



**HAL**  
open science

# Effet Efimov à quatre corps pour trois fermions identiques et une particule légère

Yvan Castin, Christophe Mora, Ludovic Pricoupenko

► **To cite this version:**

Yvan Castin, Christophe Mora, Ludovic Pricoupenko. Effet Efimov à quatre corps pour trois fermions identiques et une particule légère. *Physical Review Letters*, 2010, 105, pp.223201. 10.1103/PhysRevLett.105.223201 . hal-00494915v2

**HAL Id: hal-00494915**

**<https://hal.science/hal-00494915v2>**

Submitted on 21 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

# Effet Efimov à quatre corps pour trois fermions identiques et une particule légère

Yvan Castin<sup>1</sup>, Christophe Mora<sup>2</sup>, Ludovic Pricoupenko<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Kastler Brossel et <sup>2</sup>Laboratoire Pierre Aigrain, École Normale Supérieure et CNRS, UPMC<sup>1</sup> et Paris 7 Diderot<sup>2</sup>, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

<sup>3</sup>Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée, UPMC et CNRS, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

Nous étudions le problème de trois fermions dans le même état de spin et de masse  $M$  interagissant avec une particule discernable de masse  $m$  dans la limite unitaire où l'interaction est de portée nulle et de longueur de diffusion infinie dans l'onde  $s$ . Nous prédisons un intervalle de rapport de masse  $13,384 < M/m < 13,607$  sur lequel existe un effet Efimov purement à quatre corps, faisant apparaître des tétramères faiblement liés sans trimères d'Efimov.

Un système de particules en interaction est dit à la limite unitaire lorsque les interactions ont lieu dans l'onde  $s$ , avec une portée nulle et une longueur de diffusion infinie [1]. Ceci exclut tout état lié à deux corps. En revanche, dans le problème à trois corps, l'effet Efimov peut se produire [2], conduisant à l'apparition d'un nombre infini d'états trimères liés, avec un point d'accumulation d'énergie nulle dans le spectre. Cet effet apparaît dans une variété de systèmes. Historiquement, pour trois bosons, comme l'ont vérifié récemment plusieurs expériences remarquables sur des atomes froids au voisinage d'une résonance de Feshbach [3]. Mais aussi dans le problème à 2+1 fermions, dans lequel deux fermions dans le même état de spin et de masse  $M$  interagissent avec une particule de masse  $m$  d'une autre espèce, pour un rapport de masse  $\alpha = M/m$  supérieur à  $\alpha_c(2;1) \simeq 13,607$  [2].

Le problème à quatre corps avec une grande longueur de diffusion a récemment suscité beaucoup d'intérêt [4]. Dans ce régime résonnant, l'effet Efimov pour quatre bosons est interdit par la présence de trimères d'Efimov [5]. Une échappatoire proposée dans [5] et explorée plus avant dans [6, 7] consiste à quitter la limite unitaire et à considérer un régime résonnant à trois corps. Dans cette Lettre, nous nous en tenons à la limite unitaire et nous montrons que le problème à 3+1 fermions, contrairement au problème à 3+1 bosons [7], présente un effet Efimov à quatre corps, dans un intervalle de rapport de masse sur lequel les trimères d'Efimov sont absents. Ceci est obtenu par résolution explicite de l'équation de Schrödinger dans le modèle d'une interaction de portée nulle [2] en tirant parti de l'invariance d'échelle du modèle [8].

Dans le modèle de portée nulle, l'hamiltonien se réduit à sa forme sans interaction, ici dans l'espace libre

$$H = \sum_{i=1}^4 -\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_{\mathbf{r}_i}, \quad (1)$$

avec  $m_1 = m_2 = m_3 = M$  et  $m_4 = m$ . Les interactions sont en effet remplacées par des conditions de contact sur la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ , où  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  est la position d'un fermion et  $\mathbf{r}_4$  est la position de la particule de l'autre espèce : à la limite unitaire, pour  $i = 1, 2, 3$ , il

existe des fonctions  $A_i$  telles que

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \frac{A_i(\mathbf{R}_{i4}; (\mathbf{r}_k)_{k \neq i,4})}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_4|} + O(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_4|) \quad (2)$$

lorsque  $\mathbf{r}_i$  tend vers  $\mathbf{r}_4$  à position fixée du centre de masse  $i-4$ ,  $\mathbf{R}_{i4} \equiv (M\mathbf{r}_i + m\mathbf{r}_4)/(m+M)$ , différente des positions des particules restantes  $\mathbf{r}_k$ ,  $k \neq i, 4$ . La fonction d'onde est également soumise à la symétrie d'échange fermionique sur les trois premières variables  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Dans ce qui suit, nous supposons qu'il n'y a pas d'effet Efimov à trois corps, condition satisfaite en imposant  $M/m < \alpha_c(2;1) \simeq 13,607$ . Le problème aux valeurs propres  $H\psi = E\psi$  avec les conditions de contact de l'équation (2) est alors séparable en coordonnées hypersphériques [8]. Après avoir séparé le centre de masse  $\mathbf{C}$  du système, on introduit l'hyperrayon  $R = \left[ \sum_{i=1}^4 m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{C})^2 / \bar{m} \right]^{1/2}$ , avec  $\bar{m} = (3M + m)/4$  la masse moyenne, et un ensemble de 8 hyperangles  $\Omega$  dont l'expression n'est pas requise. Pour un centre de masse au repos, la fonction d'onde peut être prise sous la forme

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = R^{-7/2} F(R) f(\Omega). \quad (3)$$

La partie hyperangulaire  $f(\Omega)$  est donnée par la solution d'un problème aux valeurs propres du laplacien sur la sphère unité de dimension huit, rendu non trivial par les conditions de contact. En revanche, la partie hyperradiale  $F$  n'est pas directement affectée par les conditions de contact, en raison notamment de leur invariance par changement d'échelle  $\mathbf{r}_i \rightarrow \lambda \mathbf{r}_i$ ,<sup>1</sup> et obéit à l'équation de Schrödinger effective à 2D

$$EF(R) = -\frac{\hbar^2}{2\bar{m}} \left( \partial_R^2 + \frac{1}{R} \partial_R \right) F(R) + \frac{\hbar^2 s^2}{2\bar{m}R^2} F(R). \quad (4)$$

La quantité  $s^2$  résulte d'un problème aux valeurs propres hyperangulaire. Elle appartient à un ensemble discret infini et est réelle puisqu'il n'y a pas d'effet Efimov sur la

1. Un autre point est que  $R$  varie au second ordre en  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_4|$  lorsque  $\mathbf{r}_i$  tend vers  $\mathbf{r}_4$  à  $\mathbf{R}_{i4}$  fixé, voir la note [38] de la référence [8].

sphère unité ( $R \neq 0$ ), c'est-à-dire ici pas d'effet Efimov à trois corps.

Mathématiquement, l'équation (4) admet à énergie  $E$  quelconque deux solutions linéairement indépendantes, se comportant comme  $R^{\pm s}$  pour  $R \rightarrow 0$ . Si  $s^2 > 0$ , on impose  $F(R) \sim R^s$ , avec  $s > 0$ , ce qui est correct sauf pour les résonances à quatre corps accidentelles (voir [9] et la note [43] dans [8]) récemment découvertes numériquement [10]. L'équation (4) n'admet alors aucun état lié. Au contraire, si  $s^2 < 0$ , auquel cas nous posons  $s = iS$ ,  $S > 0$ ,  $F$  subit une attraction effective à quatre corps, avec une chute sur le centre conduisant à un spectre continu non physique d'états liés [11]. Pour rendre le modèle auto-adjoint, on impose alors une condition de contact supplémentaire [11], comme dans le cas habituel de l'effet Efimov à trois corps [12] :

$$F(R) \underset{R \rightarrow 0}{\sim} \text{Im} \left[ \left( \frac{R}{R_f} \right)^{iS} \right], \quad (5)$$

où le paramètre à quatre corps  $R_f$  dépend des détails microscopiques de la véritable interaction de portée non nulle.<sup>2</sup> Avec la condition supplémentaire de l'équation (5), on obtient alors à partir de l'équation (4) un spectre d'Efimov de tétramères :

$$E_n = -\frac{2\hbar^2}{\tilde{m}R_f^2} e^{\frac{2}{S} \arg \Gamma(1+iS)} e^{-2\pi n/S}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Tout revient donc à déterminer la valeur des exposants  $s$ . En particulier, au rapport de masse critique  $\alpha_c(3;1)$ , l'un des exposants est nul, les autres restant strictement positifs. Pour ce faire, nous calculons la fonction d'onde à quatre corps à énergie nulle sans condition aux limites particulière sur  $F(R)$ . Alors, compte tenu de l'équation (4) avec  $E = 0$ , il apparaît que  $F(R) \propto R^{\pm s}$ . Le calcul est effectué dans l'espace des impulsions, avec l'ansatz sur la transformée de Fourier de la fonction d'onde à quatre corps :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \frac{\delta(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i)}{\sum_{i=1}^4 \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m_i}} \\ &\times [D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) + D(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1) + D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)], \quad (7) \end{aligned}$$

où la symétrie fermionique impose  $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) = -D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , et le dénominateur provient de l'action de  $H$  dans l'équation (1) écrite dans l'espace des impulsions. Lorsque  $H$  agit sur l'une des trois singularités  $1/|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_i|$  dans l'équation (2), il produit au second membre de l'équation de Schrödinger une distribution de Dirac  $\delta(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_i)$  multipliée par une fonction des trois positions fermioniques invariante par translation et qui, après transformation de Fourier, donne l'un des termes  $D$

entre crochets dans l'équation (7). En prenant la transformée de Fourier de l'équation (3) avec  $F(R) \propto R^{\pm s}$ , et en utilisant un argument de comptage de puissances, on trouve la loi d'échelle

$$D(\lambda \mathbf{k}_1, \lambda \mathbf{k}_2) = \lambda^{-(\pm s + 7/2)} D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \quad (8)$$

La prise en compte dans l'espace des impulsions des conditions de contact, c'est-à-dire du fait que  $O(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_4|)$  s'annule pour  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_4$  dans l'équation (2), conduit à une équation intégrale [14] :

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{1 + 2\alpha}{(1 + \alpha)^2} (k_1^2 + k_2^2) + \frac{2\alpha}{(1 + \alpha)^2} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \right]^{1/2} D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\ &+ \int \frac{d^3 k_3}{2\pi^2} \frac{D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3) + D(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2)}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \frac{2\alpha}{1+\alpha} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)}, \quad (9) \end{aligned}$$

où nous rappelons que  $\alpha = M/m$ . L'équation (9) peut également être obtenue comme la limite de portée nulle de modèles de portée non nulle [15].

Utilisons maintenant l'invariance par rotation pour fixer la valeur  $l \in \mathbb{N}$  du moment cinétique total de l'état à quatre corps et pour se restreindre à un moment cinétique nul le long de l'axe de quantification  $Oz$ . Alors, d'après l'équation (7), la fonction effective à deux corps  $D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  a le même moment cinétique  $l$ . Ceci permet d'exprimer  $D$  en termes de  $2l+1$  fonctions inconnues  $f_{m_l}^{(l)}$  de trois variables réelles seulement, les modules  $k_1$  et  $k_2$  et l'angle  $\theta \in [0, \pi]$  entre  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ , la symétrie fermionique imposant  $f_{m_l}^{(l)}(k_2, k_1, \theta) = (-1)^{l+1} f_{-m_l}^{(l)}(k_1, k_2, \theta)$  [15] :

$$D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \sum_{m_l=-l}^l [Y_l^{m_l}(\gamma, \delta)]^* e^{im_l \theta/2} f_{m_l}^{(l)}(k_1, k_2, \theta). \quad (10)$$

Ici  $Y_l^{m_l}(\gamma, \delta)$  sont les harmoniques sphériques habituelles,  $\gamma$  et  $\delta$  sont les angles polaire et azimutal du vecteur unitaire  $\mathbf{e}_z$  selon  $Oz$  dans la base orthonormée directe  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{2\perp}, \mathbf{e}_{12})$ , avec  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}_1/k_1$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{k}_2/k_2$ ,  $\mathbf{e}_{2\perp} = (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \cos \theta)/\sin \theta$  et  $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2/\sin \theta$ .<sup>3</sup> L'action de la parité  $\mathbf{k}_i \rightarrow -\mathbf{k}_i$  sur cet ansatz général est de multiplier chaque terme d'indice  $m_l$  dans l'équation (10) par un facteur  $(-1)^{m_l}$ , ce qui permet de découpler les termes de  $m_l$  pair (parité paire) des termes de  $m_l$  impair (parité impaire). Un exemple pertinent, comme nous le verrons par la suite, est la voie  $l = 1$  de parité paire, où l'ansatz se réduit à un seul terme, qui est évidemment la composante selon  $Oz$  d'un spineur vectoriel :

$$D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \propto \mathbf{e}_z \cdot \frac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2}{\|\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2\|} f_0^{(1)}(k_1, k_2, \theta). \quad (11)$$

2. Sur une résonance étroite,  $R_f$  devrait être proportionnel à la portée effective comme pour l'effet Efimov à trois corps [13].

3. On a donc  $\cos \gamma = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{12}$ ,  $\sin \gamma \cos \delta = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_1$ ,  $\sin \gamma \sin \delta = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{2\perp}$ , avec  $\gamma \in [0, \pi]$  et  $\delta \in [0, 2\pi]$ .

La dernière étape consiste à utiliser l'invariance d'échelle de  $D$ , voir l'équation (8), en posant

$$f_{m_l}^{(l)}(k_1, k_2, \theta) = (k_1^2 + k_2^2)^{-(s+7/2)/2} (\cosh x)^{3/2} \Phi_{m_l}^{(l)}(x, u) \quad (12)$$

où  $u = \cos \theta$ . Le changement de variable logarithmique  $x = \ln(k_2/k_1)$  est motivé par la physique d'Efimov, et le facteur contenant un cosinus hyperbolique assure que l'équation intégrale finale mette en jeu un opérateur hermitien. La symétrie fermionique impose

$$\Phi_{m_l}^{(l)}(-x, u) = (-1)^{l+1} \Phi_{-m_l}^{(l)}(x, u) \quad (13)$$

ce qui permet de restreindre les fonctions inconnues  $\Phi_{m_l}^{(l)}$  à  $x \geq 0$ . En se limitant à  $s = iS$ ,  $S \geq 0$ , on obtient finalement

$$0 = \left[ \frac{1 + 2\alpha}{(1 + \alpha)^2} + \frac{\alpha u}{(1 + \alpha)^2 \cosh x} \right]^{1/2} \Phi_{m_l}^{(l)}(x, u) + \int_{\mathbb{R}^+} dx' \int_{-1}^1 du' \sum_{m_l'=-l}^l \mathcal{K}_{m_l, m_l'}^{(l)}(x, u; x', u') \Phi_{m_l'}^{(l)}(x', u'). \quad (14)$$

Le noyau symétrisé  $\mathcal{K}_{m_l, m_l'}^{(l)}(x, u; x', u') = \sum_{\epsilon, \epsilon' = \pm 1} (\epsilon \epsilon')^{l+1} K_{\epsilon m_l, \epsilon' m_l'}^{(l)}(\epsilon x, u; \epsilon' x', u')$  est exprimé en termes du noyau non symétrisé suivant :

$$K_{m_l, m_l'}^{(l)}(x, u; x', u') = \frac{[(1 + \lambda^2)/(1 + \lambda'^2)]^{iS/2} (\lambda \lambda')^{3/2}}{[(1 + \lambda^2)(1 + \lambda'^2)]^{1/4}} \times \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi^2} \frac{e^{-im_l\theta/2} \langle l, m_l | e^{i\phi L_x/\hbar} | l, m_l' \rangle e^{im_l'\theta'/2}}{1 + \lambda^2 + \lambda'^2 + \frac{2\alpha}{1+\alpha} [\lambda u + \lambda' u' + \lambda \lambda' \mathcal{D}]}. \quad (15)$$

Ici, la notation  $\mathcal{D}$  au dénominateur représente  $\mathcal{D} = uu' + \cos \phi \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - u'^2}$ ,  $\lambda = e^x$ ,  $\lambda' = e^{x'}$ ,  $L_x$  est l'opérateur moment cinétique selon  $Ox$ ,  $|l, m_l\rangle$  est de spin  $l$  et de moment cinétique  $m_l \hbar$  selon  $Oz$ , et  $\phi$  est l'angle azimutal du vecteur  $\mathbf{k}_3$  de l'équation (9) dans les coordonnées sphériques liées à la base  $(\mathbf{e}_{2\perp}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_1)$ .<sup>4</sup>

Cherchons d'abord le rapport de masse critique  $\alpha_c(3; 1)$  du problème à 3 + 1 fermions, qui est la valeur minimale de  $\alpha$  pour laquelle l'équation intégrale (14) est satisfaite avec  $S = 0$ . En réécrivant l'équation (14) comme  $0 = M_s[\Phi]$ , où  $M_s$  est un opérateur hermitien, nous avons calculé numériquement la valeur propre minimale de  $M_{s=0}$  en fonction du rapport de masse  $\alpha$ , dans chaque sous-espace de parité et de moment cinétique  $l$

4. Les éléments de matrice  $\langle l, m_l | e^{i\phi L_x/\hbar} | l, m_l' \rangle$  sont calculés en injectant une relation de fermeture dans la base propre de  $L_x$ . On est alors confronté aux intégrales  $J_n = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{in\phi}}{b_0 + b_1 \cos \phi} = 2\pi z_0^{|n|} / \sqrt{b_0^2 - b_1^2}$  avec  $z_0 = -(b_0/b_1) + \sqrt{(b_0/b_1)^2 - 1}$ .

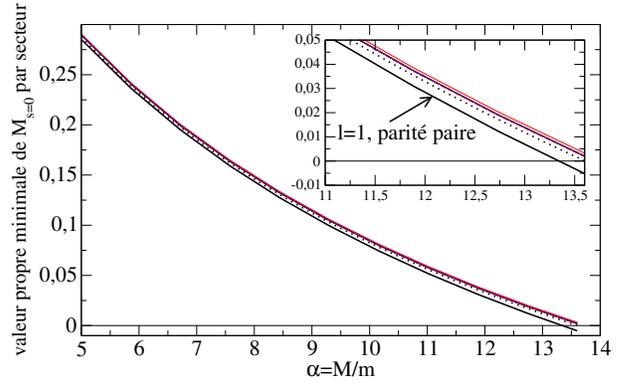


FIGURE 1. Valeur propre minimale de l'opérateur hermitien  $M_{s=0}$  dans chaque secteur de parité et de moment cinétique  $l$  fixés,  $0 \leq l \leq 6$ , en fonction du rapport de masse  $\alpha = M/m$ . Seule la courbe du secteur pair de  $l = 1$  croise zéro pour  $\alpha < 13,607$ , ce qui montre l'apparition d'un effet Efimov à quatre corps dans ce secteur. Les autres courbes restent toutes strictement positives. Elles se superposent presque et sont à peine discernables à l'échelle de la figure. La ligne pointillée est la prédiction analytique  $\Lambda(k = 0, \alpha)$  sur le bord inférieur du continuum dans le spectre de  $M_{s=0}$ . La vignette est un agrandissement. Dans les calculs numériques,  $x$  et  $u$  ont été discrétisés avec un pas  $dx = du = 1/10$ , et  $x$  a été tronqué à  $x_{\max} = 20$ .

fixés,  $0 \leq l \leq 6$ . Comme le montre la figure 1, cette valeur propre s'annule pour  $\alpha < 13,607$  uniquement pour une parité paire et un moment cinétique  $l = 1$ . Nous avons également exploré  $l = 7, 8, 9, 10$  sans changer la conclusion. Nous constatons donc que l'effet Efimov à quatre corps ne se produit que dans le secteur pair de  $l = 1$ , au-dessus d'un rapport de masse critique<sup>5</sup>

$$\alpha_c(3; 1) \simeq 13,384, \quad (16)$$

assez proche de la valeur critique pour 2 + 1 fermions,  $\alpha_c(2; 1) \simeq 13,607$ .

Pour mieux comprendre ce résultat, nous avons étudié analytiquement une caractéristique importante du spectre de  $M_{s=0}$ , le bord inférieur de son continuum. Lorsque  $x, x' \rightarrow +\infty$ , ce qui correspond à  $k_2 \gg k_1$  dans la fonction  $D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , les noyaux symétrisé et non symétrisé se réduisent à la forme asymptotique

$$\mathcal{K}_{m_l, m_l'}^{(l)}(x, u; x', u') \sim e^{iS(x-x')} e^{-im_l\theta/2} e^{im_l'\theta'/2} \times \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{4\pi^2} \frac{\langle l, m_l | e^{i\phi L_x/\hbar} | l, m_l' \rangle}{\cosh(x-x') + \frac{\alpha}{1+\alpha} \mathcal{D}}. \quad (17)$$

Puisque  $\mathcal{D}$  est indépendant de  $x$  et  $x'$ , ceci est invariant par translation sur la coordonnée  $x$  et conduit à

5. Pour gagner en précision, nous avons utilisé  $(x, \theta)$  comme variables (en augmentant  $x_{\max}$  jusqu'à 40, en réduisant  $dx = d\theta/\pi$  jusqu'à 1/40), et  $\sqrt{\sin \theta} \Phi_{m_l}^{(l)}(x, \cos \theta)$  comme fonction inconnue pour préserver l'hermiticité.

un spectre continu de fonctions propres ayant asymptotiquement la forme d'ondes planes. Dans le secteur de parité paire et de moment cinétique  $l = 1$ , nous avons trouvé que  $\Phi_0^{(1)}(x, u) \sim e^{ikx} \sqrt{1-u^2}$  conduit à une fonction propre dans le spectre continu de  $M_{iS}$  avec la valeur propre réelle  $\Lambda(k - S, \alpha)$  où<sup>6</sup>

$$\Lambda(k, \alpha) = \cos 2\beta + \frac{(1 - ik) \sin[2\beta(1 + ik)] - c.c.}{2(1 + k^2) \sin^2 2\beta \sin(ik\pi/2)}. \quad (18)$$

Dans l'équation (18), nous avons posé par commodité  $\sin 2\beta = \alpha/(1 + \alpha)$  avec  $\beta \in [0, \pi/4]$ . Pour  $k$  réel, cette fonction  $\Lambda(k, \alpha)$  a un minimum global en  $k = 0$ . Nous nous attendons à ce que  $\Lambda(k = 0, \alpha)$  soit le bord inférieur du spectre continu de  $M_{s=0}$ . Comme  $\Lambda(0, \alpha)$  s'annule exactement au rapport de masse critique à trois corps  $\alpha_c(2; 1) \simeq 13,607$ , notre analyse asymptotique revient à retrouver le problème à trois corps comme une limite  $k_2/k_1 \rightarrow +\infty$  du problème à quatre corps.<sup>7</sup>

Nous avons comparé cette prédiction aux résultats numériques, en représentant sur la figure 1 la fonction  $\alpha \mapsto \Lambda(k = 0, \alpha)$  en pointillé. À l'exception du secteur pair de  $l = 1$ , les valeurs propres numériques minimales sont proches de  $\Lambda(k = 0, \alpha)$ ; le fait qu'elles soient légèrement supérieures est l'effet d'une troncature  $x_{\max}$  finie, qui se réduit lorsque  $x_{\max}$  augmente (non représenté ici). Ceci implique que les fonctions propres associées à ces valeurs propres sont étendues, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas de carré sommable. Les résultats numériques sont en accord avec cette analyse. Dans le secteur pair de  $l = 1$ , la valeur propre minimale numérique est clairement strictement inférieure à  $\Lambda(0, \alpha)$ , pour toutes les valeurs de  $\alpha$  sur la figure 1. Ceci indique que le vecteur propre correspondant doit être un état lié de  $M_{s=0}$ , avec une fonction propre  $\Phi_0^{(1)}(x, u)$  de carré sommable. Les calculs numériques le confirment : ils montrent qu'à grand  $x$ ,  $\Phi_0^{(1)}(x, u) \propto \sqrt{1-u^2} e^{-\kappa x}$ . Le raisonnement analytique prédit même la relation entre la valeur propre minimale  $\Lambda_{\min}$  de  $M_{s=0}$  et le taux de décroissance  $\kappa$  : l'onde plane  $e^{ikx}$  se prolonge analytiquement en une exponentielle décroissante si l'on pose  $k = i\kappa$ , de sorte que  $\Lambda_{\min} = \Lambda(i\kappa, \alpha)$  (cela vaut aussi pour  $S > 0$ ). Numériquement, nous avons testé avec succès cette relation pour différentes valeurs de  $\alpha$ , et nous avons également trouvé que  $M_{s=0}$  n'a pas d'autre état lié dans le secteur pair de  $l = 1$ .

Enfin, nous avons complété notre étude de l'effet Efimov à quatre corps en calculant, en fonction du rapport de masse  $\alpha$ , l'exposant  $s = iS$  dans le secteur pair de  $l = 1$ , la quantité réelle  $S$  étant telle que l'opérateur  $M_{iS}$  a une valeur propre nulle. Le résultat est représenté

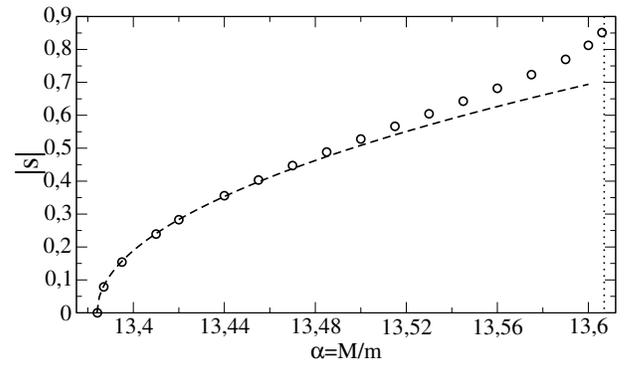


FIGURE 2. Dans la voie efimovienne  $l = 1$  de parité paire, module de l'exposant d'Efimov imaginaire pur  $s = iS$  en fonction du rapport de masse  $\alpha = M/m$ . Dans le numérique,  $x_{\max}$  est compris entre 40 et 120,  $dx = 1/10$ ,  $d\theta = \pi/20$ . La courbe tiretée résulte d'un ajustement linéaire de  $|s|^2$  en  $\alpha$  au voisinage de la valeur critique  $\alpha_c(3; 1)$ ,  $|s|_{\text{fit}}^2 \simeq 2,23 \times (\alpha - \alpha_c)$ . La ligne verticale pointillée indique la valeur critique pour 2 + 1 fermions,  $\alpha_c(2; 1)$ .

sur la figure 2. Près du rapport de masse critique pour 2 + 1 fermions,  $\alpha_c(2; 1) \simeq 13,607$ , les valeurs de  $|s|$  sont de l'ordre de l'unité, ce qui conduit à un effet expérimental important [3]. Près du rapport de masse critique pour 3+1 fermions  $\alpha_c(3; 1)$ ,  $|s|$  varie comme  $(\alpha - \alpha_c)^{1/2}$  (voir la courbe tiretée).<sup>8</sup> De faibles valeurs de  $|s|$  conduisent à des énergies de tétramères d'Efimov extrêmement faibles : pour une interaction de portée  $b$  non nulle, en prenant  $R_f \approx b$  et  $n = 1$  dans l'équation (6), nous estimons l'énergie du tétramère d'Efimov fondamental pour  $|s| \ll 1$  à  $E_{\min}^{\text{Efim}} \approx -e^{-2\pi/|s|} \hbar^2 / (2\bar{m}b^2)$ .<sup>9</sup> Pour  $|s| = 0,5$ , en prenant la masse de  ${}^3\text{He}$  pour  $m$  et quelques nm pour  $b$ , on obtient  $E_{\min}^{\text{Efim}}/k_B$  dans la gamme des nK, accessible aux atomes froids. Par ailleurs, pour une longueur de diffusion  $a$  grande mais finie, les tétramères d'Efimov successifs apparaissent pour des valeurs de  $a$  en progression géométrique de raison  $e^{\pi/|s|}$ , de sorte que des valeurs trop faibles de  $|s|$  nécessitent des valeurs de  $a$  plus grandes que de raison. Un autre problème expérimental est l'étroitesse de l'intervalle de masse sur lequel se produit l'effet Efimov à quatre corps. Plusieurs paires d'espèces atomiques ont un rapport de masse dans l'intervalle requis, par exemple  ${}^3\text{He}^*$  et  ${}^{41}\text{Ca}$  ( $\alpha \simeq 13,58$ ), et avec des espèces exotiques,  ${}^{11}\text{B}$  et  ${}^{149}\text{Sm}$  ( $\alpha \simeq 13,53$ ),  ${}^7\text{Li}$  et  ${}^{95}\text{Mo}$  ( $\alpha \simeq 13,53$ ). Une solution apportant plus de flexibilité consiste à partir d'espèces atomiques habituelles ayant un rapport de masse légèrement en dehors de l'intervalle, comme  ${}^3\text{He}^*$  et  ${}^{40}\text{K}$  ( $\alpha \simeq 13,25$ ), et à utiliser un réseau optique peu profond pour régler finement la masse effective de l'une des deux espèces [16].

6. Ceci s'obtient plus rapidement en prenant la limite  $k_2 \rightarrow \infty$  dans l'équation (9) avec l'ansatz  $D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \sim \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 k_2^{-7/2} (k_2/k_1)^{ik+3/2}$ .

7. Notre fonction  $\Lambda(k, \alpha)$  peut en effet être reliée à la fonction  $\lambda(\nu = ik - 1)$  de D. Petrov, Phys. Rev. A **67**, 010703 (2003).

8. La valeur propre minimale de  $M_{iS}$  s'écarte de zéro linéairement en  $\alpha - \alpha_c(3; 1)$  et quadratiquement en  $S$ .

9. Imposer  $F(R = b) = 0$  redonne cette estimation. En coupant  $s^2/R^2$  à  $s^2/b^2$  pour  $R < b$ , comme dans Landau et Lifschitz, Mécanique quantique, on obtient plutôt  $E_{\min}^{\text{Efim}} \approx -e^{-\pi/|s|} 2\hbar^2 / (\bar{m}b^2)$ .

En conclusion, dans le modèle de portée nulle à la limite unitaire, nous avons étudié l'interaction de trois fermions dans le même état de spin et de masse  $M$  avec une particule distincte de masse  $m$ . Pour  $M/m < 13,384$ , nous ne trouvons aucun effet Efimov. Sur l'intervalle  $13,384 < M/m < 13,607$ , un effet Efimov à quatre corps se produit, dans le secteur de parité paire et de moment cinétique  $l = 1$ , et pourrait être observé avec des atomes froids dans une expérience conçue à cette fin.

Pour  $M/m > 13,607$ , l'effet Efimov à trois corps est présent, et le modèle de portée nulle doit être complété par des conditions de contact à trois corps qui en brisent la séparabilité. La question de savoir si les tétramères d'Efimov subsistent alors sous la forme de résonances, se désintégrant en un trimère et un atome libre, est laissée pour plus tard. Nous remercions chaleureusement F. Werner pour des discussions.

- 
- [1] E. Braaten, H.-W. Hammer, Phys. Rep. **428**, 259 (2006).  
 [2] V. Efimov, Sov. J. Nucl. Phys. **12**, 589 (1971); V. Efimov, Nucl. Phys. A **210**, 157 (1973); A. Bulgac, V. Efimov, Sov. J. Nucl. Phys. **22**, 296 (1975).  
 [3] T. Kraemer et al., Nature **440**, 315 (2006); M. Zaccanti et al., Nature Physics **5**, 586 (2009); N. Gross et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 163202 (2009) et arXiv :1003.4891v2; S. E. Pollack, D. Dries, R.G. Hulet, Science **326**, 1683 (2009); T. Lompe et al., arxiv.org/abs/1006.2241.  
 [4] D.S. Petrov, C. Salomon, G. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **93**, 090404 (2004); C. Mora et al., Phys. Rev. Lett. **95**, 080403 (2005); H.-W. Hammer, L. Platter, Eur. Phys. J. A **32**, 113 (2007); J. von Stecher, J.P. D'Incao, C.H. Greene, Nature Physics **5**, 417 (2009); K.M. Daily, D. Blume, Phys. Rev. A **81**, 053615 (2010).  
 [5] R. Amado, F Greenwood, Phys. Rev. D **7**, 2517 (1973).  
 [6] H.W.L. Naus, J.A. Tjon, Few-Body Systems **2**, 121 (1987); H. Kröger, R. Perne, Phys. Rev. C **22**, 21 (1980).  
 [7] S. Adhikari, A. Fonseca, Phys. Rev. D **24**, 416 (1981).  
 [8] F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. A **74**, 053604 (2006).  
 [9] Y. Nishida, D.T. Son, S. Tan, Phys. Rev. Lett. **100**, 090405 (2008).  
 [10] S. Gandolfi, J. Carlson, arXiv :1006.5186; D. Blume, K. M. Daily, Phys. Rev. Lett. **105**, 170403 (2010).  
 [11] P. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, vol. II, p. 1665 (Mc Graw-Hill, 1953).  
 [12] G. S. Danilov, Sov. Phys. JETP **13**, 349 (1961).  
 [13] D.S. Petrov, Phys. Rev. Lett. **93**, 143201 (2004); A. Gogolin, C. Mora, R. Egger, Phys. Rev. Lett. **100**, 140404 (2008).  
 [14] L. Pricoupenko, arXiv :1007.4939.  
 [15] C. Mora, Y. Castin, L. Pricoupenko (en préparation).  
 [16] D.S. Petrov et al., Phys. Rev. Lett. **99**, 130407 (2007).