



**HAL**  
open science

# Replicating portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité II

Laurent Devineau, Matthieu Chauvigny

► **To cite this version:**

Laurent Devineau, Matthieu Chauvigny. Replicating portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité II. 2010. hal-00508517

**HAL Id: hal-00508517**

**<https://hal.science/hal-00508517>**

Preprint submitted on 4 Aug 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Replicating portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité II**

Laurent Devineau

Université de Lyon, Université Lyon 1, Laboratoire de Science Actuarielle et Financière,  
ISFA, 50 avenue Tony Garnier, F-69007 Lyon

[laurent.devineau@isfaserveur.univ-lyon1.fr](mailto:laurent.devineau@isfaserveur.univ-lyon1.fr)

Responsable R&D – Milliman Paris

[laurent.devineau@milliman.com](mailto:laurent.devineau@milliman.com)

Matthieu Chauvigny

Consultant R&D – Milliman Paris

[matthieu.chauvigny@milliman.com](mailto:matthieu.chauvigny@milliman.com)

## RESUME

Dans la démarche de construction d'un modèle interne, les compagnies d'assurance-vie sont souvent confrontées au choix d'une méthode d'obtention de la distribution des fonds propres économiques à un an. Or le caractère extrêmement simulateur de ce type d'approches peut parfois induire des temps de calculs conséquents allant jusqu'à compromettre leur mise en œuvre opérationnelle.

Le recours à des techniques d'accélération ou d'approximations des calculs apparaît ainsi indispensable à l'utilisation de telles méthodes. Parmi les approches possibles, la technique dite des Replicating Portfolios permet de réduire fortement les temps de projections en estimant les fonds propres à l'aide d'un portefeuille d'actifs reproduisant la valeur économique des passifs de la compagnie.

Le calibrage du Replicating Portfolio soulève néanmoins certaines difficultés pouvant conduire à des résultats parfois peu satisfaisants. Nous présentons dans cet article une technique de calibrage que nous avons développée afin de garantir la robustesse d'estimation du capital économique Solvabilité II.

**MOTS-CLES :** Replicating Portfolios, capital économique, Solvabilité II, forme paramétrique, Simulations dans les Simulations, fonds propres économiques, facteurs de risque, modèle interne

## Table des matières

1. Introduction .....	3
2. Le capital économique Solvabilité 2 .....	4
2.1. Généralités .....	4
2.2. Méthodologies de calcul .....	4
2.3. Calcul du capital économique par approche SdS .....	5
2.4. La méthode des Replicating Portfolios.....	6
3. Les mises en œuvre usuelles de la technique des Replicating Portfolios.....	10
3.1. Idées clés des approches standards.....	10
3.2. Les différentes approches de calibrage.....	11
3.3. Réplication des passifs ou réplication des marges ?.....	14
4. Méthode alternative de calibrage .....	15
4.1. Introduction .....	15
4.2. Les idées clés de la méthode.....	15
4.3. Calcul d'un échantillon de valeurs de fonds propres en $t=1$ .....	17
4.4. Analyse de la convexité à l'aide d'une forme paramétrique .....	18
4.5. Choix des actifs candidats et paramétrage.....	19
4.6. Calibrage de l'asset mix du portefeuille répliquant.....	22
5. Analyse théorique des différentes méthodologies.....	23
5.1. De l'égalité « presque sûre » à la méthode des moindres carrés .....	24
5.2. Le changement de probabilités .....	25
5.3. Réplication des passifs ou réplication des marges ?.....	26
6. Applications .....	28
6.1. Présentation des produits testés .....	28
6.2. Résultats obtenus .....	28
Conclusion.....	33

## 1. Introduction

Dans le dispositif Solvabilité II, le capital économique est défini comme le montant de fonds propres que doit détenir la compagnie pour faire face à une ruine économique dans un an à un seuil de 99,5%. Ce critère repose donc entre autres sur la notion de distribution de fonds propres économiques à un an. Cependant pour une grande majorité de portefeuilles d'assurance-vie, l'obtention de cette distribution reste délicate car la prise en compte des interactions actifs / passifs induit des temps de calculs conséquents.

Il apparaît donc essentiel d'accélérer les méthodes usuelles afin de disposer d'un modèle interne permettant de calculer opérationnellement le besoin en capital. Parmi les différentes méthodologies envisageables, l'approche dite des Simulations dans les Simulations (SdS) est la plus conforme à l'optique Solvabilité II. Sa mise en œuvre induit néanmoins des temps de calculs importants. Devineau et Loisel (2009) proposent une technique d'accélération de cette méthode produisant exactement le même résultat qu'un SdS exhaustif en réduisant très fortement le nombre de simulations.

Les techniques d'approximation des calculs constituent également une alternative puissante aux méthodes basées sur la réduction du nombre de simulations. Le principe sous-jacent est de construire un « proxy » permettant d'évaluer très rapidement les postes du bilan économique sans avoir à recourir à des techniques de Monte-Carlo. Les techniques du type « forme paramétrique » et Replicating Portfolios sont des exemples connus de méthodologies d'estimation du capital par approximations. En outre, l'approche Replicating Portfolios dont il est question dans cet article consiste à construire un portefeuille d'actifs financiers dont la valeur fournit une estimation quasi-immédiate de celle des variables d'intérêt (i.e. les fonds propres économiques ou la valeur économique des passifs). En disposant d'un Replicating Portfolio, il devient ainsi aisé d'obtenir une distribution des fonds propres économiques de fin de première période par simulation de la valeur du portefeuille. L'évaluation du prix de marché du Replicating Portfolio en  $t = 1$  est en effet considérablement plus rapide que le calcul des fonds propres par simulations de Monte-Carlo au moyen d'un modèle ALM.

Si le recours à un Replicating Portfolio pour le calcul du capital économique Solvabilité II paraît efficace opérationnellement, le calibrage de ce dernier n'en demeure pas moins délicat. Différentes problématiques sont en effet soulevées. En premier lieu, quelle variable est-il pertinent de répliquer : la valeur économique de passifs ou alternativement celle des fonds propres ? Comment choisir et paramétrer les actifs candidats composant le Replicating Portfolio ? Ce processus relève-t-il du jugement d'expert ou existe-t-il des critères d'automatisation et d'optimisation pour construire le portefeuille ?

Nous répondrons dans cet article à l'ensemble de ces questions.

Nous traiterons dans une première partie des problématiques de calcul du capital économique Solvabilité II. Nous détaillerons ensuite les mises en œuvre usuelles des approches Replicating Portfolios, puis nous décrirons l'approche alternative que nous avons développée. Enfin nous analyserons les différentes méthodologies en illustrant notamment à partir de résultats issus de modèles internes les points d'attention évoqués.

## 2. Le capital économique Solvabilité 2

### 2.1. Généralités

Le capital économique Solvabilité II correspond au montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon 1 an et au niveau de confiance 99,5%. Cette définition de la ruine repose sur l'étude de la déformation du bilan économique de l'assureur sur une période d'une année.

Notons  $FP_t$ , les fonds propres économiques de la compagnie à la date  $t$ . Cette variable correspond à la différence :

$$FP_t = A_t - VEP_t,$$

Avec  $A_t$  (resp.  $VEP_t$ ) la valeur de marché de l'actif (resp. la valeur économique des passifs) en  $t$ .

Sous certaines hypothèses, le capital économique peut être calculé à partir de la relation suivante :

$$C = FP_0 - P(0,1) \cdot q_{0,5\%}(FP_1),$$

Où  $P(0,1)$  est le prix en 0 d'un zéro-coupon de maturité 1 an. Nous supposons dans cet article les conditions de validité de cette formule satisfaites.

Le lecteur est renvoyé à l'article de Devineau et Loisel (2009) pour une présentation détaillée des éléments introduits ci-dessus.

### 2.2. Méthodologies de calcul

Les méthodologies de calcul du capital économique Solvabilité II peuvent se décliner selon deux catégories distinctes : les méthodes modulaires de type « formule standard » et les approches reposant sur l'obtention d'une distribution des fonds propres économiques à un an.

#### 2.2.1. Les approches de type « formule standard »

L'optique d'une méthodologie « formule standard » consiste à calculer un capital économique au niveau de chaque « risque élémentaire » (actions, taux, mortalité,...) puis à agréger ces capitaux à l'aide de matrices de corrélations. Cette approche peut induire plusieurs niveaux d'agrégation. Par exemple, les QIS reposent sur une mécanique d'agrégation intra-modulaire et inter-modulaire (cf. CEIOPS QIS 5 Technical Specifications 2010). Dans ce type d'approches bottom-up, les capitaux élémentaires sont estimés par différence entre les fonds propres centraux et choqués. Ces valorisations nécessitent le plus souvent le recours à un modèle ALM.

#### 2.2.2. Les techniques d'obtention de la distribution des fonds propres à 1 an

L'objet de ces techniques est de disposer d'une distribution empirique des fonds propres de la compagnie afin d'en déduire le montant de capital économique à partir de la relation :

$$C = FP_0 - P(0,1) \cdot q_{0,5\%}(FP_1).$$

Le calcul de la quantité  $FP_0$  ne soulève en général aucune difficulté opérationnelle (calculs de type

MCEV pour des portefeuilles d'assurance-vie). En revanche, l'estimation du quantile à 0,5% de la variable  $FP_1$  nécessite a minima la connaissance de la queue de distribution de cet élément.

Pour la plupart des portefeuilles d'assurance-vie, la difficulté d'un tel calcul réside dans la détermination du montant de fonds propres de fin de première période. En effet, les non-linéarités relatives à la nature optionnelle des passifs d'assurance-vie nécessitent le recours à des techniques de Monte-Carlo afin de construire le bilan économique à un an.

On rencontre plusieurs variantes dans la mise en œuvre de telles méthodologies : la méthodologie « Simulations dans les Simulations » (SdS), les Replicating Portfolios (RP) et les approches de type « formes paramétriques ».

Pour une présentation exhaustive des approches paramétriques nous renvoyons le lecteur à Devineau et Loisel (2009b). Nous décrivons heuristiquement dans les sections suivantes les méthodes SdS et RP.

### 2.3. Calcul du capital économique par approche SdS

La méthodologie SdS consiste à effectuer des simulations sur la première période puis à lancer à l'issue de chacune d'elles un nouveau jeu de simulations afin de déterminer la distribution de fonds propres économiques de la compagnie en  $t = 1$ . Notons que les simulations de première année (appelées simulations primaires) sont « monde-réel » et que les simulations ultérieures (appelées simulations secondaires) sont risque-neutre conditionnellement au réalisé de première période. Pour une description détaillée, nous renvoyons le lecteur à Devineau et Loisel (2009).

Introduisons les notations suivantes afin de formaliser les calculs effectués dans une approche SdS :

- $R_u^{p,s}$  le résultat de la date  $u > 1$  pour la simulation primaire  $p \in \{1, \dots, P\}$  et secondaire  $s \in \{1, \dots, S\}$ ,
- $R_1^p$  le résultat de la première période pour la simulation primaire  $p$ ,
- $\delta_u^{p,s}$  le facteur d'actualisation de la date  $u > 1$  pour la simulation primaire  $p$  et secondaire  $s$ ,
- $\delta_1^p$  le facteur d'actualisation de la première période pour la simulation primaire  $p$ ,
- $F_1^p$  l'information de première année contenue dans la simulation primaire  $p$ ,
- $FP_1^p$  les fonds propres économiques en fin de première période pour la simulation primaire  $p$ ,
- $VEP_1^p$  la valeur économique des passifs en fin de première période pour la simulation primaire  $p$ ,
- $A_1^p$  la valeur de marché de l'actif en fin de première période pour la simulation primaire  $p$ .

Les fonds propres économiques en  $t = 1$ , pour la simulation primaire  $p$ , vérifient :

$$FP_1^p = R_1^p + E \left[ \sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u}{\delta_1} R_u \mid F_1^p \right].$$

Nous considérons l'estimateur de  $FP_1^p$  suivant :

$$\widehat{FP}_1^p = R_1^p + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u^{p,s}}{\delta_1^p} R_u^{p,s}.$$

La détermination de la quantité  $q_{0,5\%}(FP_1)$ , repose en général sur une estimation des rangs du type

$$FP_1^{([0,5\% \times P])}$$

La méthodologie SdS est très intensive en temps de calcul car sa complexité est en  $P \times S$ , il existe néanmoins différentes techniques permettant de l'accélérer très efficacement (cf. Devineau et Loisel (2009)).

Une approche alternative peut également consister à calculer via un « proxy » la valeur des fonds propres ou des passifs sans pour autant recourir à des simulations de Monte-Carlo pour la valorisation de ces éléments du bilan en  $t = 1$ .

## 2.4. La méthode des Replicating Portfolios

### 2.4.1. Définitions et généralités

Les techniques de réplication sont très répandues en littérature financière pour répondre à des problématiques de valorisation d'actifs. Nous en rappelons le principe dans cette section et nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Dana et Jeanblanc-Picqué (1998) pour une présentation plus détaillée des méthodes de valorisation par construction de stratégies de financement.

Notons  $(F_t)_{t \geq 0}$  la filtration qui caractérise l'information financière disponible à la date  $t$  et considérons  $Z$  une variable aléatoire  $F_T$ -mesurable. Supposons que l'économie soit constituée de  $d + 1$  actifs financiers de prix  $X_t = (X_t^0, X_t^1, \dots, X_t^d)$  en date  $t$  et où  $X_t^0$  représente le prix d'un actif sans risque de dynamique :

$$dX_t^0 = X_t^0 r_t dt, \quad X_t^0 = 1,$$

Avec  $r_t$  le taux sans risque.

Sous de bonnes hypothèses, on peut construire un processus adapté  $w_t = (w_t^0, w_t^1, \dots, w_t^d)$  permettant de répliquer la variable aléatoire  $Z$ , c'est-à-dire satisfaisant les deux propriétés ci-dessous :

$$\begin{cases} w_t \cdot X_t = w_0 \cdot X_0 + \int_0^t w_s \cdot dX_s & \forall t \leq T, p.s. \\ w_T \cdot X_T = Z & p.s. \end{cases}$$

Les marginales du processus  $w_t$  représentent les poids en chacun des actifs d'un portefeuille auto-finançant qui réplique le cash-flow  $Z$  *p.s.*

Le prix  $\pi_t$  d'arbitrage de  $Z$  est alors égal à :  $\pi_t = w_t \cdot X_t = E_Q \left( e^{-\int_t^T r_s ds} \cdot Z | F_t \right)$ .

La formule de Black & Scholes permettant de déterminer le prix d'un call de maturité  $T$ , de strike  $K$  et de sous-jacent  $X_t^1$  peut être déduite par valorisation d'un portefeuille répliquant la variable  $Z = (X_T^1 - K)^+$ .

Supposons que le taux sans risque  $r_t$  est constant et égal à  $r$  et que sous la probabilité risque-neutre  $Q$  on ait :

$$\frac{dX_t^1}{X_t^1} = r dt + \sigma dW_t,$$

Où  $(W_t)_t$  est un mouvement brownien sous  $Q$ . Alors la composition du portefeuille répliquant en date  $t$  est la suivante :

$$w_t^0 = -K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2^t),$$

Et,

$$w_t^1 = N(d_1^t),$$

Avec,

$$d_1^t = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left( \ln\left(\frac{X_t^1}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot (T-t) \right), \quad d_2^t = d_1^t - \sigma\sqrt{T-t}.$$

L'application de tels outils aux problématiques de valorisation de portefeuilles d'assurance-vie demeure beaucoup plus délicate. De nombreux travaux traitent de la lecture optionnelle des options et garanties financières détenues par les assurés ; le lecteur pourra à ce titre consulter Bacinello (2001) et Bacinello (2005). Néanmoins pour la plupart des portefeuilles d'assurance-vie, la réplication de variables économiques calculées via un modèle interne n'est pas envisageable opérationnellement à l'aide des techniques mentionnées ci-dessus car la prise en compte de règles de gestion et de mécanismes comptables spécifiques invalident le plus souvent le recours à des formules fermées.

Le concept de Replicating Portfolios appliqués aux problématiques d'assurance revêt donc en général une signification relativement différente de la définition introduite supra. Même si l'objectif reste ici aussi de déterminer un portefeuille dont les cash-flows (ou la valeur) sont proches des éléments projetés par le modèle interne (passifs ou marges), la pondération des actifs candidats est déterministe et non stochastique.

Nous avons vu ci-dessus que les poids du portefeuille auto-finançant constituent un processus adapté (il s'agit donc de variables aléatoires) ; ceci conduit à ajuster pour chaque date  $t$  la quantité d'actifs détenus en fonction des conditions économiques en  $t$ . Or les mises en œuvre opérationnelles de la technique des Replicating Portfolios appliquée aux problématiques d'assurance reposent systématiquement sur un asset-mix constant de ce dernier.

Par exemple, dans le cadre d'une réplication de cash-flows, en notant  $cf_{passifs}(t)$  (resp.  $cf_{RP}^k(t)$  avec  $k = 1, \dots, N$ ) les cash-flows de passifs (resp. les cash-flows des  $N$  actifs composant le RP) en date  $t$ , on cherche à déterminer un vecteur de poids tel que :

$$cf_{passifs}(t) \approx \sum_{k=1}^N w_t^k \cdot cf_{RP}^k(t),$$

Où les éléments  $w_t^k$  sont des constantes. Nous reviendrons sur le sens mathématique de cette approximation dans la partie « 3.1 De l'égalité presque sûre à la méthode des moindres carrés ».



## 2.4.2. Principe d'utilisation

La technique des Replicating Portfolios (RP) permet de répondre à différentes problématiques :

- L'analyse de la solvabilité de la compagnie dans le cadre d'un dispositif prudentiel (par exemple Solvabilité II) : le RP en tant que proxy de la valeur de marché des passifs permet d'estimer le capital économique réglementaire, d'effectuer des calculs alternatifs de besoin de fonds propres (dans l'ORSA<sup>1</sup> par exemple), de tarifier des produits en tenant compte dans l'environnement prudentiel considéré, ...
- L'estimation de sensibilités d'une MCEV (Market Consistent Embedded Value),
- La mise en place de stratégies de hedging, ...

Le lecteur pourra consulter Schrage (2008) pour une description heuristique de la technique des RP. Les applications possibles de cette méthode sont également évoquées dans Algorithmics (2008) et Schrage (2008).

Dans cet article, nous présentons une méthode de calibrage de RP à des fins de calcul du capital réglementaire Solvabilité II. Notons que pour répondre à l'ensemble des problématiques mentionnées ci-dessus des méthodologies complémentaires doivent être développées.

Nous avons vu plus haut que la méthode SdS est la plus conforme aux calculs Solvabilité II car elle permet de disposer d'une distribution des fonds propres à un an tout en estimant ces éléments de manière précise à l'aide de simulations secondaires risque-neutre. Cette méthode reste néanmoins très coûteuse en temps de calcul. Pour rendre opérationnels les calculs de capital économique, deux options sont possibles :

- Réduire le nombre de simulations dans une mise en œuvre SdS,
- Recourir à des proxies des éléments du bilan économique.

Nous ne détaillerons pas dans cet article les méthodologies d'accélération d'une projection SdS, le lecteur pourra consulter Devineau et Loisel (2009) pour une description de ces techniques.

La technique des RP s'inscrit dans la deuxième catégorie de méthodes permettant de répondre à un calcul opérationnel du besoin en capital de la compagnie. Nous en proposons dans la suite cette section une présentation heuristique.

On rencontre en pratique différentes mises en œuvre possibles : certaines compagnies utilisent le RP pour construire la distribution de fonds propres en  $t = 1$ , d'autres effectuent des stress instantanés afin de disposer d'une pseudo-distribution en date initiale. Nous ne considérerons dans cet article que les approches visant à obtenir la distribution de fonds propres à un an.

Dans une telle mise en œuvre, on effectue par le biais d'un modèle interne, des simulations « monde-réel » sur la première année puis à l'issue de chacune de ces simulations on détermine la valeur du RP et des fonds propres. Le RP peut être valorisé par formules fermées ou par méthodes numériques (arbres binomiaux ou trinomiaux, techniques de Monte Carlo) en fonction de la complexité des actifs le

---

<sup>1</sup> Dans le cadre ORSA (Own Risk and Solvency Assessment), la compagnie développe sa propre définition de la solvabilité.

composant.

Introduisons les notations suivantes afin de formaliser les calculs effectués :

- $A_1^p$  la valeur de marché de l'actif en fin de première période pour la simulation primaire  $p$ ,
- $VEP_1^p$  la valeur économique des passifs en fin de première période pour la simulation primaire  $p$ ,
- $FP_1^p$  les fonds propres économiques en fin de première période pour la simulation primaire  $p$ ,
- $RP_1^p$  la valeur du RP en fin de première période pour la simulation primaire  $p$ .

Les postes du bilan économique en  $t = 1$ , pour la simulation primaire  $p$ , sont alors calculés de la manière suivante :

$$VEP_1^p \approx RP_1^p,$$

Et,

$$FP_1^p = A_1^p - VEP_1^p \approx A_1^p - RP_1^p.$$

Cette mise en œuvre peut s'illustrer à l'aide du schéma suivant :

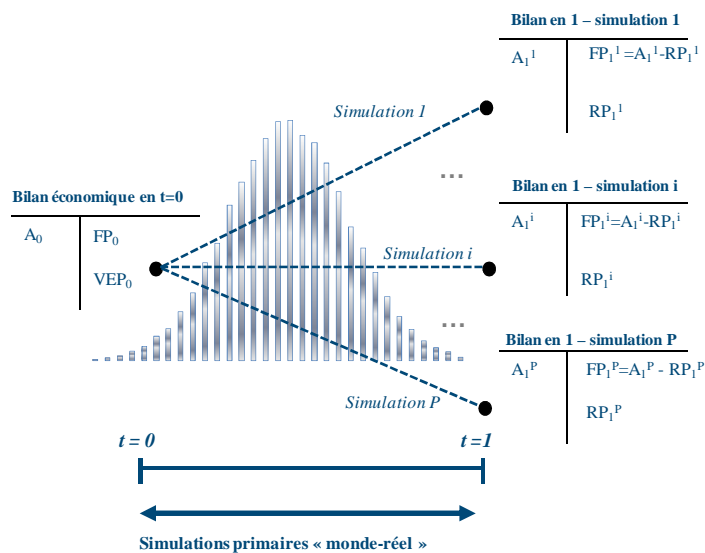


Figure 1 : Obtention de la distribution de fonds propres économiques par la méthode RP

Un des principaux intérêts de la méthodologie RP est de pouvoir disposer d'un échantillon de la variable  $FP_1$  de taille conséquente. Ceci permet en effet de garantir la robustesse de l'estimation du quantile à 0,5% de la variable aléatoire étudiée.

Il convient néanmoins de calibrer précisément le RP car un mauvais ajustement RP / fonds propres peut conduire à des estimations erronées du capital économique.

La méthode alternative que nous avons développée induit des temps de calibrage plus longs que les méthodes usuelles mais garantit une plus grande robustesse d'estimation du besoin en capital. Nous la détaillons dans la partie 4 après avoir effectué un rappel des méthodologies de calibrages communément utilisées.

### 3. Les mises en œuvre usuelles de la technique des Replicating Portfolios

Nous présentons dans cette section les méthodologies les plus communément appliquées dans la pratique.

#### 3.1. Idées clés des approches standards

Les approches RP standards se séquent le plus souvent de la manière suivante :

- *Etape 1* : construction de scénarios économiques monde-réel ou risque-neutre utilisés pour les travaux de calibrage,
- *Etape 2* : calculs ALM visant à obtenir les cash-flows de passifs à chaque date sur l'ensemble des simulations générées en Etape 1,
- *Etape 3* : sélection des actifs candidats et paramétrage de ces derniers,
- *Etape 4* : détermination de la composition du RP (i.e. estimation des poids de chaque actif candidat) par résolution d'un programme d'optimisation,
- *Etape 5* : test de la qualité d'ajustement,
- *Etape 6* : utilisation du RP comme proxy de la valeur économique des passifs.

Le lecteur pourra notamment consulter Algorithmics (2008) pour une illustration des approches standards des techniques RP.

Nous proposons ci-après différentes remarques relatives aux étapes évoquées précédemment.

Les simulations (étape 1) utilisées pour le calibrage sont le plus souvent des scénarios risque-neutre. Néanmoins certaines compagnies s'appuient sur des scénarios monde-réel afin de conserver une certaine cohérence entre les travaux de calibrage et la diffusion du RP qui requiert quant à elle nécessairement des simulations monde-réel. Les projections ALM (étape 2) sont effectuées en général au moyen d'un modèle de type « MCEV » permettant de valoriser les passifs et les fonds propres de la compagnie en date  $t = 0$ . La sélection des actifs candidats composant le RP (étape 3) repose sur le jugement d'expert et ne découle aucunement d'un traitement à la fois automatique et optimal. Dans la pratique, il existe plusieurs variantes possibles pour le programme d'optimisation (étape 4) à résoudre ; nous les détaillons dans la partie suivante. Pour mesurer la qualité d'adéquation (étape 5), les compagnies effectuent des validations graphiques et calculent le coefficient de détermination (fréquemment dénommé «  $R^2$  ») sur l'échantillon des couples de valeurs actuelles des cash-flows de passifs et du RP. Le RP est alors projeté en univers monde-réel afin de disposer d'une distribution de la valeur économique des passifs. La valeur de marché de l'actif est également projetée à partir du même jeu de scénarios afin de déduire par différence la distribution de fonds propres économiques de la compagnie et d'estimer le montant du capital Solvabilité II. Notons que la projection des variables d'intérêt peut être réalisée en  $t = 1$  ou bien en  $t = 0$  à l'aide de chocs instantanés<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Les chocs instantanés sont néanmoins homogènes à des mouvements à un an des différents drivers en univers monde-réel.

Nous présentons dans la partie suivante une formalisation des approches de calibrage les plus répandues.

## 3.2. Les différentes approches de calibrage

### 3.2.1. Introduction et notations

On distingue en pratique deux grands types de méthodologies : la réplication des cash-flows et la réplication des VAN (valeur actuelle nette) de cash-flows. Même si toutes deux sont utilisées pour le calcul du capital économique Solvabilité II, ces approches ne répondent pas exactement aux mêmes objectifs. Par exemple, une méthode basée sur la réplication des cash-flows pourra être utilisée afin de répondre à des problématiques de calcul de capital économique pour différents horizons de ruine et sera donc très utile dans le cadre d'un dispositif ORSA (Own Risk and Solvency Assessment). Une approche consistant à répliquer les VAN de cash-flows permettra de disposer très rapidement de sensibilités de la MCEV d'une compagnie. Le lecteur pourra consulter Revelen (2009) et Larpin (2009) pour une présentation des approches standards ainsi que leur mise en œuvre.

Introduisons les notations suivantes :

- $T$  l'horizon de projection des passifs,
- $S$  le nombre de simulations requises pour le calibrage,
- $cf_{passifs}(s, t)$  le cash-flow de passifs en date  $t$  dans la simulation  $s$ ,
- $cf_{RP}^k(s, t)$  le cash-flow délivré par le  $k$ -ième actif candidat du RP en date  $t$  dans la simulation  $s$ , avec  $k = 1, \dots, N$ ,
- $w_k$  le poids associé au  $k$ -ième actif candidat du RP,
- $L(0)$  (resp.  $RP(0)$ ) le Best Estimate des passifs<sup>3</sup> (resp. la valeur du RP) en date 0.

Dans les parties suivantes, nous proposons une formalisation des méthodes de calibrage mentionnées précédemment.

### 3.2.2. La réplication des cash-flows

Schrager (2008) propose une description heuristique de cette méthodologie et fournit un exemple d'application sur un portefeuille d'assurance-vie.

Une approche « calibrage par réplication des cash-flows » permet d'obtenir à chaque date des cash-flows de passifs et du RP relativement « proches »<sup>4</sup> :

---

<sup>3</sup> Pour la clarté de l'exposé nous ne considérerons pas dans cet article de Risk Margin. Par conséquent, nous assimilerons « Valeur Economique » et « Best Estimate » des passifs.

<sup>4</sup> Nous reviendrons dans la suite de l'article sur le sens de cette égalité (cf. section 5.1)

$$cf_{passifs}(s, t) \approx \sum_{k=1}^N w_k cf_{RP}^k(s, t) \quad \forall s, t.$$

La technique la plus immédiate pour estimer le vecteur de poids optimaux  $(w_1^*, \dots, w_N^*)$ , repose sur une approche de type MCO (Moindres Carrés Ordinaires) conduisant à résoudre le programme d'optimisation suivant :

$$(w_1^*, \dots, w_N^*) = \underset{(w_1, \dots, w_N)}{\text{Argmin}} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left( cf_{passifs}(s, t) - \sum_{k=1}^N w_k cf_{RP}^k(s, t) \right)^2 \quad (P1)$$

Ce type de critère est en réalité peu répandu. En pratique, des contraintes sont ajoutées au programme d'optimisation de manière à rendre le calibrage plus consistant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (w_1^*, \dots, w_N^*) = \underset{(w_1, \dots, w_N)}{\text{Argmin}} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left( cf_{passifs}(s, t) - \sum_{k=1}^N w_k cf_{RP}^k(s, t) \right)^2 \\ \text{sous la contrainte } \frac{|L(0) - RP(0)|}{L(0)} \leq \varepsilon \end{array} \right. \quad (P2)$$

Où  $\varepsilon$  représente la marge d'erreur (fixée par l'utilisateur) entre le BE des passifs et la valeur du RP à la date  $t = 0$ .

Le calcul du capital économique Solvabilité II nécessite de valoriser le RP conditionnellement à des chocs extrêmes. Par conséquent, pour garantir une meilleure robustesse d'estimation du capital, certains praticiens introduisent dans le processus de calibrage, des contraintes de réplication de chocs :

$$\left\{ \begin{array}{l} (w_1^*, \dots, w_N^*) = \underset{(w_1, \dots, w_N)}{\text{Argmin}} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left( cf_{passifs}(s, t) - \sum_{k=1}^N w_k cf_{RP}^k(s, t) \right)^2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ \frac{|L(0) - RP(0)|}{L(0)} \leq \varepsilon \\ \frac{|L_{choc 1}(0) - RP_{choc 1}(0)|}{L_{choc 1}(0)} \leq \varepsilon_1 \\ \dots \\ \frac{|L_{choc m}(0) - RP_{choc m}(0)|}{L_{choc m}(0)} \leq \varepsilon_m \end{array} \right. \quad (P3)$$

Où  $L_{choc i}(0)$  (resp.  $RP_{choc i}(0)$ ) représente la valeur en  $t = 0$  du BE des passifs (resp. du RP) conditionnellement au choc  $i$  et  $\varepsilon_i$  correspond à la marge d'erreur acceptable pour ce choc.

Les passifs d'assurance étant projetés sur un horizon relativement profond (entre 30 ans et 50 ans en pratique), il peut être opportun de regrouper les cash-flows selon des périodes plus grossières désignées

fréquemment par « time buckets ». Les programmes d'optimisation visent donc le plus souvent à répliquer des agrégats de cash-flows pour chaque « time bucket ».

### 3.2.3. La réplcation des VAN de cash-flows

Le calibrage basé sur la réplcation des VAN de cash-flows est systématiquement effectué dans la pratique en univers risque-neutre.

Notons  $\delta(s, t)$  la valeur du facteur d'actualisation<sup>5</sup> pour la date  $t$  dans la simulation  $s$ .

Considérons les VAN de cash-flows de passifs et du RP dans la simulation  $s$  :

$$VAN_{passifs}(s) = \sum_{t=1}^T \delta(s, t) \cdot cf_{passifs}(s, t),$$

Et,

$$VAN_{RP}^{(w_1, \dots, w_N)}(s) = \sum_{t=1}^T \delta(s, t) \cdot \sum_{k=1}^N w_k cf_{RP}^k(s, t).$$

Le programme d'optimisation le plus répandu pour le calibrage du RP est similaire au dernier critère mentionné dans la partie précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} (w_1^*, \dots, w_N^*) = \underset{(w_1, \dots, w_N)}{\operatorname{Argmin}} \sum_{s=1}^S \left( VAN_{passifs}(s) - VAN_{RP}^{(w_1, \dots, w_N)}(s) \right)^2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ \frac{|L(0) - RP(0)|}{L(0)} \leq \varepsilon \\ \frac{|L_{choc\ 1}(0) - RP_{choc\ 1}(0)|}{L_{choc\ 1}(0)} \leq \varepsilon_1 \\ \dots \\ \frac{|L_{choc\ m}(0) - RP_{choc\ m}(0)|}{L_{choc\ m}(0)} \leq \varepsilon_m \end{array} \right. \quad (P4)$$

**Remarque** : la mise en œuvre d'une approche MCO (sans ajout de contraintes) conduit nécessairement à l'égalité entre la valeur du BE et celle du RP en  $t = 0$ . En effet, dans une régression linéaire standard il y a égalité des espérances de la variable réponse et du prédicteur, ceci conduit sous la probabilité risque-neutre  $Q$  à la relation :

$$\begin{aligned} E_Q(VAN_{passifs}) &= E_Q(VAN_{RP}^{(w_1^*, \dots, w_N^*)}) \\ &\Leftrightarrow L(0) = RP(0). \end{aligned}$$

L'intégration de contraintes de réplcation de chocs induit une perte de cette propriété, il est donc

<sup>5</sup> Il s'agit du facteur rendant martingale les prix actualisés.

nécessaire d'ajouter cette dernière à l'ensemble des contraintes du programme d'optimisation.

### **3.3. Réplication des passifs ou réplication des marges ?**

Comme nous l'avons détaillé dans les parties précédentes, les approches opérationnelles développées par les compagnies qui utilisent la technique des RP pour le calcul de leur capital économique reposent sur la réplication des passifs (cash-flows ou VAN de cash-flows).

Or il est plus précis dans certains cas de répliquer directement les marges de la compagnie (en cash-flows ou en VAN) selon les méthodologies décrites ci-avant. Un tel choix est le plus souvent judicieux car la réplication des marges permet de mieux « maîtriser » l'erreur commise dans l'estimation du capital. Un très faible écart de réplication des passifs peut en effet conduire à des différences très significatives en termes de SCR car l'ordre de grandeur du BE des passifs est beaucoup plus élevé que celui des fonds propres de la compagnie.

Pour ces raisons, la méthode que nous avons développée et qui est présentée dans la partie suivante repose sur la réplication des fonds propres de la compagnie. Nous proposons dans la partie consacrée aux applications d'illustrer la problématique du choix de la variable à répliquer et nous montrons qu'il est beaucoup plus précis de considérer les fonds propres.

Deux explications sont néanmoins souvent avancées par les praticiens pour justifier les approches « réplication des passifs » :

- La lecture optionnelle des contrats d'assurance facilite le choix des actifs candidats composant le RP ainsi que leur paramétrage,
- Une telle approche permet de projeter l'actif de la compagnie en « ligne à ligne ».

Comme nous avons pu le préciser dans la section 2.4.1, le premier argument tient difficilement en pratique car la réplication de variables économiques calculées via un modèle interne n'est pas envisageable opérationnellement à l'aide des techniques développées en finance quantitative.

Par ailleurs, une projection « ligne à ligne » de la valeur de marché de l'actif de la compagnie peut entraîner certaines hétérogénéités dans le processus de calcul du capital économique. En effet, dans la plupart des modèles internes, les projections ALM sont effectuées sur des données d'actifs agrégées (pour réduire les temps de calculs). Par conséquent l'échantillon sur lequel est calibré le RP est déterminé sur une « base agrégée » et non « ligne à ligne ». En calculant le capital économique à partir de fonds propres estimés comme différence entre la valeur de l'actif en « ligne à ligne » et la valeur du RP calibré sur « base agrégée », on peut aboutir à des incohérences dues à l'hétérogénéité des traitements.

## 4. Méthode alternative de calibrage

### 4.1. Introduction

La technique que nous avons développée et qui est présentée dans cette section revient à calibrer le RP sur un sous échantillon de valeurs de fonds propres en  $t=1$ . Cette méthodologie permet en sus de sélectionner automatiquement les actifs candidats constituant le RP et de les paramétrer de manière optimale.

Nous avons vu dans la partie précédente que les méthodes usuelles de calibrage de RP consistent à minimiser des écarts quadratiques du type :

$$\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left( cf_{passifs}(s, t) - \sum_{k=1}^N w_k cf_{RP}^k(s, t) \right)^2,$$

Ou,

$$\sum_{s=1}^S \left( VAN_{passifs}(s) - VAN_{RP}^{(w_1, \dots, w_N)}(s) \right)^2.$$

L'approche que nous avons développée repose quant à elle sur un calibrage requérant la connaissance de réalisations de fonds propres à un an. Les éléments considérés sont donc homogènes à des Best Estimate et non à des cash-flows. Le processus de calibrage revient par conséquent à minimiser des écarts du type :

$$\sum_p \left( FP_p - RP_p^{(w_1, \dots, w_N)} \right)^2,$$

Où  $RP_p^{(w_1, \dots, w_N)}$  représente la valeur du RP en  $t = 1$  dans la simulation  $p$  considérée.

A la différence des approches standards qui s'appuient sur des minimisations d'écarts de cash-flows, les éléments  $FP_p$  et  $RP_p^{(w_1, \dots, w_N)}$  considérés dans la méthode alternative que nous présentons, correspondent à des prix et sont donc homogènes à des espérances (conditionnelles) de cash-flows.

### 4.2. Les idées clés de la méthode

L'utilisation d'une forme paramétrique fournit en général de très bons résultats pour l'estimation du capital économique (cf. Devineau et Loisel (2009b)). Par conséquent, à supposer que l'on puisse répliquer chaque terme de la forme paramétrique par un sous-portefeuille répliquant, ceci permet de disposer d'un RP global satisfaisant pour l'estimation du capital économique.

Considérons le  $n$ -uplet de facteurs de risque  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  représentant les aléas qui synthétisent l'intensité du risque de chaque simulation primaire (cf. Devineau et Loisel (2009) pour une description détaillée de ces éléments) et considérons la forme paramétrique suivante :



$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in E} A_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_n^{i_n},$$

Où l'ensemble E représente un sous-ensemble<sup>6</sup> de  $\{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n / i_1 + \dots + i_n \leq d\}$ .

Notons  $FP_{param} = f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  la variable « fonds propres estimés par la forme paramétrique ».

La méthode alternative consiste à adosser un RP que nous noterons  $RP^{(i_1, \dots, i_n)}$  à chaque terme  $\varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_n^{i_n}$  de la forme paramétrique.

Par inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} \|FP - RP\| &\leq \|FP - FP_{param}\| + \|FP_{param} - RP\| \\ \|FP - RP\| &\leq \|FP - FP_{param}\| + \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in E} A_{i_1, \dots, i_n} \|\varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_n^{i_n} - RP^{(i_1, \dots, i_n)}\|, \end{aligned}$$

Où FP (resp. RP) représente la valeur des fonds propres (resp. du Replicating Portfolio) en  $t = 1$ .

L'inégalité ci-dessus montre qu'une réplification précise de chaque terme de la forme paramétrique permet de disposer d'un RP répliquant de manière satisfaisante la variable FP. Il s'agit là d'un majorant de l'erreur, nous verrons que l'approche alternative conduit le plus souvent à des ajustements plus robustes que les méthodes de type « forme paramétrique ».

La méthode alternative se décline en plusieurs étapes :

- *Etape 0* : construction de scénarios économiques monde-réel et sélection a priori de trajectoires adverses,
- *Etape 1* : calcul des valeurs de fonds propres (en  $t = 1$ ) afférentes aux trajectoires précédemment sélectionnées et utilisation d'une forme paramétrique pour l'analyse de la convexité de la « fonction fonds propres »,
- *Etape 2* : détermination de sous-portefeuilles répliquant s'ajustant sur chaque terme de la forme paramétrique,
- *Etape 3* : régression de la distribution des fonds propres en  $t = 1$  sur les prix des actifs candidats afin d'obtenir l'asset mix (i.e. le vecteur de poids) du RP,
- *Etape 4* : projection en  $t = 1$  du RP sur un jeu complet de simulations monde-réel et déduction du capital économique.

Nous détaillons dans la suite les différentes étapes présentées précédemment.

Le recours à une forme paramétrique (Etape 1) permet d'étudier la convexité de la « fonction fonds propres » en les facteurs de risque. Cette étude préliminaire nécessite la connaissance d'un nombre limité de valeurs des fonds propres en  $t = 1$  (Etape 0). Une fois connus les éléments de la forme paramétrique, les actifs candidats sont automatiquement déduits (Etape 2) puis paramétrés (détermination des maturités des sous-jacents, des niveaux de moneyness et des dates d'exercice des actifs considérés) de manière optimale durant la phase de sous-réplification.

La composition (asset mix) du RP est ensuite estimée (Etape 3) par régression linéaire (du sous-échantillon des fonds propres sur les prix en  $t = 1$  des actifs du RP). La valeur de marché du RP est ensuite simulée (Etape 4) à un an, à partir d'un jeu complet de simulations monde-réel, de manière à

---

<sup>6</sup> Le sous-ensemble E correspond à un choix de « variables explicatives » parmi les éléments  $\varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_n^{i_n}$ .

disposer d'un échantillon des fonds de la variable « fonds propres ». Le calcul du capital économique est alors immédiat.

Nous décrivons ci-après les principales étapes définissant la méthode alternative. A des fins de clarté de l'exposé, nous considérerons par la suite uniquement deux risques : le risque de niveau sur l'indice « actions » et le risque de niveau sur les taux d'intérêt. Nous noterons  $\varepsilon_a$  (resp.  $\varepsilon_{ZC}$ ) le facteur de risque « actions » (resp. taux). Cette approche peut néanmoins se généraliser en plus grande dimension.

### 4.3. Calcul d'un échantillon de valeurs de fonds propres en $t=1$

Le calibrage de la forme paramétrique ainsi que celui de l'asset mix du RP nécessite de disposer d'un jeu de valeurs des fonds propres en  $t = 1$ . Afin de garantir le caractère opérationnel de la méthodologie développée, il est primordial de considérer le moins possible de valeurs des fonds propres. En effet, la détermination de chacune de ces valeurs repose sur des simulations de Monte-Carlo sur des tables risque-neutre conditionnelles ajustées du réalisé de première période.

Ainsi, pour une simulation primaire  $p$  fixée, les fonds propres sont estimés comme suit :

$$FP_1^p \approx R_1^p + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u^{p,s}}{\delta_1^p} R_u^{p,s},$$

Avec,

- $R_u^{p,s}$  le résultat de la date  $u > 1$  pour la simulation primaire  $p \in \{1, \dots, P\}$  et secondaire  $s \in \{1, \dots, S\}$ ,
- $R_1^p$  le résultat de la première période pour la simulation primaire  $p$ ,
- $\delta_u^{p,s}$  le facteur d'actualisation de la date  $u > 1$  pour la simulation primaire  $p$  et secondaire  $s$ ,
- $\delta_1^p$  le facteur d'actualisation de la première période pour la simulation primaire  $p$ ,
- $FP_1^p$  les fonds propres économiques en fin de première période pour la simulation primaire  $p$ .

Pour effectuer le moins de calcul de fonds propres possible, les simulations primaires sont sélectionnées en fonction de leur degré d'adversité. Pour ce faire, nous considérons un critère de norme. Nous rappelons que la norme du scénario primaire  $p$  se calcule comme suit :

$$\|(\varepsilon_a^p, \varepsilon_{ZC}^p)\|_\rho \triangleq \sqrt{(\varepsilon_a^p)^2 + (\varepsilon_{ZC}^p)^2 - 2\rho_{\varepsilon_a, \varepsilon_{ZC}} \varepsilon_a^p \varepsilon_{ZC}^p},$$

Où  $\varepsilon_a^p$  (resp.  $\varepsilon_{ZC}^p$ ) représente la valeur du facteur de risque actions (resp. taux) dans la simulation  $p$  et où  $\rho_{\varepsilon_a, \varepsilon_{ZC}}$  correspond à la corrélation linéaire entre les deux facteurs. Pour plus de détail sur l'extraction des facteurs de risque et sur la priorisation des scénarios extrêmes, le lecteur est renvoyé à l'article de Devineau et Loisel (2009).

On détermine ainsi la valeur des fonds propres  $(FP_1^p)_{p=1, \dots, N}$  relatifs aux  $N$  scénarios de pires normes.

Notons que de tels scénarios correspondent aux réalisations extrêmes de la variable « fonds propres ».

Ceci permet d'assurer un calibrage plus robuste du RP à des fins de calcul de capital économique.

#### 4.4. Analyse de la convexité à l'aide d'une forme paramétrique

L'objet de cette étape est d'ajuster une forme paramétrique sur le jeu des  $N$  valeurs de fonds propres  $(FP_1^p)_{p=1,\dots,N}$  obtenues précédemment. La composition de la forme paramétrique permet d'étudier les propriétés analytiques de la « fonction fonds propres » et constitue un outil très efficace pour le processus de sélection et de paramétrage des actifs du RP. Le calibrage de la forme paramétrique repose sur la minimisation du programme d'optimisation suivant :

$$(A_{i_a, i_{ZC}}^*)_{(i_a, i_{ZC}) \in E} = \underset{(A_{i_a, i_{ZC}})_{(i_a, i_{ZC}) \in E}}{\text{Argmin}} \sum_{p=1}^N \left( FP_1^p - \sum_{(i_a, i_{ZC}) \in E} A_{i_a, i_{ZC}} \varepsilon_a^{i_a} \varepsilon_{ZC}^{i_{ZC}} \right)^2,$$

Sous les contraintes,

$$\frac{|SCR_{param}^a - SCR^a|}{SCR^a} \leq e_a,$$

Et,

$$\frac{|SCR_{param}^{ZC} - SCR^{ZC}|}{SCR^{ZC}} \leq e_{ZC},$$

Où  $SCR_{param}^a$  (resp.  $SCR_{param}^{ZC}$ ) est le SCR « actions » (resp. taux) calculé à l'aide de la forme paramétrique marginale « actions » (resp. taux) et où  $SCR^a$  (resp.  $SCR^{ZC}$ ) est le SCR « actions » (resp. taux) issu du modèle en considérant sur la première période la trajectoire quantile actions (resp. taux) de niveau 0,5%. Les termes  $e_a$  et  $e_{ZC}$  correspondent aux erreurs maximales autorisées dans la réplification des capitaux marginaux par la forme paramétrique.

Une telle mise en œuvre conduit à une plus grande robustesse de l'ajustement dans les simulations extrêmes entre les résultats du modèle et ceux produits par la forme paramétrique.

Notons par ailleurs que pour éviter toute problématique de sur-paramétrisation il est nécessaire de considérer le plus petit nombre de régresseurs possible. Dans la pratique, un degré  $d \leq 3$  et un choix judicieux des covariates fournit des résultats satisfaisants.

Nous donnons ci-dessous à titre d'exemple la structure de la forme paramétrique retenue pour le produit d'épargne étudié dans la partie 6 :

$$FP_{param} = A_{0,0} + A_{1,0} \cdot \varepsilon_a + A_{2,0} \cdot \varepsilon_a^2 + A_{3,0} \cdot \varepsilon_a^3 + A_{0,1} \cdot \varepsilon_{ZC} + A_{0,2} \cdot \varepsilon_{ZC}^2 + A_{1,1} \cdot \varepsilon_a \cdot \varepsilon_{ZC}.$$

Le cube du facteur de risque « taux » n'est pas significatif et le seul terme croisé conservé est le terme de 1<sup>er</sup> ordre.

## 4.5. Choix des actifs candidats et paramétrage

Cette étape consiste à associer à chacun des termes de la forme paramétrique un sous-RP déterminé de manière optimale.

Nous rappelons que l'un des inconvénients majeurs des approches usuelles est que le choix des actifs candidats repose entièrement sur le jugement d'expert et ne découle pas d'une méthodologie automatique.

La méthode alternative permet en revanche d'adosser à chaque terme  $\varepsilon_a^{i_a} \cdot \varepsilon_{ZC}^{i_{ZC}}$  de la forme paramétrique un sous-RP noté  $RP^{(i_a, i_{ZC})}$  par résolution d'un programme d'optimisation.

### 4.5.1. Introduction heuristique

Nous proposons dans cette section une introduction heuristique au principe de sous-réplication des termes de la forme paramétrique.

Pour ce faire, étudions le terme « taux » de premier degré  $\varepsilon_{ZC}$  et considérons un développement de Taylor d'ordre 1 du prix d'un zéro-coupon. Nous pouvons écrire que :

$$P(1, m) \approx drift_m^{ZC} + \sigma_m^{ZC} \cdot \varepsilon_{ZC},$$

Avec  $P(1, m)$  le prix en  $t = 1$  d'un zéro-coupon (ZC) de maturité  $m$  et  $drift_m^{ZC}$  (resp.  $\sigma_m^{ZC}$ ) des constantes liées au log-rendement du prix ZC.

Il est aisé de déduire une expression du facteur de risque « taux » en fonction du prix ZC :

$$\varepsilon_{ZC} \approx \frac{1}{\sigma_m^{ZC}} P(1, m) - \frac{drift_m^{ZC}}{\sigma_m^{ZC}}.$$

Le terme de droite de l'équation ci-dessus fait intervenir deux composantes : une composante ZC et une composante « cash ».

Notons  $I_t^{cash}$  la valeur en  $t$  d'un bon de capitalisation et supposons que  $I_0^{cash} = 1$  et  $I_1^{cash} = 1/P(0,1)$ .

Le portefeuille  $RP_{ZC} = w_{cash} I_1^{cash} + w_{ZC} P(1, m)$  de poids,

$$w_{ZC} = \frac{1}{\sigma_m^{ZC}},$$

Et,

$$w_{cash} = -\frac{drift_m^{ZC}}{\sigma_m^{ZC}} \cdot P(0,1),$$

Permet de répliquer précisément le facteur  $\varepsilon_{ZC}$ .

### 4.5.2. Principe général de sous-réplication

Les analyses de la partie précédente montrent que le facteur  $\varepsilon_{ZC}$  peut être répliqué par différentes

maturités de ZC. Il est néanmoins crucial de déterminer quelle maturité est optimale pour la réplification de ce terme. Pour ce faire, on résout le programme d'optimisation suivant :

$$(w_{cash}^*, w_{ZC}^*, m^*) = \underset{(w_{cash}, w_{ZC}, m)}{\text{Argmin}} \sum_{p=1}^P \left( \varepsilon_{ZC}^p - (w_{ZC} \cdot P^p(1, m) + w_{cash} \cdot I_1^{cash}) \right)^2,$$

Où  $P$  représente le nombre total de simulations primaires considérées pour le calcul du capital économique (par conséquent  $P \gg N$ ) et  $P^p(1, m)$  le prix d'un ZC de maturité  $m$  dans la simulation primaire  $p$ .

A l'issue de cette optimisation, on dispose des poids des actifs composant le sous-RP du terme  $\varepsilon_{ZC}$  ainsi que leurs paramètres (ici le seul paramètre à déterminer est la maturité du ZC considéré pour la réplification).

De la même manière, une fois choisie une liste d'actifs candidats pour la réplification du facteur  $\varepsilon_a^{i_a} \cdot \varepsilon_{ZC}^{i_{ZC}}$ , les paramètres sont estimés par minimisation du critère :

$$\theta^* = \underset{\theta}{\text{Argmin}} \sum_{p=1}^P \left( (\varepsilon_a^p)^{i_a} \cdot (\varepsilon_{ZC}^p)^{i_{ZC}} - RP_{\theta}^{(i_a, i_{ZC})} \right)^2,$$

Où  $RP_{\theta}^{(i_a, i_{ZC})}$  est le sous-RP permettant de répliquer le terme  $\varepsilon_a^{i_a} \cdot \varepsilon_{ZC}^{i_{ZC}}$  et  $\theta$  est le vecteur de poids et de paramètres des actifs candidats considérés.

Les seules informations requises dans cette mise en œuvre sont les valeurs des facteurs de risque ainsi que les prix des actifs candidats pour chacune des simulations primaires. Il s'agit de calculs pouvant être effectués hors modèle interne. Pour ne pas compromettre le caractère opérationnel de cette phase de sous-réplification, les actifs candidats nécessitant une valorisation (par exemple les produits dérivés) sont valorisés à l'aide de formules fermées. En revanche lors de l'étape de détermination de l'asset mix global du RP nous privilégierons une valorisation par technique de Monte Carlo (cf. infra).

### 4.5.3. Choix des actifs candidats en fonction du terme à répliquer

Le choix des actifs à considérer dépend du degré de convexité du terme à répliquer. Pour la réplification d'un terme de degré 1, on a recours directement au sous-jacent correspondant (nous avons vu par exemple que le terme  $\varepsilon_{ZC}$  est répliqué à l'aide de cash et d'un ZC). En revanche, pour répliquer le terme  $\varepsilon_a$ , il est le plus souvent nécessaire de considérer, en plus des composantes « cash » et « indice actions », des dérivés (afin d'effectuer des ajustements de convexité lorsque des volatilités trop élevées invalident un développement de Taylor d'ordre 1).

De façon très intuitive, la réplification des termes d'ordre 2 fait intervenir, en plus des actifs sous-jacents, des dérivés (actions ou taux selon le terme considéré).

Le tableau ci-dessous recense les types d'actifs candidats composant les sous-RP pour chacun des termes

de la forme paramétrique (excepté les effets croisés) :

Termes	Actifs financiers par sous-RP
$\varepsilon_{ZC}$	Cash, ZC
$\varepsilon_{ZC}^2, \varepsilon_{ZC}^3$	Cash, ZC, caplets, floorlets
$\varepsilon_a, \varepsilon_a^2, \varepsilon_a^3$	Cash, indices « actions », calls, puts

**Tableau 1 : mapping des termes de la forme paramétrique avec les actifs des sous-RP**

Remarque : la forme paramétrique contient des termes croisés (i.e. des facteurs du type  $\varepsilon_a^{i_a} \varepsilon_{ZC}^{i_{ZC}}$  avec  $i_a > 0$  et  $i_{ZC} > 0$ ) dont la réplification directe peut être délicate et nécessiter d'utiliser des actifs hybrides (par exemple des obligations convertibles). Or les dérivés « actions » dont les prix correspondent à des espérances de variables dépendant à la fois des taux et du sous-jacent « actions » permettent de capter indirectement des effets croisés. Nous ne cherchons donc pas à répliquer spécifiquement ces facteurs en postulant que certains actifs candidats du RP les prennent en compte implicitement.

#### 4.5.4. Exemples de sous-réplification

Nous donnons à titre d'exemple dans cette section les critères de minimisation pour la réplification des termes  $\varepsilon_a$  et  $\varepsilon_{ZC}^2$ .

Notons :

- $P^p(1, m)$  le prix d'un zéro-coupon en  $t = 1$  de maturité  $m$  pour la simulation primaire  $p$ ,
- $S_1^p$  l'indice action en  $t = 1$  la simulation primaire  $p$ ,
- $C^p(K, m)$  (resp.  $P^p(K, m)$ ) le prix d'un call<sup>7</sup> (resp. put) de date d'exercice  $m$  et de strike  $K$  pour la simulation primaire  $p$ ,
- $Caplet^p(K, m, t)$  (resp.  $Floorlet^p(K, m, t)$ ) le prix d'un caplet (resp. floorlet) de date d'exercice  $m$ , de taux strike  $K$  et de taux sous-jacent de maturité  $m$  pour la simulation primaire  $p$ .

Nous considérons les portefeuilles ci-dessous pour répliquer respectivement  $\varepsilon_a$  et  $\varepsilon_{ZC}^2$  :

$$RP_{\theta(1,0)}^{p(1,0)} = w_{cash}^{(1,0)} I_1^{cash} + w_S S_1^p + w_{C_1} C^p(K_1, m_1) + w_{C_2} C^p(K_2, m_2) + w_{P_1} P^p(K_3, m_3) + w_{P_2} P^p(K_4, m_4),$$

Et,

<sup>7</sup> Les volatilités implicites « actions » (resp. des swaptions) sont supposées connues et identiques aux volatilités observées en  $t = 0$ .

$$RP_{\theta(0,2)}^{p(0,2)} = w_{cash}^{(0,2)} I_{cash} + w_{ZC} P^p(1, m_{ZC}) + w_{Cplt_1} Caplet^p(K_1, m_1, t_1) + w_{Cplt_2} Caplet^p(K_2, m_2, t_2) \\ + w_{Flt_1} Floorlet^p(K_3, m_3, t_3) + w_{Flt_2} Floorlet^p(K_4, m_4, t_4).$$

Les vecteurs de paramètres  $\theta_{(1,0)}$  et  $\theta_{(0,2)}$  sont déterminés par résolution des programmes d'optimisation suivants :

$$\theta^*_{(1,0)} = \underset{\theta_{(1,0)}}{\text{Argmin}} \sum_{p=1}^P \left( \varepsilon_a^p - RP_{\theta_{(1,0)}}^{p(1,0)} \right)^2,$$

Et,

$$\theta^*_{(0,2)} = \underset{\theta_{(0,2)}}{\text{Argmin}} \sum_{p=1}^P \left( (\varepsilon_{ZC}^p)^2 - RP_{\theta_{(0,2)}}^{p(0,2)} \right)^2.$$

Remarques :

- En pratique il est suffisant de considérer uniquement deux calls, puts, (resp. caplets, floorlets) pour une réplication satisfaisante des termes  $\varepsilon_a$  (resp.  $\varepsilon_{ZC}^2$ ). Ceci permet d'éviter toute problématique de sur-paramétrisation. Un calibrage sur peu de simulations primaires (i.e.  $N$  faible) et impliquant un nombre élevé d'actifs candidats pourrait en effet fortement compromettre le caractère prédictif du portefeuille.
- La réplication des termes de degré 3 ne soulève aucun problème particulier et peut être traitée comme celle des termes de degré 2 en introduisant conjointement des positions longues et courtes.
- L'intégration de certains facteurs de risque financiers dans la forme paramétrique et le RP peut s'avérer quelquefois délicate<sup>8</sup> (c'est le cas par exemple les risques de volatilités « actions » ou « taux »).

## 4.6. Calibrage de l'asset mix du portefeuille répliquant

Une fois les actifs candidats choisis et paramétrés, les sous-RP sont consolidés afin de disposer d'un portefeuille global. Les poids afférents à chaque actif sont alors déterminés dans cette ultime étape par minimisation d'une fonction cible sur le portefeuille agrégé.

Notons :

- $M$  le nombre d'actifs composant le RP,
- $A_k^p(t)$  la valeur de marché en date  $t$  de l'actif  $k$  pour la simulation primaire  $p$ ,
- $(w_k^*)_{k=1,\dots,M}$  le vecteur de poids optimal.

Le programme d'optimisation à résoudre est le suivant :

---

<sup>8</sup> Il est néanmoins possible d'utiliser des actifs fictifs (ou peu liquides) pour la réplication de tels facteurs.

$$(w_k^*)_{k=1,\dots,M} = \underset{(w_k)_{k=1,\dots,M}}{\text{Argmin}} \sum_{p=1}^N \left( FP_1^p - \sum_{k=1}^M w_k A_k^p(1) \right)^2,$$

Sous la contrainte,

$$\frac{|FP_0 - \sum_{k=1}^M w_k A_k(0)|}{FP_0} \leq e,$$

Où le terme  $e$  désigne le niveau d'erreur admis par l'utilisateur dans la réplique des fonds propres en  $t = 0$ .

L'ajout d'une contrainte permet de conférer plus de robustesse au calibrage du RP à des fins de calcul de capital économique.

Une fois la détermination des poids effectuée, la valeur du RP à un an est simulée sur la base des  $P$  simulations primaires contenues dans le jeu complet des scénarios monde-réal.

Comme évoqué supra, les valeurs de marché des actifs sont estimées par technique de Monte-Carlo sur des tables risque-neutre conditionnées par le réalisé de première période. Une telle mise en œuvre garantit une plus grande cohérence avec la méthode d'évaluation des éléments du bilan économique par le modèle interne (pricing de type Monte-Carlo). Par ailleurs, une valorisation Monte-Carlo est universelle et ne dépend pas des modèles financiers utilisés comme c'est le cas notamment d'une approche par formules fermées.

Le capital économique est enfin calculé à partir de la distribution de valeur du RP en  $t = 1$  par approximation :

$$SCR = FP_0 - P(0,1) \cdot RP_1^{[0,5\%.P]},$$

Où  $RP_1^{[0,5\%.P]}$  représente la  $[0,5\%.P]^{\text{ième}}$  pire valeur de la distribution obtenue.

Remarques :

- La méthode présentée dans cette partie vise à répliquer les fonds propres en date 1. Dans le cas d'une compagnie ne disposant pas d'un modèle de projection à un an, il est néanmoins possible de mettre en œuvre la présente méthodologie en raisonnant sur des chocs instantanés en  $t = 0$ .
- Il est également possible de répliquer via cette méthode la valeur économique des passifs. Nous verrons dans les parties 5 et 6 qu'une réplique satisfaisante des passifs peut néanmoins induire des écarts significatifs en termes de capital économique.

## 5. Analyse théorique des différentes méthodologies

L'objet de cette partie est d'apporter un éclairage théorique sur les techniques de calibrage usuelles des RP et de relever un certain nombre de points d'attention pouvant mettre en échec ces approches.



## 5.1. De l'égalité « presque sûre » à la méthode des moindres carrés

Dans la littérature technique décrivant la méthode des RP, l'hypothèse fondamentale implicite correspond à l'égalité presque sûre suivante :

$$cf_{passifs}(t) = cf_{RP}(t) \text{ p. s.}$$

En effet, une égalité presque sûre entre les variables aléatoires « cash-flows de passifs » et « cash-flows du RP » permet quels que soient la date de calcul et l'univers de probabilité considéré (monde-réel ou risque-neutre) d'avoir une égalité entre la valeur économique des passifs et celle du RP. Sous de telles conditions, le RP devient un proxy de calcul extrêmement puissant dont l'utilisation peut même dépasser le simple cadre du calcul du capital économique réglementaire et peut être exploité afin de répondre à des problématiques ORSA, ERM, ...

Or dans la pratique, au vu de la complexité des passifs, cette égalité ne peut-être vérifiée et la méthodologie se ramène, comme détaillé supra, à une régression linéaire des variables réponse  $cf_{passifs}(t)$  sur les covariates  $(cf_{RP}^k(t))_{k=1,\dots,N}$  correspondant aux cash-flows des  $N$  actifs composant le RP.

Pour la clarté de l'exposé, nous supposons ci-dessous sans perte de généralité que l'on cherche uniquement à répliquer les cash-flows de passif d'une période  $t$  fixée.

En se référant au premier programme d'optimisation présenté dans la section 3.2.2, nous passons en réalité d'un matching du type égalité « presque sûre »,

$$cf_{passifs}(t) = \sum_{k=1}^N w_k cf_{RP}^k(t) \text{ p. s.},$$

À un matching de type « régression linéaire »,

$$cf_{passifs}(t) = \sum_{k=1}^N w_k cf_{RP}^k(t) + U(t),$$

Avec  $E_Q(U(t)) = 0$  et  $E_Q(cf_{RP}^k(t).U(t)) = 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Notons  $L_t(0)$  (resp.  $RP_t(0)$ ) la valeur économique (resp. la valeur de marché) en  $t=0$  associée aux cash-flows de passifs (resp. du RP) de la période  $t$ . On a l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} L_t(0) &= E_Q(\delta(t).cf_{passifs}(t)) = E_Q\left(\delta(t).\sum_{k=1}^N w_k cf_{RP}^k(t) + \delta(t).U(t)\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^N w_k E_Q(\delta(t).cf_{RP}^k(t))\right) + E_Q(\delta(t).U(t)) \\ &= RP_t(0) + E_Q(\delta(t).U(t)). \end{aligned}$$

Nous remarquons que pour égaliser  $L_t(0)$  et  $RP_t(0)$ , il faut et il suffit que les variables  $\delta(t)$  et  $U(t)$  soient décorréliées.

Cette propriété n'est pas garantie et pour satisfaire l'égalité, cette dernière est, comme nous l'avons précisé plus haut, généralement entrée en contrainte du programme d'optimisation.

L'apparition du bruit  $U(t)$ , concomitant à la perte de l'égalité presque sûre, peut impacter considérablement le calcul du capital économique. Deux problématiques se posent :

- Le changement de probabilité : le calcul du capital économique repose sur des simulations des fonds propres économiques en univers monde-réel en  $t = 1$ <sup>9</sup>. Or lorsque le calibrage est effectué sous la probabilité risque-neutre, les propriétés de la régression linéaire (notamment la propriété de nullité de l'espérance du résidu) peuvent ne pas être stables d'un univers de probabilité à l'autre.
- L'estimation de quantiles extrêmes : pour des scénarios « centraux », on peut s'attendre à une perturbation très faible causée par le résidu (car  $E_Q(U(t)) = 0$ ), en revanche pour l'estimation de quantiles extrêmes, l'impact peut-être très important.

Ces deux problématiques peuvent donc compromettre très fortement la robustesse d'estimation du capital économique Solvabilité II. Nous les détaillons dans les sections suivantes.

## 5.2. Le changement de probabilités

### 5.2.1. Introduction

Rappelons que le calibrage du RP s'effectue le plus souvent en univers risque-neutre alors même que le calcul du capital économique repose sur une projection « monde-réel » du RP.

Sous les notations introduites supra, les valeurs en  $t = 1$  des passifs  $L(1)$  et celle du Replicating Portfolio  $RP(1)$  conditionnées par l'information financière « monde-réel » de première période  $F_1^{MR}$ , se calculent comme suit :

$$L(1) = E_Q \left[ \sum_{t \geq 2} \frac{\delta(t)}{\delta(1)} cf_{passifs}(t) \middle| F_1^{MR} \right],$$

$$RP(1) = E_Q \left[ \sum_{t \geq 2} \frac{\delta(t)}{\delta(1)} cf_{RP}(t) \middle| F_1^{MR} \right].$$

Comme nous l'avons précisé plus haut, le conditionnement « monde-réel » de première période peut modifier considérablement l'adéquation entre le RP et les passifs étudiée en univers risque-neutre.

### 5.2.2. Analyse théorique

La méthodologie de régression linéaire multiple sur laquelle repose la technique des RP n'est pas nécessairement stable par conditionnement. Par conséquent, même si l'ajustement des cash-flows du RP

<sup>9</sup> Les simulations sont parfois effectuées pour des raisons opérationnelles en  $t = 0$ . Néanmoins les chocs instantanés considérés sont homogènes à des mouvements à un an des drivers financiers en univers monde-réel.

et des cash-flows de passifs est satisfaisant en  $t=0$ , la réplcation peut être compromise en conditionnant par le réalisé monde-réel de première période.

L'égalité entre la valeur économique des passifs et la valeur du RP n'est pas stable par passage à l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned} L_t(1) &= E_Q(\delta_1(t).cf_{passifs}(t)|F_1^{MR}) \\ &= E_Q(\delta_1(t).cf_{RP}(t) + \delta_1(t).U(t)|F_1^{MR}) \\ &= E_Q(\delta_1(t).cf_{RP}(t)|F_1^{MR}) + E_Q(\delta_1(t).U(t)|F_1^{MR}) \\ &= RP_t(1) + E_Q(\delta_1(t).U(t)|F_1^{MR}), \end{aligned}$$

Avec,

$$\delta_1(t) = \frac{\delta(t)}{\delta(1)}.$$

Pour que l'égalité entre  $L_t(1)$  et  $RP_t(1)$  soit respectée, il faut avoir :  $E_Q(\delta_1(t).U(t)|F_1^{MR}) = 0$ .

Une condition suffisante pour satisfaire cette égalité est la suivante :

- les variables  $\delta_1(t)|F_1^{MR}$  et  $U(t)|F_1^{MR}$  sont décorréélées,
- l'espérance conditionnelle du bruit est nulle :  $E_Q(U(t)|F_1^{MR}) = 0$ .

Le comportement de la variable  $E_Q(\delta_1(t).U(t)|F_1^{MR})$  dans les scénarios extrêmes peut donc compromettre très fortement la robustesse d'estimation du capital économique.

Remarques :

- La méthode alternative que nous avons mise au point permet de résoudre cette problématique car le processus de calibrage se base sur des valeurs de fonds propres calculées sur des scénarios extrêmes.
- Notre méthodologie tient également compte structurellement du timing de calcul résultant de la définition du capital Solvabilité II qui consiste à comparer les fonds propres initiaux aux valeurs extrêmes des fonds propres en  $t = 1$ . En effet, la détermination de l'asset mix repose sur une minimisation des écarts entre la valeur du RP et des fonds propres à un an. Les techniques usuelles se basent quant à elles sur des éléments projetés en date initiale. Ceci peut induire des distorsions dans l'estimation du capital économique.

### 5.3. Réplcation des passifs ou réplcation des marges ?

Comme nous l'avons précisé plus haut, dans les mises en œuvre usuelles les RP sont systématiquement utilisés afin de répliquer la distribution de la valeur économique des passifs. Or, une erreur de réplcation négligeable à l'échelle des passifs, peut néanmoins conduire à des estimations du capital économique très peu robustes. Nous proposons dans cette section une formalisation de cette problématique.

Nous rappelons ci-dessous la relation permettant de déterminer le capital économique:

$$C = FP_0 - P(0,1) \cdot q_{0,5\%}(FP_1),$$

où  $P(0,1)$  est le prix en 0 d'un zéro-coupon de maturité 1 an. Les conditions de validité de cette relation sont notamment décrites dans Devineau et Loisel (2009).

Analysons l'erreur d'estimation commise dans une approche « réplcation des passifs ». Notons « p » le scénario primaire correspondant au quantile à 0,5% de la variable  $FP(1)$  estimée par la technique RP.

Nous avons :

$$C_{RP} = \widehat{FP}_0 - P(0,1) \cdot (A_p(1) - RP_p(1)).$$

L'écart entre les deux montants de capitaux est le suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{|C_{RP} - C|}{C} \\ &= \frac{|\widehat{FP}_0 - P(0,1) \cdot (A_p(1) - RP_p(1)) - FP_0 + P(0,1) \cdot q_{0,5\%}(FP_1)|}{C} \end{aligned}$$

En supposant que  $\widehat{FP}_0 \approx FP_0$ , on a :

$$\begin{aligned} & \frac{|C_{RP} - C|}{C} \\ &\approx P(0,1) \cdot \frac{|(A_p(1) - RP_p(1)) - q_{0,5\%}(FP_1)|}{C} \\ &= P(0,1) \cdot \frac{|(A_p(1) - RP_p(1)) - E[A(1)|FP(1) = q_{0,5\%}(FP(1))] + E[L(1)|FP(1) = q_{0,5\%}(FP(1))]|}{C} \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse

$A_p(1) \approx E[A(1)|FP(1) = q_{0,5\%}(FP(1))]$ , il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{|C_{RP} - C|}{C} \\ &\approx \frac{|RP_p(1) - E[L(1)|FP(1) = q_{0,5\%}(FP(1))]|}{L(0)} \cdot \frac{L(0) \cdot P(0,1)}{FP_0 - P(0,1) \cdot q_{0,5\%}(FP_1)} \end{aligned}$$

La relation précédente fait intervenir deux termes : l'erreur de réplcation des passifs (que nous désignerons par  $\varepsilon_{RP}$ ) et un coefficient d'amplification de cette dernière, noté  $M$ . Sous ces notations, nous avons :

$$\varepsilon_{RP} = \frac{|RP_p(1) - E[L(1)|FP(1) = q_{0,5\%}(FP(1))]|}{L(0)},$$

Et,

$$M = \frac{L(0) \cdot P(0,1)}{FP_0 - P(0,1) \cdot q_{0,5\%}(FP_1)}.$$

Dans le cas où la compagnie a suffisamment de fonds propres pour être solvable dans un an au niveau 99,5%, la quantité  $q_{0,5\%}(FP_1)$  est positive<sup>10</sup> et on a par conséquent :

$$M = \frac{L(0) \cdot P(0,1)}{FP_0 - P(0,1) \cdot q_{0,5\%}(FP_1)} \geq \frac{L(0) \cdot P(0,1)}{FP_0}.$$

Le ratio « Best Estimate des passifs sur fonds propres » dépend naturellement de la compagnie étudiée mais à titre d'illustration, son ordre de grandeur est compris au 31/12/2008 le plus souvent pour les « portefeuilles vie » du marché français entre 15 et 40.

L'erreur d'estimation du capital économique est donc dans un tel cas au moins 20 fois plus importante que l'erreur de réplique des passifs. En d'autres termes, une erreur de réplique de 1% mène mécaniquement dans cette illustration à une erreur d'estimation du capital supérieure à 20%.

Il apparaît ainsi beaucoup plus robuste de répliquer directement la variable « fonds propres économiques » car dans une telle approche l'erreur d'estimation du capital reste homogène à l'erreur de réplique.

Nous proposons une illustration de ces deux approches dans la section 6 du présent article.

## 6. Applications

### 6.1. Présentation des produits testés

Nous avons testé la méthode alternative présentée dans cet article sur un portefeuille d'épargne en Euros à taux minimum garantis faibles. L'outil de projection utilisé permet de modéliser le mécanisme de participation aux bénéficiaires, un objectif de revalorisation des contrats ainsi que les comportements de rachats dynamiques des assurés.

Les deux seuls risques considérés sont les risques actions et taux. Les tables de scénarios économiques utilisées ont été calibrées au 31/12/2008.

### 6.2. Résultats obtenus

Nous avons effectué une projection SdS basée sur 15 000 simulations monde-réel afin de disposer d'un capital économique de référence. Pour chacune des simulations primaires, les fonds propres en  $t = 1$  ont été estimés par simulations risque-neutre re-calibrées / re-générées. L'étude de l'adéquation des distributions « RP vs fonds propres issus du modèle » nous a permis de valider à chaque étape les calculs effectués.

---

<sup>10</sup> Cette condition est par exemple vérifiée au 31/12/2008 par un grand nombre de compagnies d'assurance-vie du marché français.

Le tableau ci-dessous recense les résultats obtenus sur le produit étudié :

$FP_0$	$P(0,1)q_{0,5\%}(\widehat{FP}_1)$	$C_{Sds}$
25,90	0,58	23,32

**Tableau 2 : résultats obtenus par projection SdS exhaustive**

Nous détaillons ci-après la mise en œuvre de la méthode alternative sur le produit étudié puis nous analysons ensuite les résultats produits par cette méthode dans une perspective de réplification de la valeur économique des passifs. Enfin, nous présentons les calculs issus d'une approche « réplification des VAN de cash-flows » en date initiale.

### 6.2.1. Calibrage sur fonds propres

Une étude préalable nous a permis de déterminer les valeurs de fonds propres associées aux simulations les plus adverses, et d'extraire des facteurs de risque « actions » et « taux » pour chaque simulation à partir de la table de scénarios monde-réel. Nous avons considéré  $N = 150$  valeurs de fonds propres extrêmes pour l'analyse de la convexité et la détermination de l'asset mix du RP (étapes 0,1 et 3).

L'étude de la convexité des fonds propres en  $t = 1$  nous a conduit à la structure de forme paramétrique suivante :

$$FP_{param} = A_{0,0} + A_{1,0} \cdot \varepsilon_a + A_{2,0} \cdot \varepsilon_a^2 + A_{3,0} \cdot \varepsilon_a^3 + A_{0,1} \cdot \varepsilon_{ZC} + A_{0,2} \cdot \varepsilon_{ZC}^2 + A_{1,1} \cdot \varepsilon_a \cdot \varepsilon_{ZC}.$$

Les résultats obtenus sur le capital économique et sur les fonds propres marginaux avec la forme paramétrique calibrée sur 150 scénarios sont les suivants :

	SCR global	FP marginaux « actions »	FP marginaux « taux »
Valeur SdS	25,32	5,84	23,21
Valeur « forme paramétrique »	25,10	5,84	23,32
Ecart relatif	-0,87%	0,06%	0,49%

**Tableau 3 : comparaison des résultats SdS vs « forme paramétrique »**

L'estimation des capitaux globaux et marginaux par approche paramétrique donnent sur le produit étudié des résultats très satisfaisants.

Nous avons construit 5 sous-RP permettant de répliquer les termes :  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_a^2$ ,  $\varepsilon_a^3$ ,  $\varepsilon_{ZC}$  et  $\varepsilon_{ZC}^2$ .

Comme signalé supra, le terme  $\varepsilon_a \cdot \varepsilon_{ZC}$  n'est pas spécifiquement répliqué, les effets croisés sont en effet captés à l'aide des dérivés « actions » du RP consolidé.

Les actifs candidats utilisés dans les sous-RP sont conformes au mapping présenté dans la partie 4.5.3.

Nous détaillons ci-dessous la composition et le paramétrage du portefeuille  $RP^{(2,0)}$  permettant de répliquer le terme  $\varepsilon_a^2$  :

	Call 1	Call 2	Put 1	Put 2
<b>Date d'exercice</b>	4	3	3	4
<b>Strike</b>	101,4	133,2	75,0	101,7

Tableau 4 : caractéristiques du portefeuille  $RP^{(2,0)}$

De même, nous décrivons les caractéristiques du portefeuille  $RP^{(0,2)}$  répliquant le terme  $\varepsilon_{ZC}^2$  :

	Caplet 1	Caplet 2	Floorlet 1	Floorlet 2
<b>Taux strike</b>	2,50%	3,22%	6,08%	4,52%
<b>Date d'exercice</b>	3	3	3	3
<b>Maturité du taux sous-jacent</b>	1	1	1	1

Tableau 5 : caractéristiques du portefeuille  $RP^{(0,2)}$

Enfin, le tableau ci-dessous recense les propriétés du portefeuille  $RP^{(3,0)}$  répliquant le terme  $\varepsilon_a^3$  :

	Call 3	Call 4	Put 3	Put 4
<b>Date d'exercice</b>	2	2	2	2
<b>Strike</b>	114,7	165,8	75	75,1

Tableau 6 : caractéristiques du portefeuille  $RP^{(3,0)}$

Le nombre d'actifs candidats composant le RP agrégé s'élève au global à 14. Nous signalons que les actifs utilisés ne présentent aucun degré de complexité (en outre, les dérivés considérés dans notre portefeuille sont des « dérivés vanille »).

Nous avons ensuite, par minimisation du critère présenté en étape 3, déterminé les poids des 14 actifs du portefeuille sur la base des 150 valeurs extrêmes de fonds propres calculées lors des étapes 0 et 1.

La valeur de marché du RP a ensuite été « diffusée » sur les 15 000 simulations monde-réel et nous avons pu étudier l'ajustement des variables « fonds propres SdS » vs prix du RP en  $t = 1$ .

Nous nous sommes fixés une borne d'erreur de réplification de la valeur des fonds propres initiaux égale à 1%. La résolution du programme d'optimisation a conduit à la saturation de cette contrainte, en d'autres termes nous avons l'égalité :

$$\frac{|FP_0 - \sum_{k=1}^M w_k A_k(0)|}{FP_0} = 1\%.$$

Le tableau ci-dessous restitue les valeurs des capitaux économiques SdS et RP :

SCR SdS	SCR RP	Ecart relatif
25,32	25,34	0,05%

**Tableau 7 : comparaison des capitaux économiques SdS et RP**

Nous constatons que la méthodologie alternative fournit des résultats très satisfaisants. Remarquons également que l'écart entre le capital SdS / RP de 0,05% est nettement inférieur à l'écart SdS / forme paramétrique (qui s'élève en valeur absolue à 0,87%). Même si l'inégalité triangulaire présentée dans la section 4.2. permet de majorer l'erreur, nous observons dans cet exemple que l'erreur globale ne résulte pas de l'addition des erreurs commises à chaque étape car l'asset mix est déterminé dans une phase ultime sur un portefeuille consolidé (les poids estimés lors des sous-répliques ne sont pas conservés).

### 6.2.2. Calibrage sur Best Estimate des passifs

Comme nous l'avons explicité dans la partie 4, il est possible de répliquer la valeur économique des passifs plutôt que celle des fonds propres. Dans ce cas, le RP peut être déterminé d'une manière similaire à la méthode décrite précédemment. Il suffit simplement de travailler sur des valeurs extrêmes du Best Estimate des passifs dans les étapes 0, 1 et 3.

Nous avons répliqué de manière très satisfaisante la valeur économique des passifs en conservant les mêmes actifs que pour le calibrage sur fonds propres<sup>11</sup>. L'écart sur le scénario quantile (i.e. scénario qui parmi les 15 000 scénarios monde-réel conduit à la [0,5%. P]<sup>ième</sup> pire valeur de la distribution de fonds propres) entre la valeur des passifs calculée SdS vs RP s'élève à environ 1%.

La distribution de fonds propres a ensuite été obtenue par différence entre la valeur de marché de l'actif de la compagnie simulé à un an et la valeur du RP.

Une telle mise en œuvre conduit à un écart entre le capital SdS / RP supérieur à 15% comme l'illustre le tableau ci-dessous :

	SdS	Replicating Portfolio	Ecart
<b>Valeur des passifs sur le scénario quantile</b>	1 045,6	1 056,5	1,05%
<b>Capital économique</b>	25,32	29,52	16,6%

**Tableau 8 : comparaison des résultats SdS et RP ajusté sur passifs**

Nous constatons que l'écart entre les deux montants de capitaux est très significatif. Comme évoqué dans les parties précédentes, ceci provient du fait qu'une erreur de réplique négligeable à l'échelle des passifs peut néanmoins conduire à des estimations du capital économique très peu robustes (nous

<sup>11</sup> La valeur économique des passifs correspondant à la différence entre la valeur de marché de l'actif de la compagnie et les fonds propres économiques, l'ensemble des actifs candidats reste inchangé. Seule la pondération des actifs va différer.



rappelons que l'erreur est multipliée par un coefficient d'amplification). Pour autant, le même jeu d'actifs candidats (à paramètres identiques) conduit à un écart de 0,05% dans le cadre d'une réplification directe des fonds propres.

Il apparaît donc nettement préférable de viser à répliquer les fonds propres plutôt que les passifs.

### 6.2.3. Calibrage sur VAN de cash-flows

Dans cette partie nous présentons les résultats d'une mise en œuvre « réplification des VAN de cash-flows ». Cette approche correspond à la méthodologie décrite dans la section 3.2.3 se basant sur des VAN de marges plutôt que sur des cash-flows de passifs<sup>12</sup>.

Nous avons conservé les actifs candidats optimaux obtenus dans le cadre de la mise en œuvre alternative (section 6.2.1). L'asset mix du portefeuille répliquant a été calibré en régressant les réalisations de VAN de marges en  $t = 0$  sur la base d'un jeu de 1000 simulations risque-neutre sur les VAN de cash-flows des actifs candidats. Pour conférer davantage de robustesse au processus de calibrage, nous avons ajouté 8 contraintes de réplification de chocs (cf. critère P3 détaillé dans la section 3.2.2).

La régression a donc nécessité la simulation de 1000 trajectoires risque-neutre (complexité homogène à un calcul de MCEV) et la connaissance de 8 valeurs de MCEV choquée en  $t = 0$ .

La valeur du RP a ensuite été « diffusée » en  $t = 1$  sur les 15 000 simulations monde-réel considérées afin de déterminer le capital économique.

Le tableau ci-dessous compare le capital SdS au capital estimé par le RP ainsi calibré :

SCR SdS	SCR RP	Ecart relatif
25,32	24,36	3,78%

Tableau 9 : comparaison des capitaux SdS et RP calibré sur VAN de marges

Nous constatons que cette méthode de calibrage conduit à des résultats moins satisfaisants que la méthode alternative présentée dans le cadre du présent article. Notons que la robustesse d'une méthodologie de type « réplification de VAN » tient essentiellement dans l'ajout de contraintes de réplification de chocs.

<sup>12</sup> Nous avons effectivement constaté dans la partie précédente qu'une réplification des passifs ne conduisait pas à des résultats satisfaisants.

## Conclusion

Nous avons vu dans cet article que la mise en œuvre d'une technique de type Replicating Portfolios constitue un outil puissant pour l'obtention de la distribution de fonds propres économiques à un an. Cette approche permet en effet de disposer relativement rapidement de distributions empiriques de tailles conséquentes pour l'estimation du besoin en capital.

Néanmoins, comme nous l'avons souligné, les techniques de calibrage usuelles soulèvent un certain nombre de points d'attention : la composition du portefeuille et le paramétrage de ses actifs, le programme d'optimisation à considérer, la nature de la variable à répliquer, ...

Après avoir effectué une analyse théorique de ces différents points, nous avons mis en évidence sur un exemple pratique qu'une réplification satisfaisante de la valeur économique des passifs peut conduire à des estimations peu robustes du capital économique. Il nous apparaît par conséquent indispensable de s'attacher à répliquer directement les fonds propres économiques. Nous avons également montré qu'une méthode basée sur la réplification des VAN de cash-flows de marges pouvait produire des estimations moins précises du capital économique. Notons que l'ajout de contraintes de réplification de chocs est primordial dans le cadre d'une telle approche et permet de conférer davantage de robustesse au processus de construction du portefeuille.

La méthode alternative que nous avons développée permet, via une analyse de la convexité de la fonction « fonds propres », d'associer à chaque terme d'une forme paramétrique un sous-portfeuille répliquant dont le paramétrage s'effectue de manière automatique et optimale. La mise en œuvre de la méthode alternative nécessite néanmoins la connaissance d'un jeu de valeurs de fonds propres choqués et peut induire des temps de calibrage plus importants que ceux résultants des techniques usuelles. Nous avons testé cette méthodologie sur différents portefeuilles d'assurance-vie et les résultats qui en ont découlé ont fourni systématiquement des estimations robustes du capital économique Solvabilité II.

Nous avons mis au point des variantes de la méthodologie de calibrage présentée dans le présent article reposant sur des réalisations « hybrides » (i.e. mélangeant les univers monde-réel et risque-neutre sur une trajectoire) des variables aléatoires d'intérêt et non sur la connaissance d'espérances conditionnelles. Les temps de calculs induits par ces techniques sont significativement plus faibles. Ces différentes études feront l'objet de publications ultérieures.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier tous les collaborateurs du bureau de Milliman Paris, et en particulier les membres de l'équipe R&D dont Julien Vedani, qui ont aidés dans le développement de cette méthodologie.

Les auteurs sont reconnaissants envers le groupe Milliman SAS pour avoir partiellement financé ce projet.

## Bibliographie

Devineau, L., Loisel, S. (2009), *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II*, Bulletin Français d'Actuariat (BFA), No. 17, Vol. 10, 188-221

Devineau, L., Loisel, S. (2009b), *Risk aggregation in Solvency II : How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula ?*, Bulletin Français d'Actuariat (BFA), No. 18, Vol. 8, 107-145

Dana, R-A., Jeanblanc-Piqué, M. (1998), *Marchés financiers en temps continu – valorisation et équilibre*, *Economica*

Bacinello, A.R. (2005), *Endogeneous model of surrender conditions in equity-linked life insurance*, *Insurance : Mathematics and Economics* 37, 270-296

Bacinello, A.R. (2001), *Fair pricing of life insurance participating policies with a minimum interest rate guaranteed*, *Astin Bulletin* Vol. 31. No 2

Algorithmics (2008), *Advanced enterprise risk management for insurers*, Janvier 2008, 3-5.

Larpin, A. , Camon, S. (2009), *Capital économique en assurance vie : utilisation des Replicating Portfolios*, Swiss Life, Journées de Deauville IA

Revelen, J. (2009), *Replicating Portfolio » et capital économique en assurance vie*, Swiss Life, Rapport Final de Travail de Fin d'études

Schrager, D. (2008), *Replicating Portfolios for Insurance Liabilities*, *Aenorm*, no. 59, 57-61