



**HAL**  
open science

## A mi-chemin entre analyse complexe et superanalyse

Pierre Bonneau, Anne Cumenge

► **To cite this version:**

Pierre Bonneau, Anne Cumenge. A mi-chemin entre analyse complexe et superanalyse. 2010. hal-00497218v1

**HAL Id: hal-00497218**

**<https://hal.science/hal-00497218v1>**

Preprint submitted on 2 Jul 2010 (v1), last revised 4 Jan 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# A MI-CHEMIN ENTRE ANALYSE COMPLEXE ET SUPERANALYSE.

Pierre Bonneau, Anne Cumenge  
Equipe Emile Picard, Institut de Mathématiques,  
Université Paul Sabatier - 31062 Toulouse Cedex 9

*pierre.bonneau@math.univ-toulouse.fr, anne.cumenge@math.univ-toulouse.fr*

## 0. INTRODUCTION.

L'analyse complexe s'est fortement développée au 19<sup>e</sup> siècle, en particulier avec les travaux de Cauchy, Riemann et Weierstrass. Les essais de généralisation en dimension supérieure conduisirent à la construction des quaternions et des octonions. Toutefois, ces nouveaux objets s'avérèrent alors un peu décevants au niveau de l'analyse. Par ailleurs, de fortes limitations à ce type de généralisations furent obtenues, entre autres par Frobenius avec une classification des algèbres associatives réelles de division de dimensions finies, ou par Bott et Milnor avec le résultat suivant :

**Théorème ([BM]) :** L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  possède une opération produit bilinéaire sans diviseur de 0 seulement pour  $n=1,2,4$  ou  $8$ .

Pour  $n=4$  et  $8$ , on obtient respectivement les quaternions et les octonions. Dans le cas de  $\mathbb{R}^2$ , la condition d'intégrité est équivalente à l'existence d'un élément  $i$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $1 + i^2 = 0$ .

Sachant qu'il est impossible de trouver en dimensions supérieures des algèbres associatives de division, nous rechercherons des algèbres ayant de bonnes propriétés analytiques, c'est-à-dire dans lesquelles existe une théorie des fonctions analogue à l'analyse complexe. Nous essaierons d'étendre, en dimension supérieure à deux, le point de vue de Cauchy-Riemann sur l'analyse complexe (fonctions dérivables et représentation intégrale).

Des conditions de Cauchy-Riemann apparaissent naturellement en superanalyse (cf. [K] par exemple). L'analyse sur les superespaces, dite "superanalyse", s'est développée dans les décennies '60 et '70, formalisant les superespaces des physiciens, espaces dans lesquels cohabitent des variables anti-commutatives avec les variables usuelles. Pour un historique et des références, nous renvoyons par exemple aux livres de Berezin [B] ou Khrennikov [K].

Nos résultats sont énoncés dans le cadre des superespaces ; de la superanalyse, nous utiliserons seulement les définitions de superespaces et de la superdifférentiabilité, et nos méthodes sont inspirées par celles de l'analyse complexe.

Il est à noter que, contrairement à l'analyse complexe, quaternionique ou de Clifford, nous ne disposons pas d'un opérateur de conjugaison sur les algèbres  $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$  – où les éléments de  $\Lambda_0$  (resp.  $\Lambda_1$ ) commutent (resp. anti-commutent) entre eux – et les superespaces  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  associés à  $\Lambda$  que nous considérons .

Nous définirons sur certains superespaces un opérateur  $d''$  de Cauchy-Riemann dont le noyau coïncidera avec l'espace des fonctions superdifférentiables (S-différentiables en abrégé).

Des conditions  $(A_j)$ ,  $j = 0, 1$  sur  $\Lambda_j$ , à mettre en parallèle avec la relation complexe  $1 + i^2 = 0$ , s'imposent alors de manière naturelle lorsque nous cherchons une solution fondamentale de cet opérateur  $d''$ .

Nous obtenons, à partir d'une solution fondamentale pour l'opérateur  $d''$ , une formule de représentation des formes différentielles avec opérateurs intégraux à noyaux explicites ; et en particulier, pour les fonctions :

**Théorème 0.1.** *On suppose les conditions  $(A_0)$  et  $(A_1)$  satisfaites par l'algèbre  $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ . Soit  $D$  ouvert de  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  borné et à frontière  $C^1$  et  $f$  fonction de classe  $C^1$  dans  $D$ , continue sur  $\overline{D}$  ainsi que  $df$ , alors pour tout  $x \in D$  :*

$$f(x) = \int_{\partial D} f(y)K(y, x) - \int_D d'' f(y) \wedge K(y, x) .$$

Nous déduisons de la formule de représentation des fonctions qS-différentiables (i.e. vérifiant  $d''f = 0$ ) des propriétés de ces fonctions, comme l'harmonicité, une propriété de qS-analyticité, un théorème de Liouville, ainsi qu'un résultat de qS-différentiabilité séparée :

**Théorème 0.2.** : *Si  $f$  est une fonction définie sur un domaine  $D$  de  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  à valeurs dans  $\Lambda$  séparément qS-différentiable sur  $D$  par rapport à chacune de ses variables appartenant à  $\Lambda_0$  ou  $\Lambda_1$ , alors  $f$  est qS-différentiable sur  $D$ .*

et un théorème de prolongement de type Hartogs :

**Théorème 0.3.** : *Sous les conditions  $(A_0)$  et  $(A_1)$ , si  $\partial\Omega$  est le bord connexe d'un domaine  $\Omega$  borné de  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ , avec  $n + m \geq 2$ , et  $f$  une fonction qS-différentiable dans un voisinage connexe de  $\partial\Omega$ , alors  $f$  se prolonge en une fonction qS-différentiable sur  $\Omega$ .*

Dans une première partie, nous précisons nos notations et rappellerons les principales notions de superanalyse, suivant, pour l'essentiel, la présentation de [K]. Nous fournirons aussi quelques exemples. Dans la seconde partie, suivant le point de vue "riemannien" de l'analyse complexe, nous définirons un opérateur de Cauchy-Riemann dont le noyau est constitué des fonctions super-différentiables en les variables commutatives et "quasi"-super différenciables en les variables anti-commutatives. La troisième partie sera dévolue à la recherche de représentations intégrales pour les fonctions définies dans un super-espace et à valeurs dans notre algèbre. C'est dans ce paragraphe qu'apparaîtront les conditions  $(A_0)$  et  $(A_1)$ , qui fourniront une superanalyse aux propriétés étonnamment voisines de l'analyse complexe. Les représentations intégrales seront alors l'outil que nous utiliserons pour étudier les propriétés des fonctions super-différentiables, ce qui fait l'objet de la quatrième partie. L'objectif de l'article n'est pas un recensement exhaustif des propriétés des fonctions super-différentiables ; il essaie de souligner une étrange proximité, sous certaines conditions, entre l'analyse complexe et la superanalyse. Ces résultats ont été partiellement annoncés dans [BC].

## 1. SUPERESPACES.

Nous noterons  $\Lambda$  une *superalgèbre commutative réelle (en abrégé CSA)*, dont nous rappelons ci-dessous la définition (cf. [K] par exemple).

Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $Z_2$ -gradué  $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$  muni d'une fonction parité  $\sigma$  définie sur les éléments homogènes par  $\sigma(a) = 0$  (resp. 1) si  $a \in \Lambda_0$  (resp. si  $a \in \Lambda_1$ ) devient une superalgèbre si on le munit d'une structure d'algèbre associative unitaire dont la multiplication vérifie la propriété  $\sigma(ab) = \sigma(a) + \sigma(b)$  (mod. 2) pour tout couple  $(a, b)$  d'éléments homogènes.

Le supercommutateur est défini sur les éléments homogènes par  $[a, b] = ab - (-1)^{\sigma(a)\sigma(b)}ba$  (et prolongé par bilinéarité). Une superalgèbre est dite commutative si pour tout couple  $(a, b)$  d'éléments homogènes  $[a, b] = 0$ .

Nous définissons le  $\Lambda_1$ -annihlateur comme étant  ${}^\perp\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : \lambda\Lambda_1 = 0\}$ . Toutes les CSA considérées ici seront de dimensions finies. Nous noterons  $(e_0, e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\Lambda_0$  ( $e_0$  est l'élément unité de  $\Lambda$ ),  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q) = (e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_{p+q})$  une base de  $\Lambda_1$ , et définissons les coefficients de structure (d'algèbre)  $\Gamma$  de  $\Lambda$  par  $e_i e_j = \sum_{k=0}^{p+q} \Gamma_{i,j}^k e_k$  pour  $i, j = 0, 1, \dots, p + q$ . On remarque que, d'après la définition d'une CSA, les coefficients  $\Gamma$  sont symétriques en  $(i, j)$  si  $i$  ou  $j \in \{0, 1, \dots, p\}$ , anti-symétriques si  $i$  et  $j \in \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$ .

On appelle *superespace sur la CSA  $\Lambda$*  tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$$\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$$

où  $n, m \in \mathbb{N}$ .

**Définition 1.1.** *Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  et  $F$  une application de  $U$  dans  $\Lambda$ , nous disons que  $F$  est superdifférentiable à droite (ou S-différentiable) en  $x \in U$  s'il existe des éléments  $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)$  de  $\Lambda$ ,*

$j = 1, \dots, n + m$  tels que, pour tout  $h \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  tel que  $x + h \in U$ , on ait

$$F(x + h) = F(x) + \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) h_j + o(h)$$

avec  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0$  où  $\|\cdot\|$  est une norme sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ .

Nous remarquons que  $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)$  sont définis de façon unique par la condition ci-dessus, tandis que  $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}}(x)$  sont définis modulo  ${}^\perp \Lambda_1$ . La condition de S-différentiabilité de  $F$  exprime donc le fait que  $F$  est différentiable et que sa dérivée est définie par les opérateurs de multiplication par des éléments de  $\Lambda$ .

**Exemple 1.** Si  $\Lambda_1 = 0$  et  $\Lambda_0 = \text{Vect}(e_0, e_1)$  avec  $e_0 = 1$  et  $e_1^2 = -e_0$ , les fonctions S-différentiables sont les fonctions holomorphes et la superanalyse est alors l'*analyse complexe*.

**Exemple 2.** (*Analyse hyperbolique.*)  $\Lambda_1 = 0$  et  $\Lambda_0 = \text{Vect}(e_0, e_1)$  avec  $e_0 = 1$  et  $(e_1)^2 = e_0$ .

$f = u e_0 + v e_1$  S-diff.  $\iff \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial v}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_0}$   
Alors  $f, u$  et  $v$  vérifient l'équation des ondes  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0$ .

Remarque : soient  $\varphi$  et  $\psi$  fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$  définie par  $f(xe_0 + ye_1) = [\varphi(x + y) + \psi(x - y)]e_0 + [\varphi(x + y) - \psi(x - y)]e_1$  est S-différentiable, mais pas plus régulière que ne le sont  $\varphi$  et  $\psi$ .

**Exemple 3.** Soit  $A$  une algèbre de Clifford réelle de dimension  $2^k$  dont les générateurs  $e_1, \dots, e_k$  vérifient  $e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$ ;  $A$  peut s'écrire comme une superalgèbre non supercommutative  $A = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$  avec  $\Lambda_0 = \text{Vect}\{e_I; |I| \text{ pair}\}$ ,  $\Lambda_1 = \text{Vect}\{e_I; |I| \text{ impair}\}$ , où  $e_\emptyset = 1$ , et si  $I = (i_1, \dots, i_\nu)$ ,  $e_I = e_{i_1} \dots e_{i_\nu}$ .

**Exemple 4.** Supposons  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_0$  de dimensions respectives 4 et 6, avec la table de multiplication suivante :

$\times$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$
$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$	$e_5$	$-e_4$	$\varepsilon_2$	$-\varepsilon_1$	$\varepsilon_4$	$-\varepsilon_3$
$e_2$	$e_2$	$e_3$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$e_3$	$e_3$	$-e_2$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$e_4$	$e_4$	$e_5$	$0$	$0$	$e_4$	$e_5$	$0$	$0$	$0$	$0$
$e_5$	$e_5$	$-e_4$	$0$	$0$	$e_5$	$-e_4$	$0$	$0$	$0$	$0$
$\varepsilon_1$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$-\varepsilon_3$	$e_2$
$\varepsilon_2$	$\varepsilon_2$	$-\varepsilon_1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$e_2$	$e_3$
$\varepsilon_3$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$0$	$0$	$0$	$0$	$e_3$	$-\varepsilon_2$	$0$	$0$
$\varepsilon_4$	$\varepsilon_4$	$-\varepsilon_3$	$0$	$0$	$0$	$0$	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_3$	$0$	$0$

L'ensemble des nilpotents de  $\Lambda_0$  est ici  $\text{Vect}(e_2, e_3)$  donc l'algèbre  $\Lambda_0$  n'est isomorphe à aucun produit d'algèbres  $\prod_{j=1}^s L_j$ , où les  $L_j$  sont des extensions de  $\mathbb{R}$ .

## 2. L'OPÉRATEUR DE CAUCHY-RIEMANN EN SUPERANALYSE.

Soit  $f$  une fonction d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  dans  $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ ;  $f(x) = \sum_{k=0}^p f_k(x) e_k + \sum_{l=1}^q f_{p+l}(x) \varepsilon_l$ , où  $f_0, \dots, f_{p+q}$  sont des fonctions réelles.

Il sera commode, comme dans [K], d'écrire  $x \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  sous la forme  $x = (y, \theta)$  avec  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Lambda_0^n$  et  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Lambda_1^m$ . Ainsi avec  $y_i = \sum_{k=0}^p y_i^k e_k \in \Lambda_0$  et  $\theta_j = \sum_{l=1}^q \theta_j^l \varepsilon_l$  :

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^p \frac{\partial f}{\partial y_i^k}(x) dy_i^k + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^q \frac{\partial f}{\partial \theta_j^l}(x) d\theta_j^l$$

Soit  $f$  S-différentiable en  $x$  (voir la définition 1.1) et  $h = (h_1, \dots, h_n, h'_1, \dots, h'_m) \in \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ ; nous avons

$$\begin{aligned} df(x)(h) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(x) h_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x) h'_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^p \frac{\partial f}{\partial y_i}(x) e_k dy_i^k(h) + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^q \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x) \varepsilon_l d\theta_j^l(h) \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n, \forall k = 0, \dots, p, \quad \frac{\partial f}{\partial y_i}(x) e_k &= \frac{\partial f}{\partial y_i^k}(x), \\ \forall j = 1, \dots, m, \forall l = 1, \dots, q, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x) \varepsilon_l &= \frac{\partial f}{\partial \theta_j^l}(x), \end{aligned}$$

ou encore, puisque  $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial y_i^0}(x)$  :

PROPRIÉTÉ : une fonction  $f$  Fréchet-différentiable en ses variables réelles est S-différentiable en  $x \in \Lambda$  si et seulement si

$$(2.1) \quad \frac{\partial f}{\partial y_i^k}(x) = \frac{\partial f}{\partial y_i^0}(x) e_k, \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ et } \forall k = 1, \dots, p$$

$$(2.2) \quad \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_j^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_j^q}(x) \right) \in \Lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q) := \{(a\varepsilon_1, \dots, a\varepsilon_q), a \in \Lambda\}, \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Rappelons que  $\frac{\partial f}{\partial \theta_j^l}(x)$  est défini modulo  ${}^\perp \Lambda_1$ .

Nous sommes ainsi amenés naturellement à traiter différemment les "variables commutatives"  $y_1, \dots, y_n$  et les "variables anti-commutatives"  $\theta_1, \dots, \theta_m$ .

**2.1. Etude dans  $\Lambda_0^n$ .** Oublions provisoirement les variables anti-commutatives et intéressons-nous aux variables  $y_1, \dots, y_n$ . Et, d'abord, considérons le cas  $n=1$ .

Soit  $f$  une fonction d'un ouvert  $U$  de  $\Lambda_0$  dans  $\Lambda$ . Si  $y = \sum_{k=0}^p y^k e_k \in U$ , alors  $f$  est S-différentiable en  $y$  si  $df(y) = \frac{\partial f}{\partial y^\sigma}(y) \sum_{k=0}^p e_k dy^k$  puisque, pour tout  $k$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y^k}(y) = \frac{\partial f}{\partial y^\sigma}(y) e_k$  comme nous venons de le voir. Dans le cas général, nous décomposerons  $df(y)$  en une partie  $\Lambda_0$ -linéaire notée  $d'f(y)$  et un reste noté  $d''f(y)$  :

$$df(y) = d'f(y) + d''f(y)$$

avec

$$d'f(y) = \frac{\partial f}{\partial y^0}(y) \sum_{k=0}^p e_k dy^k,$$

$$d''f(y) = \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial f}{\partial y^k}(y) - e_k \frac{\partial f}{\partial y^0}(y) \right) dy^k.$$

Plus généralement, si  $\omega$  est une forme différentielle définie dans  $U$ , à valeurs dans  $\Lambda$ , nous définissons

$$d'\omega = \sum_{k=0}^p e_k dy^k \frac{\partial \omega}{\partial y^0} := dY \frac{\partial \omega}{\partial y^0},$$

$$d''\omega = \sum_{k=1}^p dy^k \left( \frac{\partial \omega}{\partial y^k} - e_k \frac{\partial \omega}{\partial y^0} \right).$$

On vérifie immédiatement que  $d'^2 = d''^2 = 0$  et donc  $d''d' + d'd'' = 0$ . Une fonction  $f$  est S-différentiable dans  $U$  si et seulement si  $d''f = 0$  dans  $U$ . On généralise aisément au cas de plusieurs "variables

commutatives". Si  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Lambda_0^n$  avec  $y_i = \sum_{k=0}^p y_i^k e_k$ , on définit pour une forme différentielle  $\omega$  de degré quelconque définie dans un ouvert  $U$  de  $\Lambda_0^n$ , et à valeurs dans  $\Lambda$ ,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} d''\omega &= d'_y\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p dy_i^k \left( \frac{\partial \omega}{\partial y_i^k} - e_k \frac{\partial \omega}{\partial y_i^0} \right), \\ d'\omega &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^p e_k dy_i^k \frac{\partial \omega}{\partial y_i^0} := \sum_{i=1}^n dY_i \frac{\partial \omega}{\partial y_i^0}. \end{aligned}$$

REMARQUE : dans le cas de  $\Lambda_0 = \mathbb{C}$ , la manière traditionnelle de définir l'opérateur de Cauchy-Riemann n'est pas la même que ci-dessus, puisque l'habitude est de faire éclater  $df$  en une partie  $\mathbb{C}$ -linéaire et une partie  $\mathbb{C}$ -antilinéaire. Cette procédure ne peut opérer ici car nous n'avons pas, dans le cas général, d'opérateur de conjugaison. Toutefois, l'opérateur de Cauchy-Riemann habituel dans  $\mathbb{C}$  et celui qui est défini ci-dessus ont le même noyau, l'ensemble des fonctions holomorphes. Et c'est ce qui nous importe, puisque notre objectif est l'étude des fonctions S-différentiables (c'est-à-dire, dans le cas de  $\mathbb{C}$ , des fonctions holomorphes).

**2.2. Etude dans  $\Lambda_1^n$ .** Occupons nous, maintenant, des "variables non-commutatives", et, tout d'abord, du cas d'une seule variable anti-commutative. Soit  $f$  une fonction définie dans un ouvert  $U$  de  $\Lambda_1$ , à valeurs dans  $\Lambda$ . Si  $\theta = \sum_{l=1}^q \theta^l \varepsilon_l \in U$ ,  $f$  est S-différentiable en  $\theta$  s'il existe un élément  $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta)$  de  $\Lambda$  tel que, pour tout  $l = 1, \dots, q$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \theta^l}(\theta) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta) \varepsilon_l$ .

Mais, contrairement au cas des "variables commutatives", il n'existe, en général, aucun moyen canonique pour déterminer le coefficient multiplicatif  $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta)$  de l'application  $\Lambda_1$ -linéaire  $d'f(\theta)$ ; autrement dit, il n'existe, en général, aucun moyen naturel pour décomposer  $d'f(\theta)$  en une partie  $\Lambda_1$ -linéaire et un reste. Pour conserver le maximum de souplesse dans le choix de ces projections associées de  $d'f(\theta)$ , nous supposons que nous disposons d'une norme  $\| \cdot \|$  dans  $\Lambda$  (norme sous-additive  $\|xx'\| \leq C\|x\|\|x'\|$ ) déduite d'un produit scalaire  $g$  ( $e_i e_j = g_{i,j}$  pour  $i, j = 0, 1, \dots, p+q$ ).

Nous cherchons à définir un opérateur  $d''$  dont le noyau contient les fonctions S-différentiables. Nous pourrions effectuer une projection orthogonale de  $\left( \frac{\partial f}{\partial \theta^1}(\theta), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta^q}(\theta) \right)$  sur  $\Lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$  afin de définir d'abord  $d' = d - d''$  puis  $d''$ , mais cela ne donne pas, en général, un opérateur  $d''$  vraiment explicite et, partant, il semble difficile d'obtenir ainsi une solution fondamentale explicite pour l'opérateur  $d''$ , ce qui sera l'objectif du paragraphe suivant.

$d''$  est bien plus explicite si nous supposons satisfaite la condition suivante :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &\text{il existe une suite finie } 1 = s_1 < s_2 < \dots < s_r < s_{r+1} = q+1 \text{ telle que} \\ &\varepsilon_j = \varepsilon_{s_k} a_j \text{ si } s_k \leq j < s_{k+1} \text{ où } a_j \in \Lambda \text{ et } a_{s_1} = a_{s_2} = \dots = a_{s_r} = e_0 \end{aligned}$$

(en fait  $a_j$  est un élément de  $\Lambda_0$ ).

Alors :

PROPRIÉTÉ : Sous la condition (2.4) sur  $\Lambda_1$ , une fonction  $f$  Fréchet-différentiable en  $\theta$  est S-différentiable en  $\theta \in \Lambda_1$  si

$$(2.5) \quad \begin{aligned} &\left( \frac{\partial f}{\partial \theta^{s_1}}(\theta), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta^{s_r}}(\theta) \right) \in \Lambda(\varepsilon_{s_1}, \dots, \varepsilon_{s_r}) \\ &\frac{\partial f}{\partial \theta^j}(\theta) = \frac{\partial f}{\partial \theta^{s_k}}(\theta) a_j \text{ si } s_k \leq j < s_{k+1} \end{aligned}$$

La plus utile des deux relations ci-dessus lorsque nous chercherons à donner des propriétés de régularité des fonctions S-différentiables sur un ouvert de  $\Lambda_1$  sera (2.5). Nous sommes donc amenés à poser

$$d'' (= d''_\theta) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta^j \left( \frac{\partial}{\partial \theta^j} - a_j \frac{\partial}{\partial \theta^{s_k}} \right),$$

et

$$d' = d - d'' = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} d\theta^j a_j \frac{\partial}{\partial \theta^{s_k}}$$

On vérifie immédiatement que  $d'^2 = d''^2 = 0$  et  $d'd'' + d''d' = 0$ .

On généralise au cas de plusieurs "variables anti-commutatives" : Si  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \Lambda_1^m$  avec  $\theta_i = \sum_{j=1}^q \theta_i^j \varepsilon_j$ , on définit pour une forme différentielle  $\omega$  définie dans un ouvert  $U$  de  $\Lambda_1^m$ ,

$$(2.6) \quad \begin{aligned} d'\omega (= d'_\theta \omega) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j d\theta_i^j \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^{s_k}} \quad \text{noté } d'\omega = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r dZ_k(\theta_i) \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^{s_k}} \\ d''\omega (= d''_\theta \omega) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta_i^j \left( \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^j} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^{s_k}} a_j \right) \end{aligned}$$

**2.3. Cas général.** Enfin, dans le cas d'un superspace  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  sur la CSA  $\Lambda$ , un élément  $x$  de  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  est noté  $x = (y, \theta) = (y_1, y_2, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) \in \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  avec  $y_i = \sum_{j=0}^p y_i^j e_j$  et  $\theta_k = \sum_{l=1}^q \theta_k^l \varepsilon_l$ . Nous pouvons définir l'opérateur de Cauchy-Riemann  $d''$  dans  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  en posant  $d'' = d''_y + d''_\theta$ , où  $d''_y$  et  $d''_\theta$  sont définis en (2.3) et (2.6) :

$$(2.7) \quad d'' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p dy_i^j \left( \frac{\partial}{\partial y_i^j} - e_j \frac{\partial}{\partial y_i^0} \right) + \sum_{l=1}^m \sum_{k=0}^r \sum_{t=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta_l^t \left( \frac{\partial}{\partial \theta_l^t} - \frac{\partial}{\partial \theta_l^{s_k}} a_t \right).$$

### 3. SOLUTION FONDAMENTALE DE $d''$ ET FORMULE DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE.

Si  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  borné et à frontière lisse, si  $f$  est une forme différentielle continue dans  $\overline{D}$  et de classe  $C^1$  dans  $D$ , nous cherchons une représentation intégrale de  $f$ , c'est-à-dire nous essayons d'écrire

$$f(x) = \int_{\partial D} f(u) K(u, x) - \int_D d'' f(u) \cdot K(u, x) + d'' \int_D f(u) K(u, x), \quad x \in D$$

Soulignons que les formes différentielles intervenant, à coefficients à valeurs dans  $\Lambda$ , sont des formes en les coordonnées réelles  $y_i^j, w_i^j, i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, p, \theta_i^\ell, \tau_i^\ell, i = 1, \dots, m, \ell = 1, \dots, q$  de  $x = (y, \theta), u = (w, \tau) \in \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m \approx \mathbb{R}^N$  où  $N = n(p+1) + mq$ , et les intégrales sont ainsi définies sans ambiguïté.

Une telle représentation intégrale peut s'obtenir dès lors que  $K$  est à coefficients localement intégrables sur  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \times \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  et que nous avons en termes de courants  $d''K(u, x) = [\Delta]$  où  $[\Delta]$  est le courant d'intégration sur la diagonale  $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}\}$  (voir [HP] par exemple). Un noyau  $K(u, x)$  vérifiant cette dernière égalité est appelé noyau fondamental de l'opérateur de Cauchy-Riemann  $d''$ . Plus précisément, soit  $\Psi : \overline{D} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  définie par  $\Psi(u, x) = u - x$ . Alors  $[\Delta] = \Psi^*([0])$  où  $[0]$  est le courant d'évaluation en  $0 \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ . Donc  $d''_{u,x} K(u, x) = [\Delta]$  s'écrit aussi  $d''_x K(x) = [0]$  si l'on pose  $K = \Psi^* \Omega$ ; chercher une formule de représentation intégrale pour  $d''$  appelle donc à rechercher une solution fondamentale pour l'opérateur  $d''$ .

**3.1. Solution fondamentale de  $d''$ .** Comme dans le paragraphe précédent, nous allons d'abord supposer que  $f$  est une forme en  $y \in \Lambda_0$  (donc  $n = 1$  dans un premier temps) et fixer les variables  $\theta \in \Lambda_1^m$ . Dans le cas  $\Lambda_0 = \mathbb{C}$ , une solution fondamentale de  $d''\Omega = [0]$  est  $\Omega = \frac{dz}{2i\pi z}$ . Mais pour  $p > 1$ , notre algèbre commutative  $\Lambda_0$  n'est pas intègre (cf. [BM] ou le théorème de Frobenius classifiant les algèbres réelles associatives de division de dimensions finies). Nous n'avons pas non plus de conjugaison sur  $\Lambda_0$  comme en analyse complexe ou quaternionique, et un noyau résolvant de type Bochner-Martinelli n'est pas envisageable.

Nous devons chercher une solution fondamentale sous une autre forme.

Nous munissons  $\Lambda_0$  d'une norme euclidienne  $\| \cdot \|$  pour laquelle  $(e_0, \dots, e_p)$  est une base orthonormée (avec  $e_0$  l'élément unité).

Nous sous-entendons souvent les symboles  $\wedge$  dans les formes différentielles et utiliserons les notations :

$$(3.1) \quad \widehat{dy^i} = dy^0 \dots dy^{i-1} dy^{i+1} \dots dy^p, \quad \text{et pour } i < j : \widehat{dy^i dy^j} = dy^0 \dots dy^{i-1} dy^{i+1} \dots dy^{j-1} dy^{j+1} \dots dy^p$$

**Lemme 3.1.** Soit  $\Omega(y) = \frac{A(y)}{\|y\|^{p+k}}$  où  $A(y) = \sum_{i=0}^p (-1)^i A_i(y) \widehat{dy}^i$  est une  $p$ -forme à coefficients  $A_i(y)$  à valeurs dans  $\Lambda$  et polynômes (en les variables réelles  $y^0, \dots, y^p$ ) homogènes de degré  $k$  et vérifiant  $d''\Omega = 0$  hors de  $0$ . Alors

$$d''\Omega = \left( \int_{\|y\| \leq 1} d''A \right) \times [0].$$

PREUVE : Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda_0)$  une fonction test. Remarquons que pour tout  $i = 1, \dots, p$  :  $dy^i \wedge \widehat{dy}^0 = 0$  ; nous avons

$$\begin{aligned} \langle d''\Omega, \varphi \rangle &= (-1)^{p+1} \langle \Omega, d''\varphi \rangle = (-1)^{p+1} \langle \Omega, \sum_{i=1}^p \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y^i} - e_i \frac{\partial \varphi}{\partial y^0} \right) dy^i \rangle \\ &= - \int \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{\|y\|^{p+k}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y^i} - e_i \frac{\partial \varphi}{\partial y^0} \right) dy^0 \dots dy^p \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|y\| \geq \varepsilon} \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{\|y\|^{p+k}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y^i} - e_i \frac{\partial \varphi}{\partial y^0} \right) dy^0 \dots dy^p \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|y\| > \varepsilon} d \left[ \left( \sum_{i=1}^p \frac{(-1)^i A_i \widehat{dy}^i}{\|y\|^{p+k}} - \frac{A_i e_i \widehat{dy}^0}{\|y\|^{p+k}} \right) \varphi \right] - d''\Omega \cdot \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{p+k}} \int_{\|y\| = \varepsilon} \left( \sum_{i=1}^p A_i \widehat{dy}^i (-1)^i - A_i e_i \widehat{dy}^0 \right) \varphi \\ &= \left( \int_{\|y\|=1} \sum_{i=1}^p (-1)^i A_i \widehat{dy}^i - e_i A_i \widehat{dy}^0 \right) \varphi(0) \\ &= \int_{\|y\| \leq 1} \left( \sum_{i=1}^p \frac{\partial A_i}{\partial y^i} - e_i \frac{\partial A_i}{\partial y^0} \right) dy^0 \dots dy^p \cdot \varphi(0) = \left( \int_{\|y\| \leq 1} d''A \right) \varphi(0). \end{aligned}$$

en utilisant  $d''A = d''(\sum_{i=1}^p A_i \widehat{dy}^i)$  pour la dernière égalité.  $\square$

Ainsi, grâce à ce lemme, pour obtenir une solution fondamentale pour  $d''$ , nous allons chercher  $\Omega(y) = \frac{A(y)}{\|y\|^{p+1}}$  avec  $A(y)$   $p$ -forme à coefficients à valeurs dans  $\Lambda$  et polynômes homogènes de degré 1 telle que  $\int_{\|y\| \leq 1} d''A$  soit inversible.

Nous considérons

$$\Omega = \frac{1}{\|y\|^{p+1}} \sum_{j=0}^p (-1)^j \widehat{dy}^j \sum_{k=0}^p b_j^k y^k = \frac{A}{\|y\|^{p+1}}.$$

où  $b_j^k \in \Lambda$  et  $x = \sum_{k=0}^p y^k e_k$ . Nous allons choisir les éléments  $b_j^k$  de  $\Lambda$  de façon à obtenir  $d''\Omega = 0$  hors de  $0$ .

Nous pourrions choisir librement les  $b_0^k$  puisque  $d''(\phi(y) \widehat{dy}^0) = 0$  sur un ouvert  $U \subset \Lambda_0$  dès que  $\phi : U \subset \Lambda_0 \rightarrow \Lambda$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable sur  $U$ .

Par un calcul direct :

$$d''\Omega = \left[ \sum_{j=1}^p \frac{b_j^j - e_j b_j^0}{\|y\|^{p+1}} - (p+1) \frac{y^j e_0 - y^0 e_j}{\|y\|^{p+3}} \sum_{k=0}^p b_j^k y^k \right] dy^0 dy^1 \dots dy^p.$$

$d''\Omega = 0$  s'écrit donc

$$\sum_{j=1}^p (b_j^j - e_j b_j^0) - \frac{p+1}{\|y\|^2} \left[ \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^p y^j y^k b_j^k - \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^p y^0 y^k e_j b_j^k \right] = 0$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^p (b_j^j - e_j b_j^0) - \frac{p+1}{\|y\|^2} [-(y^0)^2 \sum_{j=1}^p e_j b_j^0 + \sum_{j=1}^p (y^j)^2 b_j^j + \sum_{j=1}^p y^0 y^j (b_j^0 - \sum_{k=1}^p e_k b_k^j) + \sum_{1 \leq j < k} y^j y^k (b_j^k + b_k^j)] = 0.$$

Il faut donc annuler le polynôme obtenu en multipliant par  $\|y\|^2$  le premier membre, ce qui donne :

$$(3.2) \quad \begin{cases} b_j^0 = \sum_{k=1}^p e_k b_k^j; & j = 1, 2, \dots, p \\ b_j^k + b_k^j = 0; & j, k = 1, \dots, p; j \neq k \\ b_j^j = -\sum_{k=1}^p e_k b_k^0 = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^p (b_k^k - e_k b_k^0); & j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Notons  $b = -\sum_{k=1}^p e_k b_k^0$  la valeur commune des  $b_j^j$ ,  $j = 1, \dots, p$ . La première ligne de (3.2) permettra de définir  $b_j^0$  quand nous connaîtrons les  $b_k^j$ . La deuxième ligne donnera  $b_k^j$  quand nous connaîtrons  $b_j^k$  pour  $j < k$ . Compte tenu de ces deux lignes :

$$\begin{aligned} b &= -\sum_{k=1}^p e_k \sum_{l=1}^p e_l b_l^k = -\sum_{k,l=1}^p e_k e_l b_l^k = -\sum_{k=1}^p e_k^2 b_k^k - \sum_{k < l} e_k e_l b_l^k - \sum_{l < k} e_k e_l b_l^k \\ &= -\sum_{k=1}^p e_k^2 b - \sum_{k < l} e_k e_l (b_k^l + b_l^k) = -b \sum_{k=1}^p e_k^2. \end{aligned}$$

ou encore

$$(3.3) \quad b \sum_{k=0}^p e_k^2 = 0.$$

Alors trois cas se présentent.

Si  $\sum_{k=0}^p e_k^2$  n'a pas de diviseur de 0, nécessairement  $b = 0$  et donc  $\int_{\|x\| \leq 1} d'' A = 0$  : nous n'avons pas de représentation intégrale.

Si  $\sum_{k=0}^p e_k^2$  non nul a des diviseurs de 0, on prend pour  $b$  l'un de ces diviseurs et alors  $\int_{\|x\| \leq 1} d'' A$  est non inversible : nous n'avons pas une bonne représentation intégrale.

Enfin, si  $\Lambda_0$  vérifie la condition  $(A_0)$  suivante :

$$(3.4) \quad (\mathbf{A}_0) \quad \text{il existe une base } (e_0 = 1, e_1, \dots, e_p) \text{ de } \Lambda_0 \text{ vérifiant } \sum_{k=0}^p e_k^2 = 0,$$

nous prenons pour  $b$  un élément inversible de  $\Lambda$ , par exemple,  $b = e_0$ , et choisissons  $b_j^k = 0$  si  $j \neq k$ ,  $1 \leq j \leq p$ ; nous déduisons alors du lemme 3.1, puisque  $\int_{\|x\| \leq 1} d'' A = (p+1)e_0 \text{Vol}(B(0,1))$  où  $\text{Vol}(B(0,1))$  est le volume de la boule unité de  $\Lambda_0$  :

$$\Omega = \frac{1}{(p+1)\text{Vol}(B(0,1))\|y\|^{p+1}} \left( \sum_{j=1}^p (-1)^j (y^0 e_j + y^j e_0) \widehat{dy^j} + \sum_{k=0}^p b_0^k y^k \widehat{dy^0} \right)$$

est une solution fondamentale de  $d''$  dans  $\Lambda_0$ .

Nous allons choisir les  $b_0^k$  en sorte que  $d'\Omega = 0$ , ce qui simplifiera d'une part certains calculs d'autre part la formule de représentation intégrale; ceci conduit à  $b_0^0 = e_0$  et  $b_0^k = -e_k$  si  $k \geq 1$ . La forme  $dY = \sum_{k=0}^p e_k dy^k$  est en facteur dans  $A$  et nous obtenons, avec les notations (3.1) :

**Proposition 3.2.**

$$\Omega_0 = \frac{1}{(p+1)\text{Vol}(B(0,1))\|y\|^{p+1}} \sum_{j=1}^p (-1)^j (y^0 e_j + y^j e_0) \left( \sum_{k=0}^p e_k dy^k \right) \widehat{dy^0 dy^j}$$

est une solution fondamentale de  $d''$  dans  $\Lambda_0$ .

EXEMPLES : La condition  $(A_0)$  est vérifiée dans les exemples 1, 4 et, lorsque  $k \equiv 2$  modulo 4, dans l'exemple 3 du paragraphe 1. Elle ne l'est pas dans le second exemple (ce serait d'ailleurs en contradiction avec la proposition 4.3 du paragraphe 4).

*La condition  $(A_0)$  sera toujours supposée vérifiée dans la suite.*

• cherchons maintenant une solution fondamentale pour l'opérateur  $d''$  défini sur  $\Lambda_1$ . De façon à disposer d'une expression explicite pour  $d''$ , nous supposons satisfaite la condition (2.4); par conséquent, nous avons :

$$d'' = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta^j \left( \frac{\partial}{\partial \theta^j} - a_j \frac{\partial}{\partial \theta^{s_k}} \right),$$

Nous munissons  $\Lambda_1$  d'un produit scalaire en supposant que  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$  est une base orthonormée, notons  $\|\cdot\|$  la norme associée, et cherchons une solution fondamentale de la forme :

$$\Omega = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} \widehat{d\theta^j} \sum_{l=1}^q \frac{b_j^l \theta^l}{\|\theta\|^q}$$

On calcule  $d''\Omega$  hors de 0, et l'on note  $dV = d\theta^1 \wedge \dots \wedge d\theta^q$ ; comme  $d''(\phi(y, \theta) \widehat{d\theta^{s_k}}) = 0$  sur tout ouvert  $U$  sur lequel  $\phi$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable, nous pourrions choisir arbitrairement les  $b_{s_k}^l$ .

$$d''\Omega = \frac{1}{\|\theta\|^q} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (b_j^j - a_j b_j^{s_k}) dV - \frac{q}{\|\theta\|^{q+2}} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (\theta^j - a_j \theta^{s_k}) \left( \sum_{l=1}^q b_j^l \theta^l \right) dV.$$

donc

$$\begin{aligned} \|\theta\|^{q+2} d''\Omega \widehat{dV} &= \|\theta\|^2 \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (b_j^j - a_j b_j^{s_k}) \\ &\quad - q \left( - \sum_{k=1}^r (\theta^{s_k})^2 \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_k} + \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (\theta^j)^2 b_j^j \right) \\ &\quad + q \sum_{s_k < s_{k'}} \theta^{s_k} \theta^{s_{k'}} \left( \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_{k'}} + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j b_j^{s_k} \right) \\ &\quad - q \left[ \sum_{k=1}^r \sum_{k'=1}^r \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} \theta^{s_k} \theta^j \left( b_j^{s_k} - \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_l b_l^j \right) + \sum_{\substack{j < k \\ j, k \neq s_1, \dots, s_r}} \theta^j \theta^k (b_j^k + b_k^j) \right]. \end{aligned}$$

La nullité de  $d''\Omega$  hors de 0 s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_j^k + b_k^j = 0 \text{ si } j \neq k, j \text{ et } k \notin \{s_1, \dots, s_r\} \\ b_j^{s_k} = \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_l b_l^j \\ 0 = \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_{k'}} + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j b_j^{s_k} \text{ pour } k \neq k' \\ \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (b_j^j - a_j b_j^{s_k}) = q b_j^j = -q \sum_{j=s_{k_0}+1}^{s_{k_0+1}-1} a_j b_j^{s_{k_0}} \text{ pour tout } k_0 \in \{1, \dots, r\}. \end{array} \right.$$

La troisième ligne est une conséquence des deux premières; en effet :

$$\begin{aligned} \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_{k'}} + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j b_j^{s_k} &= \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \sum_{l=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j a_l b_l^j + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j a_l b_l^j \\ &= \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \sum_{l=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j a_l (b_l^j + b_j^l) = 0. \end{aligned}$$

D'après la quatrième ligne tous les  $b_j^j$  sont égaux à une constante  $b \in \Lambda$ . Dès lors, la dernière égalité de celle-ci s'écrit, en tenant compte de la seconde ligne :

$$b = - \sum_{j,l=s_{k+1}}^{s_{k+1}-1} a_j a_l b_l^j = - \sum_{j<l} a_j a_l (b_j^l + b_l^j) - \sum_{j=s_{k+1}}^{s_{k+1}-1} a_j^2 b, \quad \forall k = 1, \dots, r$$

c'est-à-dire :

$$(3.5) \quad b \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j^2 = 0 \quad \forall k = 1, \dots, r$$

La première égalité de la quatrième ligne nous conduit de même à (3.5).

On veut, tout comme dans  $\Lambda_0$ , que  $b$  soit un élément inversible de  $\Lambda$ , afin d'obtenir une bonne formule de représentation intégrale ; nous sommes ainsi amenés à imposer à  $\Lambda_1$ , en tenant compte de (2.4) la condition suivante :

(3.6)

- il existe une base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$  de  $\Lambda_1$  et une suite finie  $s_1 = \varepsilon_1 < s_2 < \dots < s_r < s_{r+1} = q + 1$   
**(A<sub>1</sub>)** telles que, pour tout  $j = 1, \dots, q$ , il existe  $a_j \in \Lambda_0$  vérifiant  $\varepsilon_j = a_j \varepsilon_{s_k}$  si  $s_k \leq j < s_{k+1}$ ,  
avec  $a_{s_1} = a_{s_2} = \dots = a_{s_r} = e_0$  et  $\sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j^2 = 0$  pour tout  $k = 1, \dots, r$ .

Dès lors que la condition (A<sub>1</sub>) est satisfaite, nous pouvons écrire une solution fondamentale explicite pour l'opérateur  $d''$  sur  $\Lambda_1$  ; par exemple, prenant  $b = e_0$  et  $b_j^k = 0$  si  $j \neq k$ ,  $j, k \geq 2$ , nous obtenons comme candidat :

$$(3.7) \quad \Omega = \frac{1}{q \text{Vol}(B(0, 1) \|\theta\|^q)} \sum_{k=1}^r \left( \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} (\theta^j e_0 + \theta^{s_k} a_j) \widehat{d\theta^j} + \left( \sum_{l=1}^q b_{s_k}^l \widehat{d\theta^{s_k}} \right) \right)$$

Nous imposons de plus, comme dans l'étude concernant  $\Lambda_0$ ,  $d'\Omega = 0$ , ce qui conduit à choisir pour tout  $k = 1, \dots, r$  :  $b_{s_k}^{s_k} = e_0$  ;  $b_{s_k}^l = -a_l$  si  $s_k < l < s_{k+1}$  ;  $b_{s_k}^l = 0$  si  $l < s_k$  ou  $s_{k+1} < l$ .

Nous obtenons alors, avec ces choix, le noyau suivant :

$$(3.8) \quad \Omega_1 = \frac{1}{q \text{Vol}(B(0, 1) \|\theta\|^q)} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} (\theta^j e_0 + \theta^{s_k} a_j) \left( \sum_{\ell=s_k}^{s_{k+1}-1} a_\ell d\theta^\ell \right) \widehat{d\theta^{s_k} d\theta^j}$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une solution fondamentale de  $d''$  dans  $\Lambda_1$ , nous devons étudier la singularité en 0, ce qui se fait de façon identique au cas de  $\Lambda_0$ , à l'aide de l'analogie du lemme 3.1 (voir aussi, ci-dessous, la démonstration dans  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ , dont le cas présent est un cas particulier).

EXEMPLE. Si l'on prend  $\Lambda_1 = \varepsilon_1 \Lambda_0$ , alors la condition (A<sub>1</sub>) se ramène à la condition (A<sub>0</sub>) si l'on pose  $\varepsilon_j = \varepsilon_1 e_{j-1}$ .

*La condition (A<sub>1</sub>) sera supposée satisfaite dans toute la suite.*

Désormais, il reste à chercher une solution fondamentale pour  $d''$  défini sur un superespace  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ . Nous supposons toujours satisfaites les conditions (A<sub>0</sub>) et (A<sub>1</sub>) en sorte que l'opérateur de Cauchy-Riemann sur  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  est défini comme en (2.7).

Nous allons utiliser les résultats précédents obtenus pour  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$ . Notons

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega(y_i) = dy_i^0 \dots dy_i^p (= dy_i^0 \wedge \dots \wedge dy_i^p) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \\ \lambda(\theta_i) = d\theta_i^1 \dots d\theta_i^q \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \\ \eta(y_i) = \sum_{j=1}^p (-1)^j (y_i^0 e_j + y_i^j e_0) dY_i dy_i^1 \dots dy_i^{j-1} dy_i^{j+1} \dots dy_i^p \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \\ \nu(\theta_i) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} (\theta_i^j e_0 + \theta_i^{s_k} a_j) dZ_k(\theta_i) d\theta_i^1 \dots d\theta_i^{s_k-1} d\theta_i^{s_k+1} \dots d\theta_i^{j-1} d\theta_i^{j+1} \dots d\theta_i^q \\ dV = \bigwedge_{j=1}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell=1}^m \lambda(\theta_\ell) \end{array} \right. \quad \text{où } dY_i = \sum_{k=0}^p e_k dy_i^k$$

pour  $i = 1, \dots, m$ , où  $dZ_k(\theta_i) = \sum_{\ell=s_k}^{s_{k+1}-1} a_\ell d\theta_i^\ell$ ,  $k = 1, \dots, r$

Comme les formes différentielles  $dY_i$  et  $dZ_k(\theta_i)$  sont à coefficients dans  $\Lambda_0$ , nous avons :

$$dY_i \wedge dY_i = 0, \forall i = 1, \dots, n \text{ et } dZ_k(\theta_i) \wedge dZ_k(\theta_i) = 0, \forall i = 1, \dots, m, \forall k = 1, \dots, r.$$

Tenant compte de la condition  $(A_0)$  (cf (3.4)), nous pouvons écrire pour tout  $i = 1, \dots, n$  :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} d\eta(y_i) &= d''\eta(y_i) = (p+1)e_0 \omega(y_i) \\ \frac{1}{2}d\|x\|^2 \wedge \eta(y_i) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell=1}^m \lambda(\theta_\ell) &= \frac{1}{2}d''_{y_i}(\|x\|^2) \wedge \eta(y_i) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell=1}^m \lambda(\theta_\ell) \\ &= (-1)^{(p+1)^2(i-1)} \|y_i\|^2 e_0 dV \end{aligned}$$

Tenant compte de  $(A_1)$  ((cf (3.6)), nous obtenons pour tout  $i = 1, \dots, m$  :

$$(3.11) \quad \begin{aligned} d\nu(\theta_i) &= d''\nu(\theta_i) = qe_0 \lambda(\theta_i) \text{ et} \\ \frac{1}{2}d\|x\|^2 \wedge \nu(\theta_i) \bigwedge_{j=1}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell \neq i} \lambda(\theta_\ell) &= \frac{1}{2}d''_{\theta_i}(\|x\|^2) \wedge \nu(\theta_i) \bigwedge_{j=1}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell \neq i} \lambda(\theta_\ell) \\ &= (-1)^{nq(p+1)+q^2(i-1)} \|\theta_i\|^2 e_0 dV \end{aligned}$$

Posons :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \tilde{\Omega} &= \frac{\tilde{A}}{\|x\|^{n(p+1)+qm}} \quad \text{où} \\ \tilde{A} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{(p+1)^2(i-1)} \eta(y_i) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell=1}^m \lambda(\theta_\ell) + \sum_{i=1}^m (-1)^{nq(p+1)+q^2(i-1)} \nu(\theta_i) \bigwedge_{j=1}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^m \lambda(\theta_\ell) \\ &= \sum_{i=1}^n dY_i \sum_{j=1}^p (-1)^j (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) \widehat{dy_i^0 dy_i^j} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r dZ_k(\theta_i) \sum_{\ell=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{\ell-1} (\theta_i^\ell e_0 + \theta_i^{s_k} a_\ell) \widehat{d\theta_i^{s_k} d\theta_i^\ell} \end{aligned}$$

où l'on a noté, en accord avec (3.9) :

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \widehat{dy_i^0 dy_i^j} &= \omega(y_1) \dots \omega(y_{i-1}) dy_i^1 \dots dy_i^{j-1} dy_i^{j+1} \dots dy_i^p \omega(y_{i+1}) \dots \omega(y_n) \lambda(\theta_1) \dots \lambda(\theta_m) \\ \widehat{d\theta_i^{s_k} d\theta_i^\ell} &= \omega(y_1) \dots \omega(y_n) \lambda(\theta_1) \dots \lambda(\theta_{i-1}) d\theta_i^1 \dots d\theta_i^{s_k-1} d\theta_i^{s_k+1} \dots d\theta_i^{\ell-1} d\theta_i^{\ell+1} \dots d\theta_i^q \lambda(\theta_{i+1}) \dots \lambda(\theta_m) \end{aligned}$$

Nous déduisons des calculs (3.10) et (3.11) précédents

$$(3.14) \quad d''\tilde{A} = d\tilde{A} = (n(p+1) + mq)e_0 dV$$

$$(3.15) \quad d\tilde{\Omega} = d''\tilde{\Omega} = 0 \quad \text{hors de } \{0\}$$

Il reste maintenant à étudier la singularité de  $\tilde{\Omega}$ ; remarquons que les coefficients de  $\tilde{\Omega}$  sont de classe  $C^\infty$  hors de 0 et localement intégrables; si  $\varphi = \varphi(y, \theta)$  est une fonction  $C^\infty$  à support compact sur  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ , alors, en notant  $N = n(p+1) + mq$  :

$$\begin{aligned}
\langle d''\tilde{\Omega}, \varphi \rangle &= (-1)^N \langle \tilde{\Omega}, d''\varphi \rangle = (-1)^N \langle \tilde{\Omega}, d\varphi \rangle = (-1)^N \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \tilde{\Omega} \wedge d\varphi \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} d(\tilde{\Omega}\varphi) && \text{d'après (3.15)} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\|x\|=\varepsilon} \tilde{A}\varphi \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(0)}{\varepsilon^N} \int_{\|x\|=\varepsilon} \tilde{A} && \text{car } \|\tilde{A}\| \lesssim \|x\| \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(0)}{\varepsilon^N} \int_{\|x\| \leq \varepsilon} d\tilde{A}
\end{aligned}$$

et, en tenant compte de (3.14) :

$$(3.16) \quad \langle d''\tilde{\Omega}, \varphi \rangle = (n(p+1) + mq) \text{Vol}(B(0, 1)) e_0 \varphi(0)$$

Par suite,  $\Omega := [(n(p+1) + mq)\text{Vol}(B(0, 1))]^{-1} \tilde{\Omega}$  est une solution fondamentale pour l'opérateur  $d''$  dans  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$

REMARQUE : On vérifie aisément, grâce à (3.10), (3.11) et (3.12) l'égalité au sens des courants  $d'\Omega = 0$ .

Nous pouvons résumer les résultats de ce paragraphe dans le théorème 3.3 suivant.

Rappelons que les conditions  $(A_0)$  et  $(A_1)$  sont définies en (3.4) et (3.6), l'opérateur  $d''$  sur  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  en (2.7).

**Théorème 3.3.** *Si  $\Lambda_0$  vérifie la condition  $(A_0)$  et  $\Lambda_1$  la condition  $(A_1)$ , l'opérateur de Cauchy-Riemann  $d''$  dans  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  admet une solution fondamentale  $\Omega$  donnée par :*

$$\begin{aligned}
(3.17) \quad \Omega(x) &= \frac{c(n,m,p,q)}{\|x\|^N} \left( \sum_{i=1}^n dY_i \sum_{j=1}^p (-1)^j (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) \widehat{dy_i^0 dy_i^j} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r dZ_k(\theta_i) \sum_{\ell=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{(\ell-1)} (\theta_i^\ell e_0 + \theta_i^{s_k} a_\ell) \widehat{d\theta_i^{s_k} d\theta_i^\ell} \right)
\end{aligned}$$

où  $N = n(p+1) + mq$ ,  $c(n, m, p, q) = -(N \text{Vol}(B(0, 1)))^{-1}$ ,  $\widehat{dy_i^0 dy_i^j}$  et  $\widehat{d\theta_i^{s_k} d\theta_i^\ell}$  étant définis en (3.13)

### 3.2. Formule de représentation intégrale pour les fonctions (et les formes différentielles).

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  borné à frontière lisse, soit  $\Psi : \overline{D} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  définie par  $\Psi(x, x') = x - x'$ . Définissons, avec les notations (3.9) et (3.13) :

$$\begin{aligned}
(3.18) \quad K(x, x') &= \Psi^* \Omega \\
&= \frac{c(n,m,p,q)}{\|x' - x\|^N} \left( \sum_{i=1}^n (dY_i - dY'_i) \sum_{j=1}^p (-1)^j ((y_i^j - y_i'^j) e_0 + (y_i^0 - y_i'^0) e_j) \widehat{d(y_i^0 - y_i'^0) d(y_i^j - y_i'^j)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r dZ_k(\theta_i - \theta'_i) \sum_{\ell=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{\ell-1} ((\theta_i^\ell - \theta_i'^\ell) e_0 + (\theta_i^{s_k} - \theta_i'^{s_k}) a_\ell) \widehat{d(\theta_i^{s_k} - \theta_i'^{s_k}) d(\theta_i^\ell - \theta_i'^\ell)} \right)
\end{aligned}$$

Les coefficients de  $K$  sont de classe  $C^\infty$  hors de la diagonale  $\Delta$  de  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \times \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  et localement intégrables sur  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \times \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ .

Le noyau  $K$  vérifie au sens des courants, si l'on pose  $d = d_x + d_{x'}$  et  $d'' = d''_{x'} + d''_x$  :

$$(3.19) \quad d'' K(x, x') = d'' \Psi^* \Omega(x) = \Psi^* d'' \Omega = \Psi^* [0] = [\Delta] \quad \text{et} \quad dK(x', x) = \Psi^* d\Omega = [\Delta]$$

Précisons ce que nous entendons par bidegré d'une forme. Toute forme différentielle en les  $N$  variables réelles  $y_i^j$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq p$  et  $\theta_i^\ell$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq \ell \leq q$  peut s'écrire de manière unique en fonction des 1-formes (dites de bidegré (1,0)) de l'ensemble

$\mathfrak{F} = \{dY_i, i = 1, \dots, n; dZ_k(\theta_i), i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, r\}$  et des 1-formes dites de bidegré (0,1) appartenant à l'ensemble

$\mathfrak{H} = \{dy_i^j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p; d\theta_i^\ell, i = 1, \dots, m, \ell = 1, \dots, q, \ell \neq s_k, \forall k = 1, \dots, r\}$ .

Une forme  $f$  de degré  $d$  est dite de bidegré  $(a, d-a)$  si dans chacune de ses composantes apparaissent exactement  $a$  1-formes appartenant à  $\mathfrak{F}$ .

**Corollaire 3.4.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, en notant  $N$  la dimension de  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$  :*

(a) *si  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  dans  $D$ , continue sur  $\bar{D}$  ainsi que  $df$ , alors pour tout  $x' \in D$ , nous avons :*

$$f(x') = \int_{\partial D} K(x, x')f(x) - \int_D d''f(x) \wedge K(x, x').$$

(b) *plus généralement, si  $f$  est une forme de degré  $d$  de bidegré  $(a, d - a)$ , de classe  $C^1$  dans  $D$ , continue sur  $\bar{D}$  ainsi que  $df$ , nous avons pour tout  $x'$  de  $D$  :*

$$f(x') = \int_{\partial D} f(x)K_{(a,d-a)}(x, x') + (-1)^{d-1} \int_D d''f(x) \wedge K(x, x') + (-1)^d d'' \int_D f(x)K(x, x')$$

où  $K_{(a,d-a)}$  désigne la composante de  $K$  de bidegré  $(a, d - a)$  en  $x'$ .

Comme nous utiliserons uniquement le résultat du (a) dans la suite de l'article, nous reportons en appendice la preuve du (b).

(a) Nous en proposons ici une preuve élémentaire. Il suffit, vu la régularité des intégrales, de prouver l'égalité au sens des distributions. Supposons  $f$  de classe  $C^\infty$  dans  $D$  ; soit  $g(x')$  une  $N$ -forme de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $D$ .

D'après (3.19), nous avons hors de  $\Delta$  :  $d_{x,x'}[f(x)K(x, x')g(x')] = df(x) \wedge K(x, x')g(x')$

Or  $K(x, x')g(x') = L(x, x')g(x')$  avec

$$(3.20) \quad L(x, x') = c_{(n,m,p,q)} \|x' - x\|^{-N} \tilde{B} \text{ où, avec les notations (3.9) et (3.13)}$$

$$\tilde{B} = \sum_{i=1}^n dY_i \sum_{j=1}^p b_{i,j}(y_i, y'_i) \widehat{dy_i^0 dy_i^j} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r dZ_k(\theta_i) \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \beta_{k,l}(\theta_i, \theta'_i) \widehat{d\theta_i^{s_k} d\theta_i^l}$$

les  $b_{i,j}$  et les  $\beta_{k,l}$  étant des fonctions à valeurs dans  $\Lambda$  (cf. la définition (3.18) de  $K$ ).

Pour tout  $\ell = 1, \dots, n$  :  $dY_\ell \wedge \tilde{B} = 0$  et pour tout  $\ell = 1, \dots, m, k = 1, \dots, r$  :  $dZ_k(\theta_\ell) \wedge \tilde{B} = 0$ , par suite  $d'f(x) \wedge L(x, x') = 0$

Nous avons donc hors de  $\Delta$  :  $d_{x,x'}[f(x)K(x, x')g(x')] = d''f(x) \wedge K(x, x')g(x')$ . Par la formule de Stokes, nous obtenons pour  $0 < \varepsilon \ll 1$  :

$$\int_{\partial D \times D} f(x)K(x, x')g(x') - \int_{\substack{\|x'-x\|=\varepsilon \\ x, x' \in D}} f(x)K(x, x')g(x') = \int_{\substack{D \times D \\ \|x-x'\| \geq \varepsilon}} d''f(x) \wedge K(x, x')g(x')$$

Puisque  $K(x, x')g(x') = L(x, x')g(x')$ , nous avons :

$$J_\varepsilon := \int_{\substack{\|x'-x\|=\varepsilon \\ x, x' \in D}} f(x)K(x, x')g(x') = (N \text{Vol}B(0, 1))^{-1} \varepsilon^{-N} \int_D \left( \int_{\partial B(x', \varepsilon)} f(x) \tilde{B}(x, x') \right) g(x')$$

$$= (N \text{Vol}B(0, 1))^{-1} \varepsilon^{-N} \int_D \left( \int_{\partial B(0, \varepsilon)} f(x' + w) \tilde{A}(w) \right) g(x') \quad \text{où } \tilde{A} \text{ est défini en (3.12)}$$

Raisonnant alors comme dans la preuve de (3.16), nous obtenons  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = \int_D f(x')g(x')$ . Une régularisation standard permet de conclure.  $\square$

NOTATIONS. Lorsque  $n = 1$  et  $m = 0$  (resp.  $n = 0$  et  $m = 1$ ) nous noterons

$$(3.21) \quad K_0 = \Psi^* \Omega_0 \quad (\text{resp. } K_1 = \Psi^* \Omega_1),$$

où  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  sont définis dans la proposition 3.2 et en (3.8)

#### 4. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS qS-DIFFÉRENTIABLES.

Une application  $f$  Fréchet-différentiable sur  $D$  domaine de  $\Lambda_0^n$  à valeurs dans  $\Lambda$  est S-différentiable si et seulement  $d''f \equiv 0$  sur  $D$ . Nous avons déjà vu, au troisième paragraphe, que la situation n'est pas tout à fait la même lorsque les variables sont dans  $\Lambda_1$ .

DÉFINITION :  $f : D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m \rightarrow \Lambda$  est quasiment S-différentiable (*qS-différentiable* en abrégé) si elle est Fréchet-différentiable sur  $D$  et telle que  $d''f \equiv 0$  sur  $D$ .

Si  $f$  est S-différentiable, alors elle est qS-différentiable.

Si  $m = 0$ ,  $f$  est S-différentiable si et seulement si elle est qS-différentiable.

On suppose toujours vérifiées les conditions  $(A_0)$  et  $(A_1)$  sur  $\Lambda$ .

#### 4.1. Une formule de représentation intégrale sur la frontière distinguée $\partial_0 P$ d'un polydisque.

**Proposition 4.1.** *Soit  $D$  un ouvert de  $\Lambda_0$  ou  $\Lambda_1$ ; si une suite  $(f_k)$  de fonctions  $qS$ -différentiables sur  $D$  converge vers  $f$  uniformément sur tout compact de  $D$ , alors  $f$  est  $qS$ -différentiable sur  $D$ .*

Ce résultat se démontre de façon classique dès lors que l'on peut valider une différentiation sous le signe somme. Et ce fait découle des estimations  $|D^\alpha K_0(x, y)| \lesssim \|x - y\|^{-|\alpha| - p}$  uniformément en  $x \in G \subset\subset \Omega$  ouvert relativement compact dans  $D$  et  $y \in D \setminus \bar{\Omega}$ .

L'estimation analogue  $|D^\alpha K_1(x, y)| \lesssim \|x - y\|^{-|\alpha| - q + 1}$  donne le résultat lorsque  $D \subset \Lambda_1$ .

**Proposition 4.2.** *Soit  $P = \prod_{j=1}^{n+m} \Delta_j(a_j; r_j)$  où chaque  $\Delta_j, j = 1, \dots, n$  (resp.  $j = n + 1, \dots, m$ ) est un polydisque de  $\Lambda_0$  (resp.  $\Lambda_1$ ) ouvert non vide. Si  $f$  est continue sur  $\bar{P}$  et séparément  $qS$ -différentiable sur  $\Omega \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  avec  $\bar{P} \subset \Omega$ , alors pour tout  $x = (y, \theta) = (y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) \in P$  :*

$$(4.1) \quad f(y, \theta) = \int_{\partial_0 P} f(w_1, \dots, w_n, \tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{j=1}^n K_0(w_j, y_j) \cdot \prod_{j=n+1}^m K_1(\tau_j, \theta_j)$$

On déduit tout d'abord aisément de la proposition 4.1 que  $y_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, y_j, \dots, a_n, b)$  est  $qS$ -différentiable sur  $\Delta_j$  dès que  $a_j \in \bar{\Delta}_i, \forall i \neq j$  et  $b_i \in \bar{\Delta}_i, \forall i = 1, \dots, m$  (et mutatis mutandis pour  $\theta_j \mapsto f(a, b_1, \dots, b_{j-1}, \theta_j, \dots, b_m)$ ).

Nous pouvons écrire, en supposant  $n \neq 0$  par exemple

$$f(y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) = \int_{\partial \Delta_1} f(w_1, y_2, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) K_0(w_1, y_1).$$

puisque  $y_2 \mapsto f(w_1, y_2, \dots, y_n, \theta)$  reste  $qS$ -différentiable pour  $w_1 \in \partial \Delta_1$ , on peut itérer le processus, et appliquer le théorème de Fubini ( $f$  étant continue sur  $\bar{P}$ ).

#### 4.2. Harmonicité ; un théorème de Hartogs de $qS$ -différentiabilité séparée. Etablissons tout d'abord quelques propriétés (harmonicité, principe du maximum) qui sont les analogues en super-analyse de propriétés des fonctions holomorphes.

**Proposition 4.3.** *Soit  $D$  un domaine de  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ . Si  $f : D \rightarrow \Lambda$  est  $qS$ -différentiable sur  $D$ , alors elle est harmonique sur  $D$ , donc  $\mathbb{R}$ -analytique sur  $D$ .*

Soit un polydisque  $P = \prod_{i=1}^n P_i(a_i, r_i) \cdot \prod_{j=1}^m P_j(b_j, \rho_j) \subset\subset D$  de frontière distinguée  $\partial_0 P$ .

D'après (4.1), pour  $x = (y, \theta) = (y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) \in \frac{1}{2}P$

$$f(x) = f(y, \theta) = \int_{\partial_0 P} f(z, \zeta) \prod_{j=1}^n K_0(z_j, y_j) \prod_{j=1}^m K_1(\zeta_j, \theta_j)$$

Pour tout  $z_j \in \partial P_j(a_j, r_j)$ , (resp. tout  $\zeta_j \in \partial P_j(b_j, \rho_j)$ ), le noyau  $K_0(z_j, y_j)$  (resp.  $K_1(\zeta_j, \theta_j)$ ) est Fréchet- $C^\infty$  sur  $\{y_j / \|y_j - a_j\| < r_j/2\}$  (resp.  $\{\theta_j / \|\theta_j - b_j\| < \rho_j/2\}$ ) et l'on a, pour tous les multi-indices  $\alpha_j$  et  $\beta_j$ , avec ces conditions sur  $z_j, \zeta_j, y_j$  et  $\theta_j$  :

$$\|D_{y_j}^{\alpha_j} K_0(z_j, y_j)\| + \|D_{\theta_j}^{\beta_j} K_1(\zeta_j, \theta_j)\| \leq C \text{ste}(r_j, \rho_j).$$

On déduit alors de (4.1) que  $f$  est de classe  $C^\infty$  au sens de Fréchet sur  $\frac{1}{2}P$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n; \forall k = 0, \dots, p; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial (y_j^k)^2} &= \frac{\partial}{\partial y_j^k} \left( e_k \frac{\partial f}{\partial y_j^0} \right) = e_k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (y_j^0)^2} \\ \forall j = 1, \dots, m; \forall \ell = 1, \dots, r; \forall k, s_\ell \leq k < s_{\ell+1} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial (\theta_j^k)^2} &= a_k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (\theta_j^0)^2} \end{aligned}$$

Comme  $\sum_{k=0}^p e_k^2 = \sum_{k=s_1}^{s_2-1} a_k^2 = \dots = \sum_{k=s_r}^q a_k^2 = 0$ ,  $f$  est harmonique.  $\square$

remarque : en utilisant l'ellipticité du laplacien, nous aurions pu prouver l'harmonicité de  $f$  sans avoir recours à une représentation intégrale.

Une fonction  $f$  séparément holomorphe par rapport à chaque variable  $z_j$  de  $\mathbb{C}^n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{C}^n$  est holomorphe sur  $\Omega$  sans autre hypothèse de régularité globale sur  $f$  mais ce théorème de Hartogs n'est plus valable pour les fonctions  $\mathbb{R}$ -analytiques. Nous déduisons toutefois de la proposition 4.3 et d'un résultat de P. Lelong [L]

**Théorème 4.4.** *Une fonction  $f$  définie sur un domaine  $D$  de  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  à valeurs dans  $\Lambda$ , séparément  $qS$ -différentiable sur  $D$  par rapport à chacune de ses variables appartenant à  $\Lambda_0$  ou  $\Lambda_1$ , est  $qS$ -différentiable sur  $D$ .*

La fonction  $f$  est séparément harmonique en les variables  $y_j \in \Lambda_0 \approx \mathbb{R}^{p+1}$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $\theta_j \in \Lambda_1 \approx \mathbb{R}^q$ ,  $j = 1, \dots, m$  au voisinage de tout point de  $D$  donc est globalement harmonique en  $(y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m)$  d'après [L] p. 561 ; par suite elle est de classe  $C^1$  au sens de Fréchet sur  $D$  d'où le résultat d'après la définition (2.7) de  $d''$ .  $\square$

**Corollaire 4.5.** *Soit  $f$  une fonction  $qS$ -différentiable sur un domaine  $D$  de  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  et à valeurs dans  $\Lambda$ . Si  $f$  admet (en norme) un maximum local en un point de  $D$ ,  $f$  est constante sur  $D$ .*

On déduit de l'harmonicité des composantes  $f_j$  de  $f = \sum_0^{p+q} f_j e_j$  que la fonction continue  $\|f\|^2$  est sous-harmonique, donc localement constante dès qu'elle admet un maximum local. D'où le résultat puisqu'alors  $0 = \Delta \|f\|^2 = 2 \sum_0^{p+q} |\nabla f_j|^2$ .  $\square$

REMARQUE : la présence de diviseurs de zéro interdit la généralisation de théorèmes de type zéros isolés ou application ouverte .

Si l'on considère la CSA  $\Lambda_0$  de l'exemple 4 et la fonction  $f$   $S$ -différentiable d'une variable  $y$  appartenant à  $\Lambda_0$  définie par  $f(y) = ye_2$ , l'ensemble des zéros de  $f$  contient entre autres  $\{e_3 + \frac{e_2}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$  et par ailleurs  $f(\Lambda_0) = \text{Vect}(e_2, e_3)$  est non ouvert dans  $\Lambda_0$ .

**4.3. Analyticité.** Pour  $j = 1, \dots, m$  et  $\theta_j = \sum_1^q \theta_j^i \varepsilon_i$  notons :

$$(4.2) \quad Z(\theta_j) = \sum_{i=1}^q a_i \theta_j^i \quad \text{et, pour tout } k = 1, \dots, r : Z_k(\theta_j) = \sum_{i=s_k}^{s_{k+1}-1} \theta_j^i a_i$$

Une fonction  $f$   $qS$ -différentiable sur  $D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  est donc analytique réelle en les variables  $(y_1^0, \dots, y_1^p, \dots, y_n^0, \dots, y_n^p, \theta_1^1, \dots, \theta_1^q, \dots, \theta_m^1, \dots, \theta_m^q)$ .

En fait, une fonction  $qS$ -différentiable possède une propriété d'analyticité bien plus forte puisqu'elle est localement développable en série entière des variables  $y_1 = \sum_{k=0}^p y_1^k$ ,  $y_2, \dots, y_n, Z_1(\theta_1), \dots, Z_r(\theta_1), \dots, \dots, Z_1(\theta_m), \dots, Z_r(\theta_m)$ .

**Proposition 4.6.** *Soit  $f : D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m \rightarrow \Lambda$  une fonction  $qS$ -différentiable sur  $D$ .*

*Pour tout  $(b, \beta) = (b_1, \dots, b_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \in D$ , il existe  $r > 0$  et des scalaires  $A_{I,J} \in \Lambda$  où  $I$  et  $J = (J_1, \dots, J_r)$  sont des multi-indices de  $\mathbb{N}^n$  et  $(\mathbb{N}^m)^r$  respectivement, tels que pour  $\|y_j - b_j\| < r$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $\|\theta_j - \beta_j\| < r$ ,  $j = 1, \dots, m$ , nous ayons avec les notations (4.5) :*

$$(4.3) \quad f(y, \theta) = \sum_{I, J_1, \dots, J_r} A_{I, J} (y - b)^I (Z_1(\theta - \beta))^{J_1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{J_r}$$

avec absolue convergence de la série. De plus :

$$(4.4) \quad I! J_1! \dots J_r! A_{I, J} = \frac{\partial^{|I|+|J_1|+\dots+|J_r|} f}{\partial y^I \partial (Z_1 \theta)^{J_1} \dots \partial (Z_r \theta)^{J_r}}(b, \beta)$$

Le développement (4.3) est valable sur tout polydisque  $P$  de centre  $(b, \beta)$  relativement compact dans  $D$ . Réciproquement, toute fonction de la forme (4.3) est  $qS$ -différentiable sur le domaine de convergence de la série.

Nous avons noté

$$(4.5) \quad \begin{aligned} (y - b)^I &= (y_1 - b_1)^{i_1} \dots (y_n - b_n)^{i_n} \text{ si } I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \\ Z_k(\theta - \beta) &= \left( Z_k(\theta_1 - \beta_1), \dots, Z_k(\theta_m - \beta_m) \right) \text{ où } Z_k(\theta_i) \text{ est défini en (4.2)} \\ \left( Z_k(\theta - \beta) \right)^{J_k} &= \left( Z_k(\theta_1 - \beta_1) \right)^{j_k^1} \dots \left( Z_k(\theta_m - \beta_m) \right)^{j_k^m} \text{ si } J_k = (j_k^1, \dots, j_k^m) \in \mathbb{N}^m \\ \frac{\partial^{|J_k|}}{\partial (Z_k \theta)^{J_k}} &= \frac{\partial^{|J_k|}}{\partial (\theta_1^{s_k})^{j_k^1} \dots \partial (\theta_m^{s_k})^{j_k^m}} \end{aligned}$$

**Lemme 4.7.** Soit  $f : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda$  un polynôme en les variables réelles  $(y^0, \dots, y^p)$  à coefficients dans  $\Lambda$  ;  $f$  est qS-différentiable si et seulement si  $f$  est un polynôme en la variable  $y = \sum_{j=0}^p y^j e_j$ .

Il suffit de prouver la condition nécessaire pour les polynômes homogènes car la partie homogène d'ordre  $k$  d'un polynôme qS-différentiable est qS-différentiable. On raisonne par récurrence sur le degré  $d$ .

Si  $d = 1$ ,  $f$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire (à une constante près) et S-différentiable donc de la forme  $f(y) = ay + f(0)$  où  $a \in \Lambda$ .

Soit  $f$  polynôme homogène en les variables réelles  $(y^0, \dots, y^p)$  de degré  $d \geq 2$  et S-différentiable. En tant que polynôme,  $f$  est lisse au sens de Fréchet, et l'on a pour tout  $k = 0, \dots, p$  :

$$\forall j : \frac{\partial^2 f}{\partial y^j \partial y^k} = \frac{\partial}{\partial y^k} (e_j \frac{\partial f}{\partial y^0}) = e_j \frac{\partial}{\partial y^0} \left( \frac{\partial f}{\partial y^k} \right);$$

les  $\frac{\partial f}{\partial y^k}$  sont donc S-différentiables, homogènes de degré  $d - 1$ , donc, par récurrence, il existe  $b \in \Lambda_0$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial y^0} = b(y)^{d-1}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y^k} = e_k b(y)^{d-1}$  ; par intégration  $f(y) = \int_0^1 df(ty) \cdot y dt = \frac{b}{d}(y)^d$ .  $\square$

**Lemme 4.8.** Soit  $f : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda$  un polynôme en les variables réelles  $(\theta^1, \dots, \theta^q)$  à coefficients dans  $\Lambda$  ;  $f$  est qS-différentiable si et seulement si  $f$  est un polynôme en les variables  $Z_1(\theta), \dots, Z_r(\theta)$ .

La condition est clairement suffisante. On raisonne encore par récurrence sur  $d$  pour la preuve de la nécessité de la condition. Pour un polynôme homogène de degré  $d = 1$ , le résultat découle de la définition de la qS-différentiabilité. Il est aisé de vérifier la qS-différentiabilité de  $\frac{\partial f}{\partial \theta^{s_j}}$  pour  $j = 1, \dots, r$  si  $f$  est homogène de degré  $d \geq 2$  ; par hypothèse de récurrence

$$\frac{\partial f}{\partial \theta^{s_j}}(\theta) = \sum_{k_1 + \dots + k_r = d-1} b_K^{(j)} (Z_1(\theta))^{k_1} \dots (Z_r(\theta))^{k_r}, \quad b_K^j \in \Lambda, j = 1, \dots, r;$$

D'où le résultat en appliquant la formule de Taylor et les relations  $\frac{\partial f}{\partial \theta^k} = a_k \frac{\partial f}{\partial \theta^{s_j}}$  pour  $s_j \leq k < s_{j+1}$ ,  $k = 1, \dots, q$ .  $\square$

**Lemme 4.9.** Soit  $f : \Lambda_0 \times \Lambda_1 \rightarrow \Lambda$  un polynôme de degré  $d$  en les variables réelles  $y^0, \dots, y^p, \theta^1, \dots, \theta^q$  ;  $f$  est qS-différentiable si et seulement si  $f$  s'écrit sous la forme :

$$f(y, \theta) = \sum_{\substack{|K|=0 \\ K=(k_0, k_1, \dots, k_r)}}^d A_K y^{k_0} (Z_1(\theta))^{k_1} \dots (Z_r(\theta))^{k_r} \quad \text{où } A_K \in \Lambda, \forall K \in \mathbb{N}^{r+1}.$$

Et nous avons un énoncé analogue pour un polynôme à valeurs dans  $\Lambda$  en les variables réelles  $y_1^0, \dots, y_1^p, \dots, y_n^0, \dots, y_n^p, \theta_1^1, \dots, \theta_1^q, \dots, \theta_m^1, \dots, \theta_m^q$ .

La preuve du lemme s'effectue par récurrence sur le degré du polynôme et repose sur les deux lemmes précédents.

RETOUR À LA PROPOSITION 4.6 :

Soulignons ici que, en dehors de la diagonale, le noyau reproduisant  $K_0(x, y)$  des fonctions S-différentiables sur un domaine de  $\Lambda_0$  est lisse au sens de Fréchet, mais n'est pas S-analytique ; nous ne pouvons donc pas raisonner exactement comme dans le cas holomorphe de une ou plusieurs variables, même pour passer du cas  $n = 1$  au cas  $n$  quelconque. Et la même remarque vaut pour le noyau  $K_1$ .

– La qS-différentiabilité (sur le domaine de convergence de la série) d'une fonction admettant un développement de type (4.3) découle du lemme 4.9.

– La preuve de (4.3) et (4.4) sous l'hypothèse de qS-différentiabilité étant un peu longue et technique, nous la reportons en appendice.

INÉGALITÉS DE TYPE CAUCHY :

Lorsque  $f$  est continue sur  $\bar{P}$  (ou seulement bornée en norme sur  $P$ ) et qS-différentiable sur  $P = \prod_j \Delta_j(a_j; r_j)$ , elle est de classe  $C^\infty$  au sens de Fréchet sur  $P$  et on peut prendre les dérivées dans la formule (4.1) pour  $\|y_j - a_j\| < r_j/2$  pour tout  $j = 1, \dots, n$  et  $\|\theta_j - a_{n+j}\| \leq r_{n+j}/2$  pour  $j = 1, \dots, q$ . Rappelons que  $\frac{\partial f}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial y_j^0}$  et  $\frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial (Z_k(\theta))^\beta} = \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial (\theta_1^{s_k})^{\beta_1} \dots \partial (\theta_m^{s_k})^{\beta_m}}$ . Nous obtenons :

**Proposition 4.10.** *Pour  $f$  qS-différentiable sur un polydisque  $P = \prod_{j=1}^{n+m} \Delta_j(a_j; r_j)$  et continue sur  $\bar{P}$ , nous avons :*

$$(4.6) \quad \left\| \frac{\partial^{|I|+|J_1|+\dots+|J_r|} f}{\partial y^I \partial (Z_1(\theta))^{J_1} \dots \partial (Z_r(\theta))^{J_r}}(a) \right\| \leq c_{I, J_1, \dots, J_r} \cdot \sup_{\bar{P}} \|f\| \cdot r^{-[I, J_1, \dots, J_r]}$$

où  $c_{I, J_1, \dots, J_r} \sim I! J_1! \dots J_r!$  lorsque  $\min(|I|, |J_1|, \dots, |J_r|) \rightarrow +\infty$ .

Nous avons noté pour  $I = (i_1, \dots, i_n)$  et  $J_k = (j_1^k, \dots, j_m^k)$ ,  $k = 1, \dots, r$  :

$$r^{-[I, J_1, \dots, J_r]} = r_1^{-i_1} \dots r_n^{-i_n} (r_{n+1})^{-j_1^1 - \dots - j_1^r} \dots (r_{n+m})^{-j_m^1 - \dots - j_m^r}.$$

Nous déduisons de ces inégalités et de la proposition 4.6 un résultat de type Liouville :

**Corollaire 4.11.** *Une fonction qS-différentiable et bornée en norme sur  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$  est constante.*

**4.4. Un théorème de prolongement de type Hartogs-Bochner.** Grâce à la formule de représentation intégrale des fonctions qS-différentiables donnée par le corollaire 3.4 et aux propriétés de l'opérateur  $d''$ , nous obtenons :

**Théorème 4.12.** *: Sous les conditions  $(A_0)$  et  $(A_1)$ , si  $\partial\Omega$  est le bord connexe d'un domaine  $\Omega$  borné de  $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ , avec  $n + m \geq 2$ , et  $f$  une fonction qS-différentiable dans un voisinage connexe de  $\partial\Omega$ , alors  $f$  se prolonge en une fonction qS-différentiable sur  $\Omega$ .*

L'opérateur  $d''$  et le noyau  $K$  vérifient hors de la diagonale de  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} : d_x'' K^{(0)}(w, x) = -d_w'' K^{(1)}(w, x)$  où  $K^{(j)}(w, x)$  désigne la composante de degré  $j$  en  $x$  et  $n(p+1) + mq - 1 - j$  en  $w$  du noyau  $K$ . Par suite, si  $D_1, D_2$  sont des domaines à frontière de classe  $C^1$  par morceaux,  $D_1 \subset\subset \Omega \subset\subset D_2$  avec  $\partial D_j \subset V$ ,  $j = 1, 2$  où  $V$  est un voisinage ouvert de  $\partial\Omega$  sur lequel  $f$  est qS-différentiable, les fonctions  $F_j = \int_{\partial D_j} f(w) K^{(0)}(w, x)$ ,  $j = 1, 2$  sont qS-différentiables respectivement sur  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \setminus \partial D_1$  et sur  $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \setminus \partial D_2$ . Supposant par exemple  $n \neq 0$ , en appliquant le corollaire 4.11 à la fonction  $(y_1, a', b) \in \Lambda_0 \times \Lambda_0^{n-1} \times \Lambda_1^m \mapsto F_1(y_1, a'; b)$  pour chaque  $(a', b)$  tel que  $\Lambda_0 \times \{(a', b)\} \cap \partial D_1 = \emptyset$ , on montre ensuite, par prolongement analytique, que la fonction  $F_1$  est nulle sur la composante connexe non bornée de  $\bar{D}_1$ . Par suite, la fonction  $F_2$  est qS-différentiable sur  $\Omega$  et prolonge  $f$ . La preuve du théorème est alors analogue à celle du Kugelsatz de Hartogs-Bochner donnée dans [LM] par exemple.

## 5. APPENDICE.

**5.1. Preuve du corollaire 3.4 (b).** Toute forme différentielle à coefficients à valeurs dans  $\Lambda$  en les  $N = n(p+1) + mq$  variables réelles  $y_i^j$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq p$  et  $\theta_i^\ell$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq q$  peut donc s'écrire de manière unique en fonction des 1-formes de l'ensemble

$\mathfrak{F} = \{dY_i, i = 1, \dots, n ; dZ_k(\theta_i), i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, r\}$ , que nous dirons 1-formes de bidegré (1,0) et des 1-formes dites de bidegré (0,1) appartenant à l'ensemble

$\mathfrak{H} = \{dy_i^j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p ; d\theta_i^\ell, i = 1, \dots, m, \ell = 1, \dots, q, \ell \neq s_k, \forall k = 1, \dots, r\}$ .

Une forme homogène  $f$  de degré  $d$  s'écrit  $f = \sum_{|I|=0}^{n+mr} f^I$ , où pour chaque multiindice  $I$ , la forme  $f^I$  est de bidegré  $(|I|, d - |I|)$ ; chaque composante  $\sum_{|I|=k} f^I$  est une forme "pure" de bidegré  $(k, d - k)$ ;

Les formes  $\lambda(\theta_i) = dZ_1(\theta_i) d\theta_i^2 \dots d\theta_i^{s_2-1} dZ_2(\theta_i) d\theta_i^{s_2+1} \dots dZ_r(\theta_i) d\theta_i^{s_r+1} \dots d\theta_i^q$  sont de bidegré  $(r, q-r)$  et les formes  $\omega(y_i) = dY_i dy_i^1 \dots dy_i^p$  sont de bidegré  $(1, p)$ .

Notons que le noyau  $K(x, x')$  est de bidegré total (i.e. relativement à  $(x, x')$ )  $(n + mr, N - n - mr - 1)$ .  $K_{(\alpha, \beta)}$  désigne la composante de  $K$  de bidegré  $(\alpha, \beta)$  relativement à la variable  $x'$  avec la convention  $K_{(\alpha, -1)} \equiv 0$ .

Montrons en un premier temps la formule suivante : si  $f$  est une forme de degré  $d$  de classe  $C^\infty$  dans  $D$  continue ainsi que  $df$  sur  $\bar{D}$ , nous avons pour tout  $x' \in D$  :

$$(5.1) \quad f(x') = \int_{\partial D} f(x)K(x, x') - (-1)^{d-1} \int_D df(x) \wedge K(x, x') + (-1)^d d \int_D f(x)K(x, x')$$

Il suffit de tester  $f$  contre une forme  $g(x')$  de degré  $N - d$ , de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $D$ . Calculons :

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & \int_{\partial(D \times D)} g(x')f(x)K(x, x') \\ &= \int_{\partial D_{x'} \times D_x + (-1)^N D_{x'} \times \partial D_x} g(x')f(x)K(x, x') = (-1)^N \int g(x') \int_{\partial D} f(x)K(x, x') \\ &= \int_{D \times D} dg(x')f(x)K(x, x') + (-1)^{N-d} g(x')df(x)K(x, x') + (-1)^N g(x')f(x)[\Delta] \\ &= (-1)^{N-d+1} \int g(x')d_{x'} \int_D f(x)K(x, x') + (-1)^{N-d} \int g(x') \int_D df(x)K(x, x') + (-1)^N \int g(x')f(x'). \end{aligned}$$

En identifiant les membres de droite des première et dernière lignes de (5.2), on obtient (5.1).

Si  $f$  est une forme de bidegré  $(a, b)$ , en égalant dans (5.1) les composantes de bidegré  $(a, b)$ , nous obtenons la formule du (b) du corollaire.  $\square$

**5.2. preuve de la proposition 4.6.** Si  $f : D \subset \Lambda_0 \rightarrow \Lambda$  est qS-différentiable sur  $D$ , elle est réelle analytique et pour tout  $a \in D$ , il existe des réels  $r_k > 0$  tels que

$$(5.3) \quad f(y) = \sum_{J=(j_0, \dots, j_p) \in \mathbb{N}^{p+1}} \alpha_J (y^0 - a^0)^{j_0} \dots (y^p - a^p)^{j_p} \text{ où } \alpha_J \in \Lambda$$

avec absolue sommabilité pour  $|y^k - a^k| < r_k$ . Chaque composante homogène de la série étant S-différentiable, d'après le lemme 4.7 il existe pour tout  $k \in \mathbb{N}$  un élément  $c_k \in \Lambda$  tel que

$$\sum_{\substack{|J|=k \\ J=(j_0, \dots, j_p)}} \alpha_J (y^0 - a^0)^{j_0} \dots (y^p - a^p)^{j_p} = c_k (y - a)^k ;$$

d'où par associativité des familles sommables :

$$(5.4) \quad f(y) = \sum_0^\infty c_k (y - a)^k$$

avec convergence en norme de la série pour  $\|y - a\| < \min_j r_j$ .

En dérivant terme à terme le second membre de (5.3), on obtient, puisque  $e_0$  est le neutre de  $\Lambda$ , en tenant compte de (5.2) où nous avons  $c_k = \alpha_{(k, 0, \dots, 0)}$  :

$$\frac{\partial^k f}{\partial (y^0)^k}(a) = k! c_k \text{ soit encore } \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a) = k! c_k$$

Remarque : tout revient donc à dériver terme à terme (5.4).

• Soit  $f$  qS-différentiable sur  $D \subset \Lambda_0^n$ ,  $n \geq 2$ ; pour alléger l'écriture supposons  $n = 2$  et notons  $w$  et  $y$  les deux variables appartenant à  $\Lambda_0$ . Au voisinage d'un point  $(a, b) \in D$  :

$$\begin{aligned} f(w, y) &= \sum_{\substack{I, J \in \mathbb{N}^{p+1} \\ I=(i_0, \dots, i_p), J=(j_0, \dots, j_p)}} \gamma_{I, J} (w^0 - a^0)^{i_0} \dots (w^p - a^p)^{i_p} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} \\ &= \sum_J \left[ \sum_I \gamma_{I, J} (w^0 - a^0)^{i_0} \dots (w^p - a^p)^{i_p} \right] (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} \end{aligned}$$

avec sommabilité pour  $\|w - a\| < r, \|y - b\| < \rho$ .

Par propriétés des séries entières, pour tout  $J$  fixé, la famille  $(\gamma_{I, J} (w^0 - a^0)^{i_0} \dots (w^p - a^p)^{i_p})_I$  est sommable, de somme  $\sum_{k=0}^\infty (\sum_{|I|=k} \gamma_{I, J} (w^0 - a^0)^{i_0} \dots (w^p - a^p)^{i_p})$ ;  $f$  est S-différentiable sur  $D$ , et

donc la somme  $\sum_I \gamma_{I,J}(w^0 - a^0)^{i_0} \dots (w^p - a^p)^{i_p}$  est S-différentiable sur  $\{w, \|w - a\| < r\}$ ; appliquant le lemme 4.7 aux composantes homogènes de cette somme, nous obtenons

$$f(w, y) = \sum_{J \in \mathbb{N}^{p+1}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,J}(w-a)^k \right] (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} = \sum_{J,k} c_{k,J}(w-a)^k (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p}$$

avec  $c_{k,J} = \gamma_{(k,0,\dots,0),J}$ .

Les familles  $(c_{k,J}(y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p}(w-a)^k)_J$  sont sommables, mais  $(w-a)^k$  peut être diviseur de zéro lorsque  $k \neq 0$ , et nous devons justifier, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la sommabilité de  $(c_{k,J}(y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p})_J$ .

nous avons  $(w-a)^k = (w^0 - a^0)^k e_0 + \sum'$ ; la famille  $(c_{k,J}(y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p}(w^0 - a^0)^k e_0)_J$  est sommable et il en sera de même pour  $(c_{k,J}(y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p})_J$  dès que  $w^0 \neq a^0$  ce qui est toujours vérifié pour un  $w$  proche de  $a$  convenablement choisi. Les sommes  $\sum_J c_{k,J}(y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p}$  étant S-différentiables, on conclut grâce au lemme 4.7 :

$$f(w, y) = \sum_{\ell, k=0}^{\infty} A_{k,\ell}(w-a)^k (y-b)^\ell \quad \text{avec } A_{k,\ell} = \gamma_{(k,0,\dots,0),(\ell,0)}$$

Et l'on obtient par dérivation :

$$\ell! k! A_{k,\ell} = \frac{\partial^{\ell+k} f}{\partial (w^0)^k \partial (y^0)^\ell}(a, b) \quad \text{soit encore } \ell! k! A_{k,\ell} = \frac{\partial^{\ell+k} f}{\partial w^k \partial y^\ell}(a, b)$$

• Soit  $f$  qS-différentiable sur un domaine  $D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ ; supposons  $n = m = 1$ , le cas général étant analogue.

La proposition 4.3 permet d'écrire au voisinage de  $(a, \beta) \in D$  :

$$(5.5) \quad f(y, \theta) = \sum_{\substack{I=(i_0,\dots,i_p) \in \mathbb{N}^{p+1} \\ J=(j_1,\dots,j_q) \in \mathbb{N}^q}} \gamma_{I,J}(y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p} (\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q} \\ = \sum_I \left( \sum_J \gamma_{I,J}(\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q} \right) (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p}$$

Pour tout multi-indice  $I \in \mathbb{N}^{p+1}$ , la série  $\sum_J \gamma_{I,J}(\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q}$  est absolument sommable, de somme  $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|J|=k} \gamma_{I,J}(\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q}$ ; par qS-différentiabilité de chaque partie homogène dans cette série, on déduit du lemme 4.8 l'écriture suivante de  $f$  au voisinage de  $(a, \beta)$  :

$$f(y, \theta) = \sum_I \left( \sum_{k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}} \alpha_{I,(k_1, \dots, k_r)} (Z_1(\theta - \beta))^{k_1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{k_r} \right) (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p}$$

où  $\alpha_{I,(k_1, \dots, k_r)} = \gamma_{I,(j_{s_1}, 0, \dots, 0, j_{s_2}, 0, \dots, 0, j_{s_r}, 0, \dots, 0)}$ .

On vérifie, comme précédemment, la sommabilité de chaque famille  $(\alpha_{I,(k_1, \dots, k_r)} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_I$ ; si  $k_1 + \dots + k_r \neq 0$ ; choisissons  $\theta = \beta + \sum_{\ell=1}^r \eta_\ell \varepsilon_{s_\ell}$ ,  $\eta_\ell$  réel,  $0 < \eta_\ell \ll 1$ ; alors  $Z_1(\theta - \beta) \dots Z_r(\theta - \beta) = \eta_1^{k_1} \dots \eta_r^{k_r} e_0$  est inversible; la famille  $(\alpha_{I,(k_1, \dots, k_r)} (Z_1(\theta - \beta))^{k_1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{k_r}) (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_{I=(i_0, \dots, i_p)}$  étant sommable pour  $\eta_1, \dots, \eta_r$  suffisamment petits, il en est de même de  $(\alpha_{I,(k_1, \dots, k_r)} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_I$ . Chaque somme  $\sum_I (\alpha_{I,(k_1, \dots, k_r)} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_I$  est S-différentiable, ainsi que ses composantes polynomiales homogènes, il découle du lemme 4.7 le développement cherché :

$$f(y, \theta) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\substack{|K|=0 \\ K=(k_1, \dots, k_r)}}^{\infty} A_{\mu,K} (y-a)^\mu Z_1(\theta - \beta)^{k_1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{k_r} \quad \text{avec } A_{\mu,K} = \alpha_{(\mu,0,\dots,0),K}.$$

Dérivant terme à terme dans (5.5), on obtient ensuite par unicité du développement en série entière :

$$\mu! k_1! \dots k_r! A_{\mu,(k_1, \dots, k_r)} = \frac{\partial^{\mu+k_1+\dots+k_r} f}{\partial (y^0)^\mu \partial (\theta^{s_1})^{k_1} \dots \partial (\theta^{s_r})^{k_r}}(a, \beta) = \frac{\partial^{\mu+k_1+\dots+k_r} f}{\partial y^\mu \partial (\theta^{s_1})^{k_1} \dots \partial (\theta^{s_r})^{k_r}}(a, \beta)$$

- L'avant-dernière assertion de la proposition découle de (4.4), de la proposition 4.10 et du théorème de prolongement des fonctions analytiques de variables réelles.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [B] F.A. BEREZIN, Introduction to Superanalysis, D. Reidel Publishing Company (1987).
- [BC] P. BONNEAU et A. CUMENGE, *Entre analyse complexe et superanalyse*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1 (2009).
- [BM] R. BOTT and J. MILNOR, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. AMS, **64**, (1958), 87-89.
- [H] L. HÖRMANDER, Complex Analysis in Several Variables, North Holland (1973).
- [HP] R. HARVEY and J. POLKING, *Fundamental solutions in complex analysis*, Parts 1 and 2, Duke Math. J., Vol 46, 253-340 (1978).
- [K] A. KHRENNIKOV, Superanalysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999).
- [L] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles*, Ann. Inst. Fourier, Vol. 11, 515-562 (1961).
- [LM] I. LIEB and J. MICHEL, The Cauchy-Riemann complex, Integral Formulae and Neumann problem. Vieweg Aspects of Math., Wiesbaden (2002).