HAL open science

Intégration numérique par la méthode double-exponentielle

Pascal Molin

▶ To cite this version:

Pascal Molin. Intégration numérique par la méthode double-exponentielle. 2010. hal-00491561v2

HAL Id: hal-00491561
https://hal.science/hal-00491561v2

Preprint submitted on 28 Mar 2011 (v2), last revised 30 Nov 2016 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'intégration numérique par la méthode double-exponentielle

Pascal Molin

Décembre 2010

Table des matières

1 Introduction **2**
1.1 Notations, conventions 3

2 Principe **4**
2.1 Méthode des trapèzes et formule de Poisson 4
2.2 Complexité théorique 4
2.3 Régularité et décroissance 7
2.4 Décroissance des fonctions holomorphes 9
2.5 Énoncé du théorème double-exponentiel 12
2.6 Optimalité du principe double-exponentiel 16

3 Application à l'intégration sur divers domaines **19**
3.1 Droite réelle 20
3.2 Demi-droite 25
3.3 Intervalle compact 28
3.4 Fonctions méromorphes 34
3.5 Hypothèses affaiblies 35
3.6 Cas des fonctions oscillantes quasi-périodiques 38

4 Stratégies d'application concrète **39**
4.1 En résumé 39
4.2 Prendre en compte les résidus 41
4.3 Décaler le chemin 42
4.4 Subdivisions 44
4.5 Exemple : fonction gamma incomplète 45

5 Conclusion **47**
5.1 Implantation 47
5.2 Dimension quelconque 48

A Formulaire **48**
A.1 Trigonométrie hyperbolique 48
A.2 Majorations intégrales 49

1 Introduction

Cette étude s'intéresse à l'intégration numérique à grande précision de fonctions régulières, et développe de manière rigoureuse le principe d'intégration qui était connu sous le nom de « méthode d'intégration double exponentielle ».

Ce principe, introduit tout d'abord de manière assez heuristique dans [TM73] et étudié plus en détail dans [Sug97], consiste à effectuer des changements de variables de sorte que l'intégrande ait un comportement de décroissance doublement exponentielle en l'infini (c'est-à-dire du type $O(\exp(-\exp|x|))$, puis à calculer l'intégrale par la méthode des trapèzes. C'est dans ce cadre que l'intégration semble en effet la plus efficace.

D'un point de vue pratique, la méthode obtenue est remarquable, et les deux articles cités ci-dessus visaient surtout à justifier l'optimalité de l'approche double-exponentielle. Dans cette étude, nous précisons un peu le paradigme d'optimalité, mais notre but est surtout d'obtenir une théorie efficace, car intuitive et facilement applicable à l'intégration concrète et rigoureuse de fonctions.

Dans ce cadre, nous établissons des résultats de convergence prouvée dépendant explicitement et directement de la fonction à intégrer. De manière schématique, la vitesse de convergence obtenue est d'autant meilleure

- que la fonction à intégrer possède une large bande d'holomorphie au voisinage de l'intervalle d'intégration sur laquelle elle reste bornée ;
- que cette zone s'étend de manière symétrique de part et d'autre du chemin, ce qui peut inviter à réaliser des changements de chemin lors de l'application de la méthode.

Par exemple, pour l'intégration sur un segment, le théorème 3.10 de cet article peut se spécialiser de la manière suivante :

Théorème 1.1

Si f est une fonction définie sur $[-1,1]$, holomorphe sur $D(0,2) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 2\}$, alors pour tout $n \geqslant 1$

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=-n}^{n} a_k f(x_k) \right| \leqslant \left(e^4 \sup_{D(0,2)} |f| \right) \exp\left(-\frac{5n}{\log(5n)} \right)$$

avec $h = \frac{\log(5n)}{n}$, $a_k = \frac{h\cosh(kh)}{\cosh(\sinh(kh))^2}$ et $x_k = \tanh(\sinh(kh))$.

Il s'agit d'une convergence exceptionnellement bonne, à comparer avec les estimations de convergence d'ordre polynomial des méthodes de quadrature classiques (des trapèzes, de Simpson). De surcroît, les estimations de convergence sont aisées à obtenir et la méthode se programme très simplement ; elle

ne requiert en particulier aucune phase de précalculs coûteux, comme ce peut être le cas pour des méthodes de type Gauss-Legendre.

Ces résultats sont obtenus en combinant plusieurs résultats classiques d'analyse complexe élégants :

- la formule de Poisson, qui permet d'interpréter la méthode des trapèzes ;
- la formule de Cauchy, pour estimer les transformées de Fourier ;
- un énoncé mathématique du principe d'incertitude d'Heisenberg, auquel on se trouve naturellement confronté lorsque l'on cherche un procédé d'intégration optimal ;
- le principe du maximum, dans un cadre de théorie de Phrägmen-Lindelöf, au cœur des deux points précédents.

Cet article est organisé comme suit :

- dans la section 1 nous étudions la formule des trapèzes sur $\mathbb{R}$, et déterminons les fonctions pour lesquelles elle fournit un procédé d'intégration optimal.
  Nous montrons qu'en dehors d'une certaine classe de fonctions entières, l'intégration ne peut se faire en complexité linéaire (théorème 2.21), et déterminons des hypothèses minimales sous lesquelles la complexité est quasi-linéaire dans le théorème 2.17. Ce dernier résultat est le plus important de la théorie.
- Dans la section 2, nous étudions l'application de ce résultat à l'intégration de fonctions régulières sur un intervalle quelconque, en ramenant ces problèmes à une situation double-exponentielle par changement de variable (théorèmes 3.3 et 3.5 sur $\mathbb{R}$, théorème 3.7 pour $[a, \infty[$ et théorème 3.10 pour $[a, b]$). Des extensions aux fonctions méromorphes et oscillantes sont aussi étudiées.
- Dans une dernière partie plus concrète, nous présentons quelques transformations et stratégies complémentaires qui permettent d'améliorer l'intégration dans des cas de non-application des théorèmes principaux. De plus amples illustrations sont disponibles sur [Mol10b]. Un exemple complet est traité pour finir, l'évaluation de la fonction gamma incomplète dans le domaine complexe.

1.1 Notations, conventions

Dans tout ce qui suivra :

- g désigne une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable, dont on calcule l'intégrale par la méthode des trapèzes ;
- sa transformée de Fourier est définie avec les conventions habituelles en théorie des nombres :

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} g(t)\, \mathrm{d}t;$$

- pour tout réel $\tau > 0$ on note $\Delta_\tau = \mathbb{R} + i]-\tau, \tau[$ la bande complexe de largeur τ autour de l'axe réel ;

– lorsque g possède un prolongement holomorphe à une bande Δ_τ, on désignera par g ce prolongement et on dira que g est définie sur Δ_τ.

2 Principe

2.1 Méthode des trapèzes et formule de Poisson

Considérons une fonction g appartenant à la classe de Schwartz des fonctions rapidement décroissantes en l'infini. La formule de Poisson relie un échantillonnage régulier de g à un échantillonnage (de pas inverse) de sa transformée de Fourier $\hat{g}$, dont le premier terme est l'intégrale de g.

Si l'on applique cette formule au réseau $h\mathbb{Z}$, on a

$$h \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(kh) = \int_{\mathbb{R}} g + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \hat{g}(\frac{k}{h}), \tag{1}$$

ce qui constitue un lien entre une somme des trapèzes infinie de pas h et l'intégrale sur $\mathbb{R}$ correspondante, les termes de Fourier exprimant de manière exacte l'erreur réalisée lors de cette quadrature.

L'intégration numérique par la méthode des trapèzes sur l'axe réel revient à choisir d'une part un intervalle hors duquel on tronquera la somme, et d'autre part un pas h, en majorant précisément les erreurs ① de troncature et ② de quadrature réalisées à cette occasion.

$$h \sum_{k=-n}^{n} g(kh) + \underbrace{h \sum_{|k|>n} g(kh)}_{①} = \int_{\mathbb{R}} g + \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \hat{g}(\frac{k}{h})}_{②} \tag{2}$$

On définit l'erreur d'intégration

$$e(g,n,h) = \sum_{|k|>n} h\left|g(kh)\right| + \sum_{k\neq 0} \left|\hat{g}(\frac{k}{h})\right| \tag{3}$$

L'erreur de troncature dépend de la décroissance à l'infini de la fonction g. Elle est maîtrisée via la *longueur d'intégration* nh.

L'erreur de quadrature dépend du pas d'intégration h et de la décroissance de la transformée de Fourier, qui exprime en fait la régularité de la fonction g. Pour une fonction régulière, les variations ont une grande cohérence globale si bien que les erreurs de quadrature locales peuvent se compenser à plus grande échelle. Le lien entre régularité de g et décroissance de $\hat{g}$ est étudié dans la section 2.3.

2.2 Complexité théorique

On mesure la complexité d'une intégration à précision D via le nombre d'évaluations nécessaires

$$n(g,D) = \min\left\{n, \exists h > 0, e(g,n,h) \leqslant e^{-D}\right\}. \tag{4}$$

Si $n(g, D) \in O(D)$, on dit que le procédé a une complexité linéaire, quand $n(g, D) \in O(D \log D)$ elle est dite quasi-linéaire, et quand $n(g, D) \in O(D^{1+\varepsilon})$ on la qualifie de polynomiale.

Décroissance simplement exponentielle Supposons que g et sa transformée de Fourier $\hat{g}$ possèdent une décroissance de nature exponentielle.

Proposition 2.1

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\left|g(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha_1 |x|^{\beta_1}} \tag{5}$$

$$\left|\hat{g}(x)\right| \leqslant M_2 e^{-\alpha_2 |x|^{\beta_2}}. \tag{6}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et des constantes $M_i, \alpha_i > 0$ et $\beta_i \geqslant 1$. Alors la méthode des trapèzes a une complexité

$$n(g, D) \sim \frac{D^{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{\beta_1}} \alpha_2^{\frac{1}{\beta_2}}}, \tag{7}$$

que l'on réalise avec les paramètres

$$nh \geqslant \max\left(\left(\frac{D + \log(\frac{2M_1}{\alpha_1 \beta_1})}{\alpha_1}\right)^{1/\beta_1}, 1\right)$$

$$\frac{1}{h} \geqslant \left(\frac{D + \log(2M_2 + e^{-D})}{\alpha_2}\right)^{1/\beta_2}.$$

Démonstration : – Sous ces hypothèses l'erreur de troncature vérifie

$$\begin{aligned}
\left|h \sum_{k=n+1}^{\infty} g(kh)\right| &\leqslant M_1 h \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\alpha_1 (kh)^{\beta_1}} \\
&\leqslant M_1 h \int_n^{\infty} e^{-\alpha_1 (th)^{\beta_1}} \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{M_1}{\alpha_1 \beta_1 (nh)^{\beta_1 - 1}} \int_{nh}^{\infty} \alpha_1 \beta_1 u^{\beta_1 - 1} e^{-\alpha_1 u^{\beta_1}} \, \mathrm{d}u \qquad (\text{car } \beta_1 \geqslant 1) \\
&\leqslant \frac{M_1}{\alpha_1 \beta_1} e^{-\alpha_1 (nh)^{\beta_1}} \, \mathrm{d}u \qquad \text{si } n \geqslant 1
\end{aligned}$$

la même estimation valant pour $k < -n$, si bien que vérifier

$$\left| h \sum_{|k|>n} g(kh) \right| \leqslant \frac{2M_1}{\alpha_1 \beta_1} e^{-\alpha_1 (nh)^{\beta_1}} \leqslant e^{-D}$$

donne la condition annoncée.

- si $\beta_2 \geqslant 1$, alors $e^{-\alpha_2 (\frac{k}{h})^{\beta_2}} \leqslant e^{-\alpha_2 \frac{k}{h^{\beta_2}}}$, et l'erreur de quadrature est majorée par la série géométrique :

$$\sum_{k \neq 0} \left| \hat{g}(\frac{k}{h}) \right| \leqslant 2 \sum_{k \geqslant 1} M_2 e^{-\alpha_2 \frac{k}{h^{\beta_2}}} = \frac{2M_2}{e^{\frac{\alpha_2}{h^{\beta_2}}} - 1} \tag{8}$$

qui donne immédiatement la condition sur h. □

Pour avoir une bonne convergence, l'important est donc de minimiser $\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}$.

Décroissance doublement exponentielle Ceci correspond au cas $\beta_1 = \infty$ ci-dessus, et on obtient logiquement $D^{1/\beta_1} = \log(D)$. Nous verrons en 2.4 que pour des fonctions holomorphes non nulles cela implique $\beta_2 \leqslant 1$. Nous considérons donc $\beta_2 = 1$ dans ce paragraphe.

Supposons donc pour des constantes $M_i, \alpha_i > 0$ et $\beta_1 > 0$.

Proposition 2.2 (*DE*)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\left| g(x) \right| \leqslant M_1 e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 |x|}} \tag{9}$$

$$\left| \hat{g}(x) \right| \leqslant M_2 e^{-\alpha_2 |x|} \tag{10}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et des constantes $M_i, \alpha_i > 0$ et $\beta_1 \geqslant 1$. Alors la méthode des trapèzes a une complexité

$$n(g, D) \sim \frac{D \log(D)}{\beta_1 \alpha_2} \tag{11}$$

que l'on réalise avec les paramètres

$$nh \geqslant \frac{\log(D + \log(\frac{2M_1}{\alpha_1 \beta_1}))}{\beta_1}$$

$$\frac{1}{h} \geqslant \frac{D + \log(2M_2 + e^{-D})}{\alpha_2}.$$

Démonstration : Comme précédemment on majore

$$\begin{aligned}\left|h\sum_{k=n+1}^{\infty} g(kh)\right| &\leqslant M_1 h \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 xh}}\\ &\leqslant M_1 h \int_n^{\infty} e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 xh}}\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{M_1 h}{\alpha_1\beta_1 h e^{\beta_1 nh}} \int_n^{\infty} \alpha_1\beta_1 h e^{\beta_1 xh} e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 xh}}\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{M_1}{\alpha_1\beta_1 e^{\beta_1 nh}} e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 nh}}.\end{aligned}$$

On a la même majoration pour les termes négatifs. En négligeant la division par $e^{\beta_1 nh} > 1$, majorer ces deux erreurs de troncature par e^{-D} donne la condition. □

2.3 Régularité et décroissance

Le lien entre la régularité d'une fonction g et la décroissance de sa transformée de Fourier $\hat{g}$ est explicité par des théorèmes de type Paley-Wiener. De manière schématique, il y a presque une équivalence entre le fait que g soit holomorphe et bornée sur une bande Δ_τ, et le fait que $\hat{g} \in O(e^{-2\pi\tau|x|})$.

Du fait de la réciprocité de Fourier, tous les résultats peuvent être formulés indifféremment en remplaçant g par $\hat{g}$.

2.3.1 Régularité de g d'après la décroissance de $\hat{g}$

Tout d'abord, l'hypothèse d'une décroissance exponentielle de la transformée de Fourier implique immédiatement l'holomorphie de la fonction g au voisinage de l'axe réel.

Proposition 2.3

Soit $\hat{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\hat{g}(x) = O(e^{-2\pi\tau|x|}), \tau > 0,$$

alors $\hat{g}$ est la transformée de Fourier d'une fonction g holomorphe sur une bande Δ_τ. De plus, pour tout $|t| < \tau$, on a $g \in L^2(\mathbb{R} + it)$.

Démonstration : Sous ces hypothèses, $\hat{g}$ est L^1, de même que $\hat{g}(x)e^{2i\pi xt}$ pour tout $|t| < \tau$, d'où l'existence de $g(x + it)$. De plus, $(2i\pi x)e^{2i\pi xt}\hat{g}(x)$ est elle aussi L^1, donc g est dérivable sur Δ_τ par dérivation sous le signe intégral. L'égalité de Plancherel assure l'intégrabilité L^2. □

Corollaire 2.4

En particulier, si

$$\hat{g}(x) = O(e^{-\alpha|x|^\beta}) \text{ avec } \beta > 1$$

alors g est une fonction entière.

2.3.2 Décroissance de $\hat{g}$ d'après la régularité de g

Réciproquement, et c'est ce qui importe pour l'intégration numérique, on peut chercher à assurer la décroissance exponentielle de $\hat{g}$ à partir d'hypothèses sur g. Si l'on ajoute des conditions convenables qui permettent de décaler la droite d'intégration dans la direction imaginaire, on peut chercher la décroissance de l'exponentielle hors de l'axe, ce qui donne le résultat suivant :

Proposition 2.5

Soit $\tau > 0$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction L^1, telle que
- *g possède un prolongement analytique holomorphe sur un voisinage ouvert de Δ_τ (que l'on note toujours g) ;*
- $\lim_{x\to\pm\infty} \int_{x-i\tau}^{x+i\tau} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$ *;*
- $g \in L^1(\mathbb{R} \pm i\tau)$ *;*

alors $\hat{g}$ vérifie

$$\left|\hat{g}(x)\right| \leqslant M_2 e^{-2\pi|x|\tau}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où $M_2 = \int_{\mathbb{R}} \left|g(t+i\tau)\right| + \left|g(t-i\tau)\right| \,\mathrm{d}t$.

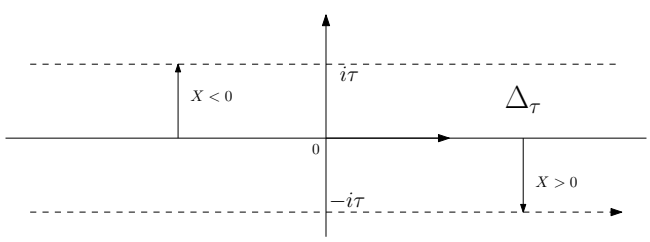


FIGURE 1: décalage de la droite d'intégration

Démonstration : Les hypothèses permettent, via la formule de Cauchy, de dire que pour tout $|t| \leqslant \tau$, on a $\int_{\mathbb{R}} g(u)e^{2i\pi xu}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}+it} g(u)e^{2i\pi xu}\,\mathrm{d}u$.

Ce qui donne en décalant la droite d'intégration vers le bas de $-i\tau$ pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}\left|\hat{g}(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x(z-i\tau)} g(z-i\tau)\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant e^{-2\pi x\tau} \int_{\mathbb{R}} \left|g(z-i\tau)\right| \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left\|g(\cdot - i\tau)\right\|_1 e^{-2\pi x\tau}\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse d'intégrabilité. De même pour $x < 0$, en décalant vers le haut. $\square$

Les deux dernières hypothèses de la proposition 2.5 sont nécessaires. Toutefois, quand g est une fonction à décroissance doublement exponentielle, la proposition 2.13 permet de les obtenir.

En combinant ces deux résultats, on a un moyen simple de connaître la vitesse de décroissance de la transformée de Fourier à partir d'hypothèses sur la fonction initiale :

Théorème 2.6

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à décroissance double-exponentielle possédant un prolongement holomorphe à une bande Δ_τ. Alors

- *si g est bornée sur Δ_τ et $g \in L^1(\mathbb{R} \pm it)$, alors $\hat{g}(x) = O(e^{2\pi t|x|})$ au voisinage de $\mp\infty$;*
- *si $\hat{g}(\pm x) = O(e^{-2\pi\tau x})$ au voisinage de $+\infty$, alors $g \in L^2(\mathbb{R} \mp it)$ pour tout $0 \leqslant t < \tau$;*

Démonstration : Pour le premier point, on applique la proposition 2.5, en déduisant l'hypothèse de décroissance en l'infini de la proposition 2.13 démontrée dans la section suivante. Le second est la proposition 2.3. □

2.4 Décroissance des fonctions holomorphes

La grande rigidité des fonctions holomorphes permet d'étendre des hypothèses de croissance ou de décroissance à un voisinage de l'endroit où on en dispose.

En simplifiant, on peut dire que si une fonction possède un certain type de décroissance exponentielle selon une direction, elle est soumise à une croissance qui lui est directement liée dans une direction transverse. Ainsi l'exponentielle a-t-elle une croissance et une décroissance symétrique selon les moitiés de chaque axe ; la gaussienne $x \mapsto e^{-x^2}$ compense sa décroissance sur l'axe réel par une croissance correspondante $it \mapsto e^{t^2}$ le long de l'axe imaginaire.

Nous démontrons ici quelques résultats classiques obtenus à partir du principe du maximum par la théorie de Phrägmen-Lindelöf, et qui se ramènent tous à l'idée suivante :

> pour des variations de nature exponentielle, les variations les plus faibles sont obtenues par la fonction exponentielle elle-même.

Ces résultats sont donnés dans deux cadres :

- celui des fonctions à décroissance simplement exponentielle, définies sur des secteurs angulaires et pour lesquelles les fonctions de référence sont les exponentielles $e^{\alpha x^\beta}$. On peut trouver ces résultats dans [Car56].
- celui des fonctions à décroissance doublement exponentielle définies, soit sur des bandes Δ_τ auquel cas les fonctions de référence sont les doubles-exponentielles $e^{\alpha \cosh(\beta x)}$, soit sur des demi-bandes Δ_τ^+ pour des fonctions $e^{\alpha e^{\beta x}}$.

Les raisonnements étant similaires, nous avons donné les démonstrations dans ce second cas.

2.4.1 Fonctions à décroissance simplement exponentielle

Notons
$$C_\theta = \left\{ z = re^{it}, r \geqslant 1, -\theta \leqslant t \leqslant \theta \right\}$$
le secteur angulaire des $|z| \geqslant 1$ délimité par les deux rayons
$$R_{\pm\theta} = e^{i\pm\theta}[1, \infty[.$$

Lemme 2.7

Si f est une fonction holomorphe sur C_θ, et vérifie
- $\left|f\right| \leqslant M$ *sur le bord de* C_θ *;*
- $\left|f(z)\right| = O(e^{\alpha|z|^\beta})$ *sur* C_θ *avec* $\beta\theta < \frac{\pi}{2}$ *;*

alors $\left|f\right| \leqslant M$ *uniformément sur* C_θ*.*

Corollaire 2.8

En particulier, si f est bornée sur chaque rayon R_t d'un secteur C_θ, elle l'est par ses majorants sur le bord.

Lemme 2.9

Si f est une fonction holomorphe bornée sur C_θ, et
$$\left|f(z)\right| = O(e^{-\alpha|z|^\beta}) \text{ sur un rayon } R_\tau, \tau \in]-\theta, \theta[$$
avec $\theta\beta > \frac{\pi}{2}$*, alors f est nulle.*

Théorème 2.10

Si f est une fonction holomorphe sur C_θ, telle que
- $\left|f(x)\right| = O(e^{-\alpha x^\beta})$ *sur un rayon* R_τ, $\tau \in]-\theta, \theta[$, *avec* $\beta > \frac{\pi}{2\theta}$ *;*
- $\left|f(z)\right| \leqslant e^{A|z|^\rho}$ *sur* C_θ *avec* $\rho\theta < \frac{\pi}{2}$ *;*

alors f est nulle.

2.4.2 Fonctions à décroissance doublement exponentielle

Les résultats suivants s'obtiennent en remplaçant z^β par $e^{\beta z}$ sur des demi-bandes $\Delta_\tau^+ = [0, \infty[+i] - \tau, \tau[$, ou sur les bandes complètes Δ_τ en considérant plutôt les fonctions $e^{-\alpha \cosh(\beta z)}$.

Proposition 2.11

Soit f une fonction holomorphe sur la demi-bande $\Delta_\tau^+ = \mathbb{R}_+ + i] - \tau, \tau[$ *et telle que*
- $\left|f\right| \leqslant M$ *sur* $\partial\Delta_\tau^+$ *;*

– $f(x+it) = O(e^{\alpha e^{\beta x}})$ *sur* Δ_τ^+ *avec* $\beta\tau < \frac{\pi}{2}$;
alors $|f| \leqslant M$ *uniformément sur* Δ_τ^+.

Remarque : La condition $\beta < 1$ est optimale comme le montre la fonction e^{e^x} qui vérifie les autres conditions de la proposition mais n'est pas bornée.

Démonstration : Par homothétie sur la variable, on se ramène au cas où $\tau = \frac{\pi}{2}$ en remplaçant la condition $\beta\tau < \frac{\pi}{2}$ par $\beta < 1$. On considère un exposant $\gamma \in]\beta, 1[$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction

$$h(z) = e^{-\varepsilon e^{\gamma z}}$$

vérifie $|h(x+it)| \leqslant e^{-\varepsilon\cos(\gamma t)e^{\gamma x}}$, donc h est en particulier bornée sur $\partial\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+$ (car $\cos(\gamma\frac{\pi}{2}) > 0$) et sa décroissance l'emporte sur celle de f :

$$|fh(x+it)| \leqslant e^{e^{\beta x} - \varepsilon\cos(\gamma t)e^{\gamma x}} \to_{x\to\infty} 0.$$

Donc d'après le principe du maximum, fh est bornée sur $\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+$ par M. Ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc en prenant (à x fixé) la limite $\varepsilon \to 0$, cette majoration est valable pour f. □

Décroissance maximale : De même, on limite la décroissance de fonctions qui possèdent une certaine bande d'holomorphie sur laquelle elles restent bornées : si β est l'ordre de décroissance et 2τ la largeur de la bande, on a $\beta 2\tau \leqslant \pi$.

Théorème 2.12

Soit f une fonction holomorphe et bornée sur une bande Δ_τ^+, qui possède une décroissance

$$f(x+it) = O(e^{-\alpha e^{\beta x}}), \quad x > 0$$

avec $\beta > \frac{\pi}{2\tau}$, pour une certaine valeur $t \in]-\tau, \tau[$. Alors f est la fonction nulle.

Démonstration : Supposons f bornée sur $\mathbb{R} + i[0,\tau]$ avec $\tau > \frac{\pi}{2\beta}$. Alors pour tout $\gamma < \beta$, la fonction $h(z) = e^{Ae^{\gamma(z-it)}}$ a une croissance plus lente que la décroissance de f sur $\mathbb{R} + it$. Et si $\gamma(b-t) < \frac{\pi}{2}$, h est bornée sur toute la bande $it + \Delta_{b-t}^+$. Comme de plus $\gamma < \frac{\pi}{2(b-t)}$, le produit fg est borné et vérifie (modulo une translation de $-it$) les hypothèses de la proposition 2.11. Ainsi, fg est bornée, ceci pour tout $A > 0$. En faisant tendre $A \to \infty$, on en déduit que f est nulle. □

Si une fonction décroît fortement, elle va exploser fortement à proximité. Un exemple est donné par la fonction $f(z) = e^{-e^{4z}}$ qui est bornée sur le bord de $\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+$ et a une décroissance très forte. Mais qui a une croissance exponentielle sur les droites $\mathbb{R} \pm i\frac{\pi}{4}$.

Remarque : D'après la formule de Cauchy, si une fonction f est L^1 sur deux droites et tend vers 0 en l'infini, elle est bornée sur tout compact compris entre ces deux droites.

Extension de la décroissance : Dans ce cadre double-exponentiel, donnons un exemple d'utilisation plus précise du principe de Phrägmen-Lindelöf en étendant la décroissance d'une fonction à un voisinage.

Proposition 2.13

Si f est une fonction holomorphe sur une bande Δ_τ^+ vérifiant
- $f(x) = O(e^{-\alpha e^{\beta x}})$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *;*
- $\left|f\right| \leqslant M$ *sur* Δ_τ^+ *;*

alors pour tout $|t| < \tau$,

$$\left|f(x+it)\right| \leqslant M e^{-\alpha_t e^{\beta x}} \tag{12}$$

où $\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \frac{\sin(\beta t)}{\tan(\beta\tau)})$.

Démonstration : Si f est nulle, la conclusion est vraie. On suppose donc f non nulle, et le théorème 2.12 impose $\tau \leqslant \frac{\pi}{2\beta}$. On considère une fonction $h(z) = e^{(a+ib)e^{\beta z}}$ de sorte que hf soit bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+ + i\tau$. Puisque

$$\left|h(x+it)\right| = e^{(a\cos(\beta t) - b\sin(\beta t))e^{\beta x}}$$

il suffit de choisir $a = \alpha$ et $b = \frac{\alpha}{\tan(\beta\tau)}$ on a $|h| = 1$ sur $\mathbb{R}_+ + i\tau$ et $\left|fh\right| \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$. Puisque en outre fh a une croissance d'ordre β sur la bande $\Delta_{0,\tau}$ de largeur $\tau \leqslant \frac{\pi}{2\beta} < \frac{\pi}{\beta}$, on a $\left|fh\right| \leqslant M$ sur $\Delta_{0,\tau}$. La même chose est vraie sur la demi-bande inférieure en prenant l'opposé de b, ce qui démontre le résultat. □

Proposition 2.14

Si f est une fonction holomorphe sur une bande Δ_τ vérifiant
- $f(x) = O(e^{-\alpha e^{\beta x}})$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *pour des valeurs* $\alpha, \beta > 0$ *;*
- $\left|f(x+it)\right| \leqslant M e^{\lambda x + A e^{\gamma x}}$ *sur* Δ_τ *avec* $\gamma < \beta$ *;*

alors pour tout $|t| < \tau$,

$$\left|f(x+it)\right| \leqslant M e^{\lambda x + A_t e^{\gamma x} - \alpha_t e^{\beta x}} \tag{13}$$

où $\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \frac{\sin(\beta t)}{\tan(\beta\tau)})$ *et* $A_t = A\frac{\cos(\gamma t)}{\cos(\gamma\tau)}$.

Démonstration : D'après 2.12, on a $\beta\tau \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\gamma\tau) > 0$. On applique alors simplement le théorème précédent au produit fh, où on pose $h(z) = e^{-\lambda z - \frac{A}{\cos(\gamma\tau)}e^{\gamma z}}$ □

2.5 Énoncé du théorème double-exponentiel

Le théorème général d'intégration des fonctions à décroissance doublement exponentielle consiste simplement à utiliser les résultats de la section précédente pour appliquer la proposition 2.2 uniquement en terme de la fonction g.

Nous donnons trois versions du théorème d'intégration pour les fonctions à décroissance doublement exponentielle : le premier fait appel à des hypothèses assez précises mais permet d'obtenir en pratique les meilleures constantes, tandis que les suivants affaiblissent les hypothèses au prix d'une perte de précision sur les constantes.

Théorème 2.15 (*intégration double exponentielle 1*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1. *f possède un prolongement holomorphe borné sur une bande Δ_τ ;*
2. *$\left|f(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha e^{\beta|x|}}$ sur $\mathbb{R}$;*
3. *$\int_{\mathbb{R}} \left|f(x-i\tau)\right| + \left|f(x+i\tau)\right| \, \mathrm{d}x \leqslant M_2$;*

alors, pour tout $D > 0$, en posant

$$h \leqslant \frac{2\pi\tau}{D + \log(4M_2 + 2e^{-D})} \tag{14}$$

$$\text{et} \quad n \geqslant \frac{\log(D + \log(\frac{4M_1}{\alpha\beta}))}{h\beta} \tag{15}$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - h \sum_{k=-n}^{n} f(kh) \right| \leqslant e^{-D}.$$

Démonstration : Les paramètres sont ceux de la proposition 2.2, où l'on obtient $\alpha_2 = 2\pi\tau$ à l'aide du théorème 2.6. □

En raison des résultats de la section 2.4, on peut assouplir l'hypothèse d'intégrabilité L^1 au moyen de calculs génériques :

Théorème 2.16 (*intégration double exponentielle 2*)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1. *g possède un prolongement holomorphe sur une bande Δ_τ ;*
2. *$\left|g(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha e^{\beta|x|}}$ sur $\mathbb{R}$;*
3. *$\left|g(z)\right| \leqslant M_2$ sur Δ_τ ;*

alors, pour tout $D > 0$, en posant

$$\delta = \frac{1}{\tan(\beta\tau)} \qquad (\delta = 0 \text{ si } \beta\tau = \frac{\pi}{2}) \tag{16}$$

$$t = \frac{1}{\beta}\arctan(\frac{D - \beta\delta\tau}{\delta D + \beta\tau}) \tag{17}$$

$$\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \delta\sin(\beta t)) \tag{18}$$

$$h \leqslant \frac{2\pi t}{D + \log(\frac{4M_2 e^{-\alpha_t}}{\alpha_t \beta} + 2e^{-D})} \tag{19}$$

$$\text{et} \quad n \geqslant \frac{\log(D + \log(\frac{4M_1}{\alpha\beta}))}{h\beta} \tag{20}$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g - h \sum_{k=-n}^{n} g(kh) \right| \leqslant e^{-D}.$$

Démonstration : D'après la proposition 2.13, pour tout $t < \tau$,

$$\left|g(x \pm it)\right| \leqslant M_2 e^{-\alpha(t)e^{\beta|x|}}$$

où $\alpha(t) = \cos(\beta t) - \delta\sin(\beta t)$, avec $\delta = \frac{1}{\tan(\beta\tau)}$. En particulier, pour tout $|t| < \tau$, g vérifie les hypothèses de la proposition 2.5 avec $\left\|g(\cdot + it)\right\|_1 \leqslant \frac{2M_2 e^{-\alpha(t)}}{\alpha(t)\beta}$ (cf. (82)). On a donc

$$\left|\hat{g}(X)\right| \leqslant \frac{4M_2 e^{-\alpha(t)}}{\alpha(t)\beta} e^{-2\pi X t}$$

et $\alpha(t) \to 0$ pour $t \to \tau$.

Choix de t : À X fixé, et en négligeant le terme $e^{-\alpha(t)}$, on minimise le membre de droite au maximum de $2\pi t X + \log(\alpha(t))$, soit en posant $\tan(\beta t) = \frac{2\pi X - \beta\delta}{\beta + 2\pi X\delta}$. Pour $D \to \infty$, on a $t \to \tau$ et $2\pi t X \sim D$, donc $X \sim \frac{D}{2\pi\tau}$. On pose donc

$$t = \frac{1}{\beta}\arctan(\frac{D - \beta\delta\tau}{\delta D + \beta\tau}).$$

Choix de h, de nh : Une fois t fixé, les paramètres sont issus de la proposition 2.2. □

Complexité asymptotique (théorème 2.16) : De plus, on a

$$\tan(\beta t) = \tan(\beta\tau)(1 - \frac{\delta + \delta^{-1}}{D}) + O(D^{-2})$$

donc

$$t = \tau - \frac{1+\delta^{-2}}{\beta(1+\delta^{-2})D} + O(D^{-2}) = \tau - \frac{1}{\beta D} + O(D^{-2}).$$

On en déduit

$$\alpha(t) = 0 + (\beta\sin(\beta\tau) + \beta\delta\cos(\beta\tau))\frac{1}{\beta D} + O(D^{-2}) = \frac{\sin(\beta\tau)(1+\delta^2)}{D} + O(D^{-2})$$

et donc pour $D \to \infty$

$$n \sim \frac{(D + \log(\frac{4M_2 D}{\beta\sin(\beta\tau)(1+\delta^2)}))\log(D + \frac{4M_1}{\alpha\beta})}{2\pi\tau\beta}.$$

Enfin, si l'on affaiblit encore l'hypothèse de régularité, on peut écrire le théorème très général suivant.

Théorème 2.17 (*intégration double exponentielle 3*)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1. *g possède un prolongement holomorphe sur une bande Δ_τ ;*
2. *$|g(x)| \leqslant M_1 e^{-\alpha e^{\beta|x|}}$ sur $\mathbb{R}$;*
3. *$|g(z)| \leqslant M_2 e^{\lambda|x| + Ae^{\gamma|x|}}$ sur Δ_τ ;*

pour des constantes positives telles que $\beta > \gamma$. Alors pour tout $D > 1$ et tout $t \in]0, \tau[$, en posant

$$\delta = \frac{1}{\tan(\beta\tau)} \qquad (\delta = 0 \text{ si } \beta\tau = \frac{\pi}{2}) \tag{21}$$

$$\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \delta\sin(\beta t)) \tag{22}$$

$$A_t = A\frac{\cos(\gamma t)}{\cos(\gamma\tau)} \tag{23}$$

$$C_t = A_t\left(\frac{A_t\gamma + \lambda + 1}{\alpha_t\beta}\right)^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}} - \alpha_t\left(\frac{A_t\gamma}{\alpha_t\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} + \frac{\lambda+1}{\beta-\gamma}\log\left(\frac{A_t\gamma + \lambda + 1}{\alpha_t\beta}\right) \tag{24}$$

$$h \leqslant \frac{2\pi t}{D + C_t + \log(4M_2 + 2e^{-D-C_t})} \tag{25}$$

$$\text{et} \quad n \geqslant \frac{\log(D + \log(\frac{4M_1}{\alpha\beta}))}{h\beta} \tag{26}$$

on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g - h\sum_{k=-n}^{n} g(kh)\right| \leqslant e^{-D}.$$

Démonstration : À présent, d'après la proposition 2.14 on étend la décroissance de g en

$$\left|g(x+it)\right| \leqslant M_2 e^{\lambda|x|+A_t e^{\gamma|x|}-\alpha_t e^{\beta|x|}}$$

d'où l'on tire (cf. lemme A.1)

$$\left\|g(\cdot+it)\right\|_1 \leqslant 2M_2 \exp(C_t)$$

avec la constante C_t (24). □

Et pour déterminer une bonne valeur de t, on peut remplacer α_t par son équivalent $\alpha_t \sim \alpha\beta(\sin(\beta\tau)+\delta\sin(\beta\tau)^{-1})(\tau-t) = a(\tau-t)$, avec $a = \alpha\beta\sin(\beta\tau)(1+\delta^2)$, et maximiser la valeur de h, c'est-à-dire résoudre numériquement sur $t \in]0,\tau[$

$$D + \log(4M_2 + 2e^{-D}) + U(\tau-t)^{-\frac{\gamma}{\beta-\gamma}} = \frac{\gamma}{\beta-\gamma} Ut(\tau-t)^{-\frac{\beta}{\beta-\gamma}}$$

avec $U = A\left(\frac{A\gamma+\lambda+1}{a\beta}\right)^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}} - a\left(\frac{A\gamma}{a\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}$.

En posant $\tilde{D} = D + log(4M_2 + 2e^{-D})$, on maximise $X = \frac{1}{h}$ en les zéros de

$$2\pi t^2 \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_t - C_t - \tilde{D}.$$

Pour $t \to \tau$, on remplace α_t par son équivalent $a(\tau-t)$, où $a = \alpha\beta\sin(\beta\tau)(1+\delta^2)$, et A_t par son équivalent A.

Si $A = 0$, $C_t \sim \frac{\lambda+1}{\beta}\log(\frac{\lambda+1}{a(\tau-t)\beta e})$ et on résout

$$\frac{\lambda+1}{\beta}\frac{t}{\tau-t} = \tilde{D} + \frac{\lambda+1}{\beta}\log(\frac{\lambda+1}{a(\tau-t)\beta e}),$$

soit, en posant $D_1 = \frac{\beta}{\lambda+1}\tilde{D} + \log(\frac{\lambda+1}{a\beta e})$,

$$(\tau-t)\log(\tau-t) + t = (\tau-t)D_1.$$

2.6 Optimalité du principe double-exponentiel

2.6.1 Principe d'incertitude

Le théorème 2.12 s'inscrit dans une famille plus générale de résultats d'incertitude, qui limitent la décroissance simultanée de g et $\hat{g}$.

Les résultats énoncés dans la section 2.4 permettent d'obtenir très simplement des résultats dans ce sens :

Lemme 2.18

Si $\left|\hat{g}(x)\right| \leqslant M_2 e^{\alpha_2|x|^{\beta_2}}$, $\beta_2 > 1$, *alors*

$$\left|g(x+it)\right| \leqslant 2M_2 e^{\frac{(2\pi|t|+1)^{\lambda+1}}{(\alpha_2\beta_2)^{\lambda}}}, \quad \text{où } \lambda = \frac{1}{\beta_2-1}. \tag{27}$$

Démonstration : Par transformée de Fourier inverse, on majore $\left|g(x+it)\right| \leqslant M_2 \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ut - \alpha_2 |u|^{\beta_2}} \, \mathrm{d}u$ à l'aide du lemme 78. □

Corollaire 2.19 (*principe d'incertitude*)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction satisfaisant les hypothèses de décroissance simplement exponentielle (5) *et* (6) *de la proposition 2.1. Alors si g n'est pas nulle,*

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \geqslant 1.$$

Démonstration : On peut supposer $\beta_1 > 1$, en appliquant le théorème 2.10 sur un secteur d'ouverture $\frac{\pi}{\beta_1}$ on obtient $\lambda + 1 = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} \geqslant \beta_1$, d'où le résultat. □

Le très élégant théorème suivant, dû à Beurling [Hör91], donne un énoncé très symétrique et plus général du principe d'incertitude

Théorème 2.20 (*Beurling*)

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left|g(x)\right| \left|\hat{g}(y)\right| e^{2\pi |xy|} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty$$

si et seulement si g est nulle.

2.6.2 Complexité minimale

Ainsi, sous réserve de majorer les erreurs de quadrature et de troncature comme nous l'avons fait aux propositions 2.1 ou 2.2, on a les résultats suivants :

Théorème 2.21

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à décroissance simplement exponentielle

$$\left|g(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha_1 |x|^{\beta_1}}.$$

- *L'intégration numérique de g à précision D par la méthode des trapèzes se fait au minimum en $n(g, D) = O(D)$ évaluations.*
- *S'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $g \notin L^2(\mathbb{R} + it)$ (en particulier si g n'est pas holomorphe sur le plan complexe tout entier), alors la complexité est au minimum en $n(g, D) = O(D^{1+\frac{1}{\beta_1}})$ évaluations.*

Démonstration : Nous avons montré que $\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta^2} \geqslant 1$. La seconde affirmation est issue de la proposition 2.3. □

Remarque : Il existe un grand nombre de fonctions pour lesquelles la formule des trapèzes fournit directement une intégration de complexité linéaire : les fonctions de Hermite, et plus généralement toutes les fonctions de la forme

$$g(x) = P(x)\exp(-Q(x^2))$$

où P et Q sont des polynômes et Q est à coefficients positifs.

Proposition 2.22

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non nulle à décroissance doublement exponentielle

$$\left|g(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 |x|}},$$

et dont la transformée de Fourier possède une décroissance

$$\left|\hat{g}(x)\right| \leqslant M_2 e^{-\alpha_2 |x|^{\beta_2}}.$$

Alors $\beta_2 \leqslant 1$ et si $\beta_2 = 1$ on a

$$\alpha_2 \beta_1 \leqslant \pi^2.$$

Ainsi l'intégration numérique de g à précision D par la méthode des trapèzes se fait au minimum en $D\log(D)(\frac{1}{\pi^2} + o(1))$ évaluations.

Démonstration : En effet, si $\beta_2 > 1$, alors g est bornée sur toutes les droites $\mathbb{R} + i\tau$, ce qui est impossible d'après le théorème 2.12. Le cas d'égalité se traite par le même théorème : pour tout α_2 la transformée de Fourier inverse permet de borner g sur les droites $\mathbb{R} + it$ avec $2\pi t < \alpha_2$, donc on ne peut avoir $\beta \frac{\alpha_2}{2\pi} > \frac{\pi}{2}$. □

Mentionnons également un autre résultat d'optimalité qui ne se limite pas à la méthode des trapèzes. Il s'agit du théorème obtenu par Sugihara dans [Sug97], qui montre une certaine optimalité en moyenne de la méthode double-exponentielle parmi les autres méthodes de quadrature.

Théorème 2.23 (*Sugihara 1997*)

Soit T_n une formule de quadrature d'ordre n sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme

$$T_n : f \mapsto \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{d_i} a_{i,j} f^{(j)}(x_i)$$

pour une famille de points x_i et de poids $a_{i,j}$ tels que $\sum_{i,j} j\delta_{a_{i,j}\neq 0} = n$.

Alors il existe une constante absolue $C > 0$ indépendante de n telle que pour tous $\alpha, \beta > 0$ et pour tout $\tau < \frac{\pi}{2\beta}$, il existe une fonction f vérifiant les hypothèses du théorème 2.15 telle que

$$\left|T_n(f) - \int_{\mathbb{R}} f\right| \geqslant C\log(n)\exp\left(-\frac{2\pi\tau\beta n}{\log(\pi\tau\beta n/\alpha)}\right).$$

En particulier

$$n(g, D) \sim \frac{D \log(D/\alpha)}{2\pi\tau\beta}. \tag{28}$$

Démonstration : Nous donnons uniquement les idées principales de [Sug97].

La fonction f est obtenue en multipliant la fonction $e^{-2\alpha\cosh(\beta x)}$ par un produit de Blaschke choisi pour que f s'annule à l'ordre d_i en tous les x_i, de sorte que $T_n(f) = 0$, et tel que f satisfasse toujours les hypothèses du théorème 2.15. En prenant un produit symétrique $b(z)\overline{b(\bar{z})}$ d'un tel produit de Blaschke b, on obtient même une fonction f réelle positive sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'effectuer une minoration adéquate de l'intégrale et donne le résultat. L'équivalent en terme du nombre d'évaluations n s'obtient par inversion de $\frac{2\pi\tau\beta n}{\log(\pi\tau\beta n/\alpha)} = D$, soit $n = \frac{D\log(\frac{D}{\alpha}\log(\frac{D}{\alpha}\log\cdots)))}{2\pi\tau\beta}$. □

Puisque la méthode double-exponentielle est réalisée à l'aide de $2n+1$ points, ce théorème montre que la complexité est sous-optimale d'un facteur au plus 2 en moyenne.

3 Application à l'intégration sur divers domaines

Dans cette partie, nous décrivons l'application des théorèmes précédents à l'intégration sur des intervalles quelconques. Dans le cas d'une fonction f

1. définie sur un intervalle I ;
2. possédant certaines propriétés d'intégrabilité sur I ;
3. holomorphe dans un voisinage Z de I sur lequel elle reste bornée, ou garde une croissance modérée ;

il convient d'introduire un changement de variable

$$z = \varphi(z')$$

de sorte que la fonction $g(z') = \varphi(z') f \circ \varphi(z')$ vérifie les hypothèse du théorème 2.17, c'est-à-dire que

1. $\varphi(\mathbb{R}) = I$;
2. g ait une décroissance doublement-exponentielle sur $\mathbb{R}$;
3. il existe une valeur $\tau > 0$ et une zone $Z_\tau \subset Z$ telle que φ et φ' soient holomorphe sur Δ_τ, et $\varphi(\Delta_\tau) \subset Z_\tau$.

Le changement de variable est construit de manière à satisfaire les deux premiers points. Il induit une géométrie particulière aux images $\varphi(\Delta_\tau)$ que nous explicitons.

En outre, pour choisir la borne de troncature, on se référera au lemme suivant

Lemme 3.1

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, on suppose que $|f|$ est majorée par une fonction $F : I \to \mathbb{R}_+$ et que le changement φ est croissant et tel que $\varphi' \times F \circ \varphi$ soit décroissante sur $[nh, \infty[$, alors l'erreur de troncature réalisée lors de l'intégration vérifie

$$h \left| \sum_{|k|>n} g(kh) \right| \leqslant \int_{\varphi(nh)}^{\varphi(\infty)} F(t)\,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

Démonstration : En effet, si on dispose d'une fonction $F > 0$ décroissante et intégrable qui majore f sur I, alors

$$h \left| \sum_{|k|>n} g(kh) \right| \leqslant h \sum_{|k|>n} \varphi'(kh) F(\varphi(kh)) \leqslant \int_{nh}^{\infty} \varphi'(t) F(\varphi(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varphi(nh)}^{\varphi(\infty)} F(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Pour éviter d'exhiber des majorations exactes trop compliquées de ces restes intégraux, on introduit la fonction implicite suivante pour des valeurs α, β et D strictement positives

$$L_{\alpha,\beta}(D) = \inf \left\{ X, \int_X^{\infty} e^{-\alpha x^{\beta}}\,\mathrm{d}x \leqslant e^{-D} \right\} \sim \left(\frac{D}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{30}$$

Ce type d'estimation est uniquement théorique. En pratique, lors d'une intégration, on se contente de sommer les termes $g(kh)$ jusqu'à ce que leur module soit négligeable.

3.1 Droite réelle

3.1.1 Cas d'une décroissance simplement exponentielle

On suppose $f(x) = O(e^{-\alpha|x|^{\beta}})$ sur $\mathbb{R}$, on pose alors :

$$\boxed{z = \varphi(z') = \sinh(z').} \tag{31}$$

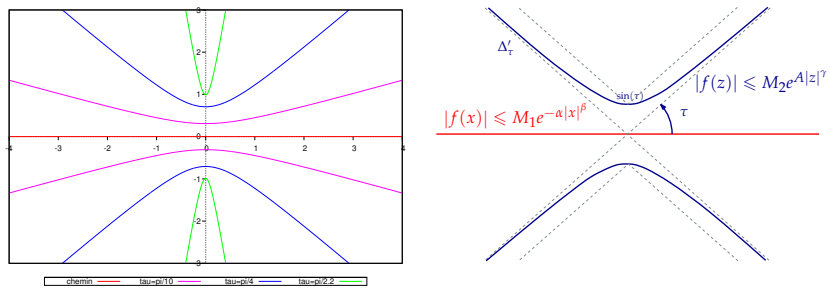
Les exponentielles changent la largeur de Δ_τ en angle, de sorte que la zone Z_τ est contenue dans un cône.

Lemme 3.2 (*zone Z_τ*)

Soit $\tau \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(x + i\tau) = \sinh(x + i\tau) \in \left\{ z, \mathrm{Im}(z) \in [\tan\tau \mathrm{Re}(z), \tan\tau \mathrm{Re}(z) + \sin\tau] \right\}$$

En particulier, si l'on définit Z_τ comme un cône d'ouverture τ épaissi d'une



(a) $\varphi^{-1}(\mathbb{R} + i\tau)$ (b) zone Z_τ

FIGURE 2: changement de variable $\varphi = \sinh$.

largeur $\sin\tau$,

$$Z_\tau = \left\{z, \left|\arg(z)\right| \leqslant \tau \bmod \pi\right\} + i[-\sin\tau, \sin\tau] \tag{32}$$

on a $\varphi(\Delta_\tau) \subset Z_\tau$ *et* $\lim_{\tau\to 0} Z_\tau = \mathbb{R}$.

Démonstration : En effet, en posant $X + iY = \sinh(x + i\tau)$,

$$\begin{aligned} Y &= \cosh x \sin\tau = \sin\tau\sqrt{1+\sinh^2 x} \\ &= \sin\tau\sqrt{1+\frac{X^2}{\cos^2\tau}} \\ &= \tan\tau\sqrt{X^2+\cos^2\tau} \end{aligned}$$

On a donc toujours

$$X\tan\tau \leqslant Y \leqslant X\tan\tau + \sin\tau$$

c'est-à-dire que $\sinh(x + i\tau)$ est dans la bande B_τ. □

Théorème 3.3 (*changement de variable exponentiel*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *et* $\tau \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *vérifiant :*

1. $\left|f(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha|x|^\beta}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$, *avec* $\alpha, \beta > 0$ *;*

2. f *possède un prolongement holomorphe sur un* cône épaissi Z_τ *;*

3. $\left|f(z)\right| \leqslant M_2 e^{Ae^{\gamma|z|}}$ *sur* Z_τ *avec* $A \geqslant 0$ *et* $\gamma < \beta$.

Alors pour $D > 1$ et $t < \tau$, en posant

$$h \leqslant \frac{2\pi t}{D + C_t + \log(4M_2 + 2e^{-D-C_t})}$$

$$nh \geqslant \operatorname{arcsinh}(L_{\alpha,\beta}(D + \log(2M_1))$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - h \sum_{k=-n}^{n} f\Big(\sinh(kh)\Big) \cosh(kh) \right| < e^{-D}.$$

Le nombre d'évaluations possède l'équivalent

$$n \sim \frac{(D + C_t) \log(\frac{2(D+\log(M_1))}{\alpha})}{2\pi\tau\beta}.$$

Démonstration : Quitte à faire un changement de variable initial $x \mapsto \lambda x$, on suppose $\alpha\beta \geqslant 1$ sans perdre en généralité.

La fonction $g(x) = \cosh(x) f(\sinh(x))$ a une décroissance doublement exponentielle sur $\mathbb{R}$ d'ordre α', β pour tout $\alpha' < \alpha$, et d'après les encadrements (75),

$$\begin{aligned} \left|g(x+it)\right| &\leqslant \left|f(\sinh(x+it))\right| \left|\cosh(x+it)\right| \\ &\leqslant M_2 e^{A(\cosh x)^\gamma} \cosh x \\ &\leqslant M_2 e^{x + Ae^{\gamma x}} \end{aligned}$$

donc g vérifie (3) avec $\lambda = 1$. On peut donc poser h selon le théorème 2.17.

En ce qui concerne le produit nh, on utilise plutôt le lemme de troncature 3.1, en résolvant l'équation $\int_{\sinh(kh)}^{\infty} M_1 e^{-\alpha t^\beta} \, \mathrm{d}t < e^{-D}$. □

3.1.2 Cas d'une décroissance polynomiale

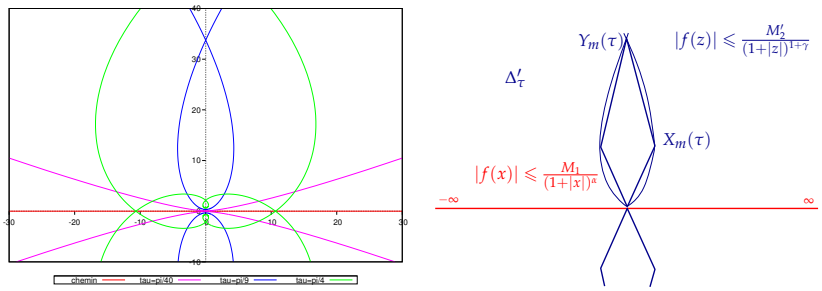
Si $f(x) = O(|x|^{-n})$ pour $n > 1$, on effectue le changement de variable

$$\boxed{z = \varphi(z') = \sinh(\sinh(z')).} \tag{33}$$

Dans ce cas, quelle que soit la valeur de τ, la zone couvre à peu près tout le plan complexe, mais on peut toujours isoler deux zones autour de $\pm i$.

Lemme 3.4 (*zone Z_τ*)

Soit $\tau < \frac{\pi}{2}$: on définit deux points $Y_{\min}$ et $Y_{\max}$ sur l'axe imaginaire, de hauteur respectives $\sin(\sin\tau)$ et $\cosh(\cos\tau\sqrt{(\frac{\pi}{2\sin\tau})^2 - 1})$, ainsi qu'un point



(a) $\varphi^{-1}(\mathbb{R}+i\tau)$ (b) zone Z_τ

FIGURE 3: changement de variable $\varphi(t) = \sinh(\sinh t)$.

> $X_{\max}$ *de coordonnées*
>
> $$X_{\max} : \begin{pmatrix} \sinh(\cot\tau\sqrt{\beta^2-\sin^2\tau})\cos\beta \\ \cosh(\cot\tau\sqrt{\beta^2-\sin^2\tau})\sin\beta \end{pmatrix} ., \textit{avec } \beta = \sqrt{\sin\tau(\frac{\pi}{2}-\tau)}.$$
>
> *Alors le triangle (ouvert) défini par ces trois points est situé en dehors de* Z_τ*, ainsi que ses symétriques par rapport aux axes et à l'origine, et* $\lim_{\tau\to 0} Z_\tau = \mathbb{R}$*. On remarque en particulier que pour tout* $\tau \pm i \notin Z_\tau$*.*

Démonstration : On considère la zone délimitée par la courbe ς_τ paramétrée par $t \mapsto \varphi(t+i\tau)$. Soit donc $z' = t+i\tau$, on pose $\alpha+i\beta = \sinh(z')$ et $x+iy = \sinh(\alpha+i\beta)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \alpha = \sinh t\cos\tau \\ \beta = \cosh t\sin\tau \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \sinh\alpha\cos\beta \\ y = \cosh\alpha\sin\beta \end{cases}.$$

On considère ς_τ comme une courbe paramétrée par α :

$$\varsigma_\tau(\alpha) : \begin{cases} x = \sinh\alpha\cos\beta \\ y = \cosh\alpha\sin\beta \end{cases}.$$

et ceci sur un intervalle $[0,\alpha_0]$ tel que $\beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ pour rester dans le quatran positif. C'est aussi une courbe paramétrée par β en vertu des relations

$$\begin{cases} \beta(\alpha) = \tan\tau\sqrt{\alpha^2+\cos^2\tau} \\ \alpha(\beta) = \cot\tau\sqrt{\beta^2-\sin^2\tau} \end{cases}.$$

On démontre alors

1. que ς_τ passe par les points Y_{min}, Y_{max} ainsi que par le point X_{max} défini dans l'énoncé ;

2. que ς_τ a une courbure constamment négative.

Cela permet de conclure comme annoncé, puisque sans changement de courbure ς_τ reste à droite de ses cordes.

Par symétrie, on suppose $t, \tau > 0$.

En $t = 0$, ς_τ passe par le point $(0, y_{min})$ où $y_{min} = \sin\beta = \sin\sin\tau$.
ς_τ coupe à nouveau l'axe des abscisses pour $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $x_0 = \operatorname{arccosh}(\frac{\pi}{2\sin\tau})$.
On a alors $\alpha_0 = \cos\tau\sqrt{\frac{\pi^2}{4\sin^2\tau} - 1}$, d'où une ordonnée

$$y = \cosh(\alpha_0) = \cosh(\cos\tau\sqrt{\frac{\pi^2}{4\sin^2\tau} - 1})$$

ce qui définit les points $Y_{\min}$ et $Y_{\max}$ annoncés.

Le fait que la courbure soit de signe constant se démontre aisément par le calcul : on développe l'expression

$$y''(\alpha)x'(\alpha) - x''(\alpha)y'(\alpha)$$

en fonction de α, $\beta'(\alpha) > 0$ et $\beta''(\alpha) > 0$, en constatant après réduction qu'elle est formée de termes positifs.

On choisit enfin un point $X_{\max} = (X, Y)$ tel que $X \to \infty$ et $Y/X \to 0$ quand $\tau \to 0$ afin que la famille Z_τ recouvre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ceci impose $\frac{tan(\beta)}{\tanh(\alpha)} \to 0$, soit $\alpha(\tau) \to \infty$ et $\beta(\tau) \to 0$, en respectant les relations $\sin(\tau) < \beta < \frac{\pi}{2} - \tau$ et $\alpha(\beta) = \frac{\sqrt{\beta^2 - \sin^2\tau}}{\tan\tau}$.
Poser $\beta = \sqrt{\sin\tau(\frac{\pi}{2} - \tau)}$ convient.

Essayons de minorer la valeur maximale de x sur $[0, \alpha_0]$. De

$$\begin{cases} \beta(\alpha) \leqslant \alpha\tan\tau + \sin\tau \\ \beta'(\alpha) = \tan\tau\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \cos^2\tau}} \leqslant \tan\tau \end{cases}$$

on tire la minoration

$$x'(\alpha) = \cosh\alpha\cos\beta - \sinh\alpha\beta'\sin\beta \tag{34}$$
$$\geqslant \cosh\alpha(\cos\beta - \tan\tau\sin\beta)\ ; \tag{35}$$

en particulier $x'(\alpha) \geqslant 0$ pour $\tan\beta \leqslant \cot\tau$, c'est-à-dire $\beta \leqslant \frac{\pi}{2} - \tau = \beta_1$.

On pose alors $X_{\max}$ le point de paramètre $\alpha_1 = \alpha(\beta_1)$. En reportant les valeurs de β et $\alpha(\beta)$ dans x et y on trouve les coordonnées annoncées. Par construction, ς_τ passe par $X_{\max}$. □

On obtient donc le résultat suivant :

Théorème 3.5 (*changement de variable double-exponentiel*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $\tau \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant :

1. *f possède un prolongement holomorphe sur une zone Z_τ définie ci-dessus ;*
2. *$\left|f(z)\right| \leqslant \frac{M_2}{1+|z|^{1+v}}$ sur Z_τ, avec $v > 0$;*

3. $\left|f(x)\right| \leqslant M_1 x^{-\alpha}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$*, avec* $\alpha > 1$*.*

Alors, pour tout $D > 1$*, en prenant*

– $h \leqslant \frac{2\pi\tau}{D+\log(\frac{2M_2}{v\cos\tau})}$;

– $nh \geqslant \operatorname{arcsinh}(\operatorname{arcsinh}(\exp(\frac{D+\log(\frac{2M_1}{\alpha-1}))}{\alpha-1})) \sim \log(2\frac{D+\log(\frac{2M_1}{\alpha-1})}{\alpha-1})$

on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f - h\sum_{k=-n}^{n} f\Big(\sinh(kh)\Big)\cosh(kh)\right| \leqslant e^{-D}$$

soit $n(d,D) \sim \frac{D\log D}{2\pi\tau}$ *évaluations de* f*.*

Démonstration : – On majore

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}+i\tau}\left|g(t)\right|\,\mathrm{d}t &\leqslant M_2\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\cosh(x+i\tau)\cosh(\sinh(t+i\tau))\right|}{1+\left|\sinh(\sinh(x+i\tau))\right|^{1+v}}\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant M_2\int_{\mathbb{R}}\frac{\cosh(t)\cosh(\sinh t\cos\tau)}{1+\left|\sinh(\sinh t\cos\tau)\right|^{1+v}}\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \frac{M_2}{\cos\tau}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+\left|u\right|^{1+v}}\,\mathrm{d}u\\
&\leqslant \frac{2M_2}{v\cos\tau}
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit une majoration de $\hat{g}$ et le pas h.

– le reste intégral $\int_X^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ vaut $\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$, ce qui permet de déterminer nh selon le lemme 3.1. □

3.2 Demi-droite

3.2.1 Cas d'une décroissance exponentielle

Si f possède une limite finie en 0 vers laquelle elle ne tend pas trop vite (c-à-d. si elle possède un développement limité non nul en 0) [1], et si f possède une décroissance exponentielle en l'infini de la forme

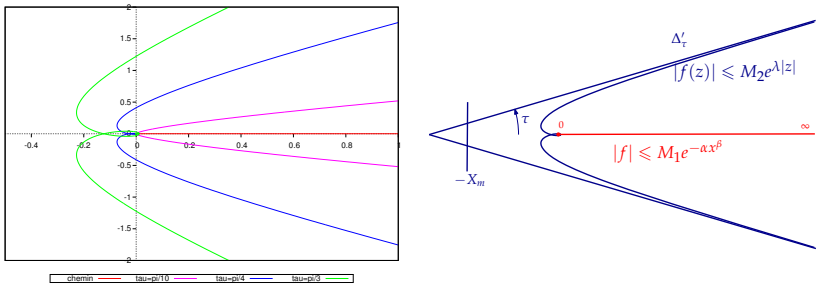
$$\left|f(x)\right| \leqslant M_1(1+x)^{\sigma}e^{-\alpha x^{\beta}},$$

on effectue le changement de variable

$$\boxed{z = \varphi(z') = e^{z'-\alpha e^{-\beta z'}}.} \tag{36}$$

Remarque : Pour simplifier les calculs, on suppose $\beta \geqslant 1$. On peut toujours s'y ramener par un changement de variable préliminaire.

1. On demandera de toutes façons que f soit holomorphe au voisinage de 0, donc ce sera le cas.



(a) $\varphi^{-1}(\mathbb{R}+i\tau)$ (b) zone Z_τ

FIGURE 4: changement de variable $\varphi(t) = e^{t-\alpha e^{\beta t}}$.

Majorations On a pour $\left|\beta\tau\right| \leqslant \pi/2$

$$\varphi(x+i\tau) = e^{x+i\tau-\alpha e^{-\beta x - i\beta\tau}} \tag{37}$$

$$\varphi'(x+i\tau) = (1+\alpha\beta e^{-\beta x - i\beta\tau})\varphi(x+i\tau) \tag{38}$$

donc

$$\left|\varphi(x+i\tau)\right| = e^{x-\alpha\cos(\beta\tau)e^{-\beta x}} \tag{39}$$

$$\left|\varphi'(x+i\tau)\right| \leqslant (1+\alpha\beta\cos(\beta\tau)e^{-\beta x})\left|\varphi(x+i\tau)\right| \tag{40}$$

$$\arg(\varphi(x+i\tau)) = \tau + \alpha\sin(\beta\tau)e^{-\beta x} \tag{41}$$

Lemme 3.6 (*zone Z_τ*)

Soit $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}[$, alors si l'on définit Z_τ comme un cône tronqué d'ouverture $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$$Z_\tau = \left\{ z, \begin{array}{l} \left|\mathrm{Im}(z)\right| \leqslant \tan(\tau)(\mathrm{Re}(z)+\alpha) \\ \mathrm{Re}(z) + \rho_m \geqslant 0 \end{array} \right\},$$

où

$$\rho_m = \frac{\alpha\sin(\beta\tau)}{\frac{\pi}{2}-\tau} e^{-\frac{\frac{\pi}{2}-\tau}{\tan(\beta\tau)}}, \tag{42}$$

on a $\varphi(\Delta_\tau) \subset Z_\tau$ et $\lim_{\tau\to 0} Z_\tau = [0,\infty[$.

Démonstration : Étudions l'image par φ d'une bande Δ_τ :

$\varphi(x+i\tau) = \rho e^{i\theta}$ avec $\left\{ \begin{array}{l} \rho = e^{x-\alpha\cos(\beta\tau)e^{-\beta x}} \\ \theta = \tau + \alpha\sin(\beta\tau)e^{-\beta x} \end{array} \right.$, donc pour $0 < \beta\tau < \frac{\pi}{2}$, la courbe obtenue est d'équation polaire :

$$\rho = \left(\frac{\alpha\sin(\beta\tau)}{\theta-\tau}\right)^{1/\beta} e^{-\frac{\theta-\tau}{\tan(\beta\tau)}}, \quad \theta > \tau. \tag{43}$$

On a une asymptote en $\theta = \tau$ et

$$\rho \sin(\theta - \tau) \sim_{\theta \to \tau} (\alpha \sin(\beta\tau))^{\frac{1}{\beta}} (\theta - \tau)^{1-\frac{1}{\beta}}$$

par valeurs inférieures, donc

- si $\beta = 1$, on a une droite asymptote $y = x \tan \tau + \alpha$, et la courbe reste en dessous de cette asymptote ;
- si $\beta > 1$, la courbe est également en-dessous de cette courbe, et tend vers son asymptote $y = x \tan(\beta\tau)$.

Cette courbe est incluse dans le demi-cône $|y| \leqslant \tan \tau (x + \alpha)$.

On peut remarquer que, ρ étant décroissante en θ, les abscisses sont minorées par celles obtenues pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, donc on peut tronquer le cône aux valeurs d'abscisse supérieures à $-\rho_m = -\rho(\pi/2)$. □

Remarque : Dans le changement de variable φ, il n'est pas nécessaire de choisir α égal au α de décroissance de f : si une valeur plus faible permet d'obtenir un angle τ meilleur, on pourra prendre un pas h plus grand. Il faut mesurer les deux effets : cette augmentation de h tend à faire diminuer n, d'un autre côté une diminution de α augmente la valeur de $t_{\min}$ et donc le nombre de termes à sommer du côté négatif. L'influence de α est logarithmique, tandis que celle de τ est linéaire.

Ces observations fournissent le théorème suivant

Théorème 3.7

Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant :

1. *f possède un prolongement holomorphe sur un cône tronqué Z_τ, $\tau < \frac{\pi}{2}$;*
2. *$|f(z)| \leqslant M_2 e^{A|z|^\gamma}$ sur Z_τ ;*
3. *$|f(x)| \leqslant M_2 e^{-\alpha x^\beta}$ sur $[0, \infty[$;*

pour des constantes $\alpha > 0$, $A \geqslant 0$ et $\beta > \gamma \geqslant 0$. Alors pour $D > 1$, si l'on choisit $t < \tau$ selon le théorème 2.17, en posant

- $h = \frac{2\pi t}{D + C_t + \log(4M_2 + 2e^{-D-C_t})}$
- $nh \geqslant \log L_{\alpha,\beta}(D + \log M) + \alpha e^{-\beta L_{\alpha,\beta}(D + \log M)}$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - h \sum_{k=-n}^{n} f(\varphi(kh))\varphi'(kh) \right| \leqslant e^{-D}.$$

Démonstration : On suppose que $\beta \geqslant 1$; si ce n'est pas le cas, le changement de variable $x = u^k$, où $\frac{1}{k} \leqslant \beta$, nous y ramène au prix d'un terme polynomial ku^{k-1}. On pose $g(z) = f \circ \varphi(z) \times \varphi'(z)$.

Pas d'intégration D'après les majorations effectuées sur φ, et puisque $\beta \geqslant 1$ on a pour $x \geqslant 0$ les majorations grossières $|\varphi'(x + it)| \leqslant e^x + \alpha\beta$, et $|\varphi'(-x + it)| \leqslant$

$\alpha\beta e^{\beta-1}x+1$.

Enfin $|\varphi(x+it)| \leqslant e^x$, donc d'après (2) $g(x+it) \leqslant M_2(1+\alpha\beta)e^{Ae^{\gamma x}+\lambda|x|}$ avec $\lambda = \max(1, \beta-1)$.

De plus, sur $\mathbb{R}$, on a

en $-\infty$: $|f| \leqslant M_1$ donc $g(-x) \leqslant |\varphi'(-x)| \leqslant (1+\alpha\beta e^{\beta x})e^{-x-\alpha e^{\beta x}} = O(e^{-\alpha' e^{\beta x}})$ pour tout $\alpha' < \alpha$.

en ∞ : $\varphi(x) \sim e^x$ donc $g(x) = O(e^{-\alpha' e^{\beta x}})$ pour tout $\alpha' < \alpha$.

Donc on peut appliquer le théorème 2.17 pour déterminer le pas h.

Troncature Enfin, on définit nh via le lemme 3.1, avec les estimations des restes intégraux suivantes :

- $\int_0^{\varphi(-x)} M_1 \, \mathrm{d}t \leqslant M_1\varphi(-x) = M_1 e^{-x-\alpha e^{\beta x}}$ donc pour une erreur de e^{-D} sur le reste $k < -n$ on pose $nh = \frac{1}{\beta}\log(\frac{D+\log M_1}{\alpha})$.
- $\int_{\varphi(x)}^{\infty} e^{-\alpha t^\beta} \, \mathrm{d}t \leqslant e^{-D}$ donne

$$\varphi(x) = e^{x-\alpha e^{-\beta x}} = L_{\alpha,\beta}(D+\log M_1).$$

En particulier $x \geqslant \log(L_{\alpha,\beta}(D+\log M_1))$, donc on pose $x = nh = \log L_{\alpha,\beta}(D+\log M) + \alpha e^{-\beta L_{\alpha,\beta}(D+\log M)} \sim \frac{1}{\beta}\log(\frac{D+\log M_1}{\alpha})$. □

3.3 Intervalle compact

Si l'intervalle est de la forme $[a, b]$, on effectue un changement de variable

$$\boxed{z = \varphi(z') = \frac{b-a}{2}\tanh(\lambda\sinh(z')) + \frac{a+b}{2}} \tag{44}$$

pour un paramètre $\lambda > 0$ que l'on déterminera.

Par la suite, on suppose que $[a, b] = [-1, 1]$.

Définition

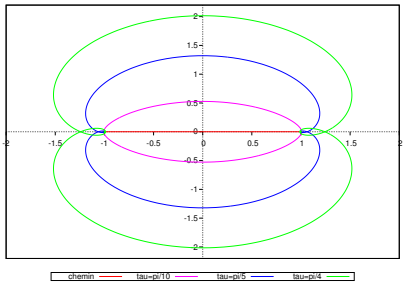
$$\varphi'(z) = \frac{\lambda\cosh(\lambda z)}{\cosh^2(\lambda\sinh(z))}$$

Les zéros de cosh sont situés en $i\pi/2 + 2i\pi\mathbb{Z}$, ils ne sont pas atteints dans la zone Δ_τ pour $\tau < \frac{\pi}{2}$ et $\lambda\sin\tau < \frac{\pi}{2}$. On suppose ces inégalités vérifiées, ce qui assure que φ et φ' sont holomorphes sur Δ_τ.

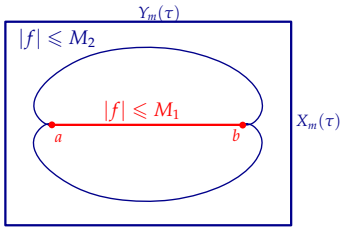
On localise l'image de la bande Δ_τ de la manière suivante :

Lemme 3.8 (*zone Z_τ*)

Pour tout $z' \in \Delta_\tau$ avec λ, τ vérifiant $\lambda\sin(\tau) < \frac{\pi}{2}$, si l'on choisit $Y_\tau \in$



(a) $\varphi^{-1}(\mathbb{R}+i\tau)$



(b) zone Z_τ

FIGURE 5: changement de variable $\varphi(t) = \tanh(\lambda \sinh t)$.

$]\lambda \sin\tau, \frac{\pi}{2}[$, en posant $X_\tau = \frac{\sqrt{Y_\tau^2 - \lambda^2 \sin^2\tau}}{\tan\tau}$, on a :

$$\left|\mathrm{Re}(\varphi(z'))\right| \leqslant X_m = \max\left(\frac{\tanh X_\tau}{\cos^2(Y_\tau)}, \frac{1}{\tanh(X_\tau)}\right)$$
$$\left|\mathrm{Im}(\varphi(z'))\right| \leqslant Y_m = \max\left(\tan(Y_\tau), \frac{1}{2\sinh^2 X_\tau}\right).$$

En particulier, pour $Y_\tau \to 0$ et $X_\tau \to \infty$, Z_τ converge vers le segment $[-1,1]$.
On minimise X_m, Y_m en prenant pour Y_τ les solutions dans $]\lambda\sin\tau, \frac{\pi}{2}[$ de

$$\tanh(X_\tau) = \cos(Y_\tau) \qquad \textit{pour } X_m \tag{45}$$
$$2\sinh^2(X_\tau)\tan(Y_\tau) = 1 \qquad \textit{pour } Y_m \tag{46}$$

Remarque : Inversement, si l'on se donne des valeurs X_m et Y_m à ne pas dépasser, la détermination de X_τ et Y_τ par les équations

$$\tanh(X_\tau) = \frac{1}{X_m} \qquad \text{et } \cos(Y_\tau) = \frac{1}{X_m} \qquad \text{d'une part,} \tag{47}$$
$$\sinh^2(X_\tau) = \frac{1}{2Y_m} \qquad \text{et } \tan(Y_\tau) = Y_m \qquad \text{d'autre part} \tag{48}$$

et la relation

$$\tau = \mathrm{Im}(\mathrm{arcsinh}(\frac{X_\tau + iY_\tau}{\lambda}))$$

permettent de choisir une bonne valeur de τ, si l'on impose λ. On remarque que par construction, la condition $\lambda\sin\tau < \frac{\pi}{2}$ est vérifiée puisque le fait que X_τ, Y_τ sont sur la courbe $\mathscr{H}_\tau$ donne $\frac{Y_\tau^2}{\sin^2\tau} \geqslant \lambda^2$ et que l'on a $Y_\tau = \arccos(\frac{1}{X_m}) < \frac{\pi}{2}$.

Remarque : Le problème de minimisation possède des solutions uniques, puisque sur l'intervalle considéré, $X \in]0, X_{\frac{\pi}{2}}[$ et

- $\tanh(X)$ croît de 0 à $\tanh(X_{\frac{\pi}{2}}) > 0$ et $\cos(Y)$ décroît de $\cos(\sin\tau)$ à 0 ;
- $\sinh^2(X)\tan Y$, produit de deux fonctions croissantes, croît de 0 à ∞.

On détermine aisément ces solutions par la méthode de Newton.

Démonstration du lemme 3.8 : On pose $\lambda\sinh(x+i\tau) = X+iY$ avec $Y = \tan\tau\sqrt{X^2+\lambda^2\cos^2\tau} \in [X\tan\tau, X\tan\tau+\lambda\sin\tau]$.

Alors

$$\begin{aligned}\tanh(X+iY) &= \frac{\sinh X\cos Y + i\cosh X\sin Y}{\cosh X\cos Y + i\sinh X\sin Y}\\ &= \frac{\sinh X\cosh X + i\cos Y\sin Y}{\cosh^2 X\cos^2 Y + \sinh^2 X\sin^2 Y} \qquad (49a)\\ &= \frac{\sinh X\cosh X + i\cos Y\sin Y}{\sinh^2 X + \cos^2 Y}. \qquad (49b)\end{aligned}$$

Par croissance de Y, et puisque $Y(0) = \lambda\sin(\tau) < \frac{\pi}{2}$, on déduit l'existence d'une valeur Y_τ annoncée.

On a

$$X_\tau = \frac{\sqrt{Y_\tau^2 - \lambda^2\sin^2\tau}}{\tan\tau}. \qquad (50)$$

Alors, pour $X \in [0, X_\tau]$, $Y \leqslant Y_\tau < \frac{\pi}{2}$ donc d'après (49a)

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\varphi(z')) &\leqslant \frac{\sinh X\cosh X}{\cosh^2 X\cos^2 Y} \leqslant \frac{\tanh X_\tau}{\cos^2(Y_\tau)}\\ \mathrm{Im}(\varphi(z')) &\leqslant \frac{\cos Y\sin Y}{\cosh^2 X\cos^2 Y} \leqslant \tan Y_\tau\end{aligned}$$

et pour $X \in [X_0, \infty[$, d'après (49b)

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\varphi(z')) &\leqslant \frac{\sinh X\cosh X}{\sinh^2 X} \leqslant \frac{1}{\tanh(X_\tau)}\\ \mathrm{Im}(\varphi(z')) &\leqslant \frac{\cos Y\sin Y}{\sinh^2 X} \leqslant \frac{1}{2\sinh^2 X_\tau}\end{aligned}$$

ce qui démontre l'encadrement annoncé. □

Pas d'intégration Supposons que f est holomorphe et donc majorée sur Z_τ d'après le principe du maximum.

Pour étudier $\hat{g}_\tau(X)$, il suffit donc de majorer $\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi'(t+i\tau)\right| \mathrm{d}t$.

Or, en reprenant les notations X, Y,

$$\left|\varphi'(t+i\tau)\right| = \left|\frac{\lambda\cosh(t+i\tau)}{\sinh^2(X)+\cos^2(Y)}\right| \mathrm{d}t$$

soit, par le changement de variable $X = \lambda \cos\tau \sinh(t)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi'(t+i\tau)\right| \leqslant 2\int_0^\infty \frac{\lambda\cosh(t)}{\sinh^2(X)+\cos^2(Y)} \leqslant \frac{2}{\cos(\tau)}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}X}{\sinh^2(X)+\cos^2(Y(X))}.$$

On sépare comme précédemment en une valeur $X_\tau > 0$ telle que $Y_\tau < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{X_\tau} &\leqslant \int_0^{X_\tau} \frac{\mathrm{d}X}{\cosh^2(X)\cos^2(Y)} \\
&\leqslant \frac{\tanh(X_\tau)}{\cos^2(Y_\tau)} \\
\int_{X_\tau}^\infty &\leqslant \int_{X_\tau}^\infty \frac{\mathrm{d}X}{\sinh^2(X)+\cos^2(Y)} \\
&\leqslant \int_{X_\tau}^\infty \frac{\mathrm{d}X}{\sinh^2(X)} \\
&= \frac{1}{\tanh(X_\tau)} - 1 < \frac{1}{\tanh(X_\tau)}.
\end{aligned}$$

Égaliser les termes de cette dernière majoration nous ramène exactement à la forme (45), donc en séparant l'intégrale en la valeur X_τ, on obtient que chacune de ces intégrales est majorée par X_m.

Ainsi, $\int \left|\varphi'\right| \leqslant \frac{4X_m}{\cos(\tau)}$, et

$$\sum_{k\neq 0} \left|\hat{g}_\tau(\frac{k}{h})\right| \leqslant \frac{8X_m M_2}{\cos\tau(e^{2\pi\tau/h}-1)}.$$

Donc pour avoir

$$\sum_{|k|>0} \hat{g}_\tau(\frac{k}{h}) \leqslant e^{-D}$$

on pose

$$h = \frac{2\pi\tau}{D+\log(\frac{8X_m M_2}{\cos\tau}+1)}.$$

Borne de troncature **Lemme 3.9**

Si $\left|f\right| \leqslant M_1$ sur $]a,b[$, on a

$$h\sum_{|k|>n} \left|g(kh)\right| \leqslant M_1 2e^{-2\lambda\sinh(nh)}.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} h \sum_{|k|>n} \left|g(kh)\right| &\leqslant hM_1 \int_{nh}^{\infty} \frac{\lambda \cosh(t)}{\cosh^2(\lambda \sinh(t))} \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant M_1 \int_{\lambda \sinh(nh)} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} \\ &\leqslant M_1 2 e^{-2\lambda \sinh(nh)}. \end{aligned}$$

□

On obtient donc le théorème :

Théorème 3.10

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que

1. $\left|f\right| \leqslant M_1$ *sur* $]a,b[$ *;*
2. f *possède un prolongement holomorphe à un rectangle* $R = \frac{a+b}{2} + [-X_m, X_m] + i[-Y_m, Y_m]$ *;*
3. $\left|f\right| \leqslant M_2$ *sur* ∂R.

Alors pour tout $D > 0$, en posant

- $\lambda = \frac{\pi}{2}$ *et* τ *tel que* $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} Z_\tau \subset R$ *;*
- $\varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \tanh(\lambda \sinh t)$ *;*
- $h = \dfrac{2\pi\tau}{D + \log(\frac{2^4 X_m M_2}{\cos\tau} + 1)}$ *;*
- $nh \geqslant \operatorname{arcsinh}\left(\frac{D + \log(2^3 M_1)}{\lambda}\right)$ *;*

on a

$$\left| \int_a^b f - h \sum_{k=-n}^{n} f(\varphi(kh))\varphi'(kh) \right| < e^{-D} \tag{51}$$

et une convergence

$$n \sim_{D\to\infty} \frac{(D + \log(\frac{X_m M_2}{\cos\tau}))\log(D)}{2\pi\tau}. \tag{52}$$

3.3.1 Présence de singularités intégrables

Dans le cas où la fonction f présente des singularités intégrables en a ou b, nous pouvons également appliquer la méthode.

Remplaçons par exemple l'hypothèse 1 par l'hypothèse plus faible

$$\left|f(x)\right| \leqslant \frac{M_1}{\left|x-a\right|^{1-\alpha} \left|b-x\right|^{1-\beta}} \tag{53}$$

où $\alpha, \beta \in]0,1]$.

On peut supposer $\alpha \geqslant \beta$, et même $\alpha = \beta$ quitte à multiplier f par $(b-x)^{\alpha-\beta}$. Notons $h(x) = (x-a)^{1-\alpha}(b-x)^{1-\alpha}f(x)$. Alors en posant toujours φ selon (44), et du fait des relations $(1-\tanh x)(1+\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \tanh'(x)$, l'intégrale prend la forme

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda \cosh t}{(\cosh^2(\lambda \sinh t))^{\alpha}} h \circ \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Si h est holomorphe au voisinage de $[a,b]$, la théorie précédente s'adapte.

En supposant que h est bornée par M_1 sur $]a,b[$ et par M_2 sur R, on peut reprendre la démonstration du théorème 3.10, où lors du choix du pas d'intégration on majore cette fois l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}X}{(\sinh^2 X + \cos^2 Y)^{\alpha}}$$

et avec le même découpage en une valeur $X_\tau > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{X_\tau} &\leqslant \int_0^{X_\tau} \frac{\mathrm{d}X}{(\cosh^2 X \cos^2 Y)^{\alpha}} \\
&\leqslant \frac{1}{(\cos Y_\tau)^{2\alpha}} \int_0^{X_\tau} \frac{\mathrm{d}X}{(\cosh X)^{2\alpha}} \\
&\leqslant \frac{1+2\alpha}{2\alpha(\cos Y_\tau)^{2\alpha}} \ ; \\
\int_{X_\tau}^{\infty} &\leqslant \int_{X_\tau}^{\infty} \frac{\mathrm{d}X}{(\sinh^2 X + \cos^2 Y)^{\alpha}} \\
&\leqslant \int_{X_\tau}^{\infty} \frac{\mathrm{d}X}{(\sinh X)^{2\alpha}} \\
&\leqslant \int_{X_\tau}^{\infty} \frac{\cosh X\, \mathrm{d}X}{(\sinh X)^{2\alpha+1}} \\
&\leqslant \frac{1}{2\alpha(\sinh X_\tau)^{2\alpha}}
\end{aligned}$$

On choisit numériquement une valeur X_τ satisfaisant

$$\cos Y_\tau \simeq (1+2\alpha)^{\frac{1}{2\alpha}} \sinh X_\tau$$

pour obtenir une borne I de l'intégrale.

En pratique, la valeur correspondant à la moyenne géométrique $Y_\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}\lambda \sin(\tau)}$ suffit à donner une majoration très correcte.

On pose dès lors

$$h = \frac{2\pi\tau}{D + \log\left(1 + \frac{4M_2 I}{\cos\tau}\right)}.$$

En ce qui concerne la borne de troncature, on part cette fois de la majoration $\left|g(t)\right| \leqslant \frac{\lambda M_1 \cosh(t)}{(\cosh(\lambda \sinh(t)))^{2-2\alpha}}$, si bien que $h\sum_{k>n}\left|g(kh)\right| \leqslant M_1 \int_{\lambda \sinh(nh)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\cosh t)^{2-2\alpha}} \leqslant \frac{4^{1-\alpha}M_1}{2-2\alpha}\exp(-(2-2\alpha)\lambda \sinh(nh))$, la même estimation valant pour la somme $k < -n$.

De sorte que l'on peut prendre

$$nh = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{D + \log(\frac{4^{1-\alpha}M_1}{2-2\alpha})}{(2-2\alpha)\lambda}\right)$$

On a ainsi le théorème suivant :

Théorème 3.11

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que pour une valeur $\alpha \in]0,1[$ on peut écrire $f(x) = (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\alpha}h(x)$ avec

1. *$|h| \leqslant M_1$ sur $]a,b[$;*
2. *h possède un prolongement holomorphe à un rectangle $R = \frac{a+b}{2} + [-X_m, X_m] + i[-Y_m, Y_m]$;*
3. *$|h| \leqslant M_2$ sur ∂R.*

Alors pour tout $D > 0$, avec la majoration de I donnée plus haut, si l'on pose

- *$\lambda = \frac{\pi}{2}$ et τ tel que $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}Z_\tau \subset R$;*
- *$\varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\tanh(\lambda \sinh t)$;*
- *$h = \frac{2\pi\tau}{D+\log(\frac{2^4 X_m M_2 I}{\cos\tau}+1)}$;*
- *$nh \geqslant \operatorname{arcsinh}\left(\frac{D+\log(\frac{4^{1-\alpha}M_1}{2-2\alpha})}{(2-2\alpha)\lambda}\right)$;*

on a

$$\left|\int_a^b f - h\sum_{k=-n}^{n} f(\varphi(kh))\varphi'(kh)\right| < e^{-D} \tag{54}$$

et une convergence

$$n \sim_{D\to\infty} \frac{(D + \log(\frac{X_m M_2}{\cos\tau}))\log(D)}{2\pi\tau}. \tag{55}$$

3.4 Fonctions méromorphes

Puisque la théorie de l'intégration double-exponentielle repose principalement sur l'estimation des transformées de Fourier par décalage de contour sur une bande d'holomorphie, le procédé reste possible avec des fonctions méromorphes, si l'on prend en compte les pôles franchis lors du décalage des

chemins à l'aide de la formule des résidus. Supposons donc une fonction g vérifiant les hypothèses du théorème 2.15, mais n'étant que méromorphe sur Δ_τ.

En notant (r_ρ) les résidus associés aux pôles (ρ) inclus dans Δ_τ, on a pour $X > 0$

$$\hat{g}(X) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi Xt} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}-i\tau} e^{-2i\pi Xt} g(t)\,\mathrm{d}t - 2i\pi \sum_{-\tau<\mathrm{Im}(\rho)<0} r_\rho e^{-2i\pi X\rho}.$$

Pour $X < 0$ on prend en compte les pôles tels que $0 < \mathrm{Im}(\rho) < \tau$, en prenant cette fois en compte les résidus de manière positive, de sorte que la contribution de ces pôles à $\sum_{|k|>0} \hat{g}(k/h)$ est égale à

$$2i\pi \sum_\rho \sum_{k>0} \varepsilon_\rho r_\rho e^{\varepsilon_\rho 2i\pi k\rho/h} = \sum_\rho \frac{\varepsilon_\rho 2i\pi r_\rho}{e^{-\varepsilon_\rho 2i\pi\rho/h} - 1} \tag{56}$$

où $\varepsilon_\rho = \pm 1$ est égal au signe de $\mathrm{Im}(\rho)$.

Pour conserver l'estimation (8) de l'erreur de quadrature, il suffit de corriger la formule d'intégration en ajoutant cette somme. De manière générale dans le cas d'un changement de variable, la correction prend la forme suivante.

Lemme 3.12

Soit f une fonction méromorphe sur une zone Δ'_τ, dont les pôles ρ ont résidus r_ρ, et $\varphi : \Delta_\tau \to \Delta'_\tau$ un changement de variable holomorphe par lequel on applique un procédé d'intégration double-exponentielle à

$$g(z) = f \circ \varphi(z).\varphi'(z)$$

sur Δ_τ.

Alors l'erreur de quadrature peut s'estimer en

$$\left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \hat{g}(\frac{k}{h}) - 2i\pi \sum_{\rho\in\Delta'_\tau} \sum_{z\in\varphi^{-1}(\rho)\cap\Delta_\tau} \varepsilon_z \frac{r_\rho}{e^{-\varepsilon_z 2i\pi z/h} - 1} \right| \leqslant \frac{M_2}{e^{2\pi\tau/h} - 1} \tag{57}$$

où ε_z est le signe de $\mathrm{Im}(z) \in]-\tau, \tau[$, et M_2 majore $\int_{\mathbb{R}} \left|g(t+i\tau)\right| + \left|g(t-i\tau)\right|\,\mathrm{d}t$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que pour un pôle ρ de f

$$res_{|z=\varphi^{-1}(\rho)} g(z) = res_{|\varphi(z)=\rho} f \circ \varphi(z)\varphi'(z) = res_{|z'=\rho} f(z') = r_\rho.$$

□

3.5 Hypothèses affaiblies

Lorsqu'on a une fonction f à décroissance simplement exponentielle sur la droite réelle, mais à laquelle le théorème 3.3 ne s'applique pas — soit que f ne

soit pas holomorphe sur un cône Z_τ, ou qu'elle ne possède pas une décroissance suffisante sur ce cône —, on peut, sous réserve de conditions affaiblies étudier la vitesse de convergence de la transformation double-exponentielle.

Ce cas se rencontre fréquemment lorsque le domaine d'holomorphie de f n'excède pas une bande Δ_τ.

On obtient alors le remarquable résultat suivant : modulo le fait d'exiger une certaine uniformité sur Δ_τ de l'hypothèse de décroissance exponentielle, la transformation double-exponentielle ne fait perdre qu'un terme de complexité logarithmique par rapport à l'intégration faite sans transformation.

Théorème 3.13

Soit f une application telle que

1. *f possède un prolongement holomorphe sur une bande Δ_τ ;*
2. *$f(x+iy) \leqslant Me^{-\alpha|x|^\beta}$ uniformément en $y \in [-\tau, \tau]$;*

alors en appliquant la méthode d'intégration double-exponentielle à f on obtient une complexité de $O(\frac{D^{\frac{\beta+1}{\beta}} \log D}{2\pi\tau})$ évaluations.

Remarque : L'hypothèse de décroissance est ici demandée uniformément sur toute la bande, et non plus sur l'axe réel seul. Elle est en effet utilisée pour estimer l'erreur de quadrature.

Démonstration : On détermine tout d'abord un domaine $\tilde{\Delta} \subset \mathbb{C}$ tel que $\sinh(\tilde{\Delta}) \subset \Delta_\tau$.

Pour $x > 0$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\sinh(x+iy)) \leqslant \tau &\Leftrightarrow \cosh(x)\sin(y) \leqslant \tau \\ &\Leftrightarrow y \leqslant \arcsin\Big(\frac{\tau}{\cosh(x)}\Big). \end{aligned}$$

La fonction arcsin n'étant pas définie si $\tau > \frac{\pi}{2}$, on se contente de la majoration $\arcsin(x) \geqslant x$ pour définir

$$\tilde{\Delta} = \left\{ x+iy, |y| \leqslant \frac{\tau}{\cosh x} \right\}.$$

On réalise une intégration double-exponentielle de f avec le changement de variable $\varphi(z) = \sinh(z)$, en posant donc

$$g(z) = f(\sinh z)\cosh(z), z \in \tilde{\Delta}.$$

L'hypothèse (3) du théorème 2.15 n'étant pas vérifiée, c'est l'estimation de l'erreur de quadrature qui doit être adaptée aux nouvelles hypothèses.

Soit donc $X > 0$, on doit trouver une majoration du coefficient de Fourier

$$\hat{g}(X) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi Xz} g(z)\,\mathrm{d}z.$$

On décale désormais le chemin d'intégration à la courbe

$$z = \gamma(t) = t - i\frac{\tau}{\cosh t}, \gamma'(t) = 1 + i\tau\frac{\sinh t}{\cosh t}$$

en notant que d'après l'hypothèse 2,

$$\left|g(\gamma(t))\right| = \left|f(\sinh(\gamma(t)))\cosh(\gamma(t)\right| \leqslant Me^{-\alpha\cos(\frac{\tau}{\cosh(t)})\sinh(t)}\cosh(t).$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}\left|\hat{g}(X)\right| &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2\pi X\tau}{\cosh t}} e^{-2i\pi Xt} g(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant 2M(1+\tau)\int_0^\infty \underbrace{e^{-2\pi X\tau e^{-t}}}_{\varphi_1(t)} \underbrace{e^{-\alpha(\cos\tau)^\beta(\sinh t)^\beta}\cosh(t)}_{\varphi_2(t)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On sépare cette intégrale en deux en une valeur $T > 0$:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) \leqslant e^{-2\pi X\tau e^{-T}} \text{ sur } [0,T] \\ \int_0^T \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sinh T} e^{-\alpha(\cos\tau)^\beta u^\beta}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{\alpha^{1/\beta}\cos\tau}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\beta} \end{cases} \tag{58}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) \leqslant 1 \text{ sur } [T,\infty] \\ \int_T^\infty \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\sinh T}^\infty e^{-\alpha(\cos\tau)^\beta u^\beta}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{e^{-\alpha e^{\beta T}}}{\alpha\beta} \text{ si } \beta \geqslant 1. \end{cases} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-2\pi X\tau e^{-t}} e^{-\alpha(\cos\tau)^\beta(\sinh t)^\beta}\,\mathrm{d}t &\leqslant e^{-2\pi X\tau e^{-T}}\int_0^{\sinh T} e^{-\alpha(\cos\tau)^\beta u^\beta}\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant e^{-2\pi X\tau e^{-T}}\frac{1}{\alpha\beta} \text{ d'une part ;} \\ \int_T^\infty e^{-2\pi X\tau e^{-t}} e^{-\alpha e^{\beta t}}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_T^\infty e^{-\alpha e^{\beta t}}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{e^{-\alpha e^{\beta T}}}{\alpha\beta} \text{ d'autre part.}\end{aligned}$$

Ces termes sont égaux pour

$$T = \frac{1}{\beta+1}\log\Big(\frac{2\pi X\tau}{\alpha}\Big)$$

et dans ce cas,

$$\left|\hat{g}(X)\right| \leqslant \frac{2M(1+\tau)}{\alpha\beta}e^{-\Big(2\pi X\tau\Big)^{\frac{\beta}{\beta+1}}}. \tag{60}$$

Il reste à majorer la somme de ces termes :

$$\sum_{k\geqslant 1} e^{-\left(\frac{k2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} \leqslant e^{-\left(\frac{2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} + \int_1^\infty e^{-\left(\frac{t2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}}\,\mathrm{d}t. \tag{61}$$

Par un changement de variable $t = \frac{h}{2}\pi\tau u^{\frac{\beta+1}{\beta}}$, l'intégrale s'écrit

$$\frac{h(\beta+1)}{2\pi\tau\beta}\int_{(\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{\beta}{\beta+1}}}^{\infty} u^{\frac{1}{\beta}} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma_{\mathrm{inc}}\left(1+\frac{1}{\beta}, (\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right)$$

où Γ_{inc} désigne la fonction Gamma incomplète.

En utilisant la majoration 80 pour $s = \frac{1}{\beta}$ et $x = (\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{\beta}{\beta+1}}$, et en supposant h assez petit pour que $\frac{x}{s} > 2$ de sorte que $(1-\frac{s}{x})^{-1} \leqslant 2$, l'intégrale est majorée par $2(\frac{a}{h})^{\frac{1}{\beta+1}} e^{-(\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{\beta}{\beta+1}}}$.

Donc la somme des (60) vérifie

$$\sum_{k\geqslant 1}\left|\hat{g}(\frac{k}{h})\right| \leqslant \frac{2M(1+\tau)}{\alpha\beta}\left[2(\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{1}{\beta+1}}+1\right] e^{-(\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{\beta}{\beta+1}}}$$

ce qui permet de définir h précisément. On a en tous cas

$$h(D) \sim \frac{D^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{2\pi\tau}$$

ce qui démontre l'énoncé de complexité. □

3.6 Cas des fonctions oscillantes quasi-périodiques

Les idées présentées jusqu'ici ne permettent pas d'intégrer des fonctions qui présentent des oscillations symétriques, dont l'archétype est l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

La décroissance d'ordre polynomial invite à un changement de variable en $t \mapsto \sinh(\sinh(t))$, mais un tel changement de variable est interdit par la croissance exponentielle de sinus dans la direction imaginaire.

Nous présentons ici, avec l'approche géométrique et le formalisme que nous avons adoptés, une stratégie dont le principe est dû à Ooura [OM99], et qui permet de calculer avec une complexité quasi-linéaire les intégrales faisant intervenir des fonctions périodiques.

L'idée est de est de tirer parti non plus de la décroissance de g mais de ses zéros régulièrement espacés pour réduire le terme d'erreur de troncature dans la formule de Poisson.

Supposons en effet qu'il existe une période $\omega > 0$ telle que l'intégrande g satisfasse

$$g(k/\omega) = 0, k \in \mathbb{Z}.$$

Alors si l'on choisit une famille de changements de variable $\varphi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dépendants de $h > 0$ et tels que

$$\left|\varphi_h(lh) - l/\omega\right| \ll e^{-\alpha e^{\beta l h}},$$

les accroissements finis donnent une majoration exponentiellement décroissante de la somme

$$\sum_{|l|>n} \left| g(\varphi_h(lh)) \right| .$$

Il est d'autre part nécessaire que φ_h possède une dynamique raisonnable en h afin de pouvoir majorer les transformées de Fourier, et plus précisément qu'il existe une zone Z_τ telle qu'on ait de manière uniforme en h

$$\varphi_h(\Delta_\tau) \subset Z_\tau.$$

Il est naturel de poser

$$\varphi_h(x) = \frac{x}{\omega h + e^{-\alpha \cosh x}} \tag{62}$$

pour vérifier la première condition, mais ce type de fonction prend des valeurs imaginaires d'ordre $\frac{\tau}{\omega h}$ en $x = \log 1/h + i\tau$. On résout ce problème en retardant par un facteur h le terme exponentiel tout en maintenant une décroissance initiale, ce qui mène à considérer plutôt un changement de la forme

$$\varphi_h(x) = \frac{x}{\omega h + e^{-x-\alpha h \cosh x}}. \tag{63}$$

Appuyés par des arguments heuristiques, Ooura et Mori considèrent des corrections plus légères de type

$$\varphi_h(x) = \frac{x}{\omega h + e^{-\gamma x - \alpha \sqrt{h \log(1/h)} \cosh x}} \tag{64}$$

Le cas des intégrations sur $[0, \infty[$ s'obtient en remplaçant le sinus hyperbolique par un cosinus hyperbolique. Nous nous contentons ici d'illustrer graphiquement l'effet de ces changements de variables dans la figure 6 (dans l'ordre sont représentés (62), (63) et (64)).

Ces graphiques donnent l'intuition du comportement de l'intégration de fonctions périodiques par cette méthode. Une étude rigoureuse de la dynamique complexe de cette famille de changements de variables permettrait d'obtenir des résultats de convergence parfaitement explicites. Elle s'annonce toutefois délicate à mener.

4 Stratégies d'application concrète

4.1 En résumé

L'application de la méthode des trapèzes à une fonction f, passée ou non au travers de la dynamique d'un changement de variable, se lit sur les variations de f.

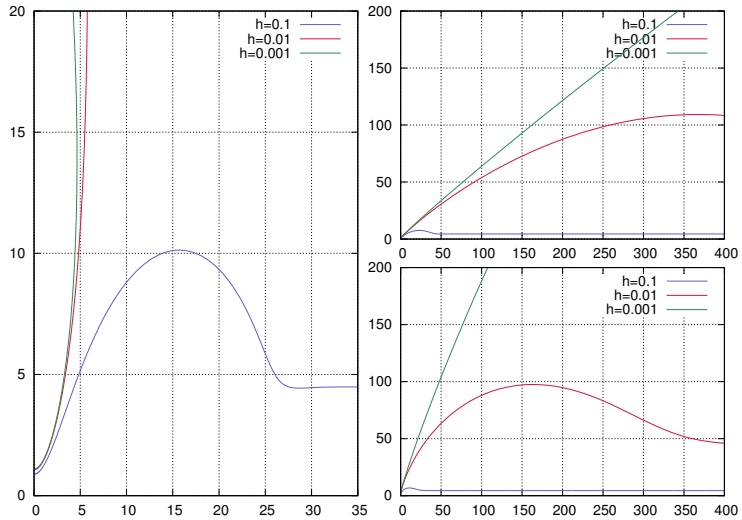


FIGURE 6: Dynamique de $\varphi_h(\mathbb{R} + i\tau)$ en $\tau = \pi/7$.

– Dans la direction radiale, la décroissance de f donne la longueur d'intégration. Cette longueur sera exponentielle, linéaire ou logarithmique en la précision si f décroît de manière polynomiale, exponentielle ou doublement exponentielle.
– Le pas d'intégration se lit dans la direction transverse. Si f y reste bornée sur une zone de largeur ou d'écartement τ, le pas d'intégration peut être choisi d'ordre τ/D.

Le choix d'un changement de variable se fait à la lumière de ces deux paramètres, et de leur influence mutuelle.

La mise en œuvre d'une intégration rigoureuse d'une fonction f consiste en les étapes suivantes

1. déterminer une zone d'holomorphie de la fonction, sur laquelle elle est bornée ou à croissance modérée, et choisir un changement de variable en conséquence. Cette étape ne peut être entièrement automatisée, mais une connaissance sommaire du comportement de la fonction suffit en pratique ;
2. choisir les valeurs des paramètres α, β et τ, et calculer les valeurs des constantes M_1 et M_2. Quelques tracés du module de f suffisent à les déterminer heuristiquement.
3. appeler l'intégration avec les paramètres adéquats.

Des exemples détaillés sont illustrés dans [Mol10b], nous nous contentons d'insister ici sur quelques points remarquables.

4.2 Prendre en compte les résidus

Considérons l'exemple de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \tag{65}$$

qui permet de saisir la précision de notre étude.

L'intégrande est à décroissance polynomiale, et le domaine d'holomorphie requis est le plan complexe privé des pôles $\pm i$. Cette situation relève du théorème 3.10, et ces singularités sont précisément évitées par Z_τ quelle que soit la valeur $\tau < \frac{\pi}{2}$. La convergence est donc d'ordre $\frac{D \log D}{\pi^2}$, et dans la pratique le calcul de 1000 chiffres significatifs nécessite moins de 2000 points.

Mais si l'on s'écarte légèrement de ce trop bel exemple, la théorie permet de comprendre pourquoi l'évaluation de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(x+10)^2} \tag{66}$$

donne de très mauvais résultats dans les systèmes de calcul reposant sur la transformation double-exponentielle : avec gp le résultat est faux dès la dixième décimale, sous Maple l'intégration prend plusieurs minutes.

En effet, les pôles ainsi décalés en $10 \pm i$ ne sont évités que pour de très petites valeurs de τ. Si l'on détermine une valeur convenable, le théorème s'applique, mais pour 1000 chiffres, il faut à présent 100000 points.

En utilisant les corrections démontrées dans le lemme 3.12, on obtient plutôt

```
? \p1000
   realprecision = 1001 significant digits (1000 digits
       displayed)
? f(z)=1/(1+z^2);
? tau=Pi/2.2;
? h=2*Pi*tau/(1000*log(10)+log(2/cos(tau)));show(h)
%6 = 0.00389218238614245645 1
? n=ceil(asinh(asinh(2*10^1000))/h)
%7 = 2168
? Pi-integration_shsh(f,h,n,1)
%8 = 0.E-1001
? diff=Pi-integration_shsh(z->f(z-15),h,n,1);show(diff)
%9 = 2.988841749810731359 E-14
? Rho=[15+I,15-I];Res=[-I/2,I/2];
? diff+poles_shsh(Rho,Res,h)
%11 = -2.950002796167140565 2 E-1002 + 0.E-1014*I
```

(la fonction `poles_shsh` ci-dessus code la somme intervenant dans (57) pour le changement φ. Dans ce cas, les pôles images sont de la forme $z = \operatorname{arcsinh}(\varepsilon_k \operatorname{arcsinh}(\rho) + ik\pi), k \in \mathbb{Z}$, et les résidus sont $\mp\frac{i}{2}$).

4.3 Décaler le chemin

Pour une fonction donnée, la décroissance de sa transformée de Fourier est directement liée à la largeur d'holomorphie de part et d'autre de l'axe d'intégration. Or si lors de la sommation on peut prendre en compte une inhomogénéité de la décroissance de f selon les axes positifs et négatifs, l'erreur de quadrature sera liée à la plus grande des valeurs $\hat{g}(\frac{1}{h})$ ou $\hat{g}(-\frac{1}{h})$. L'erreur est donc minimale quand ces valeurs sont comparables.

Ainsi, si g possède une bande d'holomorphie bornée non symétrique autour de l'axe réel, il est très avantageux de décaler le chemin pour se situer exactement au milieu de cette bande. On retrouve là le principe de la méthode du col : une intégrale complexe a intérêt à être évaluée selon un chemin de plus grande décroissance.

4.3.1 exemple : la fonction Gamma

On intègre la fonction Γ sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma(\delta + it)\, \mathrm{d}t. \tag{67}$$

La formule de Stirling démontre les estimations de croissance suivantes :

– sur les droites verticales

$$\log \left|\Gamma(\delta + it)\right| \sim -\frac{\pi}{2} \left|t\right|; \tag{68}$$

– et sur les rayons $\theta \neq 0$

$$\log \left|\Gamma(\delta + ire^{i\theta})\right| \sim -\sin(\theta) r \log r. \tag{69}$$

Ainsi, $f(z) = \Gamma(\delta + iz)$ a une décroissance de nature simplement exponentielle sur l'axe réel, mais le changement de variable $z = \sinh(z')$ prescrit par la méthode générale ne permet pas d'obtenir la convergence attendue puisque f a une croissance exponentielle dans la partie inférieure de tout cône épaissi C_τ, $\tau > 0$.

En particulier, g n'est pas L^2 sur les droites $\mathbb{R} - i\tau$ pour $\tau > 0$, donc d'après le théorème 2.6, $\hat{g}$ a une décroissance au plus sous-exponentielle pour les valeurs positives. Le théorème 3.13 permet d'expliquer une convergence en D^2. Toutefois, nous obtenons expérimentalement une convergence quasi-linéaire. Ce fait remarquable s'explique par une estimation *ad hoc* des transformées de Fourier : dans [Mol10a] on démontre à l'aide d'estimations sur un contour adapté une décroissance du type

$$\log \left|\hat{g}(X)\right| \ll \frac{\pi^2 X}{\log(1 + \frac{2\pi X}{\log X})},$$

ce qui permet d'affirmer une convergence de la méthode double-exponentielle utilisant

$$\frac{D\log(D)^2}{\pi^2}$$

évaluations.

La figure 7 montre la précision de cette estimation ; elle illustre aussi les effets de divers autres schémas d'intégration que suggèrent les théories développées ici :

1. Si l'on ne réalise aucun changement de variable, on intègre une fonction à décroissance $e^{-\frac{\pi}{2}t}$, et qui possède une bande d'holomorphie limitée seulement par les pôle en $-\mathbb{N}$, donc de largeur δ. On obtient donc une convergence en $\frac{2D}{\pi}\cdot\frac{D}{2\pi\delta}$, d'autant meilleure que δ augmente. La figure 7 présente les valeurs $\delta = 3$ et $\delta = 8$.
2. Avec un changement de variable double-exponentiel en sinh, on observe la convergence de type quasi-linéaire a priori étonnante, mais que nous avons expliquée ci-dessus.
3. On peut aussi aller chercher la décroissance de la fonction gamma à gauche de la droite d'intégration, en intégrant selon les valeurs de $\delta + i\sinh(t + i\theta)$. Selon la valeur de θ, on aura un cône d'holomorphie d'ouverture $\min(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta)$ sur lequel on peut appliquer le théorème 3.3. En prenant $\theta = \frac{\pi}{4}$, on obtient une convergence en $\frac{2D\log D}{\pi^2}$: c'est là la manière la plus efficace de calculer l'intégrale.

Cette observation permet de résoudre le problème posé par l'intégration de la fonction gamma sur une droite verticale (67). Un décalage d'un angle $+i\theta$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ après transformation par sinh permet d'obtenir facilement une décroissance en $e^{-2\pi\theta x}$ de la transformée de Fourier selon les x positifs, et en $e^{-2\pi(\frac{\pi}{2}-\theta)|x|}$ sur l'axe négatif. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ on obtient une complexité de

$$\frac{2D\log D}{\pi}$$

évaluations.

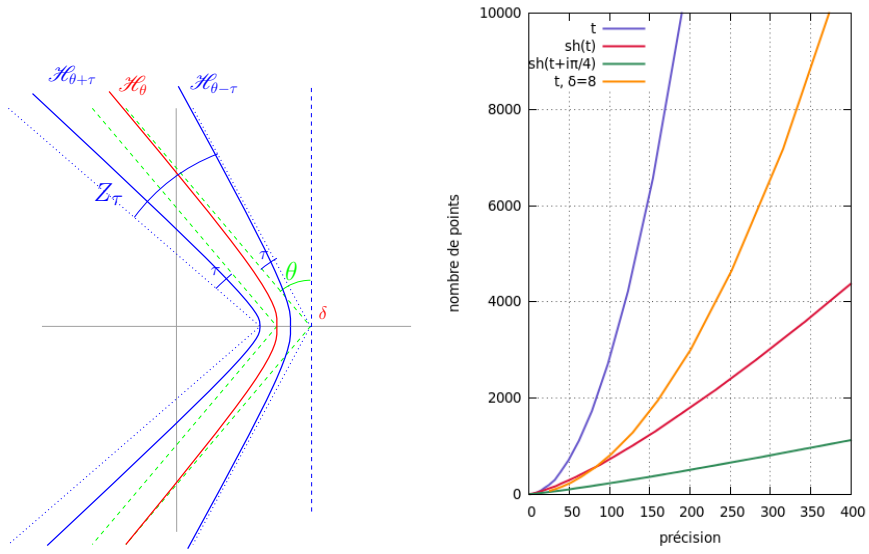
Cette méthode est d'autant meilleure pour l'intégration de gamma que par ce décalage on se situe sur un chemin où la décroissance de la fonction est amplifiée.

4.3.2 exemple : oscillations

Considérons par ailleurs l'exemple de la fonction

$$g(z) = \exp(-2\alpha\cosh(\beta z) + i\cosh(\gamma z)).$$

Le théorème 2.17 ne permet de considérer que le cas de valeurs $\gamma < \beta$, c'est-à-dire d'une décroissance plus forte que les oscillations.



(a) décalage du chemin

(b) convergence

FIGURE 7: intégration de $\Gamma(\delta + iz)$.

Dans le cas contraire, les oscillations rendent la quadrature très mauvaise, ce qui se traduit par l'explosion de la fonction g hors de l'axe. Toutefois dans cet exemple l'explosion est anisotrope, et la fonction $g(x + i\tau)$ reste petite au voisinage de l'axe quand x et τ sont de même signe. Et dans ce cas, on dispose d'une bande de décroissance pour les valeurs $|\tau| \in [0, \frac{\pi}{2\gamma}[$.

Avec les valeurs $\beta = 1$ et $\gamma = 2$, nous pouvons exploiter donc ce fait en parcourant le chemin

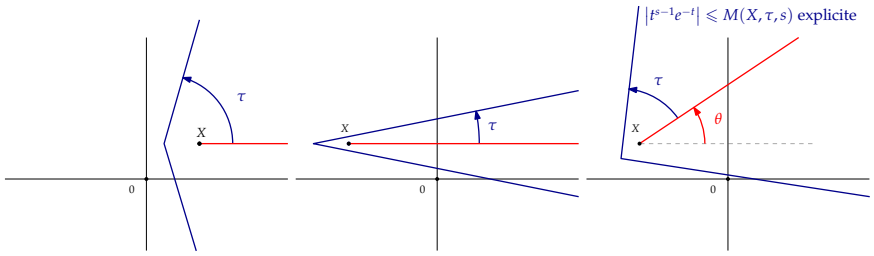
$$z = \varphi(t) = t + i\frac{\pi}{4}\tanh(t).$$

Ce simple décalage apporte des gains énormes : pour l'obtention de 50 chiffres corrects, on passe de plus de 50 000 à seulement 70 évaluations (cf. [Mol10b]).

4.4 Subdivisions

Enfin, il peut être très avantageux de couper l'intervalle d'intégration en plusieurs morceaux, dès lors que la plus petite valeur de τ sur les morceaux divisée par leur nombre excède la valeur τ correspondant à l'intervalle tout entier.

Par exemple, l'intégrale $\int_{-10}^{10} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(x-I)(x-10)(x+10)}}$ peut être évaluée selon le théorème 3.11, avec une largeur d'holomorphie $\tau_1 = 0.063$. Si l'on écrit cette intégrale comme $\int_{-10}^{0} + \int_{0}^{10}$, on obtient $\frac{\tau_2}{2} = 0.21$.



(a) $X > \alpha$ (b) $X < \alpha$ (c) décalage

FIGURE 8: Zone d'holomorphie pour la fonction gamma incomplète.

Bien entendu, les subdivisions sont rigoureusement nécessaires dans le cas de fonctions définies par morceaux.

4.5 Exemple : fonction gamma incomplète

Pour finir, nous traitons un exemple complet, celui de la fonction

$$\Gamma_{\text{inc}}(s,x) = \int_x^\infty t^s e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

où s, x sont des nombres complexes tels que $x \notin \mathbb{R}_-$ ou $\mathrm{Re}(s) > 0$, et le chemin d'intégration est la demi-droite positive issue de x.

L'intégrande $f(z) = e^{(s-1)\log(z)-z}$ possède une singularité en 0, qui doit donc se trouver en dehors d'une zone Z_τ issue de x. Elle a en outre une décroissance exponentielle de paramètres $\alpha = \cos\theta$ et $\beta = 1$ sur tout rayon $X + re^{i\theta}$.

4.5.1 Ouverture τ et décalage éventuel

Supposons $\mathrm{Im}(X) > 0$. En considérant pour zone Z_τ un cône d'ouverture τ issu de $X - \alpha$, on évite le point 0 à condition que $\mathrm{Re}(X) > \alpha$, ou que

$$\tan\tau < \frac{\mathrm{Im}(X)}{\alpha - \mathrm{Re}(X)}.$$

Dans le premier cas, la décroissance exponentielle de l'intégrande permet de choisir une ouverture τ arbitrairement proche de $\frac{\pi}{2}$. Dans le second, la valeur limite $\tau < \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(X)}{\alpha - \mathrm{Re}(X)}\right)$ peut devenir très faible, et rendre l'intégration très longue. Il est alors judicieux d'effectuer un décalage de la demi-droite d'intégration d'un angle θ pour rendre la situation plus symétrique et obtenir une valeur de τ proche de $\frac{\pi}{4}$ dans le pire des cas. La figure 8 illustre ces différentes situations.

4.5.2 Majoration sur Z_τ

Donnons une majoration de f sur une demi-droite $R_\theta = \left\{x + iy + re^i\theta, r \geqslant 0\right\}$, que l'on suppose passer au-dessus de l'origine.

En posant $z_r = x + iy + re^i\theta$, on majore $\mathrm{Re}((s-1)\log z_r - z_r)$ par

$$\underbrace{\sup_{r\geqslant 0}\left\{-\mathrm{Im}(s)\arg(z_r) - \lambda r\right\}}_{S_1} + \underbrace{\sup_{r\geqslant 0}\left\{\mathrm{Re}(s-1)\log|z_r| - \mu r\right\}}_{S_2} - x,$$

où l'on décompose $\cos\theta$ sous la forme $\cos\theta = \lambda + \mu$ avec $\lambda, \mu > 0$.

Majorant S_1 : On détermine tout d'abord l'argument de z_r. Supposons que la droite (z_r) soit au-dessus de l'origine. Par une rotation d'angle $-(\frac{\pi}{2} + \theta)$, on ramène le point $x + iy = z_0$ à droite de l'origine, avec des coordonnées

$$\begin{cases} x_0 &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ y_0 &= -x\cos\theta - y\sin\theta \end{cases}$$

vérifiant $x_0 > 0$ par hypothèse. Avec cette rotation, le point $z_r e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ est de la forme $x_0 + i(y_0 - r)$, et son argument vaut $\arctan(\frac{y_0 - r}{x_0})$. Avec la rotation inverse, le point z_r a donc pour argument $\frac{\pi}{2} + \theta + \arctan(\frac{y_0-r}{x_0})$. Cet argument est compris entre les valeurs θ et $\frac{\pi}{2} + \theta + \arctan(\frac{y_0}{x_0})$.

Ainsi, le supremum S_1 est atteint en $r = 0$ ou en une éventuelle solution positive de

$$\frac{\mathrm{Im}(s)x_0}{x_0^2 + (y_0 - r)^2} = \lambda.$$

Dans le cas où la droite (z_r) passe sous l'origine (soit $x_0 < 0$), il faut plutôt considérer la rotation la rotation d'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$, ce qui donne la demi-droite formée des $z_r e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} = -x_0 - iy_0 + ir$. Les signes négatifs se factorisent en début d'expression, si bien qu'en remplaçant s par son conjugué on garde les mêmes expressions.

Majorant S_2 : Avec les valeurs x_0, y_0 introduites ci-dessus, $|z_r|^2 = x_0^2 + y_0^2 - 2ry_0 + r^2$, donc le supremum S_2 est atteint en $r = 0$ ou en une des éventuelles racines positives de

$$\frac{\mathrm{Re}(s) - 1}{2}\frac{-2y_0 + 2r}{r^2 - 2ry_0 + x_0^2 + y_0^2} = \mu$$

soit

$$r^2 - 2r(y_0 + 2\frac{\mathrm{Re}(s)-1}{2\mu}) + x_0^2 + y_0^2 + \frac{\mathrm{Re}(s)-1}{\mu}y_0 = 0.$$

Ainsi, pour toute décomposition $\cos\theta = \lambda + \mu$, on détermine un majorant

$$\log M_2 = S_1 + S_2 - x$$

de $\log|f|$ sur R_θ. Cette majoration est valable sur tout le cône Z_τ, et permet d'appliquer le théorème 3.7, en adoptant une précision de calcul tenant compte de la majoration M_2.

Théorème 4.1

Avec les paramètres précédents, la méthode double-exponentielle permet de calculer $\Gamma_{\text{inc}}(s,x)$ à précision D avec

$$\frac{D\log D}{\pi^2} + o(D\log D)$$

évaluations d'exponentielles en précision

$$D + \log(M_2)\log(D\log D).$$

5 Conclusion

La méthode double-exponentielle a acquis une certaine notoriété pour la rapidité de sa convergence. Elle a cependant une réputation méthode un peu magique, que trente ans d'études un peu trop heuristiques ont conforté : cette réputation l'éloigne souvent des besoins de calcul prouvé. La simplicité de la théorie développée ici, ainsi que la précision des paramètres démontrés ont pour vocation de rendre son usage plus aisé et plus fréquent.

5.1 Implantation

Diverses implantations automatisées de la méthode existent (en particulier celles de Maple, Mathematica ou `PARI/gp`) : ou bien elles ne garantissent rien du tout, ou bien elles estiment la convergence de manière heuristique par diminution de pas.

Dans les situations d'intégrations spécifiques dont les paramètres sont connus, ce travail permet de trouver une stratégie optimale et de garantir le résultat obtenu. Toutes les estimations de cet article, ainsi que de nombreuses routines annexes, ont été traduites en langage `gp` et sont disponibles sur [Mol10b].

Ce travail ne fournit pas en revanche d'heuristique qui permette de reconnaître automatiquement la nature de l'intégrale et de choisir le changement de variable le plus adapté. Ce type de comportement généraliste est dual de la visée d'intégration prouvée que nous avons adoptée. Pourtant les résultats présentés ici peuvent aussi être utilisé dans ce sens, dans la mesure où nous avons ramené le choix des paramètres d'intégration à de simples questions de bornes sur des contours, qui peuvent être estimées assez précisément de manière automatique. Nous avons programmé certaines fonctions à cette fin.

5.2 Dimension quelconque

Cette étude se transpose à l'intégration de fonctions holomorphes sur $\mathbb{R}^n$, où holomorphe signifie ici la notion très forte d'holomorphie par rapport à chacune des variables, de sorte que l'on puisse appliquer la formule de Cauchy.

En effet la formule de Poisson écrite pour un réseau Λ de $\mathbb{R}^n$, de volume V,

$$V \sum_{\omega \in \Lambda} g(\omega) = \sum_{\omega \in \Lambda *} \hat{g}(\omega) \tag{70}$$

que l'on applique au réseau $(h\mathbb{Z})^n$, sous la forme

$$\underbrace{h^n \sum_{\|k\| \leqslant n} g(hk)}_{S} + \underbrace{h^n \sum_{\|k\| > n} g(kh)}_{E_2} = \int_{\mathbb{R}^n} g + \underbrace{\sum_{k \in (\mathbb{Z}^n)^*} \hat{g}(\frac{k}{h})}_{E_1} \tag{71}$$

donne un procédé d'intégration numérique de I par la somme S, où E_1 est l'erreur commise lors de la quadrature de pas h, et E_2 l'erreur de troncature à la boule de rayon n.

A Formulaire

Les changements de variable faisant fréquemment intervenir les fonctions hyperboliques, on en donne ici quelques propriétés.

A.1 Trigonométrie hyperbolique

Pour tous complexes x, τ :

$$\sinh(x + i\tau) = \sinh(x)\cos(\tau) + i\cosh(x)\sin(\tau); \tag{72}$$

$$\cosh(x + i\tau) = \cosh(x)\cos(\tau) + i\sinh(x)\sin(\tau). \tag{73}$$

Ainsi, la courbe paramétrée par $x \mapsto \sinh(x + i\tau)$ suit une hyperbole que l'on notera par la suite $\mathscr{H}_\tau$, d'équation cartésienne

$$\mathscr{H}_\tau : Y^2 - \tan^2\tau X^2 = \sin^2\tau \tag{74}$$

soit

$$Y = \tan\tau\sqrt{X^2 + \cos^2\tau}.$$

Il est commode d'écrire un paramétrage mesurant l'écart aux asymptotes $Y = |X|\tan\tau$ sous la forme

$$\begin{aligned}\sinh(x + i\theta) &= \sinh(x)\cos(\theta) + i\cosh(x)\sin(\theta)\\ &= \sinh(x)e^{i\theta} + ie^{-x}\sin\theta\end{aligned}$$

où $e^{-x}\sin\theta$ est le terme d'écart.

Pour tous réels x, τ,

$$\left|\sinh(x)\right| \leqslant \left|\sinh(x+i\tau)\right| = \sqrt{\sin^2(\tau)+\sinh^2(x)} \leqslant \cosh(x); \tag{75}$$

$$\left|\sinh(x)\right| \leqslant \left|\cosh(x+i\tau)\right| = \sqrt{\cos^2(\tau)+\sinh^2(x)} \leqslant \cosh(x). \tag{76}$$

A.2 Majorations intégrales

Lemme A.1

Pour $\beta > \gamma > 0$ et $A, \alpha > 0$ on a

$$\int_0^\infty e^{\lambda x + Ae^{\gamma x} - \alpha e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{\lambda+1+A\gamma}{\alpha\beta}\right)^{\frac{\lambda+1}{\beta-\gamma}} \exp\left[A\left(\frac{\lambda+1+A\gamma}{\alpha\beta}\right)^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}} - \alpha\left(\frac{A\gamma}{\alpha\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}\right] \tag{77}$$

et si $A = 0$

$$\int_0^\infty e^{\lambda x - \alpha e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{\lambda+1}{\alpha\beta e}\right)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}. \tag{78}$$

Démonstration : En sortant $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, on majore l'intégrale par $\sup e^{(\lambda+1)x + Ae^{\gamma x} - \alpha e^{\beta x}}$, lequel est obtenu pour $\frac{(\lambda+1)e^{-\gamma x} + A\gamma}{\alpha\beta} = e^{(\beta-\gamma)x}$. Avec l'encadrement $0 < e^{-\gamma x} < 1$ on obtient le premier résultat. Le second correspond à $e^{-\gamma x} = 1$. □

Remarque : Le fait que la majoration (78) soit meilleure que la limite de (77) quand $A \to 0$ est dû à l'encadrement du terme $e^{-\gamma x}$ dans le premier cas.

Lemme A.2

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $X \in [0, \infty]$,

$$\int_0^X e^{-\alpha t^\beta}\,\mathrm{d}t \leqslant \alpha^{-1/\beta}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\beta}. \tag{79}$$

Démonstration : L'intégrale est majorée par $\int_0^\infty$, puis on effectue un changement de variable. □

Lemme A.3 (*fonction gamma incomplète*)

Soient s, x tels que $x > |s| > 0$,

$$\left|\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x)\right| \leqslant (1-\frac{|s|}{x})^{-1} x^{\mathrm{Re}(s)} e^{-x} \tag{80}$$

et si s, x vérifient $\mathrm{Re}(s) \leqslant 1$ et $x > 0$, alors

$$\left|\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x)\right| \leqslant (1+\frac{|s|}{x})x^{\mathrm{Re}(s)}e^{-x}. \tag{81}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x) &= \int_x^\infty u^s e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= x^s e^{-x} + s\int_x^\infty \frac{u^s e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u;\end{aligned}$$

donc dans le premier cas on écrit

$$\left|\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x)\right| \leqslant x^{\mathrm{Re}(s)}e^{-x} + \frac{|s|}{x}\left|\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x)\right|,$$

et dans le second, puisque $\mathrm{Re}(s) - 1 \leqslant 0$,

$$\left|\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x)\right| \leqslant x^{\mathrm{Re}(s)}e^{-x} + |s|\,x^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-x}.$$

□

Lemme A.4

Pour tous $\alpha, \beta > 0$, et tout $X \geqslant 0$,

$$\int_X^\infty e^{-\alpha e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e^{-\alpha e^{\beta X}}}{\alpha\beta e^{\beta X}}. \tag{82}$$

Démonstration : $\int_X^\infty e^{-\alpha e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\alpha\beta e^{\beta X}}\int_X^\infty \alpha\beta e^{\beta x}e^{-\alpha e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x.$ □

Références

[Car56] M. L. Cartwright. *Integral functions*. Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics, No. 44. Cambridge, at the University Press, 1956.

[Hör91] Lars Hörmander. A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs. *Ark. Mat.*, 29(2) :237–240, 1991.

[Mol10a] Pascal Molin. *Intégration numérique et calculs de fonctions L*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 10 2010.

[Mol10b] Pascal Molin. Intégration numérique par la méthode double-exponentielle : code et exemples, 2010. Available from http://math.u-bordeaux1.fr/~molin/.

[OM99] Takuya Ooura and Masatake Mori. A robust double exponential formula for fourier-type integrals. *J. Comput. Appl. Math.*, 112 :229–241, November 1999.

[Sug97] Masaaki Sugihara. Optimality of the double exponential formula—functional analysis approach. *Numer. Math.*, 75(3) :379–395, 1997.

[Tit39] E. C. Titchmarsh. *The theory of Functions*. Oxford University Press, New York, second edition, 1939. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.

[TM73] Hidetosi Takahasi and Masatake Mori. Double exponential formulas for numerical integration. *Kyoto University. Research Institute for Mathematical Sciences. Publications*, 9 :721–741, 1973.

[TSMM09] Ken'ichiro Tanaka, Masaaki Sugihara, Kazuo Murota, and Masatake Mori. Function classes for double exponential integration formulas. *Numer. Math.*, 111(4) :631–655, 2009.