



**HAL**  
open science

# Fonctionnelles et fonctions de Minkowski à voisinages adaptatifs généraux pour l'analyse des images à tons de gris

Séverine Rivollier, Johan Debayle, Jean-Charles Pinoli

► **To cite this version:**

Séverine Rivollier, Johan Debayle, Jean-Charles Pinoli. Fonctionnelles et fonctions de Minkowski à voisinages adaptatifs généraux pour l'analyse des images à tons de gris. Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images, (GRETSI 2009), Sep 2010, Dijon, France. pp.2042/29071, 10.4267/2042/29071 . hal-00509453

**HAL Id: hal-00509453**

**<https://hal.science/hal-00509453>**

Submitted on 16 Aug 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Fonctionnelles et fonctions de Minkowski à Voisinages Adaptatifs Généraux pour l’analyse des images à tons de gris

Séverine RIVOLLIER, Johan DEBAYLE, Jean-Charles PINOLI

École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne  
Centre Ingénierie et Santé (CIS), LPMG - UMR CNRS 5148  
158 cours Fauriel, 42023 Saint-Étienne cedex 2, FRANCE  
rivollier@emse.fr, debayle@emse.fr, pinoli@emse.fr

**Résumé** – En analyse d’image, les fonctionnelles de Minkowski sont des paramètres standards de mesures topologiques et géométriques d’objets. Néanmoins, elles sont souvent limitées aux images binaires, et déterminées de manière globale et mono-échelle. L’utilisation des Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG), simultanément adaptatifs avec les échelles d’analyse, les structures spatiales et les intensités des images, permet de pallier ces limites. Une analyse locale, adaptative et multi-échelle des images à tons de gris est donc proposée sous forme de cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG.

Les VAG sont des voisinages définis en chaque point du support spatial d’une image à tons de gris, homogènes par rapport à un critère d’analyse suivant une tolérance d’homogénéité. Les fonctionnelles de Minkowski sont calculées pour chaque VAG de l’image, permettant de définir les cartographies des fonctionnelles de Minkowski adaptatives. A chaque point de l’image est donc attribuée une fonctionnelle topologique ou géométrique de la structure locale de l’image. Par ailleurs, l’évolution de la tolérance d’homogénéité permet de définir des cartographies multi-échelles. De plus, les cartographies sont analysées de manière qualitative sous l’influence d’une transformation morphologique multi-échelle (dilatation/érosion, ouverture/fermeture par reconstruction, ...).

**Abstract** – In quantitative image analysis, Minkowski functionals are standard parameters for topological and geometrical measurements. Nevertheless, they are often limited to binary images and achieved in a global and monoscale way. The use of General Adaptive Neighborhoods (GANs), simultaneously adaptive with the analyzing scales, the spatial structures and the image intensities, enables to overcome these limitations. The GAN-based Minkowski functionals are introduced, which allow a gray-tone image analysis to be realized in a local, adaptive and multiscale way.

The GANs are spatial neighborhoods defined around each point of the spatial support of a gray-tone image, homogeneous with respect to a criterion function according to an homogeneity tolerance. The Minkowski functionals are computed on the GAN of each point of the image, enabling to define the so-called Minkowski maps which assign the geometrical or the topological functional to each point. Also, the evolution of the GAN homogeneity tolerance allows the multiscale Minkowski maps to be defined. Furthermore, the impact of multiscale morphological transformations (dilation/erosion, opening/closing by reconstruction, ...), is analyzed in a qualitative way through these maps.

## Introduction

La caractérisation d’image est souvent globale, mono-échelle, et limitée au cas binaire. Les Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG) permettent de pallier ces limites. Des cartographies de fonctionnelles et fonctions de Minkowski à VAG sont construites, caractérisant une image à tons de gris de manière locale, adaptative et multi-échelle.

## 1 Voisinages Adaptatifs Généraux

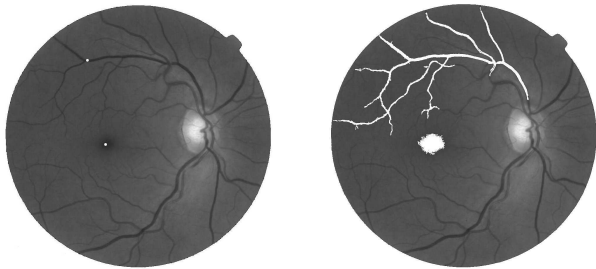
L’approche récemment publiée sous le sigle TIVAG (Traitement d’Image à Voisinages Adaptatifs Généraux) / GANIP (General Adaptive Neighborhood Image Processing) [1] fournit un cadre général et opérationnel pour le traite-

ment et l’analyse adaptative d’image à tons de gris. Elle est basée sur une représentation d’image par des voisinages spatiaux, adaptés aux structures locales de l’image. Ces Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG) sont adaptatifs à la fois en espace, en échelle et en intensité. A chaque point  $x$  de l’image  $f$  est associé un ensemble de VAG appartenant au support spatial  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  de  $f$ . Un voisinage de  $x$ , noté  $V_{m\ominus}^h(x)$ , est un ensemble connexe et homogène (Fig. 1) par rapport à un critère d’analyse  $h$  (la luminosité, le contraste, ...) suivant une tolérance d’homogénéité  $m\ominus$ , représentée dans un modèle GLIP (Generalized Linear Image Processing) [3, 4], c’est-à-dire dans un espace vectoriel muni des lois d’addition vectorielle  $\oplus$  et de multiplication scalaire  $\otimes$  permettant de considérer les caractéristiques physiques et/ou psychophysiques de l’image

à étudier. Par exemple, pour la structure d'image classique CLIP (Classical Linear Image Processing), les lois  $\oplus$  et  $\otimes$  correspondent aux opérations usuelles entre images, respectivement  $+$  et  $\times$ . Plus particulièrement, la structure LIP (Logarithmic Image Processing) présente l'avantage d'être cohérente avec les modèles de formation d'image par transmission, par réflexion/transmission multiplicative et avec plusieurs lois et caractéristiques de la perception visuelle humaine. Un VAG d'un point  $x$  est mathématiquement défini par :

$$V_{m_{\square}}^h(x) := C_{h^{-1}([h(x) \ominus_{m_{\square}}; h(x) \oplus_{m_{\square}}])}(x) \quad (1)$$

où  $C_X(x)$  représente la composante connexe par arcs (avec la topologie usuelle sur  $X$ ) de  $X \subseteq D$  contenant  $x$ .



(a) Image originale de rétine\* marquée de deux points  $x$  et  $y$ .

(b) VAG  $V_{20}^h(x)$  et  $V_{20}^h(y)$  des deux points  $x$  et  $y$ .

FIG. 1 – Les VAG des deux points de l'image originale (a) sont respectivement homogènes (b), avec la tolérance 20, par rapport au critère de luminance, selon le modèle CLIP.

## 2 Fonctionnelles de Minkowski à VAG

En analyse quantitative d'image, les fonctionnelles de Minkowski sont des paramètres standards de mesures topologiques et géométriques [2], permettant de décrire une forme. En 2D, elles sont (à une constante près) l'aire  $A$ , le périmètre  $P$  et le nombre d'Euler  $\chi$ . Dans ce papier, les densités de ces fonctionnelles sont utilisées, c'est-à-dire leurs ratios par rapport à l'aire du support spatial de l'image, et sont notées  $A_A$ ,  $P_A$  et  $\chi_A$ .

Une cartographie de fonctionnelle de Minkowski à VAG est définie [5] en attribuant à chaque point  $x$  une valeur représentant la densité de la fonctionnelle de Minkowski de  $V_{m_{\square}}^h(x)$ . De manière plus explicite, la cartographie de la fonctionnelle de Minkowski à VAG, notée  $\mu_{m_{\square}}^h$ , d'une image  $f$ , par rapport à la densité  $\mu$  (aire :  $\mu \equiv A_A$ , périmètre :  $\mu \equiv P_A$ , nombre d'Euler :  $\mu \equiv \chi_A$ ), est une application de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\mu_{m_{\square}}^h : x \mapsto \mu \left( V_{m_{\square}}^h(x) \right) \quad (2)$$

où  $V_{m_{\square}}^h(x)$  est le VAG du point  $x$  par rapport au critère d'analyse  $h$  suivant la tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$  dans un modèle GLIP. Dans la suite de ce papier, seul le critère de luminance ( $h \equiv f$ ) et le modèle CLIP ( $\oplus = +$ ,  $\otimes = \times$ ) sont utilisés. Ces cartographies (Fig. 2) caractérisent une image à niveaux de gris, de manière locale, adaptative et multi-échelle.



	0	255
(a)	0	255
(b)	$-812.10^{-5}$	$1.10^{-5}$
(c)	$4.10^{-5}$	$9686.10^{-5}$
(d)	$1.10^{-5}$	$42926.10^{-5}$
(e)	Valeurs des bornes de l'échelle de gris	

FIG. 2 – Cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG (b-d) de l'image 'Lena' (a) suivant la tolérance d'homogénéité  $m = 40$ . Les valeurs des bornes de l'échelle de gris (e) représentent les extrema des densités des fonctionnelles de Minkowski.

## 3 Fonctions de Minkowski à VAG

L'évolution de la tolérance d'homogénéité permet de construire des cartographies multi-échelle (Fig. 3 et 4), définissant ainsi une fonction de Minkowski à VAG. Mathématiquement, il s'agit de l'application suivante :

$$\mu_{\square}^f(\cdot) : m \mapsto \mu_{m_{\square}}^f(\cdot) \quad (3)$$

La croissance des VAG par rapport à la tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$  [1] explique la monotonie de la fonction  $(A_A)_{\square}^f(\cdot)$ , qui génère une granulométrie locale. Cette granulométrie est fonction d'un paramètre d'intensité (la tolérance d'homogénéité), et ainsi diffère de la granulométrie morphologique usuelle [7], fonction d'un paramètre spa-

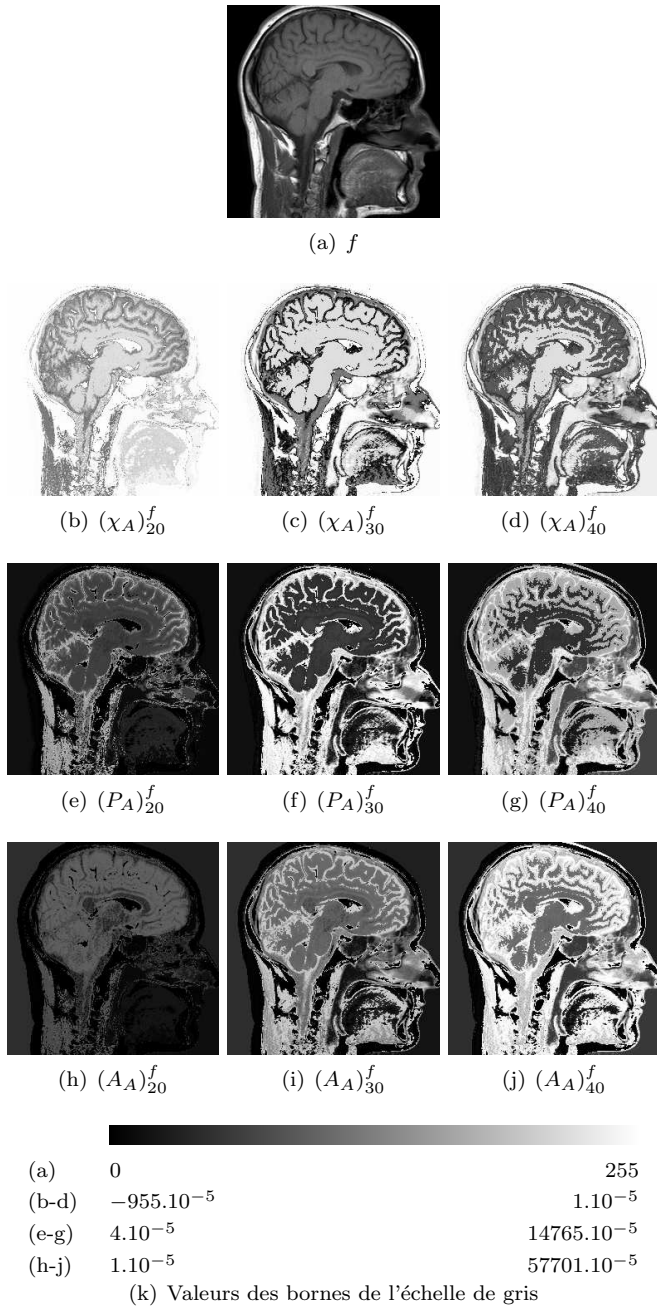


FIG. 3 – Cartographies du nombre d'Euler (b-d), du périmètre (e-g) et de l'aire (h-j) à VAG d'une IRM de cerveau\* (a) suivant les tolérances  $m = 20, 30, 40$ . Les valeurs des bornes des échelles de gris (k) représentent les extrema des tons de gris de l'image originale et des densités des fonctionnelles de Minkowski.

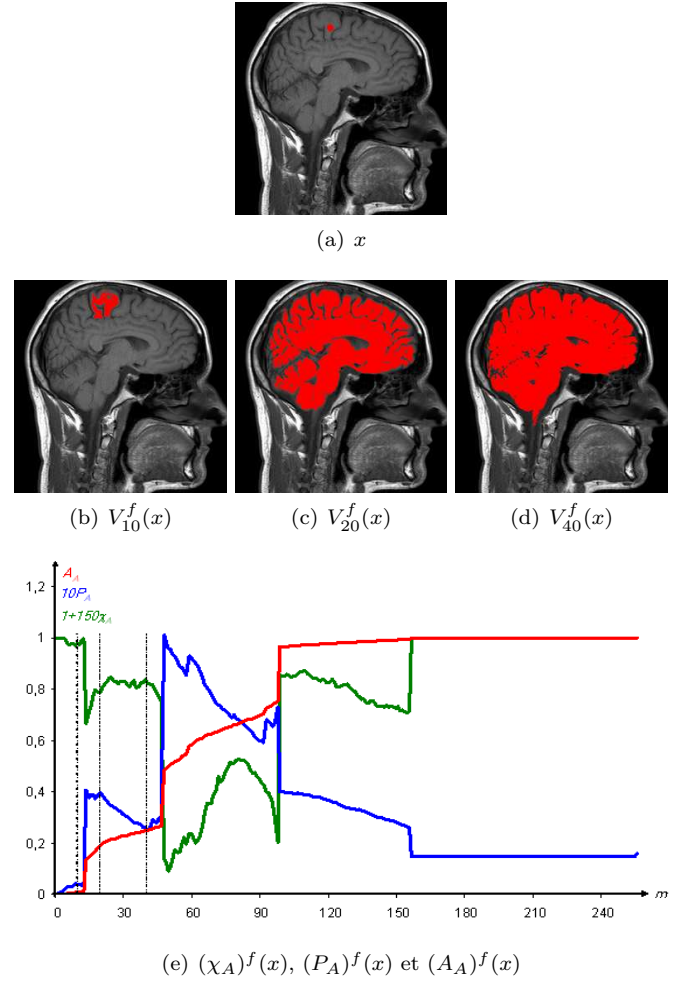


FIG. 4 – Image originale munie en rouge d'un point  $x$  (a), puis des VAG de  $x$  pour les tolérances  $m = 10, 20, 40$  (b-d). Représentation des fonctions de Minkowski à VAG par rapport à  $m$  (e) pour ce point  $x$ . Les pointillés représentent les résultats de nombre d'Euler, de périmètre et d'aire des VAG du point  $x$  représentés sur les images (b-d).

tiale (le rayon de l'élément structurant utilisé pour l'opérateur morphologique). Par contre, la figure 4 illustre le fait que le nombre d'Euler et le périmètre ne sont pas monotones en fonction de  $m_{\odot}$ . Ceci provient de l'indépendance de  $m_{\odot}$ , du nombre de trous du VAG et de la tortuosité de sa frontière.

La granulométrie locale définit précédemment mène à l'analyse de manière qualitative des cartographies sous l'influence d'une transformation morphologique multi-échelle (dilatation/érosion, ouverture/fermeture par reconstruction, ...) (Fig. 5) [6]. Une autre fonction de Minkowski à VAG est ainsi définie, par l'application suivante :

$$\mu_{m_{\odot}}^{T(f)}(\cdot) : r \mapsto \mu_{m_{\odot}}^{Tr(f)}(\cdot) \quad (4)$$

où  $r$  est le rayon de l'élément structurant utilisé par l'opérateur morphologique  $T$ .

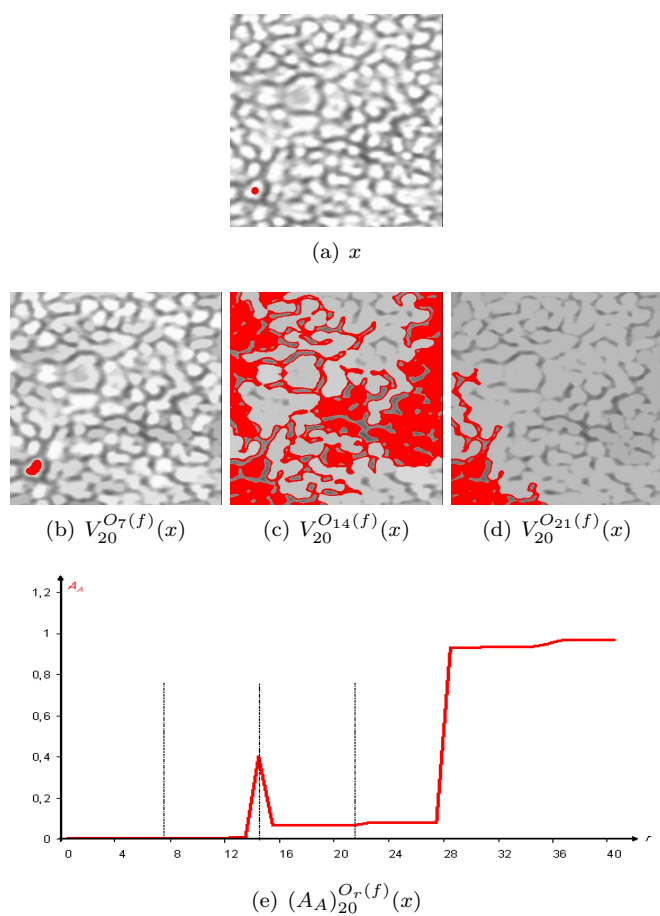


FIG. 5 – Image originale de cellules cornéennes\* munie en rouge d'un point  $x$  (a), puis des VAG de  $x$  suivant la tolérance 20, sur des images transformées par ouverture par reconstruction  $O$  avec des disques de rayons  $r = 7, 14, 21$  (c-e). Représentation de la fonction d'aire de Minkowski à VAG par rapport à  $r$  (b) pour ce point  $x$ . Les croix vertes représentent les résultats d'aire des VAG du point  $x$  représentés sur les images (c-e).

La figure 5 montre que la fonction  $(A_A)_{m_{\odot}}^{T(f)}(\cdot)$  n'est pas monotone donc ne génère pas de granulométrie.

L'analyse des discontinuités des deux fonctions de Minkowski ainsi définies permettent d'obtenir des informations de forme et/ou de taille des structures présentes dans l'image à étudier.

## Conclusion et perspectives

Des cartographies de fonctionnelles et fonctions de Minkowski à VAG sont construites, caractérisant une image à tons de gris de manière locale, adaptative et multi-échelle. L'évolution des fonctionnelles de Minkowski à VAG en fonction de la tolérance d'homogénéité (un des paramètres des VAG) est étudiée. De plus, les cartographies sont analysées localement de manière qualitative sous l'influence d'une transformation morphologique multi-échelle.

Cette analyse locale peut mener à l'extraction de points ou régions d'intérêt significatifs, suivant la fonctionnelle considérée, d'une image à tons de gris. Cette nouvelle représentation d'image par VAG ouvre de larges perspectives pour le développement de nouvelles méthodes adaptatives, locales et multi-échelles d'analyse d'image.

(\*) Images provenant du CHU de Saint-Etienne

## Références

- [1] J. Debayle and J.C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood Image Processing. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25(2) :245–286, 2006.
- [2] K. Michielsen and H. De Raedt. Integral-geometry morphological image analysis. *Physics Reports*, 347 :461–538, 2001.
- [3] A.V. Oppenheim. Generalized Superposition. *Information and Control*, 11 :528–536, 1967.
- [4] J.C. Pinoli. A General Comparative Study of the Multiplicative Homomorphic, Log-Ratio and Logarithmic Image Processing Approaches. *Signal Processing*, 58 :11–45, 1997.
- [5] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. Représentation intrinsèque multi-échelle des images à tons de gris par Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG). In *Proceedings of GRETSI*, pages 781–784, France, 2007.
- [6] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood-based Minkowski Maps for Gray-tone Image Analysis. In *Proceedings of ECSIA*, Milan, Italy, 2009.
- [7] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, U.K., 1988.