Tabăra de pregătire a Lotului Naţional de Informatică

Alba Iulia, 11-18 iunie, 2010

Baraj 2 Seniori

Soluţie acerc Autor: Cosmin Gheorghe

Înainte de a rezolvă problemă facem următoarea observaţie: oricare două puncte determină un cerc (acest cerc are cele două puncte pe margine, şi centrul lui este determinat de mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte cu axa OX. De asemenea orice punct determină un cerc (dacă punctul are coordonatele `(X, Y)`, cercul va avea centrul în `(X, 0)` şi raza egală cu `Y`). Soluţia optimă se va găsi ca o submulţime a mulţimii cercurilor determinate de puncte.

Soluţia pentru 40 de puncte:

Definim vârful unui cerc că fiind punctul cu cel mai mare `Y` acoperit de către acel cerc (cel mai de sus punct de pe circumferinţă). Se observă că într-o soluţie optimă niciun cerc nu va conţine vârful altui cerc (în acest caz cercul ce are vârful conţinut în alt cerc se poate micşora astfel încât să acopere împreună cu celălalt cerc aria acoperită înainte şi să aibe rază mai mică). De aici ajungem la următoarea soluţie: sortăm cercurile după coordonata centrului (abscisa centrului) şi calculăm o dinamică *din[i] = sumă minimă a ariilor* unor cercuri astfel încât să acoperim toate punctele ce au `X`-ul mai mic decât `X`-ul centrului cercului `i`. Recurenţa va fi astfel: `din[i] = MIN(din[j] + rază_cerc_i^2)` pentru toate `j`-urile `(j < i)` astfel încât toate punctele aflate între `X`-ul centrul cercului `j` şi `X`-ul centrului cercului `i` să fie acoperite. Fiind `N^2` cercuri determinate de puncte şi calculând în `O(N)` dacă două cercuri `j` şi `i` respectă condiţia de mai sus această soluţie are complexitatea finală `O(N^2 * N^2 * N) = O(N^5)`.

Soluţia pentru 70 de puncte:

Fie o acoperire posibilă cu cercurile `C1`, `C2`, ... , `Ck` sortate crescător după `X`-ul centrului fiecărui cerc. Fie intersecţia oricăror două cercuri consecutive `Ci`, `Ci+1`. Dacă unim printr-o linie cele două puncte din intersecţie pentru oricare două cercuri consecutive se observă că punctele iniţiale se pot partiţiona în secvenţe (între prima linie şi a doua linie, între a doua linie şi a treia linie şamd), iar fiecare cerc acoperă punctele dintr-o secvenţa. Aceste linii sunt perpendiculare cu axa OX pentru că centrele cercurilor sunt pe axa OX. De aici deducem că dacă sortăm puntele după `X`, atunci un cerc va acoperi puncte consecutive. Aşadar putem rezolva problema calculând o dinamică *din[i] = suma minimă a ariilor* unor cercuri astfel încât să acoperim toate punctele până la punctul `i` (după ce punctele sunt sortate crescător după `X`). Recurenţa va fi astfel: `Din[i] = MIN(Din[j - 1] + Rmin[j, i])`, cu `j < i` şi `Rmin[j, i]` este egal cu raza celui mai mic cerc ce acoperă punctele dintre `j` şi `i`.

Aşadar trebuie să rezolvăm următoarea problemă: având un set de `N` puncte, care este cel mai mic cerc cu centrul pe OX care acoperă toate aceste puncte? Putem rezolva această problemă căutând binar raza cercului. Deci pentru o rază setată `R` trebuie să vedem dacă există un centru posibil astfel încât toate punctele să fie la distanţă mai mică sau egală cu `R` de centru. O să "îngroşăm" fiecare punct din cele `N`, într-un cerc cu rază `R` centrat în punct. Apoi intersectăm fiecare cerc cu axa OX şi pentru fiecare punct (adică cerc) vom obţine un interval `Xi`, `Yi` în care poate fi plasat centrul cercului căutat iniţial. Rămâne să intersectăm toate aceste intervale şi să vedem dacă intersecţia rezultată este vidă sau nu, adică dacă `MAX(Xi) <= MIN(Yi)`, pentru toate `i`-urile. Dacă intersecţia este vidă atunci R este prea mic, astfel este prea mare. Acest algoritm are complexitatea `O(N log R_MAX)`, şi per total soluţia de mai sus are complexitatea finală `O(N^3 * log R_MAX)`.

Soluţia pentru 100 puncte:

O să pornim de la dinamica descrisă la soluţia pentru `70` de puncte, dar vom schimba modul în care găsim cercul minim ce acoperă un interval de puncte.

Fie un cerc din cele `N^2` determinate de punctele iniţiale. Fie `st` poziţia celui mai din dreapta punct care se află în stânga centrului cercului şi care nu este acoperit de cerc. Fie `dr` poziţia celui mai din stânga punct care se află în dreapta centrului cercului şi care nu este acoperit de cerc. Atunci acest cerc va acoperi intervalele `[i, j]` pentru care `st < i` şi `j < dr`. Poziţiile st şi dr pot fi calculate în `O(N)` pentru fiecare cerc, şi apoi printr-o dinamică în `O(N^2)` se poate calcula cercul minim ce acoperă fiecare interval `[i, j]`. După ce avem aceste valori calculăm dinamica descrisă la soluţia de `70` de puncte. Această soluţie are complexitatea finală `O(N^3)` şi obţine `100` de puncte.

Există şi soluţii mai rapide de `O(N^3)`, dar acestea nu erau necesare obţinerii punctajului maxim.