Les démonstrations par l'absurde dans les Éléments d'Euclide : inventaire, formulation, usages

Bernard Vitrac

▶ **To cite this version:**

Bernard Vitrac. Les démonstrations par l'absurde dans les Éléments d'Euclide : inventaire, formulation, usages. Séminaire d'épistémologie et d'histoire des idées mathématiques, Mar 2012, Paris, France. hal-00496748v2

HAL Id: hal-00496748
https://hal.science/hal-00496748v2

Submitted on 5 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les démonstrations par l'absurde dans les Éléments d'Euclide : inventaire, formulation, usages[1]

Bernard Vitrac — CNRS, UMR 8210–AnHiMA, Paris

RESUME :

Les démonstrations indirectes (dites par réduction à l'absurde) ne sont pas rares dans les *Éléments* d'Euclide ; elles apparaissent dans une centaine de Propositions (sur un total de 465 dans l'édition critique de J.L. Heiberg). Leur examen éclaire différents aspects de la tradition euclidienne :

(*i*) épistémologique. Quel statut leur reconnaît l'auteur des *Éléments* ? Dans quels contextes mathématiques et pour quels usages les privilégie-t-il ?

(*ii*) philologique. Quels sont les moyens d'expression mis en oeuvre dans les démonstrations par l'absurde au niveau textuel ?

(*iii*) historique. Quel rôle a été le leur dans la mise au point de la démonstration? Quelle a été leur rôle dans l'histoire de la transmission du texte ?

PLAN

[1] Présenté dans le cadre du Séminaire d'épistémologie et d'histoire des idées mathématiques de l'IREM de l'Université Paris VII-Denis Diderot, organisé par Michel Serfati à l'Institut Henri Poincaré, le 28 Mars 2012. Une première version de ce texte a été exposée dans le cadre des Après-midi philomatiques organisées par S. Ofman sur le thème : « Sur la négation, de l'Antiquité à nos jours, II » à Paris, Institut Henri Poincaré, les 12-13 Mai 2009. Je remercie tous les participants de ces deux rencontres pour leurs remarques.

INTRODUCTION

« ἅμα δὲ δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἀνασκευάζειν ἐστὶ τοῦ κατασκευάζειν ῥᾷον »
(Mais, en même temps, il est évident qu'il est aussi plus facile de réfuter que d'établir).
Aristote, *Anal. Pr.,* I 26, 43 a13-14

Les raisonnements dits « par réduction à l'impossible » ou « à l'absurde » ont été l'objet d'investigations répétées de la part des historiens de la logique ou des mathématiques grecques anciennes. L'une des premières motivations de cet engouement réside dans l'idée que les preuves indirectes ou par contraposition constituent des indices sûrs d'une *perception explicite* de certains principes logiques, comme celui du tiers exclu ou le principe de contradiction. Dans l'histoire anthropologique et comparatiste des notions d'argumentation et de preuve, on a longtemps voulu distinguer entre d'une part des pratiques de l'argumentation codifiées, notamment dans des contextes juridiques, politiques, religieux ou savants — pratiques quasi universelles — et, d'autre part, l'utilisation d'une notion STRICTE de preuve[2]. Il n'est certainement pas facile de décrire précisément ce que l'on entend par démonstration au sens « strict », par opposition à des formes "molles" ou locales de justification d'un raisonnement, mais il a semblé assuré que l'utilisation des schémas de preuve indirecte impliquait la reconnaissance d'un tel sens. L'enquête historique a principalement porté sur les "origines" de la science grecque, les "débuts" des mathématiques grecques … selon une approche comparatiste non dénuée de parti pris européano-centriste.

Dans cette perspective, il était entendu que la mise au point d'une notion stricte de preuve (δεῖξις, ἀπόδειξις) était une invention grecque ancienne et que ses domaines d'exercice principaux avaient été la philosophie et les mathématiques. En outre, il est vrai que les Grecs anciens ont

[2] Voir [Lloyd, 1979], parties II & IV. A partir des années 1980, il a passablement infléchi son point de vue ; cf. [Lloyd, 1990], [Lloyd], 1996.

développé une réflexion spécifique sur la notion de preuve, les modalités de sa mise en œuvre, son efficacité … dans le cadre d'une analyse générale des méthodes d'argumentation et de persuasion. Dans ses *Analytiques,* Aristote pose clairement la distinction entre la validité d'un mode d'inférence (point de vue logique "formel") et la vérité d'un raisonnement qui doit non seulement être valide, mais aussi partir de prémisses nécessaires et vraies, mieux connues …, donc entre des raisonnements dits dialectiques et des raisonnements scientifiques. Quant aux raisons qui expliqueraient le développement de telles analyses, les Modernes (Gernet, Vernant, Vlastos, Lloyd) les ont cherchées du côté des expériences sociales et politiques originales qu'ont connues les cités grecques de l'époque archaïque : délibérations à l'Assemblée du "peuple" ou dans les tribunaux ; conférences publiques (ἐπιδείξεις) à l'Assemblée ou dans les festivals panhelléniques.

Quoi qu'il en soit, les documents et les témoignages sur les plus anciennes pratiques philosophiques et mathématiques grecques ont donc été scrutés avec attention de ce point de vue, notamment les fragments et témoignages concernant les philosophes éléates (Parménide, Zénon, Mélissos, V^e^ s. av.), les dialogues de Platon (428/7-348/7) et le corpus aristotélicien. Il semble bien que Parménide ait utilisé le raisonnement par contraposition ; il est quasi certain que Zénon a employé (inventé ?) la réduction à l'impossible. Pour les mathématiques, la situation est moins favorable : les *Éléments* d'Euclide (composés vers 300 av. ?) constituent le plus ancien traité mathématique au sens étroit du terme (géométrie, arithmétique) conservé. L'ouvrage nous est parvenu dépourvu de préface, lieu d'un écrit mathématique ancien où l'auteur, à l'époque hellénistique, pouvait se permettre des considérations non strictement mathématiques, par exemple sur ses choix méthodologiques, ses intentions, ses sources[3] … Il a été transmis, comme tous les écrits de l'Antiquité, pour l'essentiel par le biais de manuscrits médiévaux, ce qui suppose un processus de copie régulièrement renouvelé qui en a permis la conservation, mais qui a aussi multiplié les possibilités d'altération, accidentelle ou volontaire, du texte.

Par conséquent, pour la période pré euclidienne, nous disposons seulement de témoignages et de fragments. Les plus importants figurent soit dans les dialogues de Platon ou dans le corpus aristotélicien, soit chez leurs commentateurs. Ils sont alors tardifs, mais les plus précieux d'entre eux sont présentés comme des citations des *Histoires* d'Eudème de Rhodes (IV^e^ s. av.), philosophe appartenant à la première génération des disciples d'Aristote et, dit-on, chargé par lui de rédiger des ouvrages à caractère historique : *Histoire de la géométrie, Histoire de l'arithmétique, Histoire de l'astronomie*. Ces divers témoignages concernent les prétendus "pères fondateurs" des mathématiques grecques (Thalès, Pythagore, VI^e^ s. av.), Œnopide et Hippocrate de Chio (milieu du V^e^ s. av. ?), Théodore de Cyrène (2^e^ moitié du V^e^ s. av.), un certain Antiphon, Bryson, Léodamas de Thasos

[3] Sur les préfaces des ouvrages mathématiques grecs anciens, voir [Vitrac, 2008].

et son disciple Léon, Archytas de Tarente, Théétète d'Athènes (vers 415-370), Eudoxe de Cnide et ses disciples Ménechme et Dinostrate[4] … Quant aux fragments, ils transmettent un certain nombre de preuves pré euclidiennes (Hippocrate, Antiphon, Archytas, Ménechme). Deux points méritent d'être soulignés :

1) Bien que les écrits grecs à caractère historique soient friands du *topos* du « premier inventeur » (πρῶτος εὑρετής), aucun n'assigne l'invention de la démonstration à quelque philosophe ou mathématicien — c'est un questionnement moderne —.

2) Les quelques preuves pré euclidiennes transmises par les fragments (une petite dizaine) sont toutes *directes* (il s'agit pour l'essentiel de constructions), sauf celle d'Archytas sur l'impossibilité de dichotomiser un intervalle musical épimore [n + 1 : n] (voir Annexe I, témoignage 15)[5]. Elle n'était certainement pas la seule car, même s'il ne s'agit pas à proprement parler d'une citation, un célébrissime témoignage d'Aristote (vers 387-322) fait allusion à une preuve d'incommensurabilité fondée sur la distinction « pair / impair » qui lui sert précisément à illustrer sa définition de raisonnement « par (réduction à) l'impossible »[6] :

ὅτι δὲ καὶ οἱ εἰς τὸ ἀδύνατον, δῆλον ἔσται διὰ τούτων. πάντες γὰρ οἱ διὰ τοῦ ἀδυνάτου περαίνοντες τὸ μὲν ψεῦδος συλλογίζονται, τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίνῃ τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης, οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης.

τὸ μὲν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεται, τὸ δ' ἀσύμμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν. τοῦτο γὰρ ἦν τὸ διὰ τοῦ ἀδυνάτου συλλογίσασθαι, τὸ δεῖξαί τι ἀδύνατον διὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὑπόθεσιν.

Et que c'est aussi le cas pour les raisonnements par l'impossible, c'est évident à cause des choses qui suivent. En effet tous ceux qui concluent grâce aux raisonnements par l'impossible, d'une part établissent le faux par syllogisme, d'autre part démontrent la proposition initiale hypothétiquement quand une certaine impossibilité résulte du fait d'avoir posée la contradictoire, par exemple que la diagonale est incommensurable, par le fait que l'imparité deviendrait égale à la parité si elle est posée commensurable. D'une part le fait que l'imparité devienne égale à la parité est une conclusion par syllogisme ; d'autre part que la diagonale soit incommensurable est démontré hypothétiquement puisque quelque chose de faux résulte de la contradictoire. Car tel est le raisonnement par impossible : prouver certaine chose impossible à partir de l'hypothèse initiale.

Les raisonnements dits par réduction à l'impossible [εἰς τὸ ἀδύνατον (ἄγων), διὰ τοῦ ἀδυνάτου] sont donc explicitement thématisés par Aristote et distingués par lui d'autres modes argumentatifs : les raisonnements démonstratifs “simples” (δεικτικῶς, ostensifs), auxquels ils s'opposent, et les

[4] La petite liste donnée dans l'Annexe I privilégie les témoignages concernant les méthodes de preuve, en question ici, et les sources platoniciennes ou aristotéliciennes : elle ne prétend donc pas à l'exhaustivité.

[5] Voir Boèce (VI[e] s. ap.), *De musica,* III, 11 = DK 47 A 19 ; selon lui, la preuve d'Archytas était indirecte (et déficiente).

[6] *Analytiques premiers* I, 23, 41 a22-32.

raisonnements hypothétiques (ἐξ ὑποθέσεως) dont les réductions à l'impossible constituent une espèce. L'exemple mathématique : la preuve de « l'incommensurabilité de la diagonale » (sous-entendu « d'un carré relativement à son côté ») par un raisonnement sur la parité a été plus qu'abondamment commenté par les historiens des mathématiques anciennes.

On le rapproche habituellement de la preuve qu'on trouve dans la Proposition inauthentique X. 117*vulgo,* insérée plutôt tardivement à la fin du Livre X des *Éléments* d'Euclide, qui existe dans tous les principaux manuscrits médiévaux du traité[7]. La formulation allusive de la référence aristotélicienne et le fait que, dans le témoignage platonicien sur Théodore de Cyrène [Annexe I, témoignage 7], l'incommensurabilité de la diagonale au côté (le cas "√2") n'est même pas mentionnée, les mentions répétées par Aristote de cet exemple qui tend à devenir un *topos*, tous ces traits suggèrent que ce résultat était bien connu des auditeurs et lecteurs d'Aristote. A l'inverse, l'Athénien des *Lois* – porte-parole de Platon ? – avoue qu'il n'en a pris connaissance qu'à un âge avancé (819d).

En fait, on ignore l'histoire de cette découverte et de ses péripéties, qui en a été l'auteur ou les auteurs[8], dans quel contexte mathématique cela s'est produit (géométrie métrique, théorie des intervalles musicaux ?). Cela dit, pour bon nombre d'historiens, jusqu'à une date récente, cet épisode constituait un moment clé de l'histoire des mathématiques grecques, voire un temps fort dans une « crise des fondements »[9] et la preuve indirecte constituait la pleine reconnaissance de l'incommensurabilité, au-delà de la perception possible de certaines difficultés calculatoires[10]. La thèse n'a plus trop la cote aujourd'hui[11], mais certains spécialistes, admettant que l'allusion aristotélicienne renvoie à la preuve initiale du résultat, pensent qu'il s'agit néanmoins d'un des plus anciens résultats mathématiques grecs à avoir reçu une preuve indirecte.

D'autres assertions aristotéliciennes n'ont pas manqué d'attirer l'attention des commentateurs, quand, par exemple le Stagirite énonce l'interchangeabilité entre raisonnements direct et indirect dans sa théorie du syllogisme (*Anal. Pr.,* I, 29, 45 a26-27 + b8-11) :

---

[7] Texte et traduction *infra* dans l'Annexe V.a. Cf. [Euclide-Vitrac, 1998], en particulier pp. 412-417.

[8] L'attribution à Pythagore lui-même, proposée dans l'Antiquité tardive par les néo-Pythagoriciens, n'a aucune autorité historique ; voir [Burkert, 1972], pp. 454-465. Son « affaiblissement » en « Ancient pythagorisme », apparemment plus prudent, n'est plus une réponse puisqu'on désigne alors un groupe dont l'influence s'est possiblement exercée sur une période de près de deux siècles (milieu VIe s.- milieu IVe s.) et dont on ignore précisément quels furent les membres authentiquement "mathématiciens".

[9] Voir [Tannery, 1887], p. 98 et [Hasse & Scholz, 1928].

[10] Voir [Caveing, 1997, 1998].

[11] Voir [Fowler, 1994].

ὃ γὰρ δείκνυται δεικτικῶς, καὶ διὰ τοῦ ἀδυνάτου ἔστι συλλογίσασθαι διὰ τῶν αὐτῶν ὅρων, καὶ ὃ διὰ τοῦ ἀδυνάτου, καὶ δεικτικῶς ...
διαφέρει γὰρ ὁ δεικτικὸς τοῦ εἰς τὸ ἀδύνατον, ὅτι ἐν μὲν τῷ δεικτικῷ κατ' ἀλήθειαν ἀμφότεραι τίθενται αἱ προτάσεις, ἐν δὲ τῷ εἰς τὸ ἀδύνατον ψευδῶς ἡ μία.

En effet, ce qui se démontre ostensivement peut aussi être établi par un raisonnement par l'impossible à partir des mêmes termes et ce qui l'est par l'impossible, l'est aussi ostensivement …
La différence entre [raisonnements] ostensif et par l'impossible, c'est que d'une part dans l'ostensif chacune des deux prémisses est posée selon la vérité, d'autre part dans celui par l'impossible, une (et une seule) l'est en tant que fausse.

Comme par ailleurs (*Anal. Post.,* I, 26), Aristote affirme que la démonstration directe est supérieure à l'indirecte car, bien qu'équivalente, le point de départ de l'une est antérieur à celui de l'autre, on en arrive à se demander pourquoi devrait-on, dans ces conditions, faire usage de la démonstration par impossible. Et, bien entendu, au-delà de la syllogistique aristotélicienne, on peut se poser la même question pour les mathématiques : existe-t-il des cas où le raisonnement indirect est inévitable ? Quelles sont les raisons d'un tel choix ? S'agit-il d'une préférence personnelle de l'auteur ? une caractéristique stylistique d'une école ? Est-ce une contrainte, liée à la nature du problème mathématique à résoudre ou au domaine de recherches dans lequel il s'inscrit ? Ce sont de telles questions que Jean-Louis Gardies s'est posé ([Gardies, 1991], p. 5) et que je propose d'examiner en me restreignant au cas d'Euclide et de ses *Éléments.*

AUTRES REMARQUES PRELIMINAIRES

J'ai déjà indiqué que le traité est sans préface ; ajoutons que nous n'avons pas non plus d'autres écrits d'Euclide qui pourraient s'y substituer, nous ne savons rien du contexte savant dans lequel il a rédigé cet ouvrage, quelles étaient ses intentions, le lectorat visé … Ce dont nous disposons, c'est :

- un ensemble de manuscrits, échelonnés pour les plus importants d'entre eux entre le IXe et le XIIe siècles, des fragments du texte sur des papyri (Ier s. av.- IIIe s.)[12] et sur un palimpseste syriaque recouvrant au IXe siècle des extraits des Livres X et XIII (ff. 49*r*-53*v* : X. 16-17, 32-33, 80-81, 112-113 ; XIII. 14, avec le n°19) copiés à la charnière des VIIe-VIIIe siècles (donc en écritures majuscules[13]), des citations (les plus anciennes remontent au

[12] Le livre ancien a connu un premier grand changement dans son histoire au cours premiers siècles de l'ère chrétienne avec l'adoption du livre « à pages » (*codex*) en lieu et place des rouleaux de papyrus (*volumen*) de taille relativement restreinte, avec peu d'espace para-textuel (pour des corrections ou annotations) et de consultation moins aisée.

[13] Les Byzantins ont décidé d'adopter l'écriture minuscule (employée par ailleurs) pour copier les textes anciens en lieu et place de l'écriture majuscule utilisée jusque là, très coûteuse en support d'écriture. Cette opération (dite translittération) a certainement été initiée à la fin du VIIIe siècle et elle a duré un certain temps. C'est le second grand changement dans l'histoire du livre ancien. Les textes qui n'ont pas été d'abord recopiés sous forme de codex, puis translittérés ont peu de chance d'avoir été conservés et de fait, la très grande

moins au Ier s. av. ; le fait qu'Archimède citerait les *Éléments* est l'objet de controverses), des commentaires (le premier que nous connaissons est celui de Héron d'Alexandrie, Ier-IIe s. ?), des traductions antiques et médiévales, partielles ou complètes, en latin, arabe, syriaque, hébreu, persan, arménien …

- On peut aussi se contenter d'utiliser l'édition critique du texte grec procurée par J.L. Heiberg entre 1883 et 1888, qui reflète une certaine portion de cette ample documentation pour avoir une base textuelle simple et, malgré toutes les réserves que l'on peut faire, plutôt fiable[14].

C'est ce que je ferai ici, sauf mention explicite du contraire. Dans cette édition, le traité euclidien comporte 465 Propositions réparties en 13 Livres. Cette répartition est fortement déterminée par la nature des objets mathématiques fondamentaux utilisés dans lesdits Livres : les figures planes et leurs éléments (Livres I-IV, VI) ; la théorie des proportions entre grandeurs (Livres V, X. 1-9, 11-13, 15-16) ; les nombres (entiers naturels, Livres VII-IX) ; les lignes irrationnelles (Livre X) ; les figures solides et leurs éléments (Livres XI- XIII). Il est donc naturel de tenir compte de ce critère de contenu dans la discussion du recours au raisonnement indirect. Un certain nombre de compléments (remarques, Lemmes, preuves alternatives, annotations marginales) existent dans tous les manuscrits et sont également édités par Heiberg. Considérés comme inauthentiques, ils sont regroupés dans des appendices. Leur examen peut éventuellement servir à préciser, par contraste, des critères d'authenticité, quoique les ré-éditeurs et annotateurs des *Éléments* aient souvent cherché à être plus “euclidien” qu'Euclide.

Puisque nous disposons seulement du texte, les outils que nous utiliserons seront une analyse lexicale et syntaxique, ainsi que des considérations statistiques. La régularité de la langue euclidienne[15] et la taille du traité font que ces entreprises ne sont pas vaines. Un lexique spécifique, très souvent univoque, et des formules “figées” montrent que le recours aux modes indirects de démonstration est parfaitement codifié et maîtrisé par Euclide ; la taille de l'échantillon, la répartition de ces preuves dans le traité et leurs différents contextes d'utilisation montrent que l'emploi des démonstrations indirectes n'est pas aléatoire.

---

majorité des textes profanes conservés, y compris mathématiques, le sont dans des manuscrits en minuscules, donc postérieurs à la seconde opération. D'où l'importance de ce palimpseste et des fragments de papyri. Malheureusement, cela concerne une toute petite partie du traité d'Euclide. Voir l'article cité à la note suivante pour davantage de détails.

[14] Voir [Vitrac, 2012, sous presse] ou la version initiale française mise en ligne à l'adresse : **http://halshs.archives-ouvertes.fr/**.

[15] Sur cette caractéristique de la littérature mathématique grecque ancienne, voir [Aujac, 1984]. Ce caractère formulaire a été l'objet de travaux récents : voir [Netz, 1999a] ; [Euclide-Vitrac, 2001], en particulier pp. 32-71 ; [Acerbi, sous presse (2012)].

Pour décrire cet échantillon, j'introduis encore deux distinctions :

— je parle d'*arguments* ou de *propositions* par réduction à l'impossible (où à l'absurde) selon qu'il ou elle concerne seulement une portion ou au contraire la totalité de ce qui est exigé par l'énoncé de la proposition. Dans le premier cas de figure (*argument*), il peut servir soit à établir une portion explicite de ce qu'exige l'énoncé (argument *partiel*), soit être simplement utilisé pour justifier (souvent après coup) une inférence locale, non exprimée dans l'énoncé (argument *ponctuel*). On peut montrer, avec d'autres arguments (codicologiques, lexicaux, stylistiques …) que la simple caractérisation en termes de “portée” discutée ici, que la majorité de ces arguments *ponctuels* sont inauthentiques.

— Je distingue aussi deux types de raisonnements indirects : les réductions à l'impossible et des preuves que je qualifie de « purement logiques », dans lesquelles il n'y a pas, à proprement parler, d'arguments géométriques ou arithmétiques ; le cas le plus évident et le plus fréquent est constitué de simples contrapositions : on a préalablement établi que A entraîne B ; donc si non-B, alors non-A. Cela n'ajoute rien au niveau du contenu mathématique, mais permet parfois d'alléger la façon de se référer à ce résultat dans une proposition ultérieure.

Dans le texte édité par Heiberg, j'ai repéré 136 arguments indirects (119 réductions à l'impossible et 17 preuves « purement logiques »). Elles concernent 110 Propositions (respectivement 96 et 16 Propositions) sur un total de 465[16]. Avant d'entrer dans l'analyse détaillée de cet échantillon, donnons un exemple de chaque type d'argument indirect. Lisons pour commencer un exemple de proposition indirecte, en fait la première de cette espèce qui apparaît dans les *Éléments* : I. 6.

---

[16] Voir *infra,* les tableaux de l'Annexe II qui distingue donc successivement :

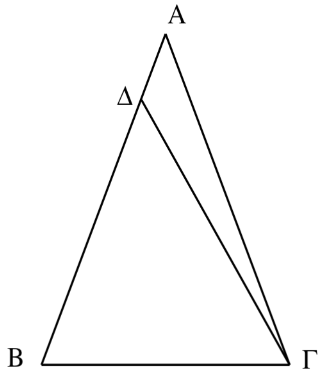
a. Les réductions à l'impossible ou à l'absurde avec indication de contenu, de la forme logique et de la portée (à l'intérieur d'une Proposition) dudit argument : global, partiel, ponctuel.

b. Les preuves dites « purement logiques », par exemple les démonstrations par contraposition.

c. Les preuves indirectes dans le matériel ajouté aux *Éléments,* donc inauthentiques.

Pour sa part, le tableau de l'Annexe VI détaille la façon dont les réductions aboutissent à l'impossible (ou à l'absurde), autrement dit la façon d'obtenir une contradiction ou une impossibilité.

UN PREMIER EXEMPLE : I 6



Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίαις ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.	Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés qui sous-tendent les angles égaux seront aussi égaux entre eux.	Énoncé (πρότασις)
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ·	Soit le triangle ΑΒΓ ayant l'angle sous ΑΒΓ égal à l'angle sous ΑΓΒ.	Ecthèse (ἔκθεσις)
λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση.	Je dis que le côté ΑΒ est aussi égal au côté ΑΓ.	Diorisme (διορισμός)
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ,	***Si, en effet,*** la droite ΑΒ n'est pas égale à la droite ΑΓ, l'une d'entre elles est plus grande que l'autre ; soit ΑΒ la plus grande	Initialisation du raisonn. indirect
καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.	et que soit retranchée de la plus grande, ΑΒ, la droite ΔΒ, égale à la plus petite ΑΓ, et que soit jointe DC.	Construction (κατασκευή)
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι·	Puis donc que DB est égale à ΑΓ et que ΒΓ est commun, les deux ΔΒ, ΒΓ sont alors égales aux deux ΑΓ, ΓΒ, chacune à chacune, et l'angle sous ΔΒΓ est égal à l'angle sous ΑΓΒ. La base ΔΓ est donc égale à la base ΑΒ et le triangle ΔΒΓ sera égal au triangle ΑΓΒ, le plus petit au plus grand.	Démonstration (ἀπόδειξις) [Anaphore, I. 4, NC 8 Ou "constat"]
ὅπερ ἄτοπον·	***Ce qui est absurde.***	Qualification
οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ·	***Ce n'est donc pas le cas*** que ΑΒ soit inégale à ΑΓ ;	Conclusion du raisonn. ind.
ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται·	elle est donc égale. Donc si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés qui sous- tendent les angles égaux seront aussi égaux entre eux.	Conclusion (συμπέρασμα) d'abord particul. puis générale
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Ce qu'il fallait démontrer.	Formule de clôture

Dans la colonne de droite j'ai fait apparaître la division en 6 parties constitutives de la Proposition euclidienne "simple", explicitée par le commentateur néo-platonicien Proclus[17] :

[17] Proclus, in *Euclidem* I, 1, 203.1-5 Friedlein.

« Mais on veut que tout problème et tout théorème, complété par ses parties constitutives, possède en propre toutes celles-ci : l'énoncé, l'exposition, la détermination, la construction, la démonstration et la conclusion » (πᾶν δὲ πρόβλημα καὶ πᾶν θεώρημα τὸ ἐκ τελείων τῶν ἑαυτοῦ μερῶν συμπεπληρωμένον βούλεται πάντα ταῦτα ἔχειν ἐν ἑαυτῷ· πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμόν, κατασκευήν, ἀπόδειξιν, συμπέρασμα).

J'y ai ajouté d'autres désignations que la tradition grecque ne donne pas (d'où l'absence de terme grec équivalent!), mais utiles pour la discussion qui suit. Ce schéma interne correspond assez bien — en tant que schéma idéal — à la pratique euclidienne, du moins dans une Proposition simple et, d'ailleurs Proclus l'applique au problème de construction très élémentaire I. 1 (celle du triangle équilatéral sur une droite donnée). Quand l'exposé se complexifie, certaines Propositions comportent plusieurs parties ce qui peut provoquer, soit parce que l'on traite différents de figures, soit parce qu'on démontre plusieurs assertions, voire parce qu'on accomplit différents types de tâches[18], l'alternance de sous-séquences : « diorisme (intermédiaire), construction, preuve et conclusion (partielles) ».

Reste que ces parties de la proposition euclidienne ne constituent pas une liste “inerte”, scolaire et quelque peu artificielle de noms : elles sont caractérisées par certains traits grammaticaux, notamment l'emploi systématique de certains temps et modes verbaux, l'utilisation régulière de certaines particules et conjonctions. Elles correspondent à la fois à des « éléments » du discours et de la pratique mathématique et à des critères stylistiques contraignants pour le rédacteur des *Éléments,* mais facilitant la tâche du lecteur à une époque où, rappelons-le, la ponctuation était quasi inexistante et les mots n'étaient ni accentués, ni nécessairement séparés les uns des autres.

Ce “code” structurant n'est pas propre à Euclide (on trouve des critères du même type chez tous les mathématiciens grecs démonstratifs[19]), mais sa sophistication et le respect des règles est probablement maximal dans cet ouvrage fondationnel. Ainsi, par exemple, la portion dite "démonstration" est très souvent “initialisée” chez Euclide par la conjonction ‘ἐπεί’ (puisque)[20], suivie d'une reformulation spécifique d'une (partie des) hypothèse(s)

---

[18] Un exemple archétypique est celui des Propositions XIII. 13-17 dans lesquelles on commence par construire une figure solide régulière (et on vérifie que la figure construite possède les qualités requises), on la circonscrit par une sphère ; on établit une relation entre le diamètre de ladite sphère et l'arête du polyèdre.

[19] Et c'est parce que certains ouvrages d'astronomie, d'harmonique, d'optique ou de mécanique utilisent également ce code stylistique que ces disciplines sont considérées par les Anciens comme des sciences mathématiques.

[20] On la trouve pour initialiser la portion "démonstration" ou pour démarrer un nouvel argument à l'intérieur d'une preuve, soit seule, soit dans des petites combinaisons : καὶ ἐπεί (et puisque), ἐπεί οὖν (puis donc que), καὶ ἐπεί (et puisque), ἐπεί γὰρ (en effet, puisque), πάλιν ἐπεί (ensuite, puisque) ; dans sa première fonction (initialisation de la portion "démonstration"), on la trouve dans 390 Propositions sur 465, sachant qu'elle est absente de ce que nous avons appelé les preuves « purement logiques », quelques propositions fortement abrégées du Livre X, soit environ 85 % des "vraies" démonstrations. L'exception significative est constituée par les preuves dites par exhaustion (XII. 2, 5, 7, 10, 11, 12, 17, 18) dont la structure textuelle est particulièrement sophistiquée.

qui permet de tirer une première conclusion à partir d'un résultat préalablement démontré. Celle-ci est accompagnée de la particule 'ἄρα' (donc). Dans notre exemple, cette seule inférence suffit à produire une contradiction. Dans des preuves plus complexes, le texte introduit un second élément, une "co-assomption" qui, coordonnée avec la première conclusion en produit une deuxième. A la fin d'une première séquence argumentative "linéaire" ainsi produite, il arrive que l'on prenne un nouveau point de départ, notamment en réintroduisant la conjonction "initialisante" 'ἐπεί' …

Ces signes distinctifs, caractérisant le passage à une nouvelle partie constitutive, sont soulignés dans le texte et dans la traduction. En italiques grasses, ont été mises en évidence des séquences caractéristiques de la façon dont Euclide conduit les raisonnements par l'impossible ou par l'absurde, en particulier :

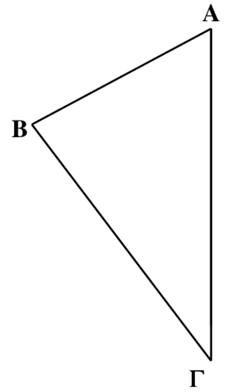
- Une formule d'"initialisation" : ici « Εἰ γὰρ » (Si, en effet). Dans la plupart des cas, il s'agit de poser comme hypothèse la négation de l'assertion du diorisme, autrement dit ce qu'il est requis de démontrer.
- Une formule de qualification : ici « ὅπερ ἄτοπον » (ce qui est absurde).
- Quand le schéma est complet — c'est le cas ici —, on trouve, à la suite de la formule de qualification, une conclusion du raisonnement indirect, qui n'est autre que la négation de l'hypothèse du raisonnement indirect, commençant toujours par un groupe "logique" « οὐκ ἄρα », formé de la négation (οὐ) et de la particule inférentielle "ἄρα" (donc), ce que j'ai rendu par la très lourde formule « Ce n'est donc pas le cas que » pour rendre l'emphase logique qu'elle recèle (quelque chose comme : « donc non-P », la négation portant sur la proposition, pas sur le prédicat "inégal").

La portion indirecte étant achevée, la proposition poursuit avec la conclusion particulière, c'est-à-dire la répétition de l'assertion à démontrer formulée dans le diorisme à laquelle est ajouté « donc » (ἄρα).

La langue des *Éléments* est formulaire, mais ni formelle, ni symbolique : il y a donc des variantes de formulation, nous allons y revenir.

Auparavant, donnons un exemple de preuve « purement logique ». On voit immédiatement que les propositions établies par manipulations logiques ont plusieurs éléments communs avec les réductions à l'impossible ou à l'absurde, notamment la formule d'initialisation et la ou les conclusions du raisonnement indirect, introduite(s) par « οὐκ ἄρα » (Ce n'est donc pas le cas que) :

UN EXEMPLE DE PREUVE PAR CONTRAPOSITION : I 19



Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.	Dans tout triangle, le plus grand angle est sous-tendu par le plus grand côté.	Énoncé
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ·	Soit le triangle ΑΒΓ ayant l'angle sous ΑΒΓ plus grand que celui sous ΒΓΑ.	Ecthèse
λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.	Je dis que le côté ΑΓ est aussi plus grand que le côté ΑΒ.	Diorisme
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων·	***Sinon, en effet,*** ou bien ΑΓ est égal à ΑΒ ou bien il est plus petit.	Initialisation
ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· ***οὐκ ἄρα*** ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ.	Or, d'une part ΑΓ n'est pas égal à ΑΒ; car l'angle sous ΑΒΓ serait alors égal à l'angle sous ΑΓΒ ; or il ne l'est pas[21]. ***Ce n'est donc pas le cas que*** ΑΓ soit égal à ΑΒ.	Démonstrat. Cas 1 (I. 5[22])
οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· ***οὐκ ἄρα*** ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.	Et ΑΓ n'est pas non plus plus petit que ΑΒ ; car l'angle sous ΑΒΓ serait aussi plus petit que l'angle sous ΑΓΒ ; or il ne l'est pas[23]. ***Ce n'est donc pas le cas que*** ΑΓ soit plus petit que ΑΒ.	Cas 2 (I. 18[24])
ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.	Et il a été démontré qu'il n'est pas égal non plus. Donc ΑΓ est plus grand que ΑΒ.	Rappel cas 1 Concl. part.
Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει·	Donc, dans tout triangle, le plus grand angle est sous-tendu par le plus grand côté.	Conclusion générale
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Ce qu'il fallait démontrer.	Formule de clôture

En revanche, malgré quelques altérations au cours de la transmission ultérieure du texte, il est à peu près certain qu'Euclide n'utilisait pas de formule de qualification (impossible, absurde) pour ces preuves logiques. Cela dit, comme on le voit dans les notes 21 et 23, la version du commentateur persan an-Nayrîzî (vers 900) transforme cette contraposition en réduction à l'absurde ; il y a d'autres exemples du même genre, y compris dans certains manuscrits grecs, comme si la différence entre les deux démarches n'était plus perçue. Déjà Proclus, dans son commentaire à cette Proposition,

[21] An-Nayrîzî précise « car nous l'avons supposé plus grand, ce qui serait absurde ».
[22] I. 5[a] : « Les angles à la base des triangles isocèles sont égaux entre eux … »
[23] Même que remarque que précédemment.
[24] I. 18 : « Dans tout triangle, le côté le plus grand sous-tend l'angle le plus grand ».

qualifiait cette démonstration de « réduction à l'impossible par distinction [de cas de figure] » (ἐκ διαιρέσεως εἰς τὸ ἀδύνατον, p. 321.11 Friedlein), ce qui revient à considérer ce type de preuve comme un cas particulier des véritables réductions à l'impossible. Dans l'utilisation non plus mathématique, mais logique des *Éléments* — pour apprendre à raisonner —, il semble que contraposer était un exercice intéressant : plusieurs inauthentiques (et inutiles) contrapositions ont été ajoutées au texte (VIII. 16-17 pour VIII. 14-15, X. 7-8 pour X. 5-6, X. 9^{cd} pour X. 9^{ba} …).

LES VARIANTES

Après la lecture de quelques exemples, nous disposons donc de critères pour repérer les raisonnements indirects dans les *Éléments,* en faire l'inventaire et noter les variations d'expression pour les différentes formules caractéristiques. Il faudra voir ensuite s'il y a ou non une explication à ces variations. Restera enfin à comprendre les raisons qui ont fait qu'Euclide a privilégié le raisonnement indirect dans certaines configurations s'il est vrai, comme l'affirme Gardies (et Aristote !), qu'il aurait aussi bien pu s'en passer.

Certaines variantes sont simplement stylistiques, sans conséquence (visible) du point de vue logique ou mathématique ; d'autres, plus importantes, tiennent à la nature même de l'énoncé de la Proposition. Elles sont principalement de trois types et elles concernent :

1. L'expression de la formule de qualification ;
2. L'expression de la formule d'initialisation ;
3. La présence ou non de la conclusion du raisonnement indirect, introduite par « οὐκ ἄρα ».

1. Les différentes formules de qualification se regroupent essentiellement autour de deux types :
   - « ce qui est (ou « ce qui est démontré »)[25] *impossible* (ἀδύνατον) »,
   - « ce qui est (ou « ce qui est démontré »)[26] *absurde* » (ἄτοπον).

La première est plus fréquente que la seconde, mais je n'ai pu trouver aucun critère justifiant l'usage raisonné de l'un ou l'autre.

[25] « ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη » (III. 8, ***PTh*** XII. 11, 12, 18), « ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται » (***b*** XII. 5, "11", "12") — il s'agit de renvois internes à la Proposition — ou « ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον » (X. 84), renvoi externe (à X. 26).
[26] « ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη » [IV. 4, 8, 13 (renvois externes à III. 16^{b}); XI. 2 (renvoi externe à XI. 1); ***PTh*** XII. 5 (renvoi interne)].

Dans quelques cas, « absurde » a une valeur intensive dans le contexte particulier d'une Proposition qui a déjà utilisé un argument « par l'impossible » : on peut dire que quelque chose est « encore plus absurde qu'autre chose », alors qu'il paraît difficile de distinguer des degrés d'impossibilité. C'est ce que suggère le Lemme XIII. 2/3 :

> « Alors semblablement nous démontrerons que la [droite] double de CA n'est pas non plus plus petite que CB ; car l'absurdité serait {plus grande} de beaucoup (πολλῷ γὰρ [μεῖζον] τὸ ἄτοπον) ».

Mais ce Lemme appartient aux ajouts inauthentiques dans lesquels on n'hésite pas non plus à dire (ajout à XI. 23) :

> « Semblablement alors, elle n'est pas plus petite. Car l'impossibilité serait plus grande de beaucoup (πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον) » !

Reste que les réductions à l'absurde sont, en proportion, plus nombreuses dans le matériel additionnel inauthentique. Cela n'en explique cependant pas toutes les occurrences. Les variations observées dans le Livre XII entre les différents manuscrits[27], suggèrent qu'on a dû, dans les manuscrits en onciales précédant la translittération byzantine (IX^{e} s.), utiliser des abréviations très proches, peut-être quelque chose comme « A$^{\text{TON}}$ » (pour ἀδύνατον) et « A$^{\text{ΠΟΝ}}$ » (pour ἄτοπον), faciles à confondre lorsqu'on a voulu les résoudre après l'adoption de la minuscule. Je n'ai pour l'instant pas trouvé de meilleure "explication".

2. J'ai relevé cinq espèces de la formule d'initialisation

(*i*) « Si, en effet (εἰ γὰρ), on n'a pas P … »

(*ii*) « Sinon, en effet (εἰ γὰρ μὴ) … », simple abréviation (variante stylistique) de la précédente ;

(*iii*) « Si, en effet, il est possible (εἰ γὰρ δυνατόν) que l'on ait non-P … »

(*iv*) « Sinon, en effet, si c'est possible (Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν) … », simple abréviation de la précédente ;

(*v*) « Sinon, en effet, si c'est possible, que Q » (avec Q ⊂ non-P)

---

[27] Pour l'ensemble du texte des *Éléments,* on peut distinguer deux familles de manuscrits dont l'une est réduite à un singleton : le *Vatican. Gr.* 190 (sigle ***P*** en l'honneur de F. Peyrard)**,** l'autre constituée de manuscrits qui procèdent explicitement de la réédition de Théon d'Alexandrie (2^{e} moitié du IV^{E} s.) et que Heiberg appelle "théonins" (sigle ***Th***). Il se trouve que pour le groupe de Propositions XI. 36-XII. 17, on dispose d'une troisième famille textuelle, elle aussi transmise dans un seul manuscrit grec, le *Boniens. Bibl. comm.* 18-19 (sigle ***b***), apparenté pour cette portion seulement aux traductions arabes (dans le reste du traité, c'est un manuscrit théonin). La version de ***b*** dans XI. 36-XII. 17 est moins inauthentique que celles des autres manuscrits ***P***, ***Th***. On peut trouver quelques informations sur l'histoire du texte des *Éléments* dans [Vitrac, 2012, sous presse].

De fait, la distinction significative est l'insertion de la clause "supplémentaire" « s'il est possible », commandée par le caractère affirmatif ou négatif de l'énoncé, ou plutôt par celui du diorisme « Je dis que P » ou « Je dis que non-P » qui précède immédiatement la mise en œuvre de la preuve indirecte. La présence de ladite clause signifie que l'assertion est négative, ou du moins qu'elle est perçue ou reformulée comme telle. Ainsi les énoncés affirmatifs limitatifs, construits avec l'adverbe μόνον (seulement), notamment les résultats d'unicité, sont pour la plupart assimilés à des énoncés négatifs au niveau de leurs diorismes (= réénonciation sur les données du diagramme) comme le voit sur l'exemple de X 42 (énoncé assertorique affirmatif ; diorisme négatif) :

> « La binomiale est divisée par un *unique* point en ses parties désignées (Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα).
> Soit la binomiale AB divisée en ses parties désignées en C ; les [droites] AC, CB sont donc exprimables, commensurables en puissance seulement.
> Je dis que AB n'est divisée en deux [droites] exprimables, commensurables en puissance seulement, *selon aucun autre point.* Si c'est possible, en effet …
> (λέγω, ὅτι ἡ AB κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους. Εἰ γὰρ δυνατόν ...) ».

3. En fait, ce même critère – le caractère affirmatif ou négatif de l'énoncé – justifie aussi la différence de traitement des énoncés (perçus comme négatifs) en ce qui concerne le schéma global dont on doit distinguer deux formes principales.

En effet, après un diorisme de la forme : « je dis que non-P », la formule d'initialisation du raisonnement indirect devrait dire : « Si, en effet, il est possible que non-(non-P) … ». Or, dans les *Éléments,* on n'a pas cette formulation doublement négative, mais simplement « Si, en effet, il est possible que P … ». Par conséquent, à la fin de ce même raisonnement indirect, on ne trouve pas : « Ce n'est pas le cas que non-(non-P) ; donc non-P », mais simplement « donc non-P » après la clause de qualification. Autrement dit la négation de l'hypothèse du raisonnement indirect en « οὐκ ἄρα » est absente *si l'énoncé est négatif*. Cela dit, en lisant la vingtaine d'arguments concernés, on voit que c'est la conclusion de la Proposition (négative) qui est introduite avec l'expression « οὐκ ἄρα » !

Dans ce cas, la dite conclusion n'est pas la simple redite de l'énoncé dans laquelle on a ajouté "donc" : la négation a aussi changé de place et de fonction : elle porte sur l'assertion et non sur le prédicat[28]. Si l'on veut être exhaustif, il faut aussi tenir compte du caractère conditionnel ou assertorique de l'énoncé, car l'assertorique négatif ne s'instancie pas. Dans ce cas, par rapport au schéma complet, l'ecthèse, le diorisme et la conclusion particulière

[28] Je n'ai relevé que 3 exceptions à cette règle : X. 26, 111 et XI. 1 ; le texte de cette dernière est au demeurant très probablement altéré (voir [Vitrac, 2012, sous presse]).

manquent. En outre, pour compléter la remarque que nous venons faire, dans l'assertorique négative, c'est la conclusion générale de la Proposition[29] qui est introduite par « οὐκ ἄρα », dans la conditionnelle, c'est la conclusion particulière.

Marchant dans les pas de Proclus, nous pouvons donc, comme sur les petits tableaux ci-dessous, distinguer trois variantes du schéma des parties constitutives de la Proposition démontrée par l'impossible (ou par l'absurde) :

• un schéma complet avec 11 parties : Énoncé ; ecthèse ; diorisme ; initialisation (4) ; construction ; démonstration ; qualification (7) ; conclusion du raisonnement indirect (8) ; conclusion particulière de la Proposition (9) ; conclusion générale (10) : formule de clôture (11) ;

LE SCHEMA COMPLET ET SES VARIANTES

I) *Énoncé assertorique ou conditionnel affirmatif*[30]

(1)	(2)	(3)	(4)-(6)	(7)	(8)[31]	(9)[32]	(10)	(11)
Énoncé général	Ecthèse	DIORISME : Je dis que P	Si, en effet (εἰ γὰρ), on n'a pas P → Contradiction Sinon, en effet (εἰ γὰρ μὴ) → Contradiction	Ce qui est impossible	Ce n'est donc pas le cas que non-P (Οὐκ ἄρα …)	Donc P	Concl. Génér.	CQFD
			Si, en effet, il est possible (εἰ γὰρ δυνατόν) que l'on ait non-P → Contrad. Sinon, en effet, si c'est possible (Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν) → Contrad. Sinon, en effet, si c'est possible, que Q. → Contradiction (Avec Q ⊂ non-P)	Ce qui est absurde				

• Si l'énoncé est négatif, on ne trouve pas la partie (8) et on trouve deux variantes, respectivement en 10 et 7 parties constitutives :

[29] Une seule exception IX. 36, facile à comprendre car l'argument indirect est ce que j'ai appelé un argument partiel.

[30] Conditionnel (44) : I. 6, 14, 26 (2), 27; III. 2, 7^{c}, 11, {12}, 18, 19; V. 18; VI. 7(2), 26; VII. 1, 2^{th}, 3^{th} (2), 23, 24, 28 (2), 33^{th}, 34^{th} (2), 35, 36^{th} (2); VIII. 1, 4^{th}; IX. 12, 30, 31; X. 2, 3^{th}, 4^{th}, 13, 16 (2); XI. 3, 5, 7, 19.
Assertorique (34) : I. 39, {40} ; III. 16^{a}, 24, 27; VII. 20, 21, 22, 29 (∀); X. 42, 43, 44, 45, 46, 47, 79, 80, 81, 82, 83, 84 ; XI. 14; XII. 2 (2), 5 (2), 10 (2), 11 (2), 12 (2), 18 (2).

[31] (8) manque dans IX. 33 (conditionnelle affirmative limitative) et XI. 2 (conditionnelle affirmative d'unicité), qui sont donc traitées comme des négatives. X. 42-47 + 79-84 sont des assertions positives d'unicité. Leurs diorismes est donc négatif. La fin de X. 44 est corrompue.

[32] Les Propositions I. 14, 39, {40} ; III. 18, 19, XI. 3, 19 (ainsi que le problème III. 1) sont établies par un raisonnement (indirect) par élimination. Par conséquent, entre (8) et (9) s'intercale une formule de démonstration potentielle de la forme : « Semblablement nous démontrerons que non-P pour tout(e) autre …, excepté(e) … » ; (9) est omise dans III. 19 et XI. 19 : la démonstration potentielle s'intercale donc entre (8) et (10).

II) *Énoncé conditionnel négatif (i.e. négation dans le conséquent)* : III. 4, 5, 6 ; IX. 13, 14, 16, 17

(1)	(2)	(3)	(4) -(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Énoncé général	Ecthèse	DIORISME :. Je dis que non-P	Si, en effet, il est possible (εἰ γὰρ δυνατόν), que P, alors → Contradiction Sinon, en effet, si c'est possible (Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν) → Contradict.	Ce qui est impossible Ce qui est absurde	— —	Donc non-P (Οὐκ ἄρα ...)	Concl. Génér. [33]	CQFD

III) *Énoncé assertorique négatif* : I. 7 ; III. 10, 13 (2), 16b, 23 ; IX. 36 ; X. 26, 111 ; XI. 1, 13

(1)	(2)	(3)	(4) -(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Énoncé général	—	—	Si, en effet, il est possible (εἰ γὰρ δυνατόν), que P, alors → Contradiction Sinon, en effet, si c'est possible (Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν) → Contradict.	Ce qui est impossible Ce qui est absurde	— —	— —	Concl. Génér. (Οὐκ ἄρα ...)	CQFD

La systématicité des formulations euclidiennes est considérable et la taille de l'échantillon est significative : une fois écartés les arguments indirects ponctuels (la majorité sont certainement inauthentiques – inauthenticité jugée sur d'autres critères que ce qui est discutée ici), il reste 102 arguments pour 85 Propositions. Sur ces 102 arguments, 96 sont conformes à l'une des trois formes que doit revêtir le schéma interne selon nos tableaux.

Notre description du schéma des parties constitutives de la Proposition démontrée par l'impossible complète en quelque sorte celle de Proclus et nous ne savons pas comment Proclus aurait intégré ce que nous avons appelé « initialisation », « qualification », « conclusion du raisonnement indirect » dans son schéma. On peut considérer que les deux dernières appartiennent de fait à la partie « démonstration » (ἀπόδειξις). Mais l'intégration est plus délicate pour la formule d'« initialisation » qui s'insère généralement entre le diorisme et la construction.

La difficulté a déjà été perçue par les exégètes arabes des *Éléments.* L'observation qu'Euclide a fréquemment recours aux démonstrations indirectes les a conduit à modifier la présentation du schéma interne. Sept versions au moins nous en sont parvenues[34]. Certaines sont anonymes (dans des manuscrits de la traduction arabe dite Ishâq-Thâbit ou dans le codex d'an-Nayrîzî qui en transmet 3 versions !). L'une est explicitement attribuée à Thâbit ibn Qurra (dans la “dictée” de Thâbit à Ishâq), une autre au philosophe al-Kindî. Ces différentes versions présentent certaines variantes terminologiques dans les désignations des parties, leur ordre d'énumération n'est pas toujours le même (confusion ou corruption ?).

[33] La conclusion générale existe dans III. 4, 5, 6 mais pas dans IX. 13, 14, 16, 17.
[34] Voir [Djebbar, 2003], en particulier pp. 301-321.

Bien que son commentaire au premier Livre des *Éléments* n'ait semble-t-il pas été traduit en arabe[35], tous ces auteurs connaissaient la “version de Proclus”, mais une caractéristique commune à toutes les autres versions arabes les en sépare : elles introduisent une partie supplémentaire (évidemment facultative) dans la proposition euclidienne qu'elles appellent « l'absurde », estimant sans doute que le schéma grec ne donnait pas de place à ce que j'ai appelé la formule d'initialisation.

Cet enrichissement du schéma de Proclus par les savants médiévaux, le fait qu'on trouve des preuves indirectes dans le matériel additionnel inauthentique ultérieurement introduit dans le texte des *Éléments* montrent que, durant la (longue) transmission du texte, quelles qu'aient été les réserves de certains auteurs à leur égard, les preuves démontrées par l'impossible n’ont pas été systématiquement rejetées et la fabrication de tels arguments n’a pas cessé dans la tradition euclidienne, ni dans l'Antiquité tardive, ni au Moyen-Âge.

Pour résumer ce qui précède, il apparaît donc que la forme de l'énoncé (affirmative ou négative, conditionnel ou assertorique) détermine la manière dont le schéma de la proposition euclidienne est aménagé pour utiliser le raisonnement indirect. Par conséquent, vis à vis des questions que nous avons soulevées en commençant, il est naturel de se demander si, plus généralement, des critères "formels" sont pertinents pour justifier le recours aux démonstrations par l'absurde ou l'impossible.

LE RECOURS AUX DEMONSTRATIONS PAR L'ABSURDE OU L'IMPOSSIBLE : CRITERES FORMELS

On sait qu'il existe principalement deux types de Propositions euclidiennes : les problèmes et les théorèmes (j'admets donc que tous les lemmes sont inauthentiques), faciles à distinguer dans leurs formules de clôture (« ce qu'il fallait faire » / « ce qu'il fallait démontrer »), du moins en géométrie, mais aussi par la forme grammaticale de leurs énoncés et diorismes. Des 465 Propositions du traité, 95 sont des problèmes ou possèdent une portion

[35] Mais celui antérieur de Héron d'Alexandrie (et qui est aussi l'une des sources de Proclus) et celui postérieur de Simplicius l'ont été. L'un et l'autre sont cités par an-Nayrîzî qui rapporte précisément le schéma en six parties, probablement sous l'autorité du commentaire de Simplicius (pp. 34-39 Besthorn-Heiberg). Observons que le schéma grec en six parties se trouve aussi dans le recueil pseudo-héronien des *Definitiones,* en deux occasions, en 136.13 (120.23-24 Heiberg : il s'agit d'un extrait de Proclus) et en 137.1 (156.7-8 Heiberg). Dans cette seconde occurrence, on relèvera le changement de nom : "διορισμός" en "προδιορισμός", ce qui suggère que l'origine n'en est pas le commentaire de Proclus. On retrouve sans surprise le schéma de Proclus dans la scholie I n°23 (*EHS,* V, 1, 75.17-18 Heiberg) et une portion de celui du pseudo-Héron (avec le προδιορισμός) dans la scholie I, n°19 (*EHS,* V, 1, 74.16-17). Pour tardives qu'elles soient, cette multitude de mentions divergentes rend plutôt improbable l'idée, suggérée par [Netz, 1999b], selon laquelle ce schéma pourrait être une invention de Proclus. Même en admettant que l'exégèse ait joué un rôle dans l'explicitation d'un schéma interne de la Proposition euclidienne, ladite explicitation est probablement plus ancienne et pas nécessairement unique. Peut-être remonte-t-elle à Héron.

problématique (construction, détermination de nombres). Seize d'entre eux, soit 16,8 %, sont prouvés indirectement, tandis que 94 des 375 théorèmes (ou Proposition ayant une portion théorématique), le sont, soit 25 %. Cette caractéristique est donc significative, ce qui va passablement de soi, puisqu'une bonne partie des problèmes géométriques sont des constructions (ostensives). Cela dit, en arithmétique, plusieurs problèmes sont des déterminations de nombres ou d'ensembles de nombres ayant une propriété extrémale (ex. : PGCD) ; la détermination elle-même est ostensive, mais la vérification que l'objet fourni possède ladite propriété est établie de manière indirecte.

Autre critère formel, on peut aussi établir un lien entre preuve indirecte et structure déductive dans le cas des converses. La chose est reconnue et mentionnée par Proclus qui, dans son commentaire à la Proposition I. 14, justifie le caractère indirect de la preuve par le fait qu'il s'agit de la converse de I. 13 (elle-même établie ostensivement) à laquelle I. 14 est réduite. Il s'agit, selon lui, d'une procédure usuelle pour l'établissement des converses (294.21-22 Friedlein, 295.4-5 Friedlein) et l'exposé consécutif d'une assertion directe (τὸ προηγούμενον) et de sa converse (τὸ ἀντίστροφον), loin d'affaiblir la continuité de l'exposé (même si la converse n'est pas rapidement employée dans ce qui suit), la renforce ! Euclide partageait peut-être cette opinion, car la situation ainsi décrite correspond bien à ce que l'on observe dans les Livres de géométrie plane[36].

Enfin, le critère déjà mentionné de la forme de l'énoncé joue un grand rôle dans le recours aux démonstrations par l'absurde ou l'impossible. Pour nos 375 théorèmes, on peut repérer cinq types d'énoncés :

• conditionnel : « Si (᾿Εὰν ...) + verbe au subjonctif …, alors … + verbe au futur ou présent »[37],

• assertorique (affirmation ou négation simple) : « dans les triangles rectangles … »,

• universellement quantifiées [« πᾶς, ἅπας … » (tout)],

• existentielle (pour des moyens proportionnels entre nombres)[38]

• modale (« il est possible de…») dans la seule Proposition XI. 22 (possibilité de décrire un angle solide).

---

[36] Voici la liste des couples de Propositions dont la seconde est la converse (totale ou partielle) de la première et qui est démontrée par réduction à la dite première : I. 5, 6 ; I. 13, 14 ; I. 18, 19 ; I. 24, 25 ; I. 37, 39 ; III. 3, 4 ; III. 16[a], 19 ; III. 18, 19 ; III. 26, 27 ; V. 17, 18 ; VI. 24, 26. Cela vaut moins dans les Livres arithmétiques : VII. 21-22 sont converses (partielles) l'une de l'autre, mais les deux sont prouvées de manière indirecte et VII. 22 n'est pas réduite à VII. 21 ; VIII. 1, 3 sont converses (partielles), mais c'est VIII. 1 qui est établie de manière indirecte, pas VIII. 3. Celle-ci est établie (directement) à partir de VIII. 2, pas de VIII. 1.

[37] Ils sont particulièrement fréquents en arithmétique (76 sur 92). Pour les énoncés assertoriques simples, c'est plutôt l'inverse (8 en arithmétique, 132 en géométrie).

[38] Prop. VIII. 11, 12, 18, 19. L'affirmative existentielle n'est donc pas utilisée dans les Livres géométriques par Euclide.

Leur répartition est la suivante :

Conditionnelle		Assertorique simple		Universelle	Existentielle	Modale
Affirmative	négative	Affirmative	négative	Affirmative	Affirmative	Affirmative
207	11	127	13	16	4	1
218 (58,1 %)		140 (37,3 %)		4,2 %	1 %	
Dont sont démontrés de manière indirecte :						
38 (18,4 %)	11	29 (22,6 %)	12 (92,3 %)	4	—	—
49 (22,5 %)		40 (28, 5 %)		26,6 %	—	—

Pour les énoncés affirmatifs, le fait d'être conditionnel, assertorique ou universel est très moyennement corrélé à une démonstration indirecte. Il en va tout autrement pour les énoncés négatifs. On compte 20 théorèmes à énoncé négatif[39], plus quatre assertions partielles elles aussi négatives (III. 16^{b}, X. 9^{c}, X. 9^{d} et X. 115^{b}). Un *seul énoncé* (partiellement) *négatif* possède une "preuve" directe[40] : la seconde assertion de la Proposition X. 115[41], si tant est que l'on puisse même parler de preuve !

On peut donc dire que les énoncés négatifs ne coïncident pas tout à fait avec un sous-ensemble des Propositions à démonstration indirecte, mais presque ! Un énoncé négatif — ou perçu comme tel (assertion d'unicité) — réclame une preuve indirecte. Du point de vue de la rédaction des preuves, cela se comprend aisément : établir indirectement un énoncé négatif (que non-P), c'est prendre une hypothèse positive (P) comme point de départ, donc une assertion effective de propriété à partir de laquelle on en déduira d'autres, jusqu'à l'obtention d'une contradiction. La négation du diorisme dans la formule d'initialisation a en quelque sorte un parfum "analytique"[42].

[39] I. 7 ; III. 4, 5, 6, 10, 13, 23 ; VIII. 6, 16, 17 ; IX. 10, 13, 14, 16, 17 ; X. 7, 26, 111 ; XI. 1, 13 soit 12 Propositions géométriques (dont seulement 3 conditionnelles) et 8 Propositions arithmétiques, toutes conditionnelles. Voir les énoncés dans l'Annexe III.

[40] On pourrait peut-être lui adjoindre VIII. 6, un cas difficile à juger car le texte, tel qu'il est transmis, n'est pas satisfaisant. En fait, je montre dans l'Annexe IV qu'il a probablement existé deux preuves successives pour cette Proposition, l'une indirecte dans ***P***, l'autre (probablement une "amélioration"), directe dans les manuscrits théonins. Les textes conversés sont contaminés, mais le témoignage de la tradition indirecte des traductions arabes et l'analyse statistique que j'ai faite suggère fortement cette hypothèse.

[41] X. 115 : « (a) A partir d'une [droite] médiale sont engendrées des irrationnelles infinies [en multitude], et (b) aucune n'est la même qu'aucune de celles précédemment [obtenues] ».

[42] Le rapprochement entre preuve indirecte et analyse est explicitement fait par Proclus (*In Euclidem* I, p. 255.8-256.10 Friedlein) qui dit d'ailleurs citer Porphyre.

LE RECOURS AUX DEMONSTRATIONS PAR L'ABSURDE OU L'IMPOSSIBLE : CRITERES DE CONTENU

A côté des questions de forme et de style, il est évidemment très vraisemblable que des critères de contenu jouent également un rôle dans le recours aux preuves par l'absurde ou l'impossible. Commençons par une observation très simple à partir d'une statistique par Livres et grands domaines :

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
Nombre de propositions	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18
Nombre d'arguments indirects	13	—	20	{3}	3	3	21	7	19	24	11	12	—
	27 %	0	54 %	?	12 %	9 %	54 %	26 %	53 %	21 %	28 %	67 %	0

Elle montre immédiatement que l'occurrence d'un raisonnement indirect dans les *Éléments* n'est pas purement aléatoire ou indifférent. Le Livre III (consacré au cercle), les Livres arithmétiques, le Livre XII et ses preuves dites (improprement) par « exhaustion » sont particulièrement riches en arguments indirects. Si on s'en tient aux Propositions (*i.e.* si on élimine les arguments ponctuels), plus du tiers de leurs Propositions sont démontrées de cette manière, alors qu'il n'y en a aucune (authentique) dans les Livres II, IV, XIII et seulement trois dans les Livres V et VI.

	Géométrie plane	Proportions	Théorie des nombres	Irrationalité	Stéréométrie
Nombre de propositions	115 + 33 = 148	39	102	111	75
Nombre d'arguments indirects	36, soit 24 %	15, soit 42 %	47, soit 46 %	12, soit 11 %	23, soit 30 %

Une fois mis de côté les assertions négatives (21), limitatives (14), converses (10) dont la preuve indirecte est "justifiée" d'un point de vue formel, les arguments ponctuels (10) dont plusieurs sont inauthentiques, deux Propositions (VIII. 6, X. 16) dont le texte est très certainement corrompu, subsistent 62 arguments par réduction à l'impossible ou à l'absurde dont 35 se trouvent dans les Livres géométriques, 27 dans les Livres arithmétiques. Proportionnellement, ces dernières sont plus nombreuses mais, au moins d'un point de vue "moderne", elles ne sont guère significatives. La critique que l'on adresse souvent aux preuves par l'impossible (ou par l'absurde), peut-être pertinente en métaphysique voire en mathématiques quand s'y mêlent des considérations infinitistes ou non constructives, ne vaut guère pour les démonstrations arithmétiques euclidiennes. J.L. Gardies a mis en exergue de son livre cette frappante citation du Chevalier de Méré :

« Croyez-vous que ce soit connaître une chose que de savoir ce qu'elle n'est pas ? »

Mais, dans les Livres arithmétiques, les preuves indirectes reposent sur des partitions qui se définissent en dernière instance par des oppositions polaires exprimées directement ou non à l'aide de l'opération fondamentale et transgénérique de "mesure"[43]. Quatre de ces cinq oppositions se trouvent dans les Livres VII-IX :

Polarités	**Notions mathématiques associées**	**Définies dans**	**Utilisées dans**
Mesurer / **Ne pas mesurer**	« être une partie / être des parties » d'un nombre	Df. VII. 3-4	Prop. VII. 20, IX. 12
Être divisible en deux / **Ne pas être divisible en deux** (être / ne pas être mesuré par une dyade)	[nombre] pair / impair	Df. VII. 6-7[a]	Prop. IX. 30, 33, X. 117*vulgo* Cf. Arstt, *An. Pr.* I 23, 41 a26-30
Être mesuré ↓ **par une unité seulement (μόνον)** / par un nombre	[nombre] premier / composé	Df. VII. 12, 14	Prop. VII. 29, IX. 13
Être co-mesurés ↓ **par une unité seulement (μόνον)** / par un nombre	[nombres] premiers entre eux / composés entre eux	Df. VII. 13, 15	Prop. VII. 21-24, 28 IX. 16, 17, 19, 31
Être co-mesurées / **Ne pas être co-mesurées** (par une grandeur)	[grandeurs] commensurables / incommensurables	Df. X. 1-2	Prop. X. 13, 16

Or, clairement, savoir qu'un nombre n'est pas divisible [en deux moitiés], ce n'est pas ne rien savoir, mais savoir qu'il est impair, savoir qu'il n'est pas divisible par quelque nombre que ce soit, ce n'est pas ne rien savoir, mais savoir qu'il est premier … et l'imparité, la primarité et la coprimarité, certes

[43] Autrement dit Euclide utilise un langage commun en arithmétique et en géométrie : mesurer (μετρεῖν, καταμετρεῖν), partie (μέρος), "être en porportion" (ἀνάλογον εἶναι) ; il utilise aussi le même "algorithme" (l'anthyphérèse ou algorithme dit d'Euclide) pour les nombres et les grandeurs. Dans le domaine numérique, "mesurer" équivaut à notre "diviser (exactement)".

introduites comme des notions “négatives”, sont néanmoins des notions fécondes en arithmétique. On voit sur le tableau ci-dessus que cet usage des partitions rend compte de la moitié environ des preuves arithmétiques indirectes.

Ajoutons encore une remarque à leur propos : pratiquement toutes celles où intervient la coprimarité (le registre le plus fourni) sont facilement démontrées de manière ostensive, pour peu qu’on s’autorise à affaiblir la polarité « Unité \ Nombre » (à considérer l'unité comme un nombre). Prenons comme exemple la preuve indirecte de VII. 23 :

> « Soient deux nombres premiers entre eux A, B et qu'un certain nombre C mesure A. Je dis que C et B sont aussi premiers entre eux. Car si C et B ne sont pas premiers entre eux, un {certain} nombre mesurera les [nombres] C, B. Qu'il les mesure et que ce soit D. Puisque D mesure C et que C mesure A, le [nombre] D mesure donc aussi A. Mais il mesure aussi B ; donc D mesure A, B qui sont premiers entre eux ; ce qui est impossible. Donc aucun nombre ne mesurera les nombres C, B. Donc C, B sont premiers entre eux ».

On pourrait la remplacer par :

> « Soit D un “nombre ou une unité” mesurant C et B ; puisque D mesure C et que C mesure A, D mesure donc aussi A. Mais il mesure aussi B; donc D mesure A, B qui sont premiers entre eux ; donc D est une unité. Donc C, B sont premiers entre eux ».

Euclide lui-même ne maintient pas toujours la distinction « Unité \ Nombre », mais il lui était peut-être difficile d'assimiler complètement « ce qui est *un* » à un cas particulier de « pluralité » (l'opposition justifie aussi la preuve indirecte de la proposition arithmétique fondationnelle VII. 1) !

A l'inverse, la description que l'on vient de faire pour "justifier" le recours aux arguments indirects dans les Livres arithmétiques ne vaut pas vraiment en géométrie. Beaucoup des assertions *positives* qui y sont établies de cette manière sont des théorèmes fondamentaux, voire *fondationnels* : cas d’égalité des triangles I (I. 7-8, 26), égalité des segments de cercle (III. 23-24), similitude des triangles dans VI. 7 ; propriétés fondamentales du cercle (convexité, III. 2 ; existence et caractérisation de la tangente à un cercle, III. 16[a], 18, 19) ; le critère anthyphérétique d'incommensurabilité X. 2 ; plusieurs résultats basiques de la stéréométrie qu’Euclide aurait mieux fait de postuler (XI. 2, 3, 5, 7) et dont les preuves ne sont pas satisfaisantes[44]. La Proposition XI. 14 est un critère de parallélisme entre plans (comme I. 27 l'est pour les droites) et l'une et l'autre sont établies indirectement car le parallélisme est conçu comme une propriété négative (non-incidence). Enfin les célèbres propositions du Livre XII, dites improprement selon la

[44] Voir [Euclide-Vitrac, 2001], p. 31.

méthode d'exhaustion, établissent une identité de rapports par un double raisonnement par l'absurde : la quatrième grandeur proportionnelle (dont l'existence est admise) n'est ni plus grande, ni plus petite que celle proposée dans l'énoncé, elle lui est donc égale. Elles reposent donc sur une autre partition transgénérique : la tripartition « plus grand que …, égal à …, plus petit que … ». Certes, leur rôle d'« élément » s'est exercé à l'extérieur des *Éléments,* mais on sait qu'il est considérable pour les travaux d'Archimède ou la dérivation des procédures calculatoires des *Metrica* de Héron d'Alexandrie ou du corpus métrologique pseudo-héronien.

Dernier point : il se peut, comme le dit Gardies, que toute preuve indirecte soit convertible en une preuve ostensive. Mais à quel prix, en termes d'"élégance" ? Certes la notion est assez subjective, mais quand on compare, par exemple, les preuves indirectes "euclidiennes" et les versions alternatives ostensives proposées par Gardies, on a bel et bien l'impression que la démonstration indirecte dans le style euclidien est esthétiquement supérieure[45].

EUCLIDE APRES EUCLIDE

L'idée de proposer une preuve alternative pour éviter le raisonnement indirect n'a évidemment pas été inventée par Gardies. Certains mathématiciens grecs anciens, qu'ils aient été ou non inspirés par les hiérarchies aristotéliciennes [(démonstration) affirmative > négative > indirecte)], semblent avoir partagé l'idée que la preuve ostensive est supérieure. C'est par exemple ce que l'on lit dans la préface aux *Sphériques* de Ménélaüs d'Alexandrie (Ier–IIe s.), pour autant qu'on puisse la bien connaître[46] :

> « … Nous avons souligné les choses déjà démontrées par nos prédécesseurs ; et nous avons exposé beaucoup de faits généraux qui se rapportent à tout un ensemble, qui ont été déjà énoncés et prouvés dans un cas particulier par un autre, qui ont été rédigés dans les exposés des éléments de la doctrine des figures sphériques, qui ont été démontrés selon la réduction à l'absurde, et nous avons présenté ces preuves universellement, ainsi que leurs converses et avec les délimitations qui s'imposent, et ce, de manière directe ».

---

[45] Voir l'exemple de X. 117*vulgo* dans l'Annexe V.

[46] Traduction de travail établie à partir de *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abû Nasr Mansûr b. 'Alî b. 'Irâq* ... Ed. et traduction allemande par Max Krause, Berlin, Wiedmann, 1936, p. 118, donc à partir de la traduction allemande d'une *recension* arabe d'un original grec perdu !

Et ce genre de prise de position a laissé des traces — contrastées — dans l'exégèse antique des *Éléments* : ainsi des preuves alternatives directes pour certaines propositions démontrées par contraposition ont été proposées pour I. 8 (Philon[47]), I. 19 (Héron[48]), 25 (Héron[49], Ménélaüs[50]), preuves alternatives que nous connaissons grâce à l'*In Euclidem* de Proclus. Cela dit, la position de Héron est moins claire que celle de Ménélaüs, car le remplacement de l'indirect par le direct n'était pas sa seule motivation pour proposer des preuves alternatives. Toujours grâce au commentateur persan an-Nayrîzî, nous savons que la preuve alternative à III. 10 transmise dans les manuscrits grecs et les versions arabes, ainsi que la Proposition Heib. III. 12, sont des ajouts héroniens[51]. Or l'un et l'autre procèdent de manière indirecte ! L'un est un complément (autre cas de figure), l'autre renforce la structure déductive du traité.

Cette multiplicité des motivations se retrouve dans l'ensemble de la tradition euclidienne antique et médiévale : les manuscrits grecs, les traductions médiévales et les témoignages des commentateurs nous font connaître une quantité assez importante de preuves alternatives : le phénomène concerne environ 80 Propositions et il y a une bonne quarantaine de vraies démonstrations alternatives[52]. Leur examen montre que la composition de certaines d'entre elles a sans doute eu pour but de changer la forme ostensive ou indirecte de la démonstration. Mais ce n'est qu'un critère parmi beaucoup d'autres. Cette dualité entre démonstrations ostensives et indirectes deviendra un lieu commun de l'exégèse du traité d'Euclide, si l'on en croit 'Umar al-Khayyâm, même s'il n'y accorde pas plus d'importance que ça et laisse paraître son agacement :

---

[47] 266.16-268.14 : preuve par disjonction de 3 cas de figures qui permet d'éviter la preuve euclidienne par contraposition en outre fondée sur la Proposition assertorique négative I. 7 elle-même établie de manière indirecte. Si ledit Philon est, comme on le dit, Philon de Byzance (III^{E}-II^{e} s. av.), la substitution de preuve selon ce genre de critère est fort ancienne !

[48] 319.2-321.8 : la preuve évite de distinguer deux cas comme le fait la démonstration euclidienne par contraposition et elle est directe. Mais elle a l'inconvénient — c'est l'objection de Proclus — d'obliger à insérer un Lemme [dont le caractère élémentaire n'est pas évident car il s'agit d'une forme faible (inégalité) de la Proposition VI. 3 (proportion)] entre I. 18 et sa converse. Le commentateur persan an-Nayrîzî transmet également cette preuve alternative et l'attribue à Héron : « Demonstratio huius propositionis ab Herone proposita, qui alia utitur ratione sine reductione in absurdum ». *In Eucl.* I. 19, p. 89 Besthorn-Heiberg.

[49] 346.15-347.11 : Proclus souligne que la preuve de Héron évitait la "réduction à l'impossible" : « … mais Héron le mécanicien démontre le même théorème de la manière suivante sans réduction à l'impossible » (῞Ηρων δὲ ὁ μηχανικὸς οὑτωσὶ οὐ δι᾽ ἀδυνάτου τὸ αὐτὸ δείκνυσιν). Proclus, *In Euclidem* (I. 25), 346.11-12 Friedlein. On observera qu'Euclide utilise la contraposition et non la réduction à l'impossible. An-Nayrîzî ne l'attribue à personne. A noter que le texte de sa démonstration première possède le même type d'ajout que ceux que nous avons vu pour I. 19, ajouts qui transforme la contraposition en réduction à l'absurde. Il en allait peut-être déjà de même dans le texte que lisait Proclus, mais ce n'est pas le cas, ni pour I. 19, ni pour I. 25, dans le texte grec des manuscrits des *Éléments* eux-mêmes).

[50] 345.15-346.11 : preuve directe sans problème particulier. Elle ne semble pas connue d' an-Nayrîzî.

[51] Voir [Vitrac, 2004], en particulier, pp. 16-18.

[52] Inventaire dans les Tableaux I-II des Annexes de [Vitrac, 2004], pp. 40-43.

« … < quant à > ceux qui ont voulu commenter son ouvrage <les *Éléments* d’Euclide> ou en résoudre les difficultés — comme Héron le Mécanicien, Eutocius et les autres Anciens, et Abû al-‘Abbâs al-Nayrîzî et les autres Modernes — ils auraient dû démontrer des choses semblables à ces propositions (< en particulier le postulat des parallèles >) et les examiner et les étudier ; non pas ramener la [démonstration] directe à la [démonstration] par l’absurde, et l’absurde à la directe. Car quelqu’un qui connaît réellement la démonstration d’une chose s’en contentera, fût-elle directe ou par l’absurde. Quel sens y a-t-il donc à ramener la directe à l’absurde et à laisser des choses semblables à cela sans démonstration ? »[53].

Conclusions

L'inventaire et l'examen des arguments indirects dans les *Éléments* d'Euclide permettent, sinon de répondre à toutes les questions que nous avons soulevées en commençant, du moins de faire quelques observations :

• La pratique euclidienne montre une forte asymétrie entre énoncés affirmatifs et négatifs, voire même ceux qui sont perçus comme négatifs. Dans ce cas, une preuve par l'impossible ou par l'absurde s'impose aux yeux d'Euclide. Que les questions stylistiques déterminent partiellement à la fois le recours aux arguments indirects et la forme que prend ce recours, nous l'avons bien montré.

• Ce n'est pas le seul critère formel qui semble déterminer ce choix : établir la converse d'une Proposition par réduction indirecte à celle dont elle est la converse est considéré comme une stratégie qui participe à la continuité de l'exposé.

• Au passage, observons que les preuves ostensives que l'on propose pour remplacer un argument indirect procèdent parfois selon une disjonction de cas et autant de “branchements” démonstratifs qui, à l'inverse, affaiblissent ladite continuité.

• Une autre asymétrie se manifeste entre ce qu'Euclide fait en arithmétique — il use et abuse de la démonstration indirecte (46 % des 102 Propositions des Livres VII-IX sont concernées !), mais sans vraiment s'exposer aux critiques que l'on fait habituellement à ce mode de preuve (prouver à partir d'un non-savoir) — et ce qu'il fait dans ses Livres géométriques. En géométrie, la démonstration par l'impossible ou par l'absurde est impliquée dans des résultats fondationnels, associée à des procédures dont il aurait peut-être aimé se dispenser, mais qui, elles aussi, interviennent au niveau des fondements : méthode dite de superposition dans les Propositions I. 8 et III. 23) ; recours (sans postulation ni justification) à l'existence d'une grandeur

[53] [‘Umar al-Khayyâm-Vahabzadeh, 1999], p. 320.

quatrième proportionnelle à trois grandeurs données, indispensable pour établir les résultats fondamentaux du Livre XII ; réduction forcenée et peu satisfaisante de la géométrie des solides à la géométrie plane pour se passer de postulat stéréométrique.

• Il n'est pour autant pas possible de savoir s'il y a là un choix d'auteur singulier ou non. Archimède et Apollonius utilisent eux aussi la démonstration par l'impossible ou par l'absurde dans leurs écrits géométriques. Une statistique très grossière montre que le premier établit 25 Propositions de cette manière (dont 22 selon la méthode dite d'exhaustion !) sur un total de 155, soit environ 16 %. Euclide en fait davantage dans ses Livres géométriques (environ 21 %), mais il est dépassé par Apollonius. Celui-ci, dans ses Livres I-IV (qui, exposent les « éléments » des coniques, aux dires de l'auteur), fait un usage considérable des preuves indirectes (dans près de 30 % des Propositions), dont certaines sont d'ailleurs des calques (transposées aux coniques) des preuves euclidiennes indirectes du Livre III pour le cercle. Malheureusement, comme nous l'avons dit en commençant, nous ne savons rien des intentions d'Euclide et, surtout, nous n'avons pas de terme de comparaison : écrire des monographies comme Archimède (reposant sur un important savoir géométrique antérieur) n'est pas la même chose que de proposer un recueil d'éléments dont la lecture, en principe, ne présuppose aucune connaissance mathématique préalable. L'exigence de la réduction « aux principes » ne s'y posera évidemment pas de la même manière.

• Le dernier enseignement, plus général, que l'on peut tirer de l'examen de ce dossier concerne l'historiographie, notamment l'idée que l'on se fait de la manière dont Euclide a composé son recueil d'*Éléments*.

Dans l'Antiquité, nous connaissons le point de vue de Proclus : il le présente comme celui qui a recueilli avec beaucoup de soin et de rigueur les résultats des mathématiciens antérieurs, les a réorganisés en une composition dont Proclus a une opinion certainement trop favorable. L'exégèse médiévale et renaissante a poursuivi plus ou moins dans cette voie, ajoutant les complications d'une transmission complexe sur le très long terme, introduisant la topique devenue classique dans laquelle on loue l'auteur — Euclide — pour mieux éreinter ses copistes ou ses ré-éditeurs quand on n'est pas satisfait du texte.

L'historiographie “moderne” (à partir du dernier quart du XIX^{e} s.) a complètement changé d'optique, notamment sous l'impulsion de Paul Tannery. Les insuffisances du texte, ses “anomalies” réelles ou supposées – les travaux contemporains sur les fondements de la géométrie ont multiplé les manquements axiomatiques de l'exposé euclidien – ont dès lors été interprétées comme des indices historiques à rapporter aux difficultés éprouvées par Euclide pour harmoniser les travaux de ses prédécesseurs, eux-mêmes ayant eu à répondre aux urgences d'une « crise des fondements » (là aussi l'histoire contemporaine des mathématiques fournissait un modèle historiographique). Cette interprétation du traité d'Euclide, en quelque sorte “promu” au rang de source principale pour écrire l'histoire des mathématiques pré euclidiennes qui en manque cruellement, passait par la dévalorisation de l'auteur au rang de simple éditeur, voire, pour certains ([Van der Waerden, 1954] par exemple), de compilateur. La cohérence du recueil fut totalement perdue de vue.

Or cette lecture ne résiste pas à la lecture attentive des *Éléments* : beaucoup des “anomalies” invoquées sont des artefacts historiographiques (ce qui ne veut évidemment pas dire que l'exposé euclidien est parfait, loin s'en faut) ; la cohérence mathématique et logique (axiomatico-déductive) est sortie plutôt renforcée des travaux de Marinus Taisbak ([Taisbak, 1971, 1982] sur les Livres VII-X) et Ian Mueller ([Mueller, 1981] sur la structure déductive) ; les études stylistiques et statistiques dont nous avons vu un échantillon sur la question des preuves indirectes — mais il y en a bien d'autres — n'ont fait que confirmer cette stabilité des choix euclidiens qui présupposent une intention d'auteur. Certes, cela ne nous apprend toujours rien sur le contexte scientifique et éditorial dans lequel a travaillé Euclide, mais cela suffit à invalider le paradigme historiographique initié par Tannery.

BIBLIOGRAPHIE

F. Acerbi, 2012, sous presse
I codici stilistici della matematica greca: dimostrazioni, procedure, algoritmi, *Quaderni Urbinati di Cultura Classica*.

G. Aujac, 1984
Le langage formulaire dans la géométrie grecque, *Revue d’Histoire des Sciences* 37, pp. 97-109.

W. Burkert, 1972
Lore and Science in Ancient Pythagoreanism. Cambridge (Mass.), Harvard University Press
(traduction anglaise de *Wisheit und Wissenschaft: Studien zu Pythagoras, Philolaus und Platon*. Nürnberg,1962)

M. Caveing, 1997
La constitution du type mathématique de l’idéalité dans la pensée grecque. Vol. 2. *La figure et le nombre*. Presses Universitaires du Septentrion.

M. Caveing, 1998
La constitution du type mathématique de l’idéalité dans la pensée grecque. Vol. 3. *L’irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu’à Euclide.*
Presses Universitaires du Septentrion.

A. Djebbar, 2003
Quelques exemples de scholies dans la tradition arabe des *Éléments* d'Euclide. *Revue d'Histoire des Sciences* 56, pp. 293-321

Euclide-Vitrac, 1998
Euclide, *Les Éléments*. Traduction et commentaires par B. Vitrac. *Vol. 3*. *Livres X*. Paris, puf.

Euclide-Vitrac, 2001
Euclide, *Les Éléments*. Traduction et commentaires par B. Vitrac. *Vol. 4*. *Livres XI à XIII*. Paris, puf.

D. H. Fowler, 1994
The story of the Discovery of Incommensurability, Revisited,
In J. Christianidis, K. Gavroglu, & E. Nicolaïdis (eds), *Trends in the Historiography of Science.* Dordrecht / Boston / London, pp. 221-235.

J.-L. Gardies, 1991
Le raisonnement par l'absurde. Paris, puf.

H. Hasse et H. Scholz,, 1928
Die Grundlagen-Krisis der griechischen Mathematik. *Kants-Studien* 33, pp. 4-34.

T.L. Heath, 1949
Mathematics in Aristotle. Oxford, Clarendon Press 1949 (reprint ed.: Bristol, 1998).

G.E.R. Lloyd, 1979
Magic, Reason and Experience. Cambridge University Press.

G.E.R. Lloyd, 1990
Demystifying Mentalities, Cambridge University Press (traduction française par F. Regnot, *Pour en finir avec les mentalités,* Paris, Editions la Découverte, 1993).

G.E.R. Lloyd, 1996
Adversaries and authorities. Investigations into ancient Greek and Chinese science. Cambridge University Press.

I. Mueller, 1981
Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements. Cambridge (Mass.) and London, MIT Press.

R. Netz, 1999a
The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. Cambridge University Press.

R. Netz, 1999b
Proclus' Division of the Mathematical Proposition into Parts: How and Why Was it Formulated? *Classical Quarterly* 49, pp. 282-303.

C.M. Taisbak, 1971
Division and Logos. A Theory of Equivalent Couples and Sets of Integers Propounded by Euclid in The Arithmetical Books of the Elements.
Odense University Press.

C.M. Taisbak, 1982
Coloured Quadrangles. A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements. Copenhagen, Museum Tusculanum Press.

P. Tannery, 1887
La géométrie grecque. Paris, Gauthier-Villars 1887 (reprint ed. Paris, 1988).

['Umar al-Khayyâm-Vahabzadeh, 1999],
'Umar al-Khayyâm, *Commentaire sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide* (*Risâla fî sharh mâ ashkala min musâdarât Kitâb Uqlîdis*), dans
R. Rashed & B. Vahabzadeh, *Al-Khayyâm mathématicien*. Paris, Blanchard 1999, pp. 271-390.

B.L. van der Waerden, 1954
Science Awakening. Groningen, P. Noordhoff (traduction anglaise de *Ontwakende Wetenschap,* 1950).

B. Vitrac, 2004
« A propos des démonstrations alternatives et autres substitutions de preuve dans les *Éléments* d'Euclide ». *Archive for History of Exact Science* 59, pp. 1-44.

B. Vitrac, 2008
« Promenade dans les préfaces des textes mathématiques grecs anciens » dans
Liber amicorum Jean Dhombres, P. Radelet-de-Grave (éd.). Louvain-la-Neuve, pp. 518-556.

B. Vitrac, 2012 sous presse
« The Euclidean ideal of proof in *The Elements* and philological uncertainties of Heiberg's edition of the text », dans K. Chemla ed., *History and historiography of mathematical proof in ancient tradition*. Vol. I : *The 19th historiography of mathematical Proof*. Cambridge, pp. 69-134.

*

ANNEXES

I. QUELQUES TEMOIGNAGES SUR LES MATHEMATIQUES PRE EUCLIDIENNES

1) Les témoignages (Proclus, *In Euclidem* I, V[e] s. ap.) concernant les prétendues “pères fondateurs” des mathématiques grecques (Thalès, Pythagore, VI[e] s. av.), mais aussi les Pythagoriciens en général ainsi qu'Œnopide de Chio (milieu du V[e] s. av. ?), témoignages qui leur attribuent un certain nombre de résultats mathématiques contenus dans le Livre I des *Éléments* d'Euclide en se réclamant de l'*Histoire de la géométrie* d'Eudème de Rhodes (IV[e] s. av.), principale source “historique” concernant les mathématiques pré euclidiennes. Parmi ces résultats, seule la Proposition I. 26 est établie de manière indirecte par Euclide et son attribution à Thalès par Eudème est, aux dires mêmes de Proclus (352.14-18 Friedlein), inférentielle.

2) Les témoignages (Proclus, *In Euclidem* I ; Eutocius, *in Arch. SC* II. 1, VI[e] s. ap., *apud* Ératosthène, III[e] s. av.) sur Hippocrate de Chio (2[e] moitié du V[e] s. av.) qui aurait été l'auteur du premier recueil d'*Eléments* (στοιχεῖα) et le premier à appliquer la méthode de réduction (ἀπαγωγή) à un problème difficile (duplication du cube → insertion de deux droites moyennes proportionnelles entre deux droites données).

3) Les témoignages (Aristote et son commentateur Jean Philopon, VI[e] s. ap.) sur la tentative de quadrature du cercle par Hippocrate de Chio et les fragments de l'*Histoire de la géométrie* d'Eudème de Rhodes transmettant les preuves (satisfaisantes) de quatre résultats concernant la quadrature des lunules, cités par Simplicius (VI[e] s. ap.), autre commentateur d'Aristote.

4) Les témoignages d'Aristote et de ses commentateurs sur la tentative de quadrature du cercle par un certain Antiphon et par Bryson, ainsi qu'un fragment de l'*Histoire de la géométrie* d'Eudème à propos d'Antiphon, cité là encore par Simplicius.

5) Les témoignages (Diogène Laërce, *Vies* III, 24, 1[e] moitié du III[e] s. ap. ; Proclus, *In Euclidem* I) qui attribuent soit l'invention [difficile à concilier avec 2)], soit la simple transmission au géomètre Léodamas de Thasos de la méthode d'analyse par Platon.

6) Le témoignage de Proclus sur l'explicitation, par Léon, disciple de Léodamas, de la notion de « diorisme », au sens de « condition de possibilité d'un problème ».

7) Le témoignage de Platon (*Théétète,* 147d-148b) sur les travaux de Théodore de Cyrène (2[e] moitié du V[e] s. av.) concernant l'incommensurabilité de certaines droites.

8) Le témoignage de Pappus (*In Euclidem* X, 1[e] moitié du IV[e] s. ap.), d'après l'*Histoire de la géométrie* d'Eudème, sur la théorie des lignes et surfaces irrationnelles mentionnant successivement : les Pythagoriciens, Théétète, Euclide, Apollonius.

9) L'exposé de Platon dans le *Timée* portant sur les polyèdres réguliers inscriptibles dans une sphère, exposé qui prouve que le fait qu'il existe seulement cinq tels polyèdres était connu ainsi que, probablement, un moyen de les construire.

10) Le témoignage d'une scholie liminaire au Livre XIII (*EHS,* V, 2, 291.1-9) sur la construction des cinq polyèdres réguliers mentionnant les Pythagoriciens (4-, 6- et 12-èdres) et Théétète (8- et 20-èdre) dont la source, pour certains spécialistes, serait Eudème.

11) Le témoignage d'une autre scholie liminaire au Livre V (*EHS,* V, 1, 211.1-212.25) sur l'“inventeur” du Livre V : Eudoxe de Cnide, scholie dont là aussi, la source serait Eudème.

12) Les témoignages d'Archimède selon lesquels les résultats contenus dans les Propositions XII. 7 et 10 ont été établis par Eudoxe (*SC* I, *Meth.,* préfaces). Leurs énoncés étaient déjà connus de Démocrite ajoute-t-il (*Meth.,* préface). Quant à XII. 2 et 18, il dit seulement (*QP,* préface) qu'ils ont été établis par des géomètres antérieurs à lui (Archimède) : Euclide ? Eudoxe ? Le témoignage de Simplicius [3)] affirme que XII. 2 était déjà prouvé par Hippocrate de Chio.

13) Le témoignage d'Eutocius (*In Arch. SC* II. 1) concernant l'insertion de deux droites moyennes proportionnelles entre deux droites données et transmettant, en se réclamant d'Eudème, une version modernisée de la solution stéréométrique d'Archytas (Ve-IVe s. av.).

14) Le témoignage d'Eutocius sur le même sujet, rapportant une version modernisée de la preuve de Ménechme (milieu du IVe s. av.) par intersection d'une hyperbole et d'une parabole.

15) Le témoignage de Boèce (*De musica,* III, 11, VIe s. ap.) sur la preuve, par Archytas, de l'impossibilité de dichotomiser un intervalle musical épimore [n + 1 : n] : la preuve est indirecte (et déficiente selon Boèce). Il est donc impossible d'associer un rapport numérique aux demies octave, quarte et quinte, ainsi qu'au demi-ton. Dans le premier exemple, ceci équivaut, en termes modernes, à l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Ce théorème sur les intervalles fait l'objet de la Proposition 3 de la *Division du canon* attribuée à Euclide ; elle repose de manière essentielle sur la Proposition VIII. 8 des *Éléments*. La citation de Boèce paraît corrompue ou tronquée.

16) On pourrait leur adjoindre les très nombreux exemples mathématiques proposés par Aristote[54] qu'il est raisonnable de classer parmi les auteurs pré euclidiens[55] ! Ces témoignages, parfois allusifs, attestent que la théorisation du système axiomatique de présentation d'une science démonstrative était bien engagée. En nous limitant à la géométrie élémentaire, Aristote discute à plusieurs reprises certaines définitions fondamentales, mentionne certaines difficultés dans la théorie des parallèles à son époque (pétition de principe) ; il connaît le résultat sur la somme des angles d'un triangle, des énoncés comme Euclide, NC 3, I. 5, I. 32, III. 31, “V. 16” … ; il utilise certains résultats de la théorie des lieux dans ses *Météorologiques,* III, 5.

NB : Les items 3), 8), 10), 11), 12) sont à l'origine de la thèse que les *Éléments* d'Euclide constituent une reprise et une amélioration de résultats pré euclidiens, notamment de Théétète et d'Eudoxe. C'est ce qu'affirme Proclus (68.7-10 Friedlein), peut-être pour raffermir son idée que le traité d'Euclide est d'inspiration platonicienne car Théétète et Eudoxe sont mis en relation avec Platon et l'Académie par la tradition. Peut-être faut-il leur adjoindre Hippocrate de Chio et Archytas.

---

[54] T.L. Heath leur a consacré tout un livre ([Heath, 1949]) !

[55] Malgré les incertitudes qui entourent les dates d'Euclide. Sa naissance peut être placée quelque part entre 360 et 290 sans qu'aucun argument décisif ne permette de trancher entre le “haut” et le “bas” de la fourchette chronologique. S'il était né dans les années 360-350, il ne serait pas impossible qu'Aristote et Euclide se soient connus ; ce n'est pas l'opinion traditionnelle. La même incertitude pèse évidemment sur les rapports chronologiques entre Euclide et Eudème de Rhodes. Candidat malheureux à la succession d'Aristote à la tête du Lycée face à Théophraste, on le fait traditionnellement naître dans les années 360-350.

II. ARGUMENTS INDIRECTS DANS LES *ÉLEMENTS* D'EUCLIDE

Conventions et abréviations

Argument global : toute la proposition (éventuellement chacun de ses cas) est démontrée de manière indirecte. Les numéros en gras correspondent aux énoncés formulés négativement.
Argument partiel : seule une assertion partielle, explicitée dans l'énoncé, est démontré de cette manière (ex. : la troisième partie de III. 7 ; notation : III. 7^c).
L'exemple typique est la caractérisation de maximalité ou de minimalité dans les problèmes arithmétiques (notation : VII. 2th = partie "théorématique" de VII. 2).
Argument ponctuel : il s'agit de justifier une inférence locale en cours de démonstration.
Ils sont rares (6 Propositions) et 4 d'entre eux au moins sont certainement inauthentiques (I. 4, IV. 4, 8, 13).
Qualification de la réduction : Imposs. : « ce qui est impossible » (ὅπερ (ἐστὶν) ἀδύνατον) ; Absurde : « ce qui est absurde » (ὅπερ (ἐστὶν) ἄτοπον)].
Conv. pars : converse partielle de la Proposition N ; ut. N : sa preuve est fondée sur la Proposition N ; util. in N : elle est utilisée pour la première fois dans la Proposition N.

a. Raisonnements par réduction à l'impossible ou à l'absurde

1. $(\neg\theta \to \alpha \wedge \neg\alpha) \to \theta$
   1'. $(\neg\theta \to \alpha \wedge \beta) \to \theta$ (avec $\alpha \wedge \beta = \varnothing$, *i.e.* $\beta \subset \neg\alpha$)
2. $(\neg\theta \to \beta) \to \theta$ avec β fausse [car β fausse → ¬β vraie, donc $\neg\theta \to \neg\beta$ et $(\neg\theta \to \beta \wedge \neg\beta)$]
   2'. $(\neg\theta \to \neg\alpha) \to \theta$ [avec α principe (ἀρχή) de la théorie : $\neg\alpha = \beta$ fausse]
   2''. $(\neg\theta \to \neg P) \to \theta$ [avec P proposition démontrée de la théorie : $\neg P = \beta$ fausse]
3. $(\neg\theta \to \theta) \to \theta$ ou plutôt 1''. $(\neg\theta \to \theta \wedge \neg\theta) \to \theta$
   [car $\neg\theta \to \neg\beta$ et $(\neg\theta \to \theta \wedge \neg\theta)$] *Consequentia mirabilis*
4. Dans le cas où θ peut s'interpréter comme une conditionnelle de la forme : « $p \wedge q \to r$ », on montre que $p \wedge \neg r \to \neg q$ (contraposition composée).
5. $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ (contraposition simple).

Livre	Prop.	Argument ponctuel	Argument partiel	Argument global	Caractérisation logique de la réduction	Qualif. de la réd.	Insertion déductive (conversion, première utilisation)	Contenu
I	4	x (*EPP*)			2' ({NC 9})	Imposs.	{interpolation !}	Superposition
	6			x	1'	Absurde	**Conv. pars I. 5** ; ut. I. 4 ; util. in II. 4	Égalité
	7			x	1'	Imposs.	Lemme pour I. 8 (assertorique négatif)	Construction impossible
	14			x	1'	Imposs.	**Conv. pars I. 13** ; ut. I. 13 ; util. in I. 45	Alignement
	26			x (cas 1)	1'	Imposs.		Égalité
				x (cas 2)	2'' (I. 16)	Imposs.		Égalité
	27			x	2'' (I. 16)	Imposs.	Conv. pars de I. 29 !	Parallélisme
	39			x	1'	Imposs.	**Conv. pars I. 37** ; ut. I. 37 ; util. in VI. 2	Parallélisme
	{40}			x	1'	Imposs.	**Conv. pars I. 38** ; ut. I. 38 ; non util.	Parallélisme
III	1			x	1'	Imposs.		Détermination du centre
	2			x	1'	Imposs.		Corde et cercle
	4			x	1'	Imposs.	Conv. pars III. 3 ; ut. III. 3 ; non util.	Résultat négatif
	5			x	1'	Imposs.		Résultat négatif (concentricité)
	6			x	1'	Imposs.		Résultat négatif (concentricité)
	7^c		x		2'' (III. 7^b)	Imposs.		Résultat limitatif (2 seulement)
	8^e		x		2'' (III. 8^{bd})	Imposs.		Résultat limitatif (2 seulement)
	10			x	2'' (III. 5)	Imposs.		Résultat négatif (incidence)
	11			x	1'	Imposs.		Incidence

	{12}			x	1’	Imposs.	Cas de fig. complétant III. 11 (Héron ?)	Incidence
	13			x (cas 1)	1’	Imposs.	ut. III. 11	Résultat négatif (tangence)
				x (cas 2)	1’	Absurde		Résultat négatif (tangence)
	16^{a}		x		2” (I. 17)	Imposs.		Tangence
	16^{b}		x		1’	Imposs.		Résultat négatif (unicité ?)
	18			x	1’	Imposs.		Perpendicularité
	19			x	1’	Imposs.	Conv. pars III. 18; ut. III. 18; util. in III. 32	Incidence
	23			x	2” (I. 16)	Imposs.	Lemme pour III. 24	Construction impossible
	24			x	2” (III. 10)	Imposs.		Superposition
	27			x	1’	Imposs.	Conv. pars III. 26; ut. III. 26; util. in III. 29	Égalité
IV	4	x (*EPP*)			2” (III. 16^{a})	Absurde		Inscription (tangence)
	8	x (*EPP*)			2” (III. 16^{a})	Absurde		Inscription (tangence)
IV	13	x (*EPP*)			2” (III. 16^{a})	Absurde		Inscription (tangence)
V	18			x	1’	Imposs.	Formulée comme V. 17 conv.; ut. V. 17; util. in V. 24	Proportion par composition
VI	7			x (cas 1)	1’	Absurde		Similitude
				x (cas 2)	2” (I. 17)	Imposs.		Similitude
	26			x	1’	Imposs.	Conv. pars VI. 24; ut. VI. 24; util. in VI. 27	Diagonale commune
VII	1			x	1’	Imposs.		Coprimarité (résultat négatif)
	2^{th}		x		1’	Imposs.		Maximalité (pgcd)
	3^{th} (2)		x (2 cas)		1’	Imposs.		Maximalité(pgcd)
	20			x	1’ et 4	Imposs.		Comesure
	21			x	2’ (Df. VII.13)	Imposs.		Minimalité
	22			x	1’ et 4	Imposs.	Conv. VII. 21 ; ut. VII. 20 ; util. in VIII. 2-3	Coprimarité
	23			x	2’ (Df. VII.13) et 4	Imposs.		Coprimarité
	24			x	2’ (Df. VII.13) et 4	Imposs.		Coprimarité
	28 (2)			x (2 cas)	2’ (Df. VII.13) et 4	Imposs.		Coprimarité
	29			x	2’ (Df. VII.12)	Imposs.		Coprimarité
	31	x			2	Imposs.		Existence diviseur premier
	33^{th}		x		1’	Imposs.		Minimalité
	34^{th} (2)		x (2 cas)		1’	Imposs.		Minimalité (ppcm)
	35			x	1’ et 4	Imposs.		Comesure
	36^{th}(2)		x (2 cas)		1’	Imposs.		Minimalité (ppcm)
	39^{th}		x		1’	Imposs.		Minimalité (ppcm)
VIII	1			x	1’	Imposs.		Minimalité
	4^{th} (2)		x (2 cas)		1’	Imposs.		Minimalité
	6			x	En fait, 2 preuves[56]			Énoncé négatif (divisibilité)

[56] Voir *infra* Annexe V : probablement une preuve initiale par réd. à l’imp. (“*consequentia mirabilis*” ?) mutilée, puis une seconde (Théon ?), directe. Le texte est contaminé.

IX	12			x	2’ (Df. VII.13)	Imposs.		Déterm. de diviseurs premiers
	13	x			2’ (Df. VII.12)	Imposs.		Résultat négatif (primarité)
		x			2’ (Df. VII.12)	Imposs.		Comesure
		x			1	¬ Hyp.		Résultat négatif (altérité)
		x			2’ (Df. VII.12)	Imposs.		Résultat négatif (coprimarité)
		x			2’ (Df. VII.12)	Imposs.		Comesure
				x	2’ (Df. VII.12)	Absurde		Détermination de diviseurs
	14			x	1’ et 4	Imposs.		Déterm. de diviseurs premiers
	16			x	2’ (Df. VII.13)	Absurde		Résultat négatif (existence)
	17			x	2’ (Df. VII.13) et 4	Imposs.		Résultat négatif (existence)
	18	x			2” (IX. 16) + 1	Absurde		Résultat négatif (existence)
	19	x			2” (IX. 17) + 2’ (Df. VII.13)	Imposs.		Résultat négatif (existence)
		x			1	Absurde		Résultat négatif (existence)
	20	x			1’	Absurde		Résultat négatif (altérité)
IX	30			x	1 et 4	Absurde		Comesure
	31			x	2’ (Df. VII.13) et 4	Imposs.		Coprimarité
	33		x		1	Absurde		Résultat limitatif (classification)
	36	x			1 ou 3	Imposs.		Détermination de diviseurs
X	2			x	1’	Imposs.		Résultat négatif (incommens.)
	3^{th}		x		1’	Imposs.		Maximalité
	4^{th}		x		1’	Imposs.		Maximalité
	13			x	1 et 4	Imposs.	Malgré qualif., simple réd. logique à X. 12	Résultat négatif (incommens.)
	16 (2)			x (2 cas)	1	Imposs.	Malgré qualif., simple réd. logique à Df. X. 1	Résultat négatif (incommens.)
	26			x	1	Imposs.		Résultat négatif (inexprimab.)
	42			x	2” (X. 26)	Absurde		Résultat limitatif (unicité)
	43			x	2” (X. 26)	Absurde		Résultat limitatif (unicité)
	44			x	<2” (X. 42)>	—	La fin de la Proposition est corrompue.	Résultat limitatif (unicité)
	45			x	2” (X. 26)	Imposs.		Résultat limitatif (unicité)
	46			x	2” (X. 26)	Imposs.		Résultat limitatif (unicité)
	47			x	2” (X. 42)	Absurde		Résultat limitatif (unicité)
	79			x	2” (X. 26)	Imposs.		Résultat limitatif (unicité)
	80			x	2” (X. 26)	Imposs.		Résultat limitatif (unicité)
	81			x	2” (X. 73)	Imposs.		Résultat limitatif (unicité)
	82			x	2” (X. 26)	Imposs.		Résultat limitatif (unicité)
	83			x	2” (X. 26)	Imposs.		Résultat limitatif (unicité)
	84			x	2” (X. 79)	Imposs.		Résultat limitatif (unicité)
	111			x	2” (X. 73)	Imposs.		Résultat négatif (altérité)

XI	**1**			x	2’ (Df. I.17)	Imposs.		Résultat négatif (incidence)
	2			x	2” (XI. 1)	Absurde		Incidence
	3			x	2’ ({NC. 9})	Absurde		Incidence
	5			x	1’	Imposs.		Coplanéité
	7			x	2’ ({NC. 9})	Imposs.		Coplanéité
	13			x	1’	Imposs.		Résultat négatif (unicité)
	14			x	2” (I. 17)	Imposs.		Parallélisme
	19			x	2” (XI. 13)	Imposs.		Perpendicularité
	23	x			1’	Absurde		Résultat négatif (inégalité)
		x			1’	Absurde		Résultat négatif (inégalité)
XII	2			x (cas 1)	1’	Imposs.	*Idem* in ***b***	Résultat négatif (inégalité <)
				x (cas2)	2” (XII. 2.1)	Imposs.	*Idem* in ***b***	Résultat négatif (inégalité >)
	5			x (cas 1)	1’	Imposs.	*Idem* in ***b***	Résultat négatif (inégalité <)
				x (cas2)	2” (XII. 5.1)	Absurde	Imposs. in ***b*** !	Résultat négatif (inégalité >)
	10			x (cas 1)	1’	Imposs.	*Idem* in ***b****,* XII. 9	Résultat négatif (inégalité >)
				x (cas2)	1’	Imposs.	*Idem* in ***b****,* XII. 9	Résultat négatif (inégalité <)
	11			x (cas 1)	1’	Absurde	Imposs. in ***b*** !	Résultat négatif (inégalité <)
				x (cas2)	2” (XII. 11.1)	Imposs.	*Idem* in ***b***	Résultat négatif (inégalité >)
	12			x (cas 1)	1’	Imposs.	Absurde in ***b****,* XII. 10 !	Résultat négatif (inégalité <)
				x (cas2)	2” (XII. 12.1)	Imposs.	*Idem* in ***b****,* XII. 10	Résultat négatif (inégalité >)
	18			x (cas 1)	1’	—	Imposs. in ***b****,* XII. 17	Résultat négatif (inégalité <)
				x (cas2)	2” (XII. 18.1)	Imposs.	*Idem* in ***b****,* XII. 17	Résultat négatif (inégalité >)
Total		17 (11)	18 (13)	84 (72)			Soit 119 arguments dans 96 Propositions	

b. Preuves par simple réduction logique (17 pour 16 Propositions)

Abréviations spécifiques : « A : C » : rapport de A à C ; « A : B :: C : D » : proportion ou identité de rapports ; « A / B » : A mesure (divise) B ; « A \ B » : A ne mesure pas B.

Propos.	**Contenu**	**Réduite à**
I. 8	Cas d'égalité de triangles	I. 7 (construction impossible)
I. 19	$B > C \Rightarrow AC > BA$	I. 5 ($AC = BA \Rightarrow B = C$) et I. 18 [$AC < BA$ ($\Leftrightarrow BA > AC$) $\Rightarrow C > B$ ($\Leftrightarrow B < C$)]
I. 25	$BC > EF \Rightarrow A > D$	I. 4 ($A = D \Rightarrow BC = EF$) et I. 24 [$A < D$ ($\Leftrightarrow D > A$) $\Rightarrow EF > BC$ ($\Leftrightarrow BC < EF$)]
I. 29[a]	AB // CD $\Rightarrow$ AGH = GHD (alternes-internes)	Demande 5 (= postulat des parallèles)
III. 16[c]	Angle du ½ cercle > angle aigu ; angle corniculaire < angle aigu	III. 16[b] (Impossibilité d'intercaler une droite entre la circonférence et la « tangente »)
V. 9	$A : C :: B : C \Rightarrow A = B$	V. 8 ($A > B \Rightarrow A : C > B : C$)
V. 10	$A : C > B : C \Rightarrow A > B$	V. 7 ($A = B \Rightarrow A : C :: B : C$) et V. 8 [$A < B$ ($\Leftrightarrow B > A$) $\Rightarrow B : C > A : C$ ($A : C < B : C$)]
VII. 2	Détermination du PGCD	VII. 1 (critère anthyphérétique de coprimarité)
VIII. 7	(A, B, C, D) proportion continue A/D $\Rightarrow$ A/B	VIII. 6 (A, B, C, D) proportion continue A\B $\Rightarrow$ A\aucun autre)
VIII. **16**	A.A\B.B $\Rightarrow$ A\B et A\B $\Rightarrow$ A.A\B.B	VIII. 14 (A/B $\Rightarrow$ A.A/B.B et A.A/B.B $\Rightarrow$ A/B)
VIII. **17**	A.A.A\B.B.B $\Rightarrow$ A\B et A\B $\Rightarrow$ A.A.A\B.B.B	VIII. 15 (A/B $\Rightarrow$ A.A.A/B.B.B et A.A.A/B.B.B $\Rightarrow$ A/B)
IX. **10**	Si ($1, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$) proportion continue, alors : A_1 non carré $\Rightarrow A_3, A_5 \ldots$ non carrés A_1 non cube $\Rightarrow A_1, A_2, A_4, A_5, A_7, A_8 \ldots$ non cubes	IX. 8 [($1, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$) proportion continue $\Rightarrow A_2, A_4 \ldots$ carrés et $A_3, A_6 \ldots$ cubes] VIII. 24-25 [(A, B) semblables et B carré (resp. cube) $\Rightarrow$ A carré (resp. cube)] IX. 6 (A.A = cube $\Rightarrow$ A cube)
X. **7**	(A, B) incommensurables $\Rightarrow$ non [A : B :: m : n] avec (m, n) entiers	X. 6 [A : B :: m : n avec (m, n) entiers $\Rightarrow$ (A, B) commensurables]
X. **8**	non (A : B :: m : n) [(m, n) entiers] $\Rightarrow$ (A, B) incommensurables	X. 5 [(A, B) commensurables $\Rightarrow$ A : B :: m : n avec (m, n) entiers]
X. **9[c]**	(A, B) incommensurables $\Rightarrow$ non [$A^2 : B^2 :: m^2 : n^2$] avec (m, n) entiers	X. 9[b] [($A^2 : B^2 :: m^2 : n^2$) $\Rightarrow$ (A, B) commensurables]
X. **9[d]**	non [$A^2 : B^2 :: m^2 : n^2$] [(m, n) entiers] $\Rightarrow$ (A, B) incommensurables	X. 9[a] [(A, B) commensurables $\Rightarrow$ ($A^2 : B^2 :: m^2 : n^2$)]
XI. 16	Si (P_1, P_2) plans parallèles coupés par P, alors $P_1 \cap P$ // $P_2 \cap P$	XI. 1 ((E, F) $\in$ P $\Rightarrow$ droite EF $\subset$ P); Df. XI. 8 (plans parallèles = non sécants) Df. I. 23 (droites parallèles = non sécantes)

c. Arguments indirects dans le matériel ajouté aux Éléments d'Euclide (I-XIII)

Abréviations spécifiques : *alit.* : preuve alternative (= preuve n°2) ; N/N+1 : lemme intercalé entre les Prop. N et N+1 ; *vulgo* : proposition de l'*editio princeps* rejetée par Heiberg ; N+ : ajout à la Prop. N.

Livre	Proposition	Argument ponctuel	Argument partiel	Argument global	Caractérisation logique de la réduction	Qualification	Contenu
I	40			x	1'	Impossible	Parallélisme
III	7*alit*		x		1'	Impossible	Construction impossible
	8*alit*		x		1'	Impossible	Construction impossible
	9*alit*			x	1'	Impossible	Caractérisation du centre
	10*alit*			x	2" (III. 5)	Impossible	Résultat négatif (incidence)
	11+	x			1'	Impossible	Incidence
	12			x	1'	Impossible	Incidence
VI	22/23			x	1'	Impossible	Congruence
VII	31*alit*			x	1	Absurde	Existence diviseur premier
X	9Por+	x			5	Absurde	Résultat négatif (incomm.)
	13*vulgo*			x	1 et 4	Absurde (?)	Résultat négatif (incomm.)
	28/29b			x (cas 1)	1'	Absurde	Résultat négatif (non carré)
				x (cas 2)	1'	Absurde	Résultat négatif (non carré)
	38+	x			1	Absurde	Résultat négatif (irrational.)
	117*vulgo*	x			1'	Absurde	Résultat négatif (non unité)
		x			2' (Df. VII.13)	Impossible	Imparité
				x	1	Impossible	Résultat négatif (incomm.)
	117*vulgo alit.*	x			1'	Impossible	Résultat négatif (non unité)
				x	2' (Df. VII.13)	Impossible	Résultat négatif (incomm.)
XI	23+	x			2" (I. 20)	Impossible	Résultat négatif (inégalité)
		x			?	Impossible	Résultat négatif (inégalité)
		x			1'	Absurde	Résultat négatif (inégalité)
		x			1'	Impossible	Résultat négatif (inégalité)
	38*vulgo*			x	2" (I. 17)	Impossible	Incidence
XIII	2/3			x	2" (II. 4)	Impossible	Résultat négatif (inégalité)
	18+			x (cas 1)	2" (XI. 21)	Impossible	Construction impossible
				x (cas 2)	2" (XI. 21)	Impossible	Construction impossible
				x (cas 3)	2" (XI. 21)	Impossible	Construction impossible
				x (cas 4)	2" (XI. 21)	Impossible	Construction impossible
				x (cas 5)	2" (XI. 21)	Absurde	Construction impossible

III. ÉNONCES NEGATIFS DANS LES *ÉLEMENTS* D'EUCLIDE (20 + 3^{p})

Il s'agit de Propositions exprimant un résultat négatif (ou limitatif) de manière assertive :

« Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points » (III. 10, Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο)

ou conditionnelle (négation dans la conclusion).

« Si des nombres en quantité quelconque sont continûment en proportion et que le premier ne mesure pas le deuxième, aucun autre ne mesurera non plus aucun autre » (VIII. 6, Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει).

Les résultats négatifs peuvent aussi être énoncés positivement à l'aide d'un concept négatif ou limitant (**1**) : coprimarité, incommensurabilité, irrationalité. On compte 20 théorèmes à énoncé négatif plus quatre assertions partielles, elles aussi négatives. Les énoncés négatifs ne coïncident pas tout-à-fait avec un sous-ensemble des Propositions à démonstration indirecte, mais presque !

Inventaire :

I. 7

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Sur la même ligne droite, ne seront pas construites, égales chacune à chacune aux deux mêmes droites, deux autres droites, en un point quelconque, différent mais du même côté, et ayant les mêmes limites que les premières.

III. 4

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Si dans un cercle deux droites ne passant pas par le centre se coupent l'une l'autre, elles ne se coupent pas l'une l'autre en deux parties égales.

III. 5

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas le même centre.

III. 6

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Si deux cercles sont tangents l'un à l'autre, ils n'auront pas le même centre.

III. 10

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points.

III. 13

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ’ ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

Un cercle n'est pas tangent à un cercle en plus d'un point, qu'il soit tangent intérieurement ou extérieurement.

III. 16[b]

(Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ’ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου), καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, (καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων).

(La droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d'une extrémité tombera à l'extérieur du cercle), et, dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée ; (en outre, d'une part l'angle du demi-cercle est plus grand, d'autre part l'angle restant plus petit, que tout angle rectiligne aigu).

III. 23

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Sur la même droite, deux segments de cercles semblables et inégaux ne seront pas construits du même côté.

VIII. 6

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Si des nombres en quantité quelconque sont continuement en proportion et que le premier ne mesure pas le deuxième, aucun autre ne mesurera non plus aucun autre.

VIII. 16

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει·
κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Si un nombre carré ne mesure pas un nombre carré, le côté ne mesurera pas non plus le côté.
Et si le côté ne mesure pas le côté, le carré ne mesurera pas non plus le carré.

VIII. 17

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.	Si un nombre cube ne mesure pas un nombre cube, le côté ne mesurera pas non plus le côté. Et si le côté ne mesure pas le côté, le cube ne mesurera pas non plus le cube.

IX. 10

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ [ἑξῆς] ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.	Si des nombres en quantité quelconque sont {continûment} en proportion à partir de l'unité, et que celui qui suit l'unité ne soit pas un carré, aucun autre non plus ne sera un carré excepté le troisième à partir de l'unité et tous ceux [qu'on prend] en en sautant un [sur deux]. Et si celui qui suit l'unité n'est pas un cube, aucun autre non plus ne sera un cube excepté le quatrième à partir de l'unité et tous ceux [qu'on prend] en en sautant deux.

IX. 13

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ, ὁ μέγιστος ὑπ᾽ οὐδενὸς [ἄλλου] μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.	Si des nombres en quantité quelconque sont continûment en proportion à partir de l'unité et que celui qui suit l'unité soit premier, le plus grand ne sera mesuré par aucun {autre} [nombre], excepté ceux qui se trouvent dans les nombres en proportion.

IX. 14

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.	Si un nombre [est] le plus petit qui soit mesuré par des nombres premiers, il ne sera mesuré par aucun autre nombre premier excepté ceux qui le mesurent initialement.

IX. 16

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.	Si deux nombres sont premiers entre eux, ce ne sera pas le cas que comme le premier est relativement au deuxième, ainsi soit le deuxième relativement à quelqu'autre [nombre].

IX. 17

᾿Εὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Si des nombres en quantité quelconque sont continûment en proportion et que leurs extrêmes soient premiers entre eux, ce ne sera pas le cas que, comme le premier est relativement au deuxième, ainsi soit le dernier relativement à quelqu'autre [nombre].

X. 7

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Les grandeurs incommensurables n'ont pas comme rapport, l'une relativement à l'autre, celui d'un nombre relativement à un nombre.

X. 9^c & 9^d

τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Et les carrés [décrits] sur les droites incommensurables en longueur n'ont pas comme rapport, l'un relativement à l'autre, celui d'un nombre carré relativement à un nombre carré ;
et les carrés qui n'ont pas comme rapport l'un relativement à l'autre celui d'un nombre carré relativement à un nombre carré, n'auront pas non plus les côtés commensurables en longueur.

X. 26

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Une [aire] médiale ne dépasse pas une [aire] médiale par une [aire] exprimable.

X. 111

῾Η ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Une apotomé n'est pas la même qu'une binomiale.

X. 115^b

(᾿Απὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται), καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

(A partir d'une [droite] médiale sont engendrées des irrationnelles infinies [en multitude]), et aucune n'est la même qu'aucune de celles précédemment [obtenues].

XI. 1

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ.

D'une ligne droite, il n'y a pas une certaine partie dans le plan subjacent et une certaine autre partie dans un [plan] situé en hauteur.

XI. 13

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

A partir du même point, deux droites ne seront pas élevées à angles droits avec le même plan et du même côté.

IV. Le cas particulier de la Proposition VIII. 6

(*i*)	Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.	Si des nombres en quantité quelconque sont continûment en proportion et que le premier ne mesure pas le deuxième, aucun autre ne mesurera non plus aucun autre.
(*ii*)	Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρείτω·	Que des nombres en quantité quelconque A, B, C, D, E, soient continûment en proportion et que A ne mesure pas B.
(*iii*)	λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.	Je dis qu'aucun autre ne mesurera non plus aucun autre.
(*iv*)	Ὅτι μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσιν, φανερόν·	Or d'une part que A, B, C, D, E ne se mesurent pas l'un l'autre consécutivement, c'est évident ;
(*v*)	οὐδὲ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.	car A ne mesure pas B.
(*vi*)	λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.	Je dis de plus qu'aucun autre ne mesurera non plus aucun autre.
(*vii*)	εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω ὁ Α τὸν Γ.	Si, en effet, c'est possible, que A mesure C.
(*viii*)	καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Α, Β, Γ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ οἱ Ζ, Η, Θ.	Et qu'autant que sont A, B, C soient pris autant de nombres, les plus petits de ceux qui ont le même rapport que A, B, C : [soit] F, G, H[57].
(*ix*)	καὶ ἐπεὶ οἱ Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Α, Β, Γ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ τῷ πλήθει τῶν Ζ, Η, Θ, δἰ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ.	Et puisque F, G, H sont dans le même rapport que A, B, C, que la multitude des A, B, C est égale à la multitude des F, G, H, donc, à égalité [de rang] comme A est à C, ainsi est F relativement à H[58].
(*x*)	καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β, οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Ζ τὸν Η·	Et puisque comme A est relativement à B, ainsi est F relativement à G et que A ne mesure pas B, donc, F ne mesure pas non plus G[59].
(*xi*)	οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Ζ·	Donc F n'est pas une unité ;
(*xii*)	ἡ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ.	car l'unité mesure tout nombre.
(*xiii*)	καί εἰσιν οἱ Ζ, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους	Et F, H sont premiers entre eux[60].
(*xiv*)	[οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ].	{Et donc F ne mesure pas H}.
(*xv*)	καί ἐστιν ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ·	Et comme F est à H, ainsi est A relativement à C ;
(*xvi*)	οὐδὲ ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ.	donc A ne mesure pas non plus C.
(*xvii*)	ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει·	Semblablement alors nous démontrerons qu'aucun autre ne mesurera non plus aucun autre.
(*xviii*)	ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Ce qu'il fallait démontrer.

De cette Proposition, Euclide déduit immédiatement le résultat arithmétique fondamental suivant (VIII. 7) :

« Si des nombres, en quantité quelconque, sont {continûment} en proportion et que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le deuxième ».

[57] D'après VIII. 2.
[58] D'après VII. 14.
[59] D'après Df. VII. 21 & Prop. VII. 4.
[60] D'après VIII. 3.

A la lumière de ce qui précède, le texte transmis n'est pas satisfaisant. Nous trouvons une formule d'initialisation (*vii*) canonique, mais une partie seulement (*xvii*) de la formule de clôture et pas de qualification (impossible ou absurde). L'hypothèse du raisonnement indirect « que A mesure C » n'intervient quasiment pas dans ledit raisonnement, sauf à préciser la cardinalité de la suite des représentants minimaux introduits (F, G, H), ici 3. En outre, il y a divergence au niveau des manuscrits grecs.

La formule d'initialisation (*vii*) retenue par Heiberg se trouve seulement dans le manuscrit ***P***. Dans les manuscrits ***BVφbq***, on a en quelque sorte un troisième diorisme : « λέγω γὰρ, ὅτι οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ. ὅσοι γὰρ ... » (en effet, je dis que A ne mesure pas C. En effet, qu'autant …). L'assertion (*xiv*) {Et donc F ne mesure pas H} n'existe pas dans ***P***. Il y a aussi divergence à l'intérieur de la tradition arabe Ishâq-Thâbit (deux preuves distinctes) et divergence entre une partie de ladite tradition et une partie des manuscrits grecs.

Du point de vue mathématique, on voit qu'une fois établie la conjonction de (*xi*) et (*xiii*), on a une bifurcation :

— Soit de (*xi*) et (*xiii*), on déduit (*xiv*) [mss ***BVφbq***], puis, rappelant (*xv*), on en déduit (*xvi*) ;

— Soit, après (*xi*), (*xiii*), (v*x*), on rappelle l'hypothèse du raisonnement indirect : « or A mesure C » ; et donc « F mesure H, tout en étant premier avec H » ;

Dans la première hypothèse, compte tenu du troisième diorisme (dans ***BVφbq***), on a simplement une preuve ***directe*** de l'assertion négative « A ne mesure pas C ». Il n'y a donc pas besoin de formule de qualification. Dans la seconde hypothèse, on a bien un raisonnement indirect — comme le suggère la formule (*vii*) dans ***P***, aboutissant à une contradiction. Il faut alors supposer qu'une formule du genre « ce qui est impossible » a été perdue. Venaient alors (*xvi*)-(*xvii*), formule de clôture normale pour la preuve indirecte d'un énoncé négatif (sans négation de l'hypothèse du raisonnement indirect en « οὐκ ἄρα »). Cf. le schéma **2** du tableau ci-dessus.

Un troisième scénario est encore envisageable : on considère qu'à la fin de (*xv*), on a perdu : « donc A ne mesure pas C », pour avoir la forme $(\neg\theta \rightarrow \theta) \rightarrow \theta$, *consequentia mirabilis* avec θ = « A ne mesure pas non plus C », ¬θ = « A mesure C ». Le texte aurait pu être expurgé à cause de la (mauvaise) perception d'une *quasi* dittographie : « οὐκ ἄρα μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ · οὐδὲ ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ », la première assertion appartenant à la preuve de $(\neg\theta \rightarrow \theta)$, la seconde étant l'énoncé de « donc θ ». Je ne crois guère à cette troisième possibilité qui a cependant comme mérite de faire voir qu'une preuve conçue selon le modèle de la *consequentia mirabilis,* rédigée dans la langue naturelle à propos d'une configuration particulière[61], risque de suggérer une corruption textuelle ou une redondance et donc d'être "aménagée" au cours de la transmission.

[61] Et non pas présentée sous forme d'un schéma abstrait : « si pas le premier, le premier ; donc le premier ». De Sextus Empiricus, *Contre les logiciens,* II, § 292, on peut extraire l'argument : « si pas le premier, le premier ; or le premier ou pas le premier ; donc le premier » (εἰ οὐ τὸ πρῶτον, τὸ πρῶτον · ἤτοι τὸ πρῶτον ἢ οὐ τὸ πρῶτον · τὸ πρῶτον ἄρα), proche de ce schéma abstrait. Sextus souligne les difficultés que soulevait cet argument, y compris aux yeux des logiciens eux-mêmes.

En fait, la tradition arabe d'Ishâq-Thâbit permet de trancher dans ces différentes hypothèses mathématiques :

- Le groupe dit B de ladite tradition possède une preuve *directe* de l'assertion négative « A ne mesure pas C », mathématiquement proche de ce que l'on trouve dans les manuscrits ***BVϕbq*** (dits théonins par Heiberg) malgré de petites divergences textuelles.
- Le groupe dit A possède deux preuves, la seconde coïncidant avec celle du groupe B, la première, indirecte, correspondant à la reconstruction que j'ai faite dans mon deuxième scénario.

J'en tire la conclusion qu'il a existé deux preuves, l'une par réduction à l'impossible, l'autre directe. Compte tenu de la systématicité euclidienne, je considère que la preuve indirecte d'une assertion négative est certainement la plus authentique et que la preuve ostensive est sans doute plus récente, élaborée quand on s'est rendu compte du rôle insignifiant que jouait l'hypothèse $\neg\theta$ = « que A mesure C » dans la première. Heiberg n'a pas été très cohérent en écartant le diorisme des manuscrits ***BVϕbq*** tout en maintenant la séquence (*xiv*), même entre crochets carrés ([]).

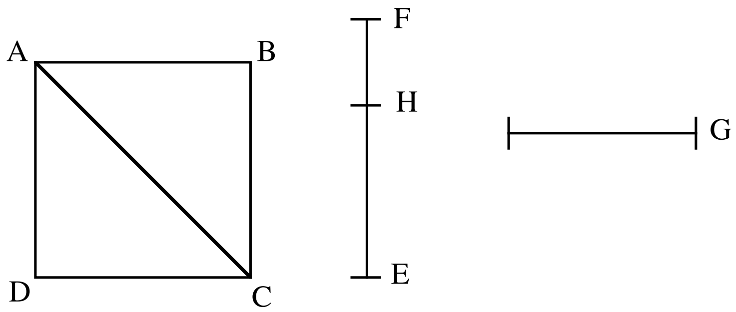
V. Le cas particulier de la Proposition X. 117 *vulgo* et la preuve ostensive de Gardies

a. X. *117vulgo* Heiberg.

Donnons d'abord le texte de la Proposition tel qu'il est édité par Heiberg :

1	Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.	Qu'il nous soit proposé de démontrer que la diagonale des figures carrées est incommensurable en longueur avec le côté.
2	Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ·	Soit le carré ABCD et AC sa diagonale ;
3	λέγω, ὅτι ἡ ΓΑ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.	je dis que CA est incommensurable en longueur avec AB.
4	Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος·	Si, en effet, c'est possible, qu'elle soit commensurable.
5	λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν.	Je dis qu'il s'en suivra que le même nombre est pair et impair.
6	φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ.	Il est certes bien évident que le [carré] sur AC est double de celui sur AB.
7	καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ, ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.	Et puisque CA est commensurable avec AB, la [droite] CA, relativement à AB, a comme rapport celui d'un nombre relativement à un nombre.
8	ἐχέτω, ὃν ὁ ΕΖ πρὸς Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς·	Que ce soit celui de EF relativement à G et que EF, G soient les plus petits parmi ceux ayant le même rapport qu'eux.
9	οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ.	EF n'est donc pas une unité.
10	εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η, ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τοῦ Η ἀριθμοῦ·	Si, en effet, EF était une unité, et qu'il ait comme rapport relativement à G, celui de AC relativement à AB, et que AC soit plus grande que AB, EF serait aussi plus grande que le nombre G ;
11	ὅπερ ἄτοπον.	ce qui est absurde.
12	οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ·	Ce n'est donc pas le cas que EF soit une unité ;
13	ἀριθμὸς ἄρα.	[c'est] donc un nombre.
14	καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η.	Et puisque comme CA [est] relativement à AB, ainsi est EF relativement à G, donc aussi comme le [carré] sur CA [est] relativement à celui sur AB, ainsi [est] celui sur EF relativement à celui sur G.
15	διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η·	Or celui sur CA est double de celui sur AB ; donc celui sur EF est aussi double de celui sur G ;
16	ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν.	celui sur EF est donc pair ; de sorte que EF lui-même est aussi pair.
17	εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἦν,	Si, en effet, il était impair, le carré [décrit] sur lui serait aussi impair,
18	ἐπειδήπερ, ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὁ ὅλος περισσός ἐστιν·	puisque si des nombres impairs en quantité quelconque sont ajoutés, et que leur multitude est impaire, le tout est impair (IX. 23) ;
19	ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστιν.	le [nombre] EF est donc pair.
20	τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ.	Qu'il soit coupé en deux [parties égales] en H.
21	καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων [αὐτοῖς], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.	Et puisque les [nombres] EF, G sont les plus petits parmi ceux qui ont le même rapport qu'{eux}, ils sont premiers entre eux.

22	καὶ ὁ EZ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ H.	Et EF est pair ; donc G est impair.
23	εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς EZ, H δυὰς ἐμέτρει· πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ· πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους·	Si, en effet (Eἰ γὰρ), il était pair, une dyade mesurerait EF, G — car tout pair a une partie moitié — qui sont premiers entre eux ;
24	ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.	ce qui est impossible.
25	οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ H·	Ce n'est donc pas le cas que G soit pair ;
26	περισσὸς ἄρα.	[il est] donc impair.
27	καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ EZ τοῦ EΘ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ EZ τοῦ ἀπὸ EΘ.	Et puisque EF est double de EH, le [carré] sur EF est quadruple donc de celui sur EH.
28	διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ H τοῦ ἀπὸ EΘ·	Or celui sur EF est double de celui sur G ; donc celui sur G est double de celui sur EH ;
29	ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ H.	donc celui sur G est pair.
30	ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ H· ἀλλὰ καὶ περισσός·	D'après ce qui a été dit G est donc pair ; mais aussi impair ;
31	ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.	ce qui est impossible.
32	οὐκ ἄρα σύμμετρος ἡ ΓA τῇ AB μήκει·	CA n'est donc pas commensurable en longueur avec AB.
33	ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Ce qu'il fallait démontrer.



Cette Proposition est inauthentique bien qu'insérée dans tous les manuscrits principaux, à la toute fin du Livre X, après plusieurs autres ajouts comme des preuves alternatives. Qui plus est, son texte a probablement souffert en cours de transmission. Nous en donnons une version “expurgée”, correspondant à peu près au canon euclidien, en supprimant tous les items interpolatifs (*IPI*)[62] : la "prophétie" (5), l'appel à l'évidence (6), le cas de figure (9-13 inspiré par la preuve *aliter* qui suit dans les manuscrits ?), inutile ici, et les justifications postposées (17-19, 23-26, 30^{p}). En conformité avec le schéma euclidien, j'ajoute l'assertion 32^{bis}.

Attention ! Ce texte est un artefact. Il est simplement destiné à permettre d'évaluer par comparaison la preuve ostensive proposée par J.L. Gardies.

[62] Sur cette notion, voir la notice dans [Euclide-Vitrac, 2001], pp. 32-71.

b. Version “expurgée”

1	Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.	Qu'il nous soit proposé de démontrer que la diagonale des figures carrées est incommensurable en longueur avec le côté.
2	Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ·	Soit le carré ABCD et AC sa diagonale ;
3	λέγω, ὅτι ἡ ΓΑ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.	je dis que CA est incommensurable en longueur avec AB.
4	Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος·	Si, en effet, c'est possible, qu'elle soit commensurable.
7	καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ, ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.	Et puisque CA est commensurable avec AB, la [droite] CA, relativement à AB, a comme rapport celui d'un nombre relativement à un nombre.
8	ἐχέτω, ὃν ὁ ΕΖ πρὸς Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς·	Que ce soit celui de EF relativement à G et que EF, G soient les plus petits parmi ceux ayant le même rapport qu'eux.
14	καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η.	Et puisque comme CA [est] relativement à AB, ainsi est EF relativement à G, donc aussi comme le [carré] sur CA [est] relativement à celui sur AB, ainsi [est] celui sur EF relativement à celui sur G.
15	διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η·	Or celui sur CA est double de celui sur AB ; donc celui sur EF est aussi double de celui sur G ;
16	ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν.	celui sur EF est donc pair ; de sorte que EF lui-même est aussi pair.
20	τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ.	Qu'il soit coupé en deux [parties égales] en H.
21	καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων [αὐτοῖς], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.	Et puisque les [nombres] EF, G sont les plus petits parmi ceux qui ont le même rapport qu'{eux}, ils sont premiers entre eux.
22	καὶ ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η.	Et EF est pair ; donc G est impair.
27	καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ ΕΘ.	Et puisque EF est double de EH, le [carré] sur EF est quadruple donc de celui sur EH.
28	διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ ΕΘ·	Or celui sur EF est double de celui sur G ; donc celui sur G est double de celui sur EH ;
29	ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η.	donc celui sur G est pair.
"30"	ἄρτιος ἄρα ὁ Η· ἀλλὰ καὶ περισσός·	G est donc pair ; mais aussi impair ;
31	ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.	ce qui est impossible.
32	οὐκ ἄρα σύμμετρος ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ μήκει·	Ce n'est pas le cas que CA soit commensurable en longueur avec AB.
32^{bis}	[ἀσύμμετρός ἄρα ἐστιν·	Elle est donc incommensurable] ;
33	ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	ce qu'il fallait démontrer.

Pour convertir les preuves euclidiennes, Gardies s'autorise à les reformuler dans le langage du calcul des prédicats du premier ordre et à les modifier pour en faire une chaîne linéaire : 1) → 2) →3) → 4) … Je reprends ci-dessous les formalisations qu'il donne de la preuve que l'on trouve dans les manuscrits des *Éléments* pour X. 117*vulgo* et pour la preuve ostensive déclarée équivalente ([Gardies, 1991] respectivement pp. 33 & 35).

Preuve indirecte	Preuve ostensive
1) $\exists$ m, n (m et n, nombres premiers entre eux & d : c :: m : n)	11') $\forall$ m, n (m pair & n non pair) $\Rightarrow$ n non pair
2) $\exists$ m, n [m et n, nombres premiers entre eux & T(d) : T(c) :: m.m : n.n]	10') $\forall$ m, n (m pair & n non pair) $\Rightarrow$ n.n non pair
3) $\exists$ m, n (m et n, nombres premiers entre eux & m.m = 2n.n)	9') $\forall$ m, n, p (m pair & n non pair) $\Rightarrow$ n.n $\neq$ 2p.p
4) $\exists$ m, n (m et n, nombres premiers entre eux & m.m = 2n.n & m.m pair)	8') $\forall$ m, n, p (m pair & n non pair) $\Rightarrow$ non (m.m = 4p.p & n.n = 2p.p)
5) $\exists$ m, n (m et n, nombres premiers entre eux & m.m = 2n.n & m pair)	7') $\forall$ m, n, p (m pair & n non pair) $\Rightarrow$ non (m = 2p & n.n = 2p.p)
6) $\exists$ m, n p (m et n, nombres premiers entre eux & m.m = 2n.n & m pair & m = 2p)	6') $\forall$ m, n, p [m et n premiers entre eux $\Rightarrow$ non (m pair & m = 2p & m.m = 2n.n)]
7) $\exists$ m, n p (m pair & m = 2p & n non pair & m.m = 2n.n)	5') $\forall$ m, n, p [m et n premiers entre eux $\Rightarrow$ non (m pair & m.m = 2n.n)]
8) $\exists$ m, n p (m pair & m.m = 4p.p & n non pair & m.m = 2n.n)	4') $\forall$ m, n [m et n premiers entre eux $\Rightarrow$ non (m.m pair & m.m = 2n.n)]
9) $\exists$ m, n p (m pair & n non pair & n.n = 2p.p)	3') $\forall$ m, n (m et n premiers entre eux $\Rightarrow$ m.m $\neq$ 2n.n)
10) $\exists$ m, n (m pair & n non pair & n.n pair)	2') $\forall$ m, n [m et n premiers entre eux $\Rightarrow$ T(d) : T(c) $\neq$ m.m : n.n]
11) $\exists$ m, n (m pair & n non pair & n pair)	1') $\forall$ m, n (m et n premiers entre eux $\Rightarrow$ d : c $\neq$ m : n)
ce qui est absurde	Donc (c, d) sont incommensurables.

Il me semble que deux transitions de la preuve ostensive de Gardies ne vont pas tout à fait de soi : comment justifier 7') $\Rightarrow$ 6') et 2') $\Rightarrow$ 1') ?

Pour la première, Gardies ne dit rien et je propose, “à l'ancienne” :

Soient m, n, deux nombres premiers entre eux.

Alors, ou bien (m est pair et n est non pair) ou bien (m est impair et n est impair) ou bien (m est impair et n est pair).

Si m et n sont impairs, alors m.m et n.n sont impairs ; or 2n.n est pair. Donc m.m n'est pas égal à 2n.n.

Si m est impair et n est pair alors m.m est impair. Donc m.m n'est pas égal à 2n.n.

Si m est pair et n est non pair, soit p la moitié de n.

Puisque n est impair, n.n est impair.

Or m = 2p. Donc m.m = 4p.p qui est pair. Soit 2p.p sa moité, qui est paire.

Donc n.n n'est pas égale à 2p.p. Leurs doubles ne sont donc pas égaux.

Donc m.m n'est pas égal à 2n.n.

Donc, si m et n premiers entre eux $\Rightarrow$ m.m n'est pas égal à 2n.n. (6')

Donc, si m et n sont premiers entre eux, le rapport de leurs carrés ne peut pas être le rapport double.

Or, le rapport entre le carré décrit sur la diagonale du carré au carré décrit sur son côté est le rapport double.

Donc, le rapport du carré décrit sur la diagonale du carré au carré décrit sur son côté ne peut pas être le rapport du carré de deux nombres premiers entre eux.

Donc le rapport de la diagonale du carré à son côté ne peut pas être le rapport de deux nombres premiers entre eux.

Autrement dit, pour justifier correctement 7') ⇒ 6'), il aurait donc fallu introduire un *quasi* Lemme arithmétique négatif :

« Si deux nombres sont premiers entre eux, le rapport de leurs carrés n'est pas le rapport double »,

démontré ostensivement par disjonction de trois cas de figures. Compte tenu des choix stylistiques euclidiens que nous avons observés précédemment, un tel énoncé aurait sans doute reçu de sa part une preuve indirecte !

Pour justifier 2') ⇒ 1'), [Gardies, 1991], p. 36 semble prêt à accepter la contraposition :

$\forall$ m, n m et n premiers entre eux $\Rightarrow$ d : c $\neq$ m : n car, sinon d : c :: m : n . D'où T(d) : T(c) :: m.m : n.n ; ce qui n'est pas le cas.

Une unique contraposition serait (je cite) « l'état minimal du raisonnement par l'absurde » et elle est donc davantage acceptable que le raisonnement indirect.

Au passage, rappelons qu'Euclide n'assimile pas la contraposition à une preuve par l'impossible ou l'absurde. Le “gain logique” que représente la substitution de preuve proposée par Gardies m'échappe complètement. En revanche sa "lourdeur" stylistique par distinction de cas est assez évidente.

VI. LE CONTENU DES REDUCTIONS A L'IMPOSSIBLE OU A L'ABSURDE

Livre	Prop.	Arg. ponctuel	Arg. partiel	Arg. global	Contenu de la réduction
I	4	x			Une certaine superposition partielle contredirait la{NC 9}
	6			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par I. 4) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
	7			x	Incompatibilité de a > b (démontrée par I. 5 et NC 8 car b partie de a) et de a = b (démontrée par I. 5)
	14			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par I. 13 et NC 3) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
	26			x (cas 1)	Incompatibilité de a = b (démontrée par I. 4 et NC 1) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
				x (cas 2)	Contredit I. 16
	27			x	Contredit I. 16
	39			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par I. 37 et NC 1) et de a > b (visible ou par NC 8, car b partie de a)
III	1			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par I. 8 et Dem. 4) et de a > b (visible ou par NC 8, car b partie de a)
	2			x	Incompatibilité de a > b (démontrée par I. 5, 16, 19) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
	4			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par III. 3 et Dem. 4) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
	5			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par Df . I. 15 et NC 1) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
	6			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par Df . I. 15 et NC 1) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
	7^{c}		x		Contredit III. 7^{b}
	8^{e}		x		Contredit III. 8^{bd}
	10			x	Contredit III. 5
	11			x	Incompatibilité de a > b (démontrée par I. 20) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
	13			x (cas 1)	Incompatibilité de a > b (démontrée par III. 11, Df. I. 15 et NC 8) et de a = b (démontrée par Df. I. 15)
				x (cas 2)	Incompatibilité de « AC intérieure à ABCD et ACK (III. 2) » et « ABCD, ACK » extérieurs l'un à l'autre
	16^{a}		x		Contredit I. 17
	16^{b}		x		Incompatibilité de a > b (démontrée par I. 17, 19) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
	18			x	Incompatibilité de a > b (démontrée par I. 17, 19) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
	19			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par III. 18 et Dem. 4) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
	23			x	Contredit I. 16
	24			x	Contredit III. 10
	27			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par III. 26 et NC 1) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
IV	4	x			Contredit III. 16^{a}
	8	x			Contredit III. 16^{a}
	13	x			Contredit III. 16^{a}
V	18			x	Incompatibilité de a > b (démontrée par V. 11, 14, 17) et de a < b (hypothèse)
VI	7			x (cas 1)	Incompatibilité de a > b (démontrée par I. 5, 13, 32 ; V. 9, 11 ; VI. 4) et de a < b (hypothèse)
				x (cas 2)	Contredit I. 17
	26			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par V. 9, 11 ; VI. 24) et de a < b (visible ou par NC 8, car a partie de b)
VII	1			x	Incompatibilité E mesure une unité (démontrée par les "principes" de la mesure) et de E est un nombre (hypothèse)
	2^{th}			x	Incompatibilité de A mesure B (démontrée par les "principes" de la mesure) et A > B (hypothèse)

VII	3^{th} (2)			x (2 cas)	Incompatibilité de A mesure B (démontrée par VII. 2 Por.) et A > B (hypothèse)
	20			x	Contredit la définition du représentant minimal d'un rapport donné
	21			x	Contredit la conjonction de l'hypothèse et de la Df. VII.13
	22			x	Contredit la définition du représentant minimal d'un rapport donné
	23			x	Contredit la conjonction de l'hypothèse et de la Df. VII.13
	24			x	Contredit la conjonction de l'hypothèse et de la Df. VII.13
	28 (2)			x (2 cas)	Contredit la conjonction de l'hypothèse et de la Df. VII.13
	29			x	Contredit la conjonction de l'hypothèse et de la Df. VII.12
	31	x			Impossibilité d'une suite infinie strictement décroissante d'entiers
	33^{th}			x	Contradiction : D est PGCM (A, B, C) et $\neg$[D est PGCM (A, B, C)]
	34^{th} (2)			x (2 cas)	Incompatibilité de A mesure B (démontrée par VII. 17, 19, 20, 21) et A > B (hypothèse)
	35			x	Contradiction : E est PPCM (A, B) et $\neg$[E est PPCM (A, B)]
	36^{th} (2)			x (2 cas)	Incompatibilité de A mesure B (démontrée par VII. 35) et A > B (hypothèse)
	39^{th}			x	Contradiction : G est PPCM (D, E, F) et $\neg$[G est PPCM (D, E, F)]
VIII	1			x	Incompatibilité de A mesure B (démontrée par VII. 14, 20, 21) et A > B (hypothèse)
	4^{th} (2)			x (2 cas)	Incompatibilité de A mesure B (démontrée par VII. 20, 21, 35) et A > B (hypothèse)
	6			x	Pr. 1 : "*Consequentia mirobolante*" tronquée ? A mesure C $\Rightarrow$ $\neg$(A mesure C) … (*donc un* 2^{nd} $\neg$(A mesure C) *à ajouter*)
IX	12			x	Contradiction : E mesure A et $\neg$(E mesure A) "*Cons. mir.*" corrompue ? $\neg$(E mesure A) $\Rightarrow$ E mesure A (*à ajouter* : « ce n'est pas le cas que E ne mesure pas A ; donc E mesure A »; mais on a une addition $\neq$)
	13	x			Incompatibilité de E mesure A (démontrée par IX. 12) et de la conjonction de l'hypothèse avec la Df. VII.12
		x			Incompatibilité de X mesure A (démontrée par IX. 12) et de la conjonction de l'hypothèse avec la Df. VII.12
		x			Contradiction entre « E est le même que l'un des A, B, C » (démontrée par IX. 11) et « il n'est pas le même » (hypothèse)
		x			Incompatibilité de F mesure A (démontrée par IX. 12) et de la conjonction de l'hypothèse avec la Df. VII.12
		x			Incompatibilité de X mesure A (démontrée par IX. 12) et de la conjonction de l'hypothèse avec la Df. VII.12
				x	Incompatibilité de H mesure A (démontrée par IX. 12) et de la conjonction de l'hypothèse avec la Df. VII.12
	14			x	Contredit la définition du plus petit nombre mesuré par des nombres premiers donnés
	16			x	Contredit la conjonction de l'hypothèse et de la Df. VII.13
	17			x	Contredit la conjonction de l'hypothèse et de la Df. VII.13
	18	x			Contradiction : A ne mesure pas C (hypothèse) et A mesure C (démontrée par VII. 19)
	19b	x			Contredit la conjonction de l'hypothèse et de la Df. VII.13
	19d	x			Contradiction : A ne mesure pas D (hypothèse) et A mesure D (démontrée par VII. 19)
	20	x			Incompatibilité G mesure une unité (démontrée par les "principes" de la mesure) et de G est un nombre (hypothèse)
	30			x	Contradiction : B est pair (hypothèse) et B est impair (démontrée par IX. 23)
	31			x	Contredit la conjonction de l'hypothèse et de la Df. VII.13
	33		x		Contradiction : la moitié de A est impaire (hypothèse) et elle est paire (démontrée par une assomption)
	36	x			"*Consequentia mirobolante*" ? O mesure FG et O $\notin$ (A, B, C, D, E, HK, L, M) $\Rightarrow$ O $\in$ (A, B, C, D, E, HK, L, M)
X	2			x	Incompatibilité de E mesure AG (démontrée par les "principes" de la mesure) et E > AG (hypothèse et X. 1)
	3^{th}		x		Incompatibilité de G mesure AF (démontrée par les "principes" de la mesure) et G > AF (hypothèse)

	4$^{\text{th}}$		x		Incompatibilité de G mesure AF (démontrée par X. 3 Por.) et G > AF (hypothèse)
	13			x	Contradiction : comm. (A, C) démontrée par X. 12 et incomm. (A, C) par hypothèse
	16 (2)			x (2 cas)	Contradiction : comm. (AB, BC) démontrée par les “principes” de la mesure et incomm. (AB, BC) par hypothèse
	26			x	Contradiction : EH est exprimable (établie par X. 22) et EH est irrationnelle (établie par II. 4, VI. 1, X. 11, 13, 16, 20)
	42			x	Contredit X. 26
	43			x	Contredit X. 26
	44			x	Contredit X. 42
	45			x	Contredit X. 26
	46			x	Contredit X. 26
	47			x	Contredit X. 42
	79			x	Contredit X. 26
	80			x	Contredit X. 26
	81			x	Contredit X. 79
	82			x	Contredit X. 26
	83			x	Contredit X. 26
	84			x	Contredit X. 79
	111			x	Contredit X. 73
XI	**1**			x	Incompatibilité avec le principe : deux droites distinctes ont un segment commun. *EPP* réduisant à la Df. I. 17
	2			x	Contredit XI. 1
	3			x	Contredit la{NC. 9}
	5			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par XI. 3-4) et de a > b (visible ou par NC 8, car b partie de a)
	7			x	Contredit la{NC. 9}
	13			x	Incompatibilité de a = b (démontrée par XI. 3 et Df. XI. 3) et de a > b (visible ou par NC 8, car b partie de a)
	14			x	Contredit I. 17
	19			x	Contredit XI. 13
	23	x			Incompatibilité de a = 4droits (démontrée par I. 8) et de a < 4droits (hypothèse)
		x			Incompatibilité de b = 4droits (assomption) et de a < 4droits (démontrée par I. 25, 29 ; V. 16 ; VI. 2, 4)
XII	2			x (cas 1)	Incompatibilité de a < b (hypothèse) et de a > b (démontrée par V. 16 ; X. 1 ; XII. 1 et NC 8)
				x (cas2)	Contredit XII. 2.1
	5			x (cas 1)	Incompatibilité de a < b (hypothèse) et de a > b (démontrée par X. 1 ; XII. 3-4 et NC 8)
				x (cas2)	Contredit XII. 5.1
	10			x (cas 1)	Incompatibilité de a > b (démontrée par X. 1, XII. 7 Por.) et de a < b (NC 8)
				x (cas2)	Incompatibilité de a > b (démontrée par X. 1, XII. 7 Por.) et de a < b (NC 8)
	11			x (cas 1)	Incompatibilité de a < b (hypothèse) et de a > b (démontrée par V. 16 ; X. 1 ; XII. 1, 2, 6 et NC 8)
				x (cas2)	Contredit XII. 11.1
	12			x (cas 1)	Incompatibilité de a < b (hypothèse) et de a > b (démontrée par V. 12, 16, 22 ; VI. 4, 5, 6 ; X. 1 ; XII. 8 et NC 8)
				x (cas2)	Contredit XII. 12.1
	18			x (cas 1)	Incompatibilité de a > b (démontrée par V. 16, XII. 17 Por.) et de a < b (NC 8)
				x (cas2)	Contredit XII. 18.1