



HAL
open science

La localisation forte d'Anderson des ondes classiques

Sergey E. Skipetrov, B. van Tiggelen, John H. Page

► **To cite this version:**

Sergey E. Skipetrov, B. van Tiggelen, John H. Page. La localisation forte d'Anderson des ondes classiques. *Images de la physique* 2009, 2010, pp.75-80. hal-00491887

HAL Id: hal-00491887

<https://hal.science/hal-00491887>

Submitted on 14 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La localisation forte d'Anderson des ondes classiques

Les ondes – la lumière, les microondes, le son, etc. – sont partie intégrante de notre environnement. Celui-ci est la plupart du temps désordonné et les ondes y sont diffusées : la lumière du soleil est diffusée par les nuages, le brouillard, et les aérosols suspendus dans l'air ; les microondes émises par nos téléphones portables sont diffusées par les bâtiments dans les villes, et le bruit du trafic autoroutier par les arbres. Dans tous ces cas, il s'agit de diffusion faible : la propagation de l'onde est perturbée, mais n'est pas arrêtée. Or il se trouve qu'un désordre suffisamment fort peut complètement bloquer la propagation d'une onde – phénomène que l'on connaît sous le nom de « localisation d'Anderson ». L'origine physique de la localisation d'Anderson des ondes classiques est la même que celle de la localisation des électrons dans les solides désordonnés. Par contre, les ondes classiques en permettent une observation plus claire et moins ambiguë. Dans cet article nous passons en revue quelques uns de nos résultats concernant la localisation d'Anderson des ondes classiques et illustrons nos propos par une expérience très récente qui emploie les ondes élastiques pour la mettre en évidence.

INTRODUCTION. POURQUOI LES ONDES CLASSIQUES ?

Pendant les années quatre-vingt les physiciens réalisent progressivement que le phénomène de localisation d'Anderson – le confinement spatial des ondes dû au désordre – n'est pas forcément un phénomène quantique, mais plus généralement un phénomène ondulatoire. Ce phénomène trouve son origine dans les interférences des ondes multiples diffusées dans un milieu désordonné et devrait donc exister pour tout type d'onde cohérente : la lumière, le son, les ondes élastiques, etc. Les ondes classiques semblent les mieux appropriées à la démonstration directe du phénomène. Et ceci pour au moins trois raisons. Tout d'abord, les expériences peuvent se faire à température ambiante puisque la cohérence des ondes classiques ne se dégrade pas avec la température. Pour les électrons ou autres particules quantiques (les atomes froids, par exemple) des basses températures sont nécessaires pour éviter la diffusion inélastique. Ensuite, avec les

ondes classiques on peut facilement éviter les interactions entre les ondes elles-mêmes (les « non linéarités » dans un langage d'optique ou d'acoustique). Enfin, les mesures résolues en fréquence, en temps ou en espace sont tout à fait envisageables. Cela représente une boîte à outils importants que l'on ne retrouve pas pour observer la localisation forte des électrons, les outils se réduisant dans ce cas presque exclusivement aux mesures de la conductance (AC ou DC) globale d'un échantillon. La possibilité d'observer la localisation d'Anderson avec les ondes classiques a donc séduit de nombreux physiciens de différents domaines qui se sont aussitôt lancés à la conquête du sujet.

Les premiers résultats ne se sont pas fait attendre très longtemps et dès les années quatre-vingt-dix la localisation forte d'Anderson des ondes électromagnétiques et du son fut observée dans les systèmes uni- ou deux-dimensionnels (1D et 2D), ainsi que dans les guides d'ondes quasi-uni-dimensionnels. Cela a représenté un grand pas vers l'avant car ces expériences ont permis une étude précise des fonctions d'onde localisées et de

leurs propriétés statistiques, ce qui a provoqué une explosion d'activité théorique dans le domaine, sans parler d'un certain nombre de résultats « secondaires » obtenus grâce à ces études, qui ne concernent pas directement la localisation d'Anderson mais plutôt la diffusion multiple des ondes en général. Cependant, le « saint graal » du domaine – la localisation forte dans les systèmes tridimensionnels (3D) où une vraie transition de localisation doit exister, avec toute une physique riche de phénomènes critiques, – reste à trouver. Et pour cause, certaines difficultés spécifiques pour les ondes classiques empêchent une observation facile de la transition. Tout d'abord, il y a une différence importante entre l'équation de Schrödinger, qui décrit le comportement de la fonction d'onde d'un électron (ou d'un atome) dans un potentiel désordonné, et l'équation de Helmholtz décrivant une onde classique dans un milieu aléatoire (voir Encadré 1). Cette différence implique que la localisation des ondes classiques n'est possible que dans un intervalle de fréquences intermédiaires, et non pas plus ou

moins « trivialement » à des très basses fréquences comme c'est le cas pour les électrons. Ensuite, pour les ondes électromagnétiques – lumière ou microondes – il est difficile d'atteindre le degré de désordre nécessaire pour la localisation. La raison principale est que le degré de désordre est principalement déterminé par le contraste d'indice de réfraction n entre les composants d'un milieu désordonné. Dans le visible, n est compris entre 1 et environ 3.5 ce qui limite le contraste optique accessible. Enfin, les ondes classiques souffrent de l'absorption. Contrairement aux particules quantiques dont le nombre est conservé, les ondes classiques perdent presque inévitablement une partie de leur énergie dans le milieu. Dans un matériau à structure complexe, l'absorption est souvent difficile à contrôler avec précision. Il est cependant crucial de distinguer une onde qui n'a pas pu traverser le milieu à cause de la localisation d'Anderson, d'une onde qui a été absorbée dans le milieu. Ceci s'avère délicat dans la mesure où dans la quasi totalité d'expériences on déduit le comportement de l'onde à l'intérieur du milieu d'une mesure de transmission. Voilà pourquoi beaucoup d'experts insistent aujourd'hui sur les fluctuations géantes dans toutes les variables observées et ne se limitent pas à l'étude de la moyenne d'ensemble du transport. Les défis sont importants. Pour pouvoir affirmer que la localisation forte a été observée, une seule expérience ne suffit plus au jour d'aujourd'hui. Toute une *to-do-list* vous attend : dynamique anormale, confinement spatiale, fluctuations non gaussiennes, fonction d'onde multi fractale, ...

Une nouvelle génération d'expériences a vu le jour très récemment. Ces expériences profitent pleinement de la facilité des mesures résolues en espace et en temps offerte par les ondes classiques. Elles permettent de

mettre en évidence le phénomène de localisation d'Anderson de façon très convaincante et de s'affranchir des effets d'absorption. En ce qui concerne les aspects théoriques, plusieurs approches au problème de localisation d'Anderson ont été développées. Une de ces approches est résumée dans l'Encadré 2. Le progrès récent dans le domaine de la localisation des ondes classiques est largement dû à la collaboration étroite entre théoriciens et expérimentateurs.



Figure 1 – Un des échantillons utilisés pour l'observation de la localisation d'Anderson des ondes élastiques. Il est composé de billes d'aluminium de 4 mm de diamètre, brasées pour former un réseau élastique désordonné.

Dans cet article, nous allons discuter une des expériences récentes que nous avons réalisées avec des ondes élastiques dans un verre de billes d'aluminium (voir Fig. 1). Une onde sonore est envoyée dans l'échantillon où elle est transformée en une onde élastique. Cette dernière se propage dans le réseau élastique formé par les billes brasées et se diffuse sur les pores de la structure. Il en résulte une marche aléatoire de l'onde sur le réseau qui, dans certaines bandes de fréquences, peut être bloquée par les interférences entre les ondes diffusées. C'est donc la localisation d'Anderson – l'arrêt du transport du au désordre – qui se réalise dans nos échantillons.

EXPERIENCES RESOLUES EN TEMPS

Dans la première expérience, nous envoyons une courte impulsion sonore dans notre échantillon désordonné et nous

observons l'intensité $I(t)$ de l'onde transmise en fonction du temps t . Parmi les ondes partielles traversant l'échantillon il y a des ondes qui suivent des chemins très courts, presque balistiques, et quittent l'échantillon très vite, ainsi que des ondes qui restent piégées dans l'échantillon très longtemps. De ce fait, l'impulsion transmise se révèle considérablement élargie en temps (voir Fig. 2). Cet élargissement a été observé pour plusieurs fréquences de l'onde, de 200 kHz à 3 MHz, mais l'allure de la courbe $I(t)$ n'est pas toujours la même. Pour les basses fréquences (Fig. 2a), $I(t)$ décroît exponentiellement après son maximum, ce qui est en parfait accord avec la théorie de diffusion classique qui néglige les interférences entre les ondes diffusées (ligne rouge sur la Fig. 2a). Autrement dit, si on lançait des balles de ping-pong à travers une chambre d'enfant, remplie de jouets de toute sorte placés de manière désordonnée, on aurait mesuré la même distribution du nombre de balles « transmises » en fonction du temps que la distribution $I(t)$ observée dans la Fig. 2a.

Pour les hautes fréquences, par contre, $I(t)$ décroît en fonction du temps beaucoup moins vite qu'une simple exponentielle (Fig. 2b). Il est évident que la théorie de diffusion (ligne pointillée) n'est plus valable. Par contre, les courbes $I(t)$ sont en parfait accord avec les prédictions de la théorie auto-cohérente de la localisation (Encadré 2) représentée par la ligne rouge dans la Fig. 2b. Le bon accord entre théorie et expérience suggère qu'à hautes fréquences la propagation des ondes élastiques est profondément affectée par les effets d'interférences. La propagation est donc très différente de celle des balles de ping-pong ! Le ralentissement de la décroissance de $I(t)$ aux temps longs constitue un signe indirect de la localisation d'Anderson dans

nos échantillons à hautes fréquences : les ondes sont piégées par le désordre mais finalement finissent par s'échapper de l'échantillon. Notons que l'absorption ne peut expliquer ces observations. En effet, l'absorption change la pente de la décroissance exponentielle de $I(t)$ mais ne peut pas la rendre non exponentielle !

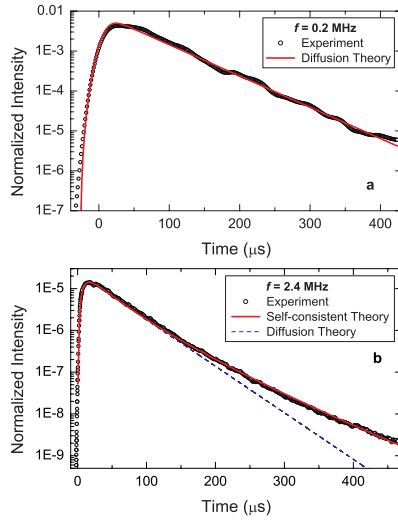


Figure 2 – Intensité moyenne $I(t)$ d'une courte impulsion ultrasonore transmise à travers un milieu désordonné de Fig. 1. À basse fréquence (a), les ondes se comportent comme des particules classiques et $I(t)$ décroît exponentiellement en temps, en accord avec la prédiction de la théorie de diffusion (ligne rouge). Pour les hautes fréquences (b), la théorie de diffusion (en pointillée) n'est plus valable. C'est la théorie auto-cohérente de la localisation (ligne rouge) qui prend la relève. La théorie décrit très bien les mesures si on suppose que les ondes élastiques sont localisées [c'est-à-dire, que $kl < (kl)_c$]. Par contre, l'ajustement de la courbe théorique aux données n'est pas possible pour $kl > (kl)_c$ (régime de diffusion). Selon le critère de Ioffe-Regel, cela montre qu'à hautes fréquences les ondes élastiques sont localisées dans nos échantillons. [Nature Physics 4, 945 (2008)]

C'est bien la théorie de localisation qui établit le lien entre la localisation d'Anderson et la décroissance non exponentielle de $I(t)$ observée dans la Fig. 2b. De plus, même en régime de diffusion $I(t)$ peut dévier d'une simple exponentielle pour les temps plus longs que le temps de Heisenberg t_H égale à l'inverse de

l'espacement entre les quasi-modes de l'échantillon. En effet, au-delà de t_H on commence à résoudre les quasi-modes et la description de la propagation par la théorie de diffusion cesse d'être adéquate.

EXPERIENCES RESOLUES EN ESPACE

Est-il possible d'avoir une observation plus directe de la localisation ? Peut-on observer la localisation d'un paquet d'onde ? Pour répondre à ces questions, nous avons focalisé une impulsion ultrasonore en un point $\rho = 0$ sur la surface de l'échantillon et nous avons mesuré l'intensité $I(\rho, t)$ en fonction de la position ρ sur la surface opposée. Pour caractériser le profil spatial de $I(\rho, t)$, nous le représentons comme $I(\rho, t) = I(0, t) \exp[-\rho^2/w_\rho(t)^2]$ où $w_\rho(t)$ est la largeur transverse effective du profil $I(\rho, t)$. L'avantage d'une telle représentation est la mise en évidence des différences entre le régime de propagation diffuse, pour lequel $w_\rho(t)^2 \sim t$, et le régime de localisation d'Anderson, pour lequel on s'attend à ce que $w_\rho(t)^2$ tende vers une valeur indépendante du temps dans la limite des temps longs. Les différences sont illustrées dans les Figs. 3a and 3b où nous montrons $w_\rho(t)^2$ pour deux échantillons différents, mais toujours à haute fréquence. On observe clairement qu'au lieu de croître linéairement avec t , $w_\rho(t)^2$ sature à un niveau constant pour les temps longs. De plus, le profil de $I(\rho, t)$ en espace n'est pas gaussien puisque $w_\rho(t)^2$ dépend clairement de ρ . Le profil transverse observé en transmission est illustré dans la Fig. 3c. Nous observons que le profil s'étale initialement, avant de converger vers un profil stable en temps. C'est exactement ce que l'on attend du mot « localisation » ! On a ici l'observation la plus directe de ce phénomène à ce jour.

La théorie prédit que la valeur de $w_\rho(t)^2$ aux temps longs dépend de la longueur de localisation et de

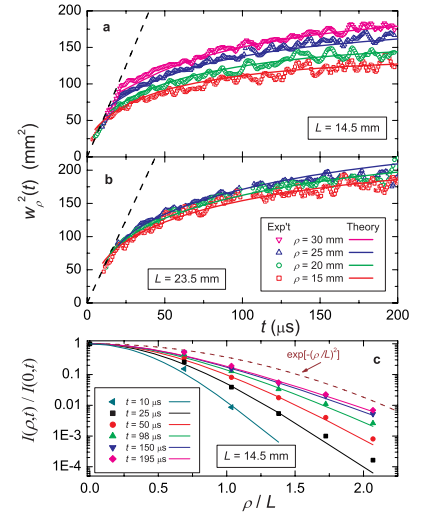


Figure 3 – La saturation de la largeur transverse d'une impulsion transmise au cours du temps [(a) et (b), pour deux échantillons différents] confirme la localisation d'Anderson des ondes élastiques dans nos échantillons (symboles – expérience, lignes – théorie). Non seulement la largeur transverse $w_\rho(t)^2$ mais aussi le profil spatial complet de l'impulsion (c) est bien décrit par la théorie auto-cohérente. [Nature Physics 4, 945 (2008)]

l'épaisseur de l'échantillon. Puisque l'épaisseur est connue, la mesure de $w_\rho(t)^2$ permet de déterminer la longueur de localisation. En plus, il est facile à vérifier que $w_\rho(t)^2$ n'est pas sensible à l'absorption des ondes. Donc la mesure de $w_\rho(t)^2$ permet de caractériser le régime de propagation sans connaître la valeur précise de l'absorption qui est toujours difficile à déterminer.

STATISTIQUE DES FLUCTUATIONS DE L'INTENSITE

Jusqu'à présent nous avons parlé de l'intensité moyenne. Mais la localisation d'Anderson se manifeste également – et peut-être même surtout – dans les fluctuations de l'intensité – les tavelures (« speckle » en anglais). En fait, plusieurs théories prédisent des fluctuations géantes de l'intensité dans le régime de localisation d'Anderson. Si l'on excite l'échantillon avec une onde ayant la fréquence et le profil spatial qu'il faut pour exciter un état localisé, la transmission de l'onde à travers l'échantillon peut être très élevée, voire totale, bien

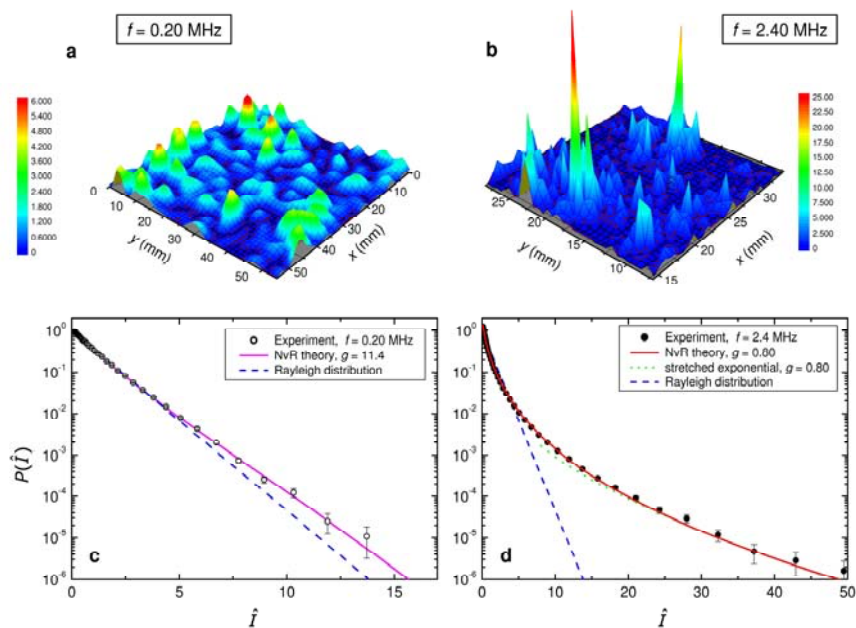


Figure 4 – Figures de tavelures (« speckle ») acoustiques observées à basses (a) et à hautes (b) fréquences. On voit à l’œil nu que, pour les ondes à haute fréquence, les fluctuations de l’intensité d’un point à l’autre sont plus importantes que pour les ondes à basse fréquence. Cela se confirme par une analyse statistique : la fonction de distribution statistique de l’intensité $P(I)$ décroît beaucoup moins vite à hautes fréquences (d) qu’à basses fréquences (c). Les fluctuations géantes trouvent leur origine dans la localisation forte d’Anderson. Elles sont très bien décrites par une théorie mésoscopique développée par Nieuwenhuizen et Van Rossum (NvR) en 1995 avec une « conductance sans dimension » $g < 1$ [ligne rouge dans la figure (d)]. En régime diffus on trouve $g \gg 1$ et la courbe $P(I)$ est très proche de la distribution de Rayleigh [figure (c)]. Ces observations sont en accord avec le célèbre critère de Thouless. [Nature Physics 4, 945 (2008)]

qu’elle soit faible en moyenne. Pour mettre en évidence les fluctuations géantes de l’intensité, nous avons illuminé l’échantillon par une onde plane monochromatique et mesuré l’intensité $I(\rho)$ transmise à travers l’échantillon. Cette mesure fournit une figure de tavelures (Figs. 4a et 4b). A l’œil nu déjà on voit que les fluctuations de $I(\rho)$ en espace sont beaucoup plus fortes dans le régime de localisation d’Anderson (Fig. 4b) que dans le régime de diffusion (Fig. 4a). Cela se confirme par une analyse statistique : la fonction de distribution de I pour les ondes

localisées donne beaucoup plus de poids aux grandes valeurs de I – jusqu’à 50 fois l’intensité moyenne (Fig. 4d). Par contre, dans le régime de diffusion on observe la loi de Rayleigh très connue pour les tavelures conventionnelles (Fig. 4c), par exemple celles observées en transmission d’un faisceau laser par un verre de lait.

CONCLUSIONS

Dans cet article nous avons discuté les avantages des ondes classiques – telles que la lumière ou le son – pour la mise en évidence et l’étude du phénomène

de localisation forte d’Anderson. Non seulement les ondes classiques permettent de travailler à température ambiante avec des échantillons de taille « humaine » (~10 cm pour l’échantillon dans la Fig. 1), mais elles rendent possible des mesures résolues en temps et en espace. Ces dernières sont essentielles pour obtenir une compréhension globale du comportement des ondes localisées.

Nous avons illustré nos arguments par les résultats d’une expérience récente conduite avec des ultrasons dans un échantillon constitué de billes d’aluminium. Trois mesures différentes et indépendantes confirment que les ondes élastiques sont localisées dans nos échantillons à hautes fréquences (~ 2 MHz) alors qu’elles se propagent par diffusion classique à des fréquences plus basses (~ 0.2 MHz).

Le travail présenté dans cet article a été effectué dans le cadre d’une collaboration franco-canadienne soutenue par le programme PICS 2008-2011 du CNRS.

POUR EN SAVOIR PLUS

John (S.), Localization of light, *Physics Today*, mai 1991.

Hu (H.), **Strybulevych (A.)**, **Page (J.H.)**, **Skipetrov (S.E.)**, and **Van Tiggelen (B.A.)**, Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network, *Nature Physics* 4, 945 (2008).

Legendijk (A.), **Van Tiggelen (B.)**, **Wiersma (D.S.)**, Fifty years of Anderson localization, *Physics Today* (Août 2009), p. 24.

L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER ET L'ÉQUATION DE HELMHOLTZ

Une particule quantique (par exemple, un électron) dans un potentiel aléatoire $V(\mathbf{r})$ est décrite par une fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r}, t)$ qui obéit à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, t).$$

Pour une particule d'énergie E , $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-iEt/\hbar)$, conduisant à l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}).$$

Par ailleurs, la propagation d'une onde scalaire (la lumière si on néglige la polarisation, ou le son) dans un milieu désordonné est décrite par l'équation d'onde :

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

où $\Psi(\mathbf{r}, t)$ est la fonction d'onde classique (le champ électrique pour la lumière ou la pression si on parle d'une onde acoustique), et $c(\mathbf{r})$ est la vitesse de l'onde. La vitesse est une fonction aléatoire de la position \mathbf{r} . Pour une onde monochromatique de fréquence angulaire ω , $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$, conduisant à l'équation de Helmholtz :

$$-\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \sigma(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \psi(\mathbf{r})$$

où $\sigma(\mathbf{r}) = \omega^2/c_0^2 - \omega^2/c(\mathbf{r})^2$ représente les fluctuations de vitesse dues au désordre par rapport à un milieu uniforme avec vitesse c_0 . Cette équation a la même forme que l'équation de Schrödinger stationnaire si on identifie

$$\frac{2m}{\hbar^2} E \leftrightarrow \frac{\omega^2}{c_0^2}, \quad \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \leftrightarrow \sigma(\mathbf{r}).$$

D'une part, cette analogie implique que les mêmes phénomènes peuvent se produire pour les particules quantiques et pour les ondes classiques. D'autre part, on remarque qu'une particule quantique à suffisamment basse énergie pourra être « trivialement » piégée dans un puits de potentiel formé par le potentiel aléatoire : l'effet tunnel n'est plus capable de rendre l'électron mobile. Pour une onde classique, en revanche, diminuer

la fréquence ω entraîne non seulement une baisse d'« énergie », mais également une baisse du potentiel effectif $\sigma(\mathbf{r})$ puisque ce dernier est proportionnel à ω^2 . En fait, puisque $\omega^2/c_0^2 > \sigma(\mathbf{r})$, on trouve que l'énergie effective est toujours supérieure au potentiel ! Le régime de tunnel favorable à la localisation ne semble pas exister. Apparemment, les ondes classiques ne peuvent jamais être piégées par le désordre de façon triviale. Nous illustrons cette situation dans la Fig. E1.

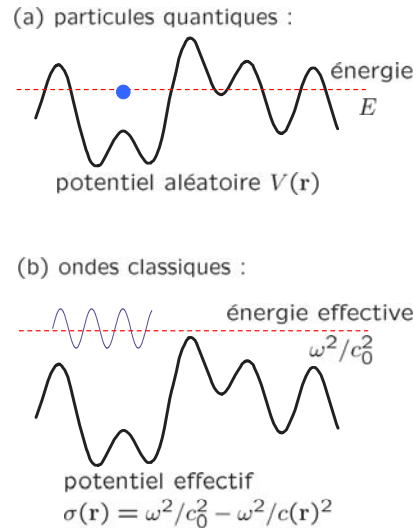


Figure E1 – (a) À basse énergie – proche des bords du spectre – une particule quantique peut se déplacer par effet tunnel. À suffisamment basse énergie même l'effet tunnel ne lui permettra plus d'aller très loin et la particule sera piégée. C'est le cas de localisation « triviale » car la particule serait déjà piégée classiquement. Par contre, en une et deux dimensions, même les particules ayant les énergies $E > V(\mathbf{r})$ seraient localisées. Ce résultat est beaucoup moins intuitif ! (b) Une onde classique monochromatique dans un milieu désordonné est décrite par la même équation qu'une particule quantique, bien que seulement le cas équivalent à $E > V(\mathbf{r})$ se réalise. Afin de localiser une onde classique, le désordre doit être suffisamment fort pour empêcher une propagation libre, plutôt qu'une propagation par effet tunnel.

THEORIE AUTO-COHERENTE DE LA LOCALISATION D'ANDERSON

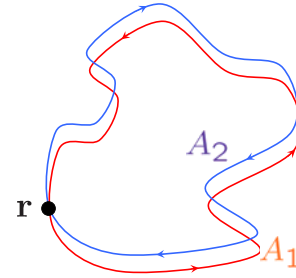
Puisque la transition d'Anderson est une transition entre deux régimes très différents de transport (diffusion à désordre faible et localisation à désordre fort), il est très difficile de développer une théorie qui décrirait les deux régimes ainsi que la transition entre eux. La théorie auto-cohérente de la localisation est basée sur une considération – dite de localisation faible – qui s'applique en régime de diffusion. Néanmoins, il se trouve que l'extrapolation de ces résultats au-delà du seuil de localisation donne des résultats encourageants pour plusieurs quantités mesurées dans les expériences. Même au voisinage de la transition, la théorie auto-cohérente permet de prévoir le bon comportement de certaines observables (par exemple la variation du coefficient de transmission avec l'épaisseur de l'échantillon, ou la dynamique des courtes impulsions). Toutefois, la valeur prédit par la théorie pour l'exposant critique de la transition ν , l'exposant qui gère la divergence de la longueur de localisation ξ à la transition, est en désaccord avec les simulations numériques.

La théorie auto-cohérente prend en compte les interférences des ondes dans un milieu désordonné. Notons $P_{\text{particule}}$ la probabilité qu'une particule classique revienne au voisinage d'un point \mathbf{r} où elle se trouvait initialement. Cette probabilité se calcule à partir d'une somme de probabilités correspondant aux différents chemins que la particule peut poursuivre dans le milieu désordonné. Pour chacun de ces chemins (par exemple, pour le chemin rouge dans la Fig. E2) il existe un chemin réciproque (le chemin bleu) qui passe par les mêmes diffuseurs mais dans l'ordre inverse. La probabilité de retour est donc $P_{\text{particule}} = P_1 + P_2 = 2P_1$ avec $P_1 = P_2$ les probabilités correspondant aux chemins rouge et bleu, respectivement. Une observation cruciale est que pour une onde cohérente (ou une particule quantique, décrite par une fonction d'onde) il faut sommer les amplitudes A_1 et A_2 des ondes (ou les amplitudes des probabilités) correspondant aux chemins 1 et 2. Par conséquent, la probabilité de retour est donnée par $P_{\text{onde}} = |A_1 + A_2|^2 = 4P_1$, avec $P_1 = P_2 = A_1^2 = A_2^2$. P_{onde} est donc deux fois plus grande que $P_{\text{particule}}$. L'intégrale de la probabilité sur tout l'espace vaut 1 pour les particules classiques aussi bien que pour les ondes. Une probabilité de retour plus élevée implique donc que le transport quantique est réduit par rapport au transport classique. En effet, puisqu'une onde a plus de chances de revenir à son point de départ, elle a forcément moins de chances de se dégager !

Ce raisonnement, illustré sur la Fig. E2, peut être mis sous une forme un peu plus mathématique. Dans une description classique, le parcours aléatoire d'une particule se trouvant initialement en \mathbf{r}' est décrit par la probabilité $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ de trouver la particule au point \mathbf{r} après un temps t . A la condition que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \geq l$, avec l le libre parcours moyen, cette probabilité obéit à une équation de diffusion :

$$[-i\Omega - \nabla \cdot D(\mathbf{r}, \Omega) \nabla] P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

où $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$ est la transformée de Fourier de $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$. Le coefficient de diffusion est une constante dans la description classique : $D(\mathbf{r}, \Omega) = D_B$. Pour une onde cohérente, le coefficient de diffusion est réduit à cause des interférences entre les chemins réciproques évoqués ci-dessus :



$$\begin{aligned} P_{\text{particule}} &= |A_1|^2 + |A_2|^2 \\ P_{\text{onde}} &= |A_1 + A_2|^2 \\ P_{\text{onde}} &= 2P_{\text{particule}} \end{aligned}$$

Figure E2 – La probabilité de revenir au même point \mathbf{r} est plus élevée pour une onde que pour une particule classique à cause des interférences constructives entre les ondes propagant le long des chemins 1 et 2 qui ne diffèrent que par la direction de propagation de l'onde.

$$\frac{1}{D(\mathbf{r}, \Omega)} = \frac{1}{D_B} + \frac{C}{k^2 l} \times P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) \Big|_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx l},$$

où C est un coefficient numérique et k est le vecteur d'onde. On retrouve dans cette équation la probabilité de retour discutée dans la Fig. E2, sauf que maintenant c'est la probabilité de retour dans une région d'espace de taille $\sim l$ autour du point de départ qui compte. Cette équation exprime mathématiquement l'impact des interférences sur le transport ondulatoire dans un milieu désordonné. La correction interférentielle au coefficient de diffusion est donnée par la solution de l'équation de diffusion qui doit être résolue de manière auto-cohérente (d'où le nom de la théorie). La dépendance de D en position apparaît naturellement dans un milieu de taille finie puisque l'importance des interférences n'est pas la même aux interfaces et l'intérieur du milieu.

Les deux équations de cet encadré représentent les deux équations fondamentales de la théorie auto-cohérente de la localisation dans sa formulation moderne. D'une part, dans le milieu infini tridimensionnel, elles prédisent la transition d'Anderson autour de $kl = (kl)_c \sim 1$ (critère de Ioffe-Regel). D'autre part, pour un milieu fini et $kl \gg (kl)_c$, ces mêmes équations donnent le critère de Thouless $g \leq 1$ (avec g la « conductance sans dimension ») comme condition nécessaire pour observer la localisation.