



**HAL**  
open science

# Propriétés résiduelles dans les groupes supersimples (Residual properties in supersimple groups)

Frank Olaf Wagner

► **To cite this version:**

Frank Olaf Wagner. Propriétés résiduelles dans les groupes supersimples (Residual properties in supersimple groups). *The Journal of Symbolic Logic*, 2011, 76 (2), pp.361-367. hal-00496933

**HAL Id: hal-00496933**

**<https://hal.science/hal-00496933>**

Submitted on 1 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# PROPRIÉTÉS RÉSIDUELLES DANS LES GROUPES SUPERSIMPLES

FRANK WAGNER

RÉSUMÉ. Si  $\mathcal{C}$  est une pseudo-variété, alors un groupe supersimple résiduellement  $\mathcal{C}$  est nilpotent-par-poly- $\mathcal{C}$ .

ABSTRACT. If  $\mathcal{C}$  is a pseudo-variety, then a supersimple residually  $\mathcal{C}$  group is nilpotent-by-poly- $\mathcal{C}$ .

## 1. INTRODUCTION

Dans un article récent [1], Abderezak Ould Houcine montre qu'un groupe superstable résiduellement  $\mathcal{C}$  pour une pseudo-variété  $\mathcal{C}$  admet une série normale définissable  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_n$  telle que  $G_i/G_{i+1} \in \mathcal{C}$  pour  $i < n$ , et  $G_n$  est résoluble; si  $G$  est  $\omega$ -stable, on peut choisir  $G_n$  nilpotent. Nous étendons son résultat aux groupes supersimples, et montrons en même temps qu'on peut toujours prendre  $G_n$  nilpotent.

Rappelons qu'une classe de groupes est une pseudo-variété si elle est close par sous-groupes, quotients et produits finis; un groupe est résiduellement  $\mathcal{C}$  si pour tout  $1 \neq g \in G$  il y a un sous-groupe normal  $g \notin N \trianglelefteq G$  avec  $G/N \in \mathcal{C}$ . Cette notion dépend a priori fortement du modèle choisi et n'est pas préservée par équivalence élémentaire. Par contre, on voit facilement qu'elle est préservée par sous-groupe, mais aussi par quotient par un sous-groupe normal équationnellement type-définissable :

**Définition 1.** Soit  $G$  un groupe. Un sous-groupe  $H \leq G$  est *équationnellement type-définissable* s'il y a une collection  $\{w_i(x) : i \in I\}$  de mots avec paramètres dans  $G$  telle que

$$H = \{g \in G : w_i(g) = 1 \text{ pour tout } i \in I\}.$$

Si  $a \in G$ , alors le centralisateur  $C_G(a)$  est équationnellement défini par le mot  $w_a(x) = [x, a]$ . Le centre  $Z(G)$  est équationnellement type-défini par la collection des mots  $\{w_a(x) : a \in G\}$ . Bien sur, dans une extension élémentaire  $G^*$ , cette collection ne définira plus le centre  $Z(G^*)$  mais

---

*Date:* 1 juillet 2010.

*1991 Mathematics Subject Classification.* 20E26; 03C45.

*Key words and phrases.* simple theory, pseudo-variety, nilpotent, residual.

le centralisateur  $C_{G^*}(G)$ . Pour des considérations résiduelles, qui de toute façon ne permettent pas de changer de modèle, ceci est sans importance.

Ould Houcine [1, Lemma 2.2(2)] a montré que le quotient d'un groupe résiduellement  $\mathcal{C}$  par un sous-groupe normal équationnellement définissable reste résiduellement  $\mathcal{C}$ . La preuve reste valable pour un quotient par un sous-groupe normal équationnellement type-définissable.

**Lemme 1.** *Si  $G$  est résiduellement  $\mathcal{C}$  et  $N \trianglelefteq G$  est résiduellement type-définissable, alors  $G/N$  est résiduellement  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration:* Soit  $\{w_i(\bar{a}, x) : i \in I\}$  une collection de mots qui type-définissent  $N$ . Soit  $g \in G \setminus N$ . Alors il y a  $i \in I$  avec  $w_i(\bar{a}, g) \neq 1$ . Comme  $G$  est résiduellement  $\mathcal{C}$  il y a un morphisme surjectif  $\varphi : G \rightarrow L$  avec  $L \in \mathcal{C}$  et  $\varphi(w_i(\bar{a}, g)) \neq 1$

Supposons que  $\varphi(g) \in \varphi(N)$ . Alors il y a  $g' \in N$  avec  $\varphi(g) = \varphi(g')$ . Or, comme  $g' \in N$  on a  $w_i(\bar{a}, g') = 1$ , d'où

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi(1) = \varphi(w_i(\bar{a}, g')) = w_i(\varphi(\bar{a}), \varphi(g')) \\ &= w_i(\varphi(\bar{a}), \varphi(g)) = \varphi(w_i(\bar{a}, g)) \neq 1, \end{aligned}$$

une contradiction. Donc  $\varphi(g) \notin \varphi(N)$ .

Puisque  $\varphi$  est surjectif,  $\varphi(N)$  est normal dans  $L$ , et  $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow L/\varphi(N) \in \mathcal{C}$  est un morphisme avec  $\bar{\varphi}(g) \neq 1$ . Donc  $G/N$  est résiduellement  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Corollaire 2.** *Si  $G$  est résiduellement  $\mathcal{C}$ , alors  $G/Z(G)$  est résiduellement  $\mathcal{C}$ .*  $\square$

## 2. PRÉLIMINAIRES SUR LES THÉORIES SIMPLES ET UNE VERSION QUANTITATIVE DU THÉORÈME DES INDÉCOMPOSABLES

Nous rassemblons ici les notations et faits concernant les groupes (hyper-)définissables dans une théorie simple. Pour les preuves, ainsi que pour une définition de la simplicité, le lecteur pourra consulter [2].

Dans cette section, on travaille dans un grand modèle  $\kappa$ -saturé et fortement  $\kappa$ -homogène de notre théorie, le modèle monstre. Tous les paramètres proviennent de ce modèle, et leur nombre est strictement inférieur à  $\kappa$ . De même, tous les uples sont de longueur strictement inférieur à  $\kappa$ .

Un groupe  $G$  est *type-définissable* si son domaine et sa loi sont donnés par un type partiel; si  $G$  vit sur des uples de longueur fini, on voit facilement qu'alors la loi est donné par une seule formule. Un sous-groupe  $H \leq G$  est *relativement définissable* s'il existe une formule  $\varphi(x)$  avec  $H = \{g \in G : \models \varphi(g)\}$ .

Rappelons d'abord quelques propriétés des groupes type-définissables. Soit donc  $G$  un groupe type-définissable dans une théorie simple.

**Fait 3.** [2, Lemma 4.2.6] Soit  $H_a \leq G$  un sous-groupe relativement définissable avec des paramètres  $a$ . Alors il existe un entier  $n$  tel que pour tout  $a'$ , si  $H_{a'}$  est un sous-groupe d'indice fini dans  $G$ , alors  $[G : H_{a'}] \leq n$ .

**Fait 4.** [2, Proposition 4.2.7] Soit  $\mathfrak{H}$  une famille type-définissable de sous-groupes de  $G$  relativement définissables. Alors il existe un sous-groupe  $N$ , extension finie d'une intersection finie de groupes dans  $\mathfrak{H}$ , qui est invariant par tous les automorphismes de  $G$  qui stabilisent  $\mathfrak{H}$  et tel que  $N \cap H$  est d'indice fini dans  $N$  pour tout  $H \in \mathfrak{H}$ .

Il en suit que  $N$  est relativement définissable avec les mêmes paramètres que la famille  $\mathfrak{H}$ . Enfin, si la théorie ambiante est supersimple, tout groupe type-définissable est intersection de groupes définissables [2, Theorem 5.5.4].

On passe maintenant aux groupes hyperdéfinissables.

**Définition 2.** Un (élément) *hyperimaginaire* est la classe d'un uple modulo une relation d'équivalence type-définissable sur  $\emptyset$ . Un ensemble est *hyperdéfinissable* sur des paramètres  $A$  s'il est le quotient d'un ensemble type-définissable sur  $A$  par une relation d'équivalence type-définissable sur  $A$ . Un groupe est *hyperdéfinissable* si son domaine et le graphe de sa loi le sont.

**Remarque 5.** Il est facile de voir qu'on peut se restreindre à des relations d'équivalence sur des uples de longueur dénombrable, données par des types partiels dénombrables sur  $\emptyset$ .

Jusqu'à la fin de cette section soit  $G$  un groupe hyperdéfinissable sur des paramètres  $A$  dans une théorie simple.

**Définition 3.** Soit  $B \supseteq A$ .

- (1) Il existe un unique sous-groupe minimal hyperdéfinissable sur  $B$  d'indice  $< \kappa$  (et donc borné) dans  $G$ , la *composante  $B$ -connexe* notée  $G_B^0$ ; elle est normale.
- (2) On note  $S_G(B)$  l'ensemble des types  $p(x)$  sur  $B$  qui impliquent  $x \in G$ .
- (3) Un type  $p \in S_G(B)$  est *générique* si pour tout  $a \models p$  et tout  $g \in G$  avec  $g \downarrow_B a$  on a  $ga \downarrow_A B, g$ . Si  $p(x)$  implique  $x \in G_B^0$ , alors  $p$  est *générique principale*.
- (4) Soit  $p \in S_G(B)$ , où  $B$  est un modèle (ou bornement clos). On pose  $S_p = \{g \in G : gp \cup p \text{ ne devie pas sur } B\}$  et  $\text{stab}_G(p) = S_p^2$ , le *stabilisateur* de  $p$ .

**Fait 6.** [2, Corollary 4.5.3 et Proposition 4.5.4]  $\text{stab}(p)$  est un groupe hyperdéfinissable sur  $B$ , et  $p$  est générique dans  $G$  si et seulement si  $\text{stab}(p) = G_B^0$ . Dans ce cas,  $p \cdot p^{-1}$  contient tous les génériques de  $G_B^0$ .

**Définition 4.** Deux sous-groupes  $H_1$  et  $H_2$  hyperdéfinissables de  $G$  sont *commensurables* si leur intersection  $H_1 \cap H_2$  est d'indice  $< \kappa$  dans  $H_1$  et dans  $H_2$ .

**Remarque 7.**  $H_1$  et  $H_2$  sont donc commensurables si leur intersection est d'indice borné dans chaque groupe, indépendamment du modèle choisi. Si  $H_1$  et  $H_2$  sont commensurables et relativement définissables dans un groupe  $G$  type-définissable, alors  $H_1 \cap H_2$  sera d'indice fini dans  $H_1$  et dans  $H_2$  par compacité.

**Définition 5.** Un sous-groupe hyperdéfinissable  $H \leq G$  est *localement connexe* si tout conjugué (groupe ou modèle-théorique)  $H^*$  de  $H$  commensurable avec  $H$  est égal à  $H$ .

**Fait 8.** [2, Corollary 4.5.16] Soit  $H$  un sous-groupe hyperdéfinissable de  $G$ . Alors il y a un unique sous-groupe  $H^c$  hyperdéfinissable localement connexe minimal commensurable avec  $H$ , sa *composante localement connexe*.

Les fait suivants nécessitent des calculs de rang afin d'établir l'existence de certains sous-groupes.

**Fait 9.** [2, Equation 5.1] Soit  $H \leq G$  hyperdéfinissable. Alors

$$SU(H) + SU(G/H) \leq SU(G) \leq SU(H) \oplus SU(G/H)$$

(Inégalités de Lascar).

**Fait 10.** [2, Lemma 5.4.2] Soit  $p \in S_G(A)$  pour un modèle  $A$ , avec  $SU(p) = \sum_{i \leq k} \omega^{\alpha_i} n_i$  avec  $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_k$  et  $n_0, \dots, n_k > 0$ . Si pour tous  $a, b \models p$  indépendants  $SU(ab^{-1}/A) < SU(p) + \omega^{\alpha_k}$ , alors (une extension non-deviante de)  $p$  est un translaté à droite d'un type générique du stabilisateur  $\text{stab}(p)$ . En particulier  $SU(\text{stab}(p)) = SU(p)$ .

**Fait 11.** [2, Proposition 5.4.3 et Remark 5.4.4] Si  $SU(G) = \omega^\alpha n + \beta$  avec  $\beta < \omega^\alpha$ , alors il y a un sous-groupe normal  $N \trianglelefteq G$  hyperdéfinissable sur  $A$  avec  $SU(N) = \omega^\alpha n$ ; il est unique à commensurabilité près.

Voici la version supersimple du Théorème des Indécomposables :

**Fait 12.** [2, Theorem 5.4.5 et Remark 5.4.7] Si  $SU(G) < \omega^{\alpha+1}$  et  $\mathfrak{X}$  est une famille de sous-ensembles hyperdéfinissables de  $G$ , alors il y a  $m < \omega$ , des ensembles  $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}$  et un sous-groupe  $H \leq G$  hyperdéfinissable avec  $H \subseteq X_1^{\pm 1} \cdots X_m^{\pm 1}$ , tel que  $SU(XH) < SU(H) +$

$\omega^\alpha$  pour tout  $X \subseteq \langle \mathfrak{X} \rangle$  hyperdéfinissable (et en particulier pour tout  $X \in \mathfrak{X}$ ). En plus,  $H$  est unique à commensurabilité près, et on peut le choisir invariant par tous les automorphismes qui stabilisent  $\mathfrak{X}$ , ou  $X_1, \dots, X_M$ ). Si tous les  $X \in \mathfrak{X}$  sont  $G$ -invariants, ou si  $\mathfrak{X}$  est  $G$ -invariant, on peut choisir  $H$  normal dans  $G$ .

Nous allons raffiner ce théorème en donnant une borne pour  $m$ .

**Proposition 13.** *Soit  $G$  un groupe hyperdéfinissable dans une théorie simple, de rang*

$$SU(G) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} n_k$$

avec  $\alpha_1 > \dots > \alpha_k$  et  $n_1, \dots, n_k > 0$ . Soit  $X = X^{-1} \subseteq G$  hyperdéfinissable. Si le sous-groupe engendré par  $X$  est d'indice borné dans  $G$ , alors  $X^{6^{n_1 + \dots + n_k}}$  est générique dans  $G$ .

La réciproque est évidente.

*Démonstration:* Supposons que le sous-groupe engendré par  $X$  soit d'indice borné dans  $G$ . Soit  $m_i = 6^{n_1 + \dots + n_i}$ . On montrera par récurrence sur  $i$  que  $SU(X^{m_i}) \geq \omega^{\alpha_1} n_1 + \dots + \omega^{\alpha_i} n_i$ .

Pour  $i = 0$  on a  $m_0 = 6^0 = 1$ ; alors  $SU(X) \geq 0$  comme  $X$  est non-vide. Supposons donc que  $SU(X^{m_i}) \geq \omega^{\alpha_1} n_1 + \dots + \omega^{\alpha_i} n_i$ . Puisque le rang ne peut pas augmenter de  $\omega^{\alpha_{i+1}}$  plus que  $n_{i+1}$  fois, il y a  $m \in \{m_i, m_i + 1, \dots, m_{i+1}\}$  minimal tel que  $SU(X^{6m}) < SU(X^m) + \omega^{\alpha_{i+1}}$ .

Soit  $p(x)$  un type (eventuellement sur des paramètres  $\mathfrak{M}$  supplémentaires dont on peut supposer qu'ils forment un modèle) qui implique  $x \in X^m$  avec  $SU(p) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \dots + \omega^{\alpha_i} n_i + \omega^{\alpha_{i+1}} n$ , avec  $n$  maximal possible. Alors pour tout  $a, b \models p$  avec  $a \perp_{\mathfrak{M}} b$  on a

$$SU(ab^{-1}/\mathfrak{M}) \leq SU(X^{2m}) \leq SU(X^{6m}) < SU(p) + \omega^{\alpha_{i+1}}.$$

Le fait 10 implique alors  $ab^{-1} \perp_{\mathfrak{M}} b$  et  $\text{tp}(a/\mathfrak{M}, b)$  est un translaté à droite d'un générique du stabilisateur  $\text{stab}(p)$ , avec  $SU(\text{stab}(p)) = SU(p)$ .

Soit  $\text{stab}(p)^g$  un conjugué de  $\text{stab}(p)$  par un élément  $g \in X$  avec  $g \perp_{\mathfrak{M}} a, b$ . Alors pour  $a' \models \text{tp}(a/\mathfrak{M}, b, g)$  avec  $a \perp_{\mathfrak{M}, b, g} a'$  le type

$$\text{tp}((ab^{-1})(a'b^{-1})^g/\mathfrak{M}, b, g)$$

est générique pour  $\text{stab}(p)\text{stab}(p)^g$ . Mais par le choix de  $m$  on a

$$SU(\text{stab}(p)\text{stab}(p)^g) \leq SU(X^{4m+2}) \leq SU(X^{6m}) < SU(p) + \omega^{\alpha_{i+1}}.$$

Par les inégalités de Lascar

$$\begin{aligned} & SU(\text{stab}(p)) + SU(\text{stab}(p)/(\text{stab}(p) \cap \text{stab}(p)^g)) \\ &= SU(\text{stab}(p)^g) + SU(\text{stab}(p)\text{stab}(p)^g/\text{stab}(p)^g) \\ &\leq SU(\text{stab}(p)\text{stab}(p)^g) < SU(\text{stab}(p)) + \omega^{\alpha_i+1} \end{aligned}$$

et  $SU(\text{stab}(p)/(\text{stab}(p) \cap \text{stab}(p)^g)) < \omega^{\alpha_i+1}$ . Comme

$$SU(\text{stab}(p)) = SU(p) = \omega^{\alpha_1}n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_i}n_i + \omega^{\alpha_i+1}n,$$

les inégalités de Lascar impliquent que  $\text{stab}(p) \cap \text{stab}(p)^g$  est d'indice borné dans  $\text{stab}(p)$ , et  $\text{stab}(p)$  est commensurable avec tous ses  $X$ -conjugués. Soit  $N$  la composante localement connexe de  $\text{stab}(p)$ . Alors  $N$  est normalisé par  $X$ , et donc par le groupe engendré par  $X$ . Mais alors  $SU(X/N) < \omega^{\alpha_i+1}$  implique  $SU(X^\ell/N) < \omega^{\alpha_i+1}$  pour tout  $\ell < \omega$ ; puisque  $X^\ell$  est générique dans  $G$  pour  $\ell$  suffisamment grand, on a  $n = n_{i+1}$ .  $\square$

Le théorème suivant suppose que  $G$  soit définissable.

**Théorème 14.** *Soit  $G$  un groupe supersimple. Alors pour toute formule  $\varphi(x, y)$  il y a une formule  $\vartheta(y)$  telle que pour tout  $a$  le sous-groupe engendré par  $\varphi(x, a)$  intersecte  $G$  dans un sous-groupe  $H_a$  d'indice fini si et seulement si  $\models \vartheta(a)$ ; dans ce cas,  $H_a$  est relativement définissable uniformément en  $a$ , et d'indice borné dans  $G$ .*

*Démonstration:* Soit  $X_a^m = (\varphi(G, a)^{\pm 1})^m$ , et  $H_a = \bigcup_{m < \omega} X_a^m$  le sous-groupe engendré par  $\varphi(G, a)$ . S'il y a  $m < \omega$  tel que  $X_a^m$  soit générique dans  $G$ , alors  $X_a^m \cdot (X_a^m)^{-1} = X_a^{2m}$  contient tous les type génériques principaux de  $G$  sur  $a$  d'après le fait 6. Donc  $X_a^{4m}$  contient la composante connexe  $G_a^0$  sur  $a$ . Mais comme  $X_a^{4m}$  est définissable, un nombre fini de translatés de  $X_a^{4m}$  recouvrent  $G$ . En particulier  $H_a$  est d'indice fini dans  $G$ .

Réciproquement, si aucun  $X_a^m$  n'est générique dans  $G$ , alors une suite d'éléments génériques indépendants sur  $a$  témoigne du fait que l'indice de  $H_a$  dans  $G$  est infini. En particulier un nombre fini de translatés d'un  $X_a^m$  ne peut recouvrir  $G$ . La condition  $[G : H_a] < \omega$  est donc ouverte en  $a$ .

Pour tout  $m < \omega$ , un produit  $X_a^m$  est générique dans  $G$  si et seulement s'il a les mêmes rangs locaux stratifiés, ce qui est une condition fermée. Il nous faut donc borner le  $m$ , ce qui découle de la proposition 13.

Par compacité, le fait que  $X_a$  engendre un groupe d'indice fini est définissable par une formule  $\vartheta(x) \in \text{tp}(a)$ . Pour  $a \models \vartheta$  il en suit que le sous-groupe engendré par  $\varphi(G, a)$  est relativement définissable uniformément en  $a$ , et son indice dans  $G$  est borné.  $\square$

3. GROUPES SUPERSIMPLES RÉSIDUELLEMENT  $\mathcal{C}$ 

Nous pouvons maintenant suivre le raisonnement d'Ould Houcine pour démontrer notre théorème principal. Notons que dans cette section  $G$  est définissable, et que nous resterons toujours dans le même modèle (sauf indication au contraire). En particulier, il n'y a aucune hypothèse de saturation.

**Théorème 15.** *Soit  $\mathcal{C}$  une pseudo-variété et  $G$  un groupe supersimple résiduellement  $\mathcal{C}$ . Alors il y a une série normale définissable  $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n$  telle que  $G_i/G_{i+1} \in \mathcal{C}$  pour  $i < n$ , avec  $G_n$  nilpotent.*

*Démonstration:* Soit  $SU(G) = \omega^\alpha \cdot n + \beta$  pour des ordinaux  $\alpha, \beta$  et un entier  $n > 0$ , avec  $\beta < \omega^\alpha$ . Soit  $N \trianglelefteq G$  un sous-groupe normal type-définissable avec paramètres dans  $G$  de rang  $SU(N) \geq \omega^\alpha$  minimal. Alors  $SU(N) = \omega^\alpha \cdot k$  avec  $0 < k < \omega$  d'après le fait 11. Puisque  $N$  est une intersection de groupes définissables, la supersimplicité nous donne un sur-groupe définissable  $N_1$  de même rang (éventuellement sur des paramètres dans une extension élémentaire); d'après le fait 4 appliquée à la famille des conjugués (groupe- et modèle-théoriques) de  $N_1$  il existe un  $N_2 \trianglelefteq G$  commensurable avec  $N_1$  et définissable sur les mêmes paramètres que  $N$ . En bref, on peut supposer que  $N$  est normal et définissable avec paramètres dans  $G$ .

Pour  $g \in G \setminus \{1\}$  soit  $N_g \trianglelefteq G$  avec  $g \notin N_g$  telle que  $G/N_g \in \mathcal{C}$ , et pour  $\bar{g} \in G \setminus \{1\}$  fini soit  $N_{\bar{g}} = \bigcap_{g \in \bar{g}} N_g$ . Donc  $G/N_{\bar{g}} \in \mathcal{C}$  puisque  $\mathcal{C}$  est une pseudo-variété. Nous considérons les sous-groupes normaux  $[N, N_{\bar{g}}] \leq N \cap N_{\bar{g}}$  pour  $\bar{g} \in G$ . D'après le théorème des indécomposables il existe pour tout  $\bar{g} \in G$  fini des éléments  $n_1, \dots, n_m \in N_{\bar{g}}$  telle que  $(n_1^{-1}n_1^N)^{\pm 1} \dots (n_m^{-1}n_m^N)^{\pm 1}$  contienne un sous-groupe normal  $K_{\bar{g}} \trianglelefteq G$  type-définissable avec paramètres dans  $G$  avec  $SU(n^{-1}n^N/K_{\bar{g}}) < \omega^\alpha$  pour tout  $n \in N_{\bar{g}}$ .

Si on trouve  $\bar{g} \in G \setminus \{1\}$  tel que  $SU(K_{\bar{g}}) < \omega^\alpha \cdot k$ , alors  $SU(K_{\bar{g}}) < \omega^\alpha$  par minimalité de  $k$ . Donc  $SU(n^{-1}n^N) < \omega^\alpha$  pour tout  $n \in N_{\bar{g}}$ , d'où  $SU(N/C_N(n)) < \omega^\alpha$ , et  $C_N(n)$  est d'indice fini dans  $N$  pour tout  $n \in N_{\bar{g}}$  par les inégalités de Lascar. Alors

$$N_{\bar{g}} \leq \tilde{C}_G(N) = \{g \in G : [N : C_N(g)] < \omega\},$$

le centralisateur approximatif de  $N$  dans  $G$ . Donc  $G/\tilde{C}_G(N)$  est un quotient d'un élément dans  $\mathcal{C}$ , et est ainsi lui-même dans  $\mathcal{C}$ . Notons que  $\tilde{C}_G(N)$  est définissable, puisque l'indice de  $C_N(g)$  dans  $N$  est borné d'après le fait 3.

Sinon, pour tout  $\bar{g} \in G \setminus \{1\}$  il existe  $n \in N_{\bar{g}}$  telle que  $SU(n^{-1}n^N) \geq \omega^\alpha$ . Alors le sous-groupe normal  $H$  engendré par  $n^{-1}n^N$  contient un



sous-groupe normal type-définissable de  $G$  de rang au moins  $\omega^\alpha$  d'après le théorème des indécomposables; par minimalité de  $SU(N)$  et le fait que  $H \leq N$  ce rang doit être  $\omega^\alpha \cdot k$ , et  $H$  est uniformément définissable en  $n$  et d'indice borné dans  $N$  par le théorème 14. Comme  $H \leq [N, N_{\bar{g}}] \leq N$ , le groupe  $[N, N_{\bar{g}}]$  lui aussi est uniformément définissable et d'indice borné dans  $N$ . Mais si  $[N, N_{\bar{g}}] \neq 1$ , considérons un  $g \in [N, N_{\bar{g}}] \setminus \{1\}$ . Alors  $[N, N_{g\bar{g}}]$  est un sous-groupe propre de  $[N, N_{\bar{g}}]$ ; comme l'indice reste borné, cette chaîne doit terminer, une contradiction. Ce deuxième cas est donc impossible, et  $G/\tilde{C}_G(N) \in \mathcal{C}$ .

Si  $SU(\tilde{C}_G(N)) < SU(G)$  on termine par récurrence sur  $SU(G)$ . Sinon  $\tilde{C}_G(N)$  est d'indice fini dans  $G$ , et il y a  $g \in G$  et  $n \in N$  génériques et indépendants avec  $[g, n] = 1$ . Mais alors  $C_G(n)$  contient  $g$  et est d'indice fini dans  $G$ , ce qui implique que  $\tilde{C}_N(G)$  contient  $n$  et est d'indice fini dans  $N$ . On remplace alors  $G$  par  $\tilde{C}_G(N)$  et  $N$  par  $\tilde{C}_G(N) \cap \tilde{C}_N(G)$ , des sous-groupes définissables normaux d'indices finis.

Soient  $n \in N$  et  $g \in G$ ; comme  $g \in \tilde{C}_G(N)$  on a  $[g, n] \in \text{acl}(g)$ , et puisque  $n \in \tilde{C}_N(G)$  on a  $[g, n] \in \text{acl}(n)$ . D'où

$$[n, g] \in \text{acl}(n) \cap \text{acl}(g) = \text{acl}(\emptyset),$$

et l'ensemble  $X = \{[g, n] : g \in G, n \in N\}$  de commutateurs est fini par compacité. Comme  $[G : C_G(x)]$  est borné pour tout  $x \in X \subseteq \tilde{C}_N(G)$ ,

$$G_1 = \bigcap_{x \in X} C_G(x) = C_G(X) = C_G([G, N])$$

est d'indice fini dans  $G$ , avec  $N_1 := N \cap G_1$  d'indice fini dans  $N$  et contenu dans  $Z_2(G_1)$ , les deux étant normaux et définissables avec paramètres dans  $G$ .

Or,  $G/G_1 \in \mathcal{C}$  d'après le lemme 1 puisque c'est un groupe fini, et  $G_1/Z_2(G_1)$  est résiduellement  $\mathcal{C}$  d'après le corollaire 2. Enfin, comme  $N_1 \leq Z_2(G_1)$  et  $SU(N_1) = SU(N) \geq \omega^\alpha$ , on a  $SU(G_1/Z_2(G_1)) < SU(G_1)$ . Puisque l'image réciproque d'un sous-groupe nilpotent de  $G_1/Z_2(G_1)$  est toujours nilpotent, on termine par récurrence.  $\square$

**Remarque 16.** Notons que si  $N$  est normal dans  $G$ , alors par le fait 4 il existe un sous-groupe caractéristique  $N_0$  de  $G$  qui est une extension finie d'une intersection finie de conjugués de  $N$  par des automorphismes. Comme  $\mathcal{C}$  est une pseudo-variété on peut donc successivement prendre tous les  $G_i$  normaux pas seulement dans leur prédécesseur, mais dans  $G$ .

**Corollaire 17.** *Un groupe supersimple résiduellement fini est virtuellement nilpotent. Un groupe supersimple résiduellement résoluble est résoluble.*  $\square$

RÉFÉRENCES

- [1] A. Ould Houcine. *On superstable groups with residual properties*. Math. Log. Quart. 53(1) :19–26, 2007.
- [2] F. O. Wagner. *Simple Theories*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

FRANK O WAGNER, UNIVERSITÉ DE LYON ; CNRS ; UNIVERSITÉ LYON 1 ;  
INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208, 43 BLVD DU 11 NOVEMBRE 1918, 69622  
VILLEURBANNE-CEDEX, FRANCE

*E-mail address:* `wagner@math.univ-lyon1.fr`