $\sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda^m \text{adf}_j^{(m)}u$  (voir la démonstration de 2.5); sa composante de poids  $\alpha - q\alpha_j$  est donc égale à la somme finie  $\sum_{m \geq q} \lambda^m \text{adf}_j^{(m)}u_{\alpha+(m-q)\alpha_j}$ , où  $u_{\alpha+(m-q)\alpha_j}$  est la composante de poids  $\alpha + (m-q)\alpha_j$  de  $u$  dans  $\widehat{U}_k^p(\Delta^+)$ .

Cette composante de  $y_\lambda u y_\lambda^{-1}$  s'exprime comme un polynôme en  $\lambda$  dont le terme de degré  $q$  est non nul. Comme  $k$  est infini, il existe un  $\lambda \in k$  tel que ce polynôme soit non nul et donc  $y_\lambda u y_\lambda^{-1} \notin U_n^{ma+}$ , puisque sa composante de poids  $\alpha - q\alpha_j$  est non nulle.  $\square$

**Proposition 6.7.** *Supposons  $\mathfrak{g}_k$  GK-simple et  $k$  infini. Alors  $\phi$ ,  $\gamma$  et  $\rho$  sont des homéomorphismes. Ainsi  $\overline{G}$ ,  $G^{cgm}$  et  $G^{crr}$  sont des groupes topologiques isomorphes (et de même pour  $\overline{U}^+$ ,  $U^{cg+}$  et  $U^{rr+}$ ).*

**Remarque.** On verra en 6.9.4 que  $\gamma : \overline{G} \rightarrow G^{cgm}$  est un isomorphisme sous la seule hypothèse que  $\mathfrak{g}_k$  est GK-simple.

*Démonstration.* Soit  $u \in U_n^{ma+} \setminus U_{n+1}^{ma+}$  avec  $n \geq 1$ . D'après la proposition 6.6 il existe  $m \leq n$ ,  $j_1, \dots, j_m \in I$  et  $u_i \in U_{-\alpha_{j_i}}$  tels que  $u_m \cdots u_1 \cdot u \cdot (u_m \cdots u_1)^{-1} \notin B^{ma+}$ . Mais  $B^{ma+}$  est le fixateur de la chambre fondamentale  $C_0$ , donc  $u$  ne fixe pas la chambre  $(u_m \cdots u_1)^{-1} C_0$  qui est à distance  $\leq m$  de  $C_0$  (on a une galerie  $C_0, (u_1)^{-1} C_0, (u_2 u_1)^{-1} C_0, \dots$ ). On a donc montré que  $U_{D(r)}^{ma+} \subset U_{r+1}^{ma+}$  pour  $r \in \mathbb{N}$ . Avec les inclusions inverses prouvées en 6.3.4, on voit que les trois filtrations sont équivalentes et donc  $\phi$ ,  $\gamma$  et  $\rho$  sont des homéomorphismes.  $\square$

**Exemple 6.8.** On considère la matrice de Kac-Moody  $A$  de type  $\tilde{A}_{m-1}$  avec  $m \geq 3$ . Pour un bon choix du SGR  $\mathcal{S}$ , on obtient des algèbres et groupes de lacets :  $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{sl}_m(k) \otimes_k k[t, t^{-1}]$ ,  $G = SL_m(k[t, t^{-1}])$ ,  $\hat{\mathfrak{g}}_k = \mathfrak{sl}_m(k) \otimes k((t))$  et  $G^{pma} = SL_m(k((t)))$ .

Si la caractéristique  $p$  de  $k$  divise  $m$ ,  $\mathfrak{g}_k$  contient toutes les matrices scalaires. Celles-ci sont clairement annulées par  $ad(\mathcal{U}_k)$  et sont contenues dans  $\mathfrak{n}_k^+$  si le scalaire est dans  $tk[t]$ . Donc  $\mathfrak{g}_k$  n'est pas GK-simple dès que  $p$  divise  $m$ ; il est facile de voir que la réciproque est vraie.

Notons  $V = k^m$  et  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  sa base canonique. Soit  $R = k[[t]]$ , on considère les réseaux  $V_0 = R\varepsilon_1 \oplus \dots \oplus R\varepsilon_m$ ,  $V_1 = R\varepsilon_1 \oplus \dots \oplus R\varepsilon_{m-1} \oplus Rt\varepsilon_m, \dots, V_{m-1} = R\varepsilon_1 \oplus Rt\varepsilon_2 \oplus \dots \oplus Rt\varepsilon_m$ ,  $V_m = tV_0$  et de manière générale  $V_{am+b} = t^a V_b$  pour  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Alors  $B^{ma+}$  est le stabilisateur dans  $G^{pma}$  de tous ces réseaux et il est assez facile de voir que  $U_n^{ma+} = \{g \in G^{pma} \mid (g-1)V_i \subset V_{i+n} \forall i \in \mathbb{Z}\}$  pour  $n \geq 1$ . Également  $U_{mn}^{ma+}$  est formé des matrices à coefficients dans  $R$  congrues à l'identité modulo  $t^n$  et à une matrice triangulaire supérieure modulo  $t^{n+1}$ .

Le groupe  $U^{ma+}$  ne contient pas de matrice scalaire. Mais si  $p$  divise  $m$ , on peut trouver dans  $U_{mn}^{ma+} \setminus U_{mn+1}^{ma+}$  une matrice diagonale  $u$  dont tous les coefficients sont égaux modulo  $t^{pn}$ . Si  $y = \exp(\lambda f_j)$ , alors  $yuy^{-1}$  a les mêmes coefficients que  $u$  sauf un (colonne  $j$ , ligne  $j+1$ ) qui est dans  $t^{pn}R$ , donc  $yuy^{-1} \in U_{mn}^{ma+}$ . La conclusion de la proposition 6.6 n'est pas vérifiée.

Les sommets de l'appartement standard  $\mathbb{A}^v$  sont associés aux réseaux de la forme  $Rt^{n_1}\varepsilon_1 \oplus \dots \oplus Rt^{n_m}\varepsilon_m$ . Ainsi le fixateur d'une partie finie de  $\mathbb{A}^v$  est formé des  $g \in G^{pma}$  stabilisant un nombre fini de tels sous-modules. On en déduit facilement que la filtration de  $G^{pma}$  par les  $G_{C(r)}^{pma}$  est équivalente à la filtration par les  $B^{ma+}(n) = \{g = (g_{ij}) \in SL_m(R) \mid g_{ij} \in t^n R, \forall i \neq j\}$ .

Notons  $U^{ma+}[n] = U^{ma+} \cap (\cap_{i=1}^{m-1} (\exp f_i) B^{ma+}(n) (\exp -f_i))$ . On calcule facilement que  $U^{ma+}[n]$  est formé des matrices  $g = (g_{ij}) \in SL_m(R)$  telles que  $g_{ij} \in t^n R, \forall i \neq j$  et  $g_{ii} - g_{i+1, i+1} \in t^n R, \forall i \leq m-1$ . Ainsi  $g_{11}^m \in 1 + t^n R$  et  $g_{11} \in 1 + tR$ . Si  $p^e$  est la plus grande puissance de  $p$  divisant  $m$ , on en déduit que  $g_{11} - 1 \in t^{n/p^e} R$ ; donc  $U^{ma+}[n] \subset U_{mn/p^e}^{ma+}$ . Comme la filtration par les  $U_{D(r)}^{ma+}$  est plus fine que celle par les  $U^{ma+}[n]$ , on déduit de l'inclusion précédente et de celles prouvées en 6.3.4 que toutes ces filtrations sont équivalentes. La conclusion de la proposition 6.7 est vérifiée même si  $\mathfrak{g}_k$  n'est pas GK-simple. On a aussi  $Z'(G^{pma}) = Z(G) : G^{pma}$  est GK-simple.

**Remarques 6.9.** 1) On a vu au cours de la démonstration de la proposition 6.7 que, si  $\mathfrak{g}_k$  est GK-simple et  $k$  infini, les filtrations de  $U^{ma+}$  par les  $U_n^{ma+}$ ,  $U_{V(n)}^{ma+}$  ou  $U_{D(d)}^{ma+}$  sont équivalentes.

En particulier  $G^{pma}$  est GK-simple :  $Z'(G^{pma}) = Z(G)$  (cf. [My-82, prop. 8] en caractéristique 0).

2) Si  $G^{pma}$  est GK-simple ou plus généralement si  $Z'(G^{pma}) \cap \overline{G} = Z(G)$ , l'homomorphisme  $\phi : \overline{G} \rightarrow G^{crr}$  est injectif (6.3.6.b). Si de plus  $k$  est fini, on en déduit que  $\phi : \overline{U}^+ \rightarrow U^{rr+}$  et  $\gamma : \overline{U}^+ \rightarrow U^{cg+}$  sont des isomorphismes de groupes topologiques (6.3.5) ; ainsi les groupes topologiques  $\overline{G}$ ,  $G^{cgm}$  et  $G^{crr}$  sont isomorphes. Inversement pour  $k$  fini, l'isomorphisme de  $\overline{G}$  et  $G^{crr}$  implique que  $Z'(G^{pma}) \cap \overline{G} = Z(G)$  (6.1.4) ; si la caractéristique de  $k$  est grande, cela implique que  $G^{pma}$  est GK-simple (6.11).

3) Si jamais  $\mathfrak{g}_k$  n'est pas GK-simple en caractéristique 0, on peut montrer que  $G^{pma}$  n'est pas GK-simple ; en particulier  $G^{pma}$  et  $G^{crr}$  ne sont pas isomorphes.

4) Supposons  $\mathfrak{g}_k$  GK-simple. Soit  $k'$  un corps contenant  $k$ . On considère l'immeuble  $\mathcal{I}_+^v(k')$  de  $\mathfrak{G}$  sur  $k'$ , il contient  $\mathcal{I}_+^v$ . On note  $D'(r)$  la boule de  $\mathcal{I}_+^v(k')$  de centre  $C_0$  et rayon  $r$  et  $U_{D'(r)}^{ma+}$  son fixateur dans  $U^{ma+}$ . Les groupes  $U_n^{ma+}$ ,  $U_{V(n)}^{ma+}$  et  $U_{D'(r)}^{ma+}$  sont les intersections avec  $U^{ma+}$  des groupes analogues à  $U_n^{ma+}$ ,  $U_{V(n)}^{ma+}$  et  $U_{D'(r)}^{ma+}$  dans  $\mathfrak{U}^{ma+}(k')$ . Si  $k'$  est infini la démonstration de 6.7 prouve que  $U_{D'(r)}^{ma+} \subset U_{r+1}^{ma+} \subset U_{V(r)}^{ma+} \subset U_{D'(d)}^{ma+} \subset U_{D(d)}^{ma+}$  si  $r \geq \frac{M'}{M}(1+M)^d$ . Notons  $U^{rri+}$  (resp.  $G^{crr}$ ) le complété de  $U^+$  (resp.  $G$ ) pour la filtration par les  $U_{D'(r)}^+ = U^+ \cap U_{D'(r)}^{ma+}$ . Alors les groupes  $\overline{G}$ ,  $G^{cgm}$  et  $G^{crr}$  sont des groupes topologiques isomorphes (et de même pour  $\overline{U}^+$ ,  $U^{cg+}$  et  $U^{rri+}$ ). En particulier  $U^{rri+}$  et  $G^{crr}$  ne dépendent pas du choix du corps infini  $k'$  contenant  $k$ .

5) Supposons  $\mathfrak{g}_k$  GK-simple. S'il y a injection continue du groupe  $U^{rr+}$  associé à  $k$  dans celui associé à l'extension infinie  $k'$  (hypothèse raisonnable mais non évidemment vérifiée) alors  $\phi$  est un isomorphisme de groupes topologiques et  $G^{crr} = G^{crr}$ ,  $U^{rr+} = U^{rri+}$ .

## 6.10 Comparaison de $U^{ma+}$ et $\overline{U}^+$

Il s'agit de savoir si  $U^+$  est dense dans  $U^{ma+}$ , c'est à dire si  $U^{ma+}$  est topologiquement engendré par les sous-groupes radiciels  $U_\alpha$  pour  $\alpha \in \Phi^+$ . On va répondre par un contre-exemple et une proposition assez générale.

**Contre-exemple.** On considère la matrice de Kac-Moody  $A = \begin{pmatrix} 2 & -m \\ -m & 2 \end{pmatrix}$  avec  $m \geq 3$  et  $G = \mathfrak{G}_{\mathcal{S}_A}(\mathbb{F}_2)$ . On note  $\alpha, \beta$  les racines simples,  $e$  (resp.  $f$ ) une base de  $\mathfrak{g}_\alpha$  (resp. de  $\mathfrak{g}_\beta$ ) sur  $k = \mathbb{F}_2$  et  $a = \exp(e)$  (resp.  $b = \exp(f)$ ) l'élément non trivial de  $U_\alpha$  (resp.  $U_\beta$ ). D'après [K-90, exer. 5.25] les plus petites racines de  $\Phi^+$  sont  $\alpha, \beta, \alpha + m\beta, \beta + m\alpha$  tandis que  $\beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + (m-1)\alpha, \alpha + 2\beta, \dots, \alpha + (m-1)\beta$  sont des racines imaginaires. De plus  $\beta + r\alpha$  ou  $\alpha + r\beta$  n'est pas une racine pour  $r > m$ .

Soit  $\Psi$  l'idéal de  $\Delta^+$  formé des racines positives de la forme  $r\beta + q\alpha$  avec  $r \geq 2$  ou  $r + q \geq 4$  ; il contient toutes les racines réelles positives sauf  $\alpha$  et  $\beta$ . Notons  $U_\Psi^{ma} = \mathfrak{U}_\Psi^{ma}(k)$ , c'est un sous-groupe ouvert de  $U^{ma+}$ . D'après 3.3  $U^{ma+}/U_\Psi^{ma}$  est un groupe commutatif isomorphe à  $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta+2\alpha}$ . Si  $U^+$  est dense dans  $U^{ma+}$  ce groupe doit être engendré par les images de  $a$  et  $b$ .

On fait des calculs dans le quotient de  $\widehat{U}_k^+$  par l'idéal  $\widehat{U}_{\mathbb{N}^*\Psi}^+ \otimes k$ . On utilise que  $U^{ma+} \subset \widehat{U}_k^+$  et  $U_\Psi^{ma} \subset 1 + \widehat{U}_{\mathbb{N}^*\Psi}^+ \otimes k$ . On note  $e^{(n)} * f = \text{ad}(e^{(n)})f \in \mathfrak{g}_k$ . Ainsi  $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta+2\alpha} = \mathbb{F}_2 e \oplus \mathbb{F}_2 f \oplus \mathbb{F}_2 (e*f) \oplus \mathbb{F}_2 (e^{(2)}*f)$ ,  $\widehat{U}_k^+$  admet  $1, e, e^{(2)}, e^{(3)}, f, ef, e^{(2)}f, e*f, e(e*f), e^{(2)}*f$  comme base d'un supplémentaire de  $\widehat{U}_{\mathbb{N}^*\Psi}^+ \otimes k$  et l'isomorphisme de  $U^{ma+}/U_\Psi^{ma}$  sur  $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta+2\alpha}$  s'obtient par la projection évidente.



Dans cette algèbre quotient  $a = 1 + e + e^{(2)} + e^{(3)}$  et  $b = 1 + f$ . On peut calculer facilement les 17 mots en  $a$  et  $b$  de longueur  $\leq 8$ . On constate que  $(ab)^2 = 1 + e * f + e^{(2)} * f = (ba)^2$  et  $(ab)^4 = (ba)^4 = 1$ . Ainsi ces 17 mots constituent toute l'image de  $U^+$  dans cette algèbre quotient et il y a au maximum 14 mots différents. Comme  $U^{ma+}/U_{\Psi}^{ma}$  est de cardinal 16, il n'est pas égal au groupe engendré par  $a$  et  $b$  (il contient 8 éléments et pas  $[exp]e^{(2)} * f$ ).

On en déduit que  $U^+$  n'est pas dense dans  $U^{ma+}$ .

**Proposition 6.11.** *Supposons la caractéristique  $p$  du corps  $k$  nulle ou strictement plus grande que  $M$  (6.3.2). Alors le groupe  $U^+$  (resp.  $G$ ) est dense dans  $U^{ma+}$  (resp.  $G^{pma}$ ).*

**Remarque.** Dans le cas simplement lacé, le résultat est valable sans condition sur la caractéristique.

*Démonstration.* D'après 2.3 l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_k^+$  est engendrée par les  $e_i$  pour  $i \in I$ . Montrons par récurrence sur  $n$  que tout élément  $g \in U_n^{ma+}$  est congru à un élément de  $U^+$  modulo  $U_{n+1}^{ma+}$ , c'est clair pour  $n = 1$ . D'après 3.3  $U_n^{ma+}/U_{n+1}^{ma+}$  est un groupe commutatif isomorphe à  $\mathfrak{g}_n = \bigoplus_{deg(\alpha)=n} \mathfrak{g}_{k\alpha}$ . D'après 3.2 et les bonnes propriétés de la base des  $[N]$  (2.9.4), l'isomorphisme  $\varphi_n$  est donné comme suit : on plonge  $U^{ma+}$  dans  $\widehat{U}_k^+$  et l'élément  $g \in U_n^{ma+}$  est congru à  $1 + \varphi_n(g)$  modulo  $\widehat{U}_{k, \geq n+1}^+ = \prod_{deg(\alpha) \geq n+1} \widehat{U}_{k\alpha}^+$ . Il suffit de montrer le résultat cherché pour des éléments  $g$  engendrant  $U_n^{ma+}/U_{n+1}^{ma+}$ , on va considérer ceux tels que  $\varphi_n(g)$  soit de la forme  $[e_i, v]$  avec  $i \in I$  et  $v \in \mathfrak{g}_{n-1}$ . Par hypothèse il existe  $h \in U_{n-1}^+$  tel que  $\varphi_{n-1}(h) = v$ , donc  $h$  est congru à  $1 + v$  modulo  $\widehat{U}_{k, \geq n}^+$ . Considérons  $h' = (exp e_i).h.(exp -e_i).h^{-1} \in U^+$ . On calcule facilement ce produit dans  $\widehat{U}_k^+/\widehat{U}_{k, \geq n+1}^+$ , il est égal à  $1 + [e_i, v]$ . Donc  $h' \in U_n^{ma+}$  et  $\varphi_n(h') = \varphi_n(g)$  i.e.  $g = h'$  modulo  $U_{n+1}^{ma+}$ .

Ainsi  $U^+$  est dense dans  $U^{ma+}$ ; mais  $G^{pma} = G.U^{ma+}$  (cf. 3.16, 3.17) donc  $G$  est dense dans  $G^{pma}$ .  $\square$

**Théorème 6.12.** *Supposons  $\mathfrak{g}_k$  GK-simple et le corps  $k$  infini de caractéristique nulle ou  $> M$ . Alors les groupes topologiques  $G^{pma}$ ,  $G^{cgm}$  et  $G^{crr}$  sont isomorphes*

*Démonstration.* Cela résulte aussitôt des propositions 6.7 et 6.11.  $\square$

### 6.13 Simplicité

On va maintenant généraliser le résultat de simplicité de Moody [My-82]. On suit son schéma de démonstration en reproduisant même les parties inchangées, à cause de la disponibilité restreinte de cette référence.

On note  $G_{(1)}$  (resp.  $G_{(1)}^{pma}$ ) le sous-groupe de  $G$  (resp.  $G^{pma}$ ) engendré par les groupes radiciels  $U_{\alpha}$  pour  $\alpha \in \Phi$  (resp. et par  $U^{ma+}$ ). Il est normalisé par  $T$  et les  $\tilde{s}_{\alpha_i}$  donc est distingué dans  $G$  (resp.  $G^{pma}$ ). D'après 6.4 on a  $Z'(G^{pma}) \subset Z(G).G_{(1)}^{pma}$ .

**Lemme 6.14.** 1) *Si  $|k| \geq 4$ , le groupe  $G_{(1)}$  est parfait et égal au groupe dérivé de  $G$ .*

2) *Le groupe  $G_{(1)}^{pma}$  est topologiquement parfait (i.e. égal à l'adhérence de son groupe dérivé) et égal à l'adhérence du groupe dérivé de  $G^{pma}$ , dans les cas suivants :*

- a) *La caractéristique  $p$  de  $k$  est nulle ou  $> M$  et  $|k| \geq 4$ .*
- b) *La matrice de Kac-Moody  $A$  n'a pas de facteur de type affine et  $k$  est infini.*

**Remarque.** Dans les conditions de 2)b ci-dessus, si de plus  $k$  n'est pas extension algébrique d'un corps fini, alors  $G_{(1)}^{pma}$  est parfait.

*Démonstration.* 1) Soient  $\alpha \in \Phi$  et  $r, r' \in k^*$ , alors  $\alpha^\vee(r) \in G_{(1)}$  et  $(\alpha^\vee(r), x_\alpha(r')) = x_\alpha((r^2 - 1)r')$ . Donc  $U_\alpha \subset (G_{(1)}, G_{(1)}) \subset (G, G) \subset G_{(1)}$  puisque  $G = T.G_{(1)}$ .

2) Le cas a) résulte de 1), de la proposition 6.11 et de ce que  $G^{pma} = T.G_{(1)}^{pma}$ . Pour le cas b) on peut utiliser le lemme 6.15 ci-dessous. Par un calcul analogue au précédent on en déduit que  $U_n^{ma+}$  est parfait modulo  $U_{n+1}^{ma+}$ .  $\square$

**Lemme 6.15.** *On suppose la matrice de Kac-Moody  $A$  sans facteur de type affine et le corps  $k$  infini, alors  $\forall \alpha \in \Delta$  il existe  $t_\alpha \in T \cap G_{(1)}$  tel que  $\alpha(t_\alpha) \neq 1$ . Si  $k$  n'est pas extension algébrique d'un corps fini on peut supposer  $t = t_\alpha$  indépendant de  $\alpha$ .*

*Démonstration.* On peut supposer  $A$  indécomposable et même de type indéfini, car le cas de type fini est clair. D'après [K-90, 4.3] il existe alors  $\lambda = \sum a_j \alpha_j^\vee \in Q^\vee \subset Y$  avec  $a_j \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha_i(\lambda) < 0 \forall i, j \in I$ . Soient  $x \in k^*$  et  $t = \lambda(x) \in T$ ; comme  $\lambda \in Q^\vee$ ,  $t \in G_{(1)}$ . Si  $\alpha = \sum n_i \alpha_i \in \Delta$ , on a  $\alpha(t) = x^{\alpha(\lambda)}$ ; mais les  $n_i$  sont tous de même signe et non tous nuls, donc  $\alpha(\lambda) = \sum n_i \alpha_i(\lambda) \neq 0$ . Ainsi  $\alpha(t) \neq 1$  si  $x$  est d'ordre  $\geq |\alpha(\lambda)|$  dans  $k^*$  ou, mieux, s'il est d'ordre infini.  $\square$

**Proposition 6.16.** *On suppose  $G_{(1)}^{pma}$  topologiquement parfait et la matrice de Kac-Moody  $A$  indécomposable. Soit  $K$  un sous-groupe fermé de  $G^{pma}$  normalisé par  $G_{(1)}^{pma}$ , alors  $K \subset Z'(G^{pma})$  ou  $K \supset G_{(1)}^{pma}$ .*

**Remarque.** Ainsi  $G_{(1)}^{pma} / (Z'(G^{pma}) \cap G_{(1)}^{pma})$  est topologiquement simple. Notons que, d'après 3.19, ce quotient ne dépend que de  $A$  et  $k$  (mais pas de  $\mathcal{S}$ ).

*Démonstration.* Le système de Tits  $(G^{pma}, B^{ma+}, N)$ , les groupes  $U^{ma+}$  et  $K$  satisfont aux conditions du théorème 5 de [B-Lie, IV § 2 n°7] sauf peut-être (2) ou (3) (avec " $U$ " =  $U^{ma+}$ , " $H$ " =  $K$  et " $G_1$ " =  $G_{(1)}^{pma}$ ). On peut donc suivre la démonstration de ce théorème jusqu'au point où (2) et (3) sont utilisés. Si  $K \not\subset Z'(G^{pma})$  on obtient donc  $G_{(1)}^{pma} \subset KU^{ma+}$ . Les sous-groupes  $KU_n^{ma+}$  sont ouverts donc fermés; comme  $G_{(1)}^{pma}$  est topologiquement parfait, on a  $G_{(1)}^{pma} \subset KU_n^{ma+}$ ,  $\forall n \geq 1$  (cf. 3.4). Soit  $g \in G_{(1)}^{pma}$ , écrivons  $g = k_n u_n$  avec  $k_n \in K$  et  $u_n \in U_n^{ma+}$ . La suite  $u_n$  tend vers 1, donc  $k_n = g u_n^{-1}$  tend vers  $g$  et comme  $K$  est fermé  $g \in K$ .  $\square$

**Lemme 6.17.** *On suppose  $G_{(1)}^{pma}$  topologiquement parfait et la matrice de Kac-Moody  $A$  indécomposable. Soient  $K$  un sous-groupe de  $G^{pma}$  normalisé par  $G_{(1)}^{pma}$  et  $t \in T \cap G_{(1)}^{pma}$  tels que  $K \not\subset Z'(G^{pma})$  et  $\alpha(t) \neq 1 \forall \alpha \in \Delta$ . Alors  $t \in K$ .*

*Démonstration.* D'après 6.16  $\overline{K}$  contient  $G_{(1)}^{pma}$ . Soit  $k_n$  une suite d'éléments de  $K$  convergeant vers  $t$ . Pour  $s$  assez grand  $u = k_s t^{-1} \in U^{ma+}$ . On va montrer que  $t$  est conjugué dans  $G_{(1)}^{pma}$  à  $ut = k_s \in K$ , donc  $t \in K$ .

Montrons qu'il existe des suites  $u_n, v_n$  dans  $U^{ma+}$  telles que,  $\forall n \geq 1$ ,

- (1)  $u_n, v_n \in U_n^{ma+}$ ,  $u_1 = u$ ,
- (2)  $v_n u_n t v_n^{-1} = u_{n+1} t$ .

Si c'est le cas, la suite des produits  $v_n \cdot v_{n-1} \cdot \dots \cdot v_2 \cdot v_1$  converge vers un élément  $v \in U^{ma+}$  et  $v u v^{-1} = t$ .

Supposons  $u_1, \dots, u_r$  et  $v_1, \dots, v_{r-1}$  déjà construits. On sait que  $U_r^{ma+} / U_{r+1}^{ma+}$  est isomorphe au groupe additif somme des  $\mathfrak{g}_{k\alpha}$  pour  $\deg(\alpha) = r$ . Notons  $\sum_\alpha X_\alpha$  l'élément correspondant à la classe de  $u_r$ . On définit  $v_r$  comme un élément de  $U_r^{ma+}$  dont la classe modulo

$U_{r+1}^{ma+}$  correspond à  $\sum_{\alpha} \frac{-1}{1-\alpha(t)} \cdot X_{\alpha}$ . Soit  $u_{r+1} = v_r u_r t v_r^{-1} t^{-1}$ , sa classe modulo  $U_{r+1}^{ma+}$  correspond à l'élément  $\sum_{\alpha} (\frac{-1}{1-\alpha(t)} + 1 + \frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)}) \cdot X_{\alpha} = 0$ . Donc  $u_{r+1} \in U_{r+1}^{ma+}$ .  $\square$

**Lemme 6.18.** *Soient  $G^{pma}$ ,  $K$  et  $t$  comme en 6.17. Si  $u \in U^{ma+}$ , il existe  $v \in U^{ma+}$  tel que  $vtv^{-1}t^{-1} = u$ , en particulier  $u \in K$ . Donc  $U^{ma+} \subset K$ .*

*Démonstration.* Montrons qu'il existe deux suites  $u_n, v_n$  dans  $U^{ma+}$  telles que :

- (1)  $v_n \in U_n^{ma+}$ ,  $u^{-1}u_n \in U_{n+1}^{ma+}$ , pour  $n \geq 0$ ,
- (2)  $v_n \cdots v_1 \cdot t \cdot v_1^{-1} \cdots v_n^{-1} = u_n t$ , pour  $n \geq 1$ .

Si c'est le cas, la suite des produits  $v_n \cdot v_{n-1} \cdots v_2 \cdot v_1$  converge vers un élément  $v \in U^{ma+}$ ,  $u_n$  tend vers  $u$  et  $vtv^{-1} = ut$ .

Posons  $u_0 = u, v_0 = 1$  et supposons  $u_0, \dots, u_{r-1}, v_0, \dots, v_{r-1}$  déjà construits. La classe de  $u^{-1}u_{r-1}$  dans  $U_r^{ma+}/U_{r+1}^{ma+}$  correspond à un élément  $\sum_{\alpha} X_{\alpha}$  de la somme des  $\mathfrak{g}_{k\alpha}$  pour  $\deg(\alpha) = r$ . On définit  $v_r$  comme un élément de  $U_r^{ma+}$  dont la classe modulo  $U_{r+1}^{ma+}$  correspond à  $\sum_{\alpha} \frac{-1}{1-\alpha(t)} \cdot X_{\alpha}$ . Alors  $u^{-1} \cdot v_r \cdots v_1 \cdot t \cdot v_1^{-1} \cdots v_r^{-1} \cdot t^{-1} = u^{-1} \cdot v_r \cdot u_{r-1} \cdot t \cdot v_r^{-1} \cdot t^{-1}$  a la même image dans  $U_r^{ma+}/U_{r+1}^{ma+}$  que  $v_r \cdot u^{-1} \cdot u_{r-1} \cdot t \cdot v_r^{-1} \cdot t^{-1}$  (3.3.f) qui correspond à  $\sum_{\alpha} (\frac{-1}{1-\alpha(t)} + 1 + \frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)}) \cdot X_{\alpha} = 0$ . Donc, si on pose  $u_r = v_r \cdots v_1 \cdot t \cdot v_1^{-1} \cdots v_r^{-1} \cdot t^{-1}$ , on a bien  $u^{-1}u_r \in U_{r+1}^{ma+}$ .  $\square$

**Théorème 6.19.** *On suppose  $G_{(1)}^{pma}$  topologiquement parfait, la matrice de Kac-Moody  $A$  indécomposable non de type affine et le corps  $k$  de caractéristique 0 ou de caractéristique  $p$  mais non algébrique sur  $\mathbb{F}_p$ . Alors pour tout sous-groupe  $K$  de  $G^{pma}$  normalisé par  $G_{(1)}^{pma}$ , soit  $K$  est contenu dans  $Z'(G^{pma})$ , soit il contient  $G_{(1)}^{pma}$ . En particulier  $G_{(1)}^{pma}/(Z'(G^{pma}) \cap G_{(1)}^{pma})$  est un groupe simple.*

*Démonstration.* Si  $K \not\subset Z'(G^{pma})$ , les hypothèses des lemmes 6.17 et 6.18 sont vérifiées (grâce au lemme 6.15). Donc  $U^{ma+} \subset K$ . Mais  $G_{(1)}^{pma}$  contient les  $\tilde{s}_{\alpha}$  (pour  $\alpha \in \Phi$ ) et normalise  $K$ , donc  $K$  contient aussi les  $U_{\alpha}$  pour  $\alpha \in \Phi$ , c'est à dire  $K \supset G_{(1)}^{pma}$ .  $\square$

**Remarques 6.20.** 1) On a vu que  $G_{(1)}^{pma}$  est souvent topologiquement parfait (6.14) et que  $Z'(G^{pma})$  est assez souvent égal aux centres  $Z(G)$  et  $Z(G^{pma})$  (6.9.1 et 6.8).

2) La simplicité de  $G_{(1)}^{pma}/(Z'(G^{pma}) \cap G_{(1)}^{pma})$  en caractéristique 0 est le résultat essentiel de R. Moody dans [My-82]. Il considère en fait un groupe d'automorphismes du complété de l'algèbre de Kac-Moody simple associée à une matrice de Kac-Moody  $A$  (indécomposable non de type affine). Il n'y a donc pas pour lui d'hypothèse de GK-simplicité de  $\mathfrak{g}_k$  (et  $Z'(G^{pma}) = Z(G) = Z(G^{pma}) = \{1\}$  pour son choix de groupe).

3) Pour un corps fini (de cardinal  $\geq 4$ ) et une matrice  $A$  2-sphérique indécomposable, Carbone, Ershov et Ritter montrent la simplicité de  $G_{(1)}^{rr}$  [CER-08, th. 1.1]. Ce groupe est l'adhérence de l'image de  $G_{(1)}$  dans  $\text{Aut}(\mathcal{I}_+^v)$ , c'est à dire, par compacité, l'image de l'adhérence  $\overline{G_{(1)}}$  de  $G_{(1)}$  dans  $G^{pma}$ . Donc  $G_{(1)}^{rr} = \overline{G_{(1)}}/(Z'(G^{pma}) \cap \overline{G_{(1)}})$ . En grande caractéristique, 6.11 montre que  $\overline{G_{(1)}} = G_{(1)}^{pma}$ ; on retrouve alors un énoncé analogue à 6.19.

Si  $k$  est fini mais assez grand, on sait aussi que  $G_{(1)}/(Z(G) \cap G_{(1)})$  est simple [CR-09, th. 20]. On en déduit facilement le même résultat pour  $k$  extension algébrique d'un corps fini.

4) Si  $A$  est indécomposable de type affine non tordu,  $G_{(1)}^{pma}/(Z'(G^{pma}) \cap G_{(1)}^{pma})$  est le groupe des points sur  $k((t))$  d'un groupe algébrique simple déployé, il est donc simple. Le même résultat est sans doute encore vrai si on enlève "non tordu" et "déployé".

## Références

- [AB-08] Peter ABRAMENKO et Kenneth S. BROWN, *Buildings : theory and applications*, Graduate texts in Math. **248** (Springer Verlag, Berlin, 2008).
- [By-96] Nicole BARDY-PANSE, *Systèmes de racines infinies*, Mémoire Soc. Math. France (N.S.) **65** (1996).
- [B-Lie] Nicolas BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, (Hermann, Paris).
- [BT-72] François BRUHAT et Jacques TITS, Groupes réductifs sur un corps local I, Données radicielles valuées, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **41** (1972), 5-251.
- [BT-84] François BRUHAT et Jacques TITS, Groupes réductifs sur un corps local II, Schémas en groupes, Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **60** (1984), 5-184.
- [CR-09] Pierre-Emmanuel CAPRACE et Bertrand RÉMY, Simplicity and superrigidity of twin building lattices, *Inventiones Math.* **176** (2009), 169-221.
- [CER-08] Lisa CARBONE, Mikhail ERSHOV et Gordon RITTER, Abstract simplicity of complete Kac-Moody groups over finite fields, *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), 2147-2162.
- [CG-03] Lisa CARBONE et Howard GARLAND, Existence of lattices in Kac-Moody groups over finite fields, *Commun. Contemporary Math.* **5** (2003), 813-867.
- [Cn-08] Cyril CHARIGNON, Compactifications polygonales d'un immeuble affine, preprint Nancy (2008), arXiv [math.GR] 0903.0502.
- [Cn-10] Cyril CHARIGNON, Structures immobilières pour un groupe de Kac-Moody sur un corps local, preprint Nancy (2010), arXiv [math.GR] 0912.0442v3.
- [Cn-10b] Cyril CHARIGNON, Immeubles affines et groupes de Kac-Moody, thèse Nancy 2 juillet 2010 <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/49/79/61/PDF/these.pdf>
- [Cu-84] Huah CHU, On the  $GE_2$  of graded rings, *J. Algebra* **90** (1984), 208-216.
- [DG-70] Michel DEMAZURE & Pierre GABRIEL, *Groupes algébriques, tome 1*, Masson-North Holland (1970).
- [Gd-95] Howard GARLAND, A Cartan decomposition for  $p$ -adic loop groups, *Math. Ann.* **302** (1995), 151-175.
- [GR-08] Stéphane GAUSSENT et Guy ROUSSEAU, Kac-Moody groups, hovels and Littelmann paths, *Annales Inst. Fourier* **58** (2008), 2605-2657.
- [He-91] Jean-Yves HÉE, Systèmes de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné, *Geometriae Dedicata* **37** (1991), 65-102.
- [K-90] Victor G. KAC, *Infinite dimensional Lie algebras*, troisième édition, (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [KP-85] Victor G. KAC & Dale H. PETERSON, Defining relations of certain infinite dimensional groups, in *Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui, Lyon (1984)*, Astérisque n° hors série (1985), 165-208.
- [Kr-02] Shrawan KUMAR, *Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory*, Progress in Math. **204** (Birkhäuser, Basel, 2002)
- [M-88a] Olivier MATHIEU, *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales*, Astérisque **159-160** (1988).

- [M-88b] Olivier MATHIEU, Construction du groupe de Kac-Moody et applications, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **306** (1988) 227-230.
- [M-89] Olivier MATHIEU, Construction d'un groupe de Kac-Moody et applications, *Compositio Math.* **69** (1989), 37-60.
- [M-96] Olivier MATHIEU, On some modular representations of affine Kac-Moody algebras at the critical level, *Compositio Math.* **102** (1996), 305-312.
- [Mn-85] David MITZMAN, *Integral bases for affine Lie algebras and their universal enveloping algebras*, Contemporary Math. **40** Amer. Math. Soc. (1985).
- [My-82] Robert MOODY, A simplicity theorem for Chevalley groups defined by generalized Cartan matrices, preprint (avril 1982).
- [MT-72] Robert MOODY et Kee-Leong TEO, Tits' systems with crystallographic Weyl groups, *J. of Algebra* **21** (1972), 178-190.
- [Ry-02] Bertrand RÉMY, *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*, Astérisque **277** (2002).
- [RR-06] Bertrand RÉMY et Mark RONAN, Topological groups of Kac-Moody type, right-angled twinings and their lattices, *Comment. Math. Helvet.* **81** (2006), 191-219.
- [Ru-06] Guy ROUSSEAU, Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local, immeubles microaffines, *Compositio Mathematica* **142** (2006), 501-528.
- [Ru-08] Guy ROUSSEAU, Euclidean buildings, in "Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidité, Grenoble, 2004", L. Bessières, A. Parreau et B. Rémy éditeurs, *Séminaires et Congrès* **18** (Soc. Math. France. 2008), 77-116.
- [Ru-10] Guy ROUSSEAU, Mesures affines, preprint Nancy, Mars 2008, ArXiv [math.GR] 0810.4241.
- [Sg-62] Robert STEINBERG, Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques, in *Colloque sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles (1962)*, Centre Belge Rech. Math., Librairie Universitaire Louvain et Gauthier-Villars Paris (1962), 113-127.
- [Sg-68] Robert STEINBERG, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University (1968).
- [T-81] Jacques TITS, Algèbres de Kac-Moody et groupes associés I, Résumé de cours, *Annuaire du Collège de France* (1981) 75-86.
- [T-86] Jacques TITS, Immeubles de type affine, in *Buildings and the geometry of diagrams, Como (1984)*, L.A. Rosati éditeur, Lecture notes in Math. **1181** (Springer, Berlin, 1986), 159-190.
- [T-87] Jacques TITS, Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields, *J. of Algebra* **105** (1987), 542-573.
- [T-89] Jacques TITS, Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody, Exposé 700 in *Séminaire Bourbaki 1988/89*, Astérisque **177-178** (1989), 7-31.
- [T-92] Jacques TITS, Twin buildings and groups of Kac-Moody type, in *Groups combinatorics and geometry (Durham, 1990)*, M. Liebeck et J. Saxl éditeurs, London Math. Soc. lecture note **165**, (Cambridge U. Press, Cambridge, 1992), 249-286.

Institut Élie Cartan, Unité Mixte de Recherche 7502, Nancy-Université, CNRS  
 Boulevard des aigillettes, BP 70239, 54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex (France)  
 Guy.Rousseau@iecn.u-nancy.fr