HAL open science

Intégration numérique par la méthode double-exponentielle

Pascal Molin

▶ To cite this version:

Pascal Molin. Intégration numérique par la méthode double-exponentielle. 2010. hal-00491561v1

HAL Id: hal-00491561
https://hal.science/hal-00491561v1

Preprint submitted on 12 Jul 2010 (v1), last revised 30 Nov 2016 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Intégration numérique par la méthode double-exponentielle

Pascal Molin

12 juin 2010

Table des matières

1 Introduction **2**
1.1 Notations, conventions 3

2 Principe **3**
2.1 Méthode des trapèzes et formule de Poisson 3
2.2 Exemple : le cas optimal 4
2.3 Complexité théorique 5
2.4 Régularité et décroissance 7
2.4.1 Régularité de g d'après la décroissance de $\hat{g}$ 7
2.4.2 Décroissance de $\hat{g}$ d'après la régularité de g 8
2.5 Autres exemples 10
2.5.1 Une autre fonction propre 10
2.5.2 Surgaussienne 10
2.6 Décroissance des fonctions holomorphes 10
2.6.1 Fonctions à décroissance simplement exponentielle . . . 11
2.6.2 Fonctions à décroissance doublement exponentielle . . . 12
2.7 Optimalité du principe double-exponentiel 14
2.7.1 Principe d'incertitude 14
2.7.2 Complexité minimale 15
2.8 Énoncé du théorème double-exponentiel 15
2.9 Exemples 18

3 Méthode d'application à l'intégration sur divers domaines **19**
3.1 Droite réelle 21
3.1.1 Cas d'une décroissance simplement exponentielle 21
3.1.2 Cas d'une décroissance polynomiale 23
3.2 Demi-droite 26
3.2.1 Cas d'une décroissance exponentielle 26
3.3 Intervalle compact 29

4 Validité du principe **34**
4.1 Une intégrale de référence 34
4.2 Pôles hors de Z_τ 34
4.3 Cas problématiques 35
4.3.1 Pôles dans Z_τ 35
4.3.2 Pôles proches de l'axe 35
4.3.3 Fonction Gamma 35
4.4 Résultats étendus 36
4.4.1 Bande d'holomorphie 36
4.5 Fonctions méromorphes 39
4.6 Décalages de contour 40

5 Exemple complet **41**
5.1 Fonction d'erreur 41
5.1.1 Encadrement 41
5.1.2 Application directe 41
5.1.3 Avec changement de variable préliminaire 42

A Formulaire **43**

B Majorations **43**

1 Introduction

La présente étude s'intéresse à l'intégration numérique à grande précision de fonctions régulières, et développe de manière rigoureuse le principe d'intégration qui était connu sous le nom de « méthode d'intégration double exponentielle ».

Ce principe, introduit tout d'abord de manière assez heuristique dans [TM73] et étudié plus en détail dans [Sug97], préconise de ramener le calcul de toute intégrale à l'application de la méthode des trapèzes sur $\mathbb{R}$ à des fonctions très régulières possédant une décroissance rapide de type doublement exponentielle (c'est-à-dire du type $O(\exp(-\exp|x|))$ en l'infini.

Les deux articles cités ci-dessus visaient surtout à justifier l'optimalité de l'approche double-exponentielle. Dans cette étude, nous étaierons un peu plus ce paradigme, mais notre but est surtout d'obtenir une théorie efficace, car intuitive et facilement applicable à l'intégration concrète et rigoureuse de fonctions.

Notre étude repose sur une interprétation très générale de la convergence de la méthode des trapèzes à l'aide de la formule de Poisson, qui permet de démontrer que la méthode proposée est d'autant plus rapide

- que la fonction à intégrer possède une large bande d'holomorphie au voisinage de l'intervalle d'intégration ;

– que cette zone s'étend de manière symétrique de part et d'autre du chemin, ce qui peut inviter à réaliser des changements de chemin lors de l'application de la méthode.

Dans ce cadre, on établit dans ce cadre des résultats de convergence prouvée en terme de paramètres dépendant explicitement de la fonction à intégrer.

Pour illustrer la méthode, nous passons ensuite en revue quelques exemple illustrant les cas d'application, et permettant de saisir la pertinence des hypothèses proposées.

1.1 Notations, conventions

Dans tout ce qui suivra :

– g désigne une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable, dont on calcule l'intégrale par la méthode des trapèzes ;
– sa transformée de Fourier est définie avec les conventions habituelles en théorie des nombres :

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} g(t)\,\mathrm{d}t;$$

– pour tout réel $\tau > 0$ on note $\Delta_\tau = \mathbb{R} + i]-\tau, \tau[$ la bande complexe de largeur τ autour de l'axe réel ;
– lorsque g possède un prolongement holomorphe à une bande Δ_τ, on désignera par g ce prolongement et on dira que g est définie sur Δ_τ.

2 Principe

2.1 Méthode des trapèzes et formule de Poisson

Pour une fonction décroissant suffisamment en l'infini, la formule de Poisson relie un échantillonnage régulier de la fonction à un échantillonnage (de pas inverse) de sa transformée de Fourier, dont le premier terme est l'intégrale de la fonction.

Si l'on applique cette formule au réseau $h\mathbb{Z}$, on a

$$h \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(kh) = \int_{\mathbb{R}} g + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \hat{g}(\frac{k}{h}), \tag{1}$$

ce qui constitue un lien entre une somme des trapèzes infinie de pas h et l'intégrale sur $\mathbb{R}$ correspondante, les termes de Fourier exprimant de manière exacte l'erreur réalisée lors de cette quadrature.

L'intégration numérique par la méthode des trapèzes sur l'axe réel revient à choisir d'une part un intervalle hors duquel on tronquera la somme, et d'autre part un pas h, en majorant précisément les erreurs ① de troncature et ② de quadrature réalisées à cette occasion.

$$h \sum_{k=-n}^{n} g(kh) + \underbrace{h \sum_{|k|>n} g(kh)}_{①} = \int_{\mathbb{R}} g + \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{g}(\frac{k}{h})}_{②} \tag{2}$$

Erreur de quadrature La transformée de Fourier transforme les régularités de la fonction initiale en décroissance à l'infini. L'interprétation en terme d'erreur de quadrature est simple : pour une fonction très régulière, les variations ont une grande cohérence globale, si bien que les erreurs se compensent.

Si la fonction est de classe $\mathscr{C}^k$, on montre à l'aide de simples intégrations par parties que la transformée est en $O(x^{-k})$. Si l'on considère des fonctions non seulement $\mathscr{C}^\infty$, mais même holomorphes au voisinage de l'axe réel, on démontre alors que la décroissance de la transformée de Fourier est exponentielle.

La section 2.4 présente les liens que l'on peut établir entre la régularité de g et la décroissance de $\hat{g}$, donc l'estimation de l'erreur de quadrature.

Erreur de troncature Une fois choisi le pas h, la connaissance de la décroissance de g permet de choisir la borne de troncature nh de sorte que les termes éliminés constituent une erreur de troncature maîtrisée.

Le principe de l'intégration numérique par la méthode des trapèzes est de considérer les fonctions possédant à la fois une décroissance maximale, afin d'échantillonner sur un nombre réduit de termes, tout en conservant la plus grande régularité possible, c'est-à-dire l'holomorphie au voisinage de la zone d'intégration, afin de prendre un pas h le moins petit possible.

Plus précisément, nous allons considérer des fonctions qui possèdent une décroissance au moins exponentielle sur l'axe réel, et dont les transformées de Fourier possèdent elles aussi une décroissance au moins exponentielle. De la sorte, la complexité de l'intégration sur $\mathbb{R}$ sera au plus quadratique

L'intuition de l'intégration double-exponentielle est que le procédé est en général optimal lorsque la fonction g possède une décroissance doublement exponentielle, et une régularité suffisante pour que sa transformée ait une décroissance exponentielle.

2.2 Exemple : le cas optimal

Pour fixer les idées, considérons le cas d'une fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-Ax^2}$, qui a décroissance exponentielle. On sait qu'elle est — au facteur A près — sa propre transformée de Fourier, ce qu'on démontre à l'aide d'un simple décalage de la droite d'intégration

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} e^{-At^2} \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-A(t+\frac{i\pi x}{A})^2 - \frac{\pi^2 x^2}{A}} \, \mathrm{d}t = e^{-\frac{\pi^2 x^2}{A}} \hat{f}(0).$$

On peut en outre calculer la constante $\hat{f}(0)$ précisément à l'aide de la formule de Poisson utilisée tout au long de cet article :

$$h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-Ak^2h^2) = \hat{f}(0) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-\frac{\pi^2 k^2}{h^2 A});$$

en prenant $h = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$, les deux sommes sont égales et on a $\hat{f}(0) = h$.

Ici, f et $\hat{f}$ sont toutes les deux holomorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier et intégrables sur les droites horizontales, et nous verrons au paragraphe suivant que cela correspond au fait qu'elles ont toutes deux une décroissance plus qu'exponentielle sur l'axe réel. Il s'agit là d'une situation idéale pour la sommation par trapèzes.

Pour un calcul de $\int f = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$ à une précision d'ordre D, on choisit

- h de sorte que $\hat{f}(\frac{1}{h}) = e^{-\frac{\pi^2}{h^2 A}} \leqslant e^{-D}$, soit $h \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{DA}}$.
- nh de sorte que $f(nh) = e^{-A(nh)^2} \leqslant e^{-D}$, soit $nh \geqslant \sqrt{\frac{D}{A}}$.

Ainsi, le nombre d'évaluations $n = \frac{D}{\pi}$ pour obtenir une précision de l'ordre de D est linéaire et indépendant de la variance de la gaussienne.

Remarque : L'indépendance en la variance est tout à fait normal et général : en effet changer de variance revient à faire un changement de variable homothétique sur f ; on obtient alors l'homothétie inverse sur $\hat{f}$, et les deux facteurs d'homothétie se simplifient — l'un multipliant nh et l'autre $1/h$ — lorsqu'on calcule le nombre de points d'intégration.

Remarque : Ce qui est vrai de la gaussienne l'est de toutes les fonctions de Hermite. Il y a donc une famille infinie de fonctions non triviales pour lesquelles l'intégration se fait en complexité linéaire.

2.3 Complexité théorique

Décroissance simplement exponentielle Considérons une fonction f et sa transformée de Fourier $\hat{f}$, et supposons que chacune ait une décroissance de nature exponentielle, de sorte qu'on puisse écrire pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|g(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha_1 |x|^{\beta_1}} \tag{3}$$

$$\left|\hat{g}(x)\right| \leqslant M_2 e^{-\alpha_2 |x|^{\beta_2}} \tag{4}$$

pour des constantes $M_i, \alpha_i > 0$ et $\beta_i \geqslant 1$.

Proposition 1

Avec les hypothèses précédentes, pour obtenir des erreurs de quadrature

et de troncature de l'ordre de e^{-D} il suffit de prendre

$$nh \geqslant \left(\frac{D + \log(\frac{2M_1}{\alpha_1 \beta_1})}{\alpha_1} \right)^{1/\beta_1}$$

$$\frac{1}{h} \geqslant \left(\frac{D + \log(2M_2 + e^{-D})}{\alpha_2} \right)^{1/\beta_2}$$

d'où un nombre d'évaluations de la fonction g

$$n \sim \frac{D^{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{\beta_1}} \alpha_2^{\frac{1}{\beta_2}}}$$

Démonstration : – Sous ces hypothèses l'erreur de troncature vérifie

$$\begin{aligned}
\left| h \sum_{k=n+1}^{\infty} g(kh) \right| &\leqslant M_1 h \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\alpha_1 (kh)^{\beta_1}} \\
&\leqslant M_1 h \int_n^{\infty} e^{-\alpha_1 (th)^{\beta_1}} \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{M_1}{\alpha_1 \beta_1 (nh)^{\beta_1 - 1}} \int_{nh}^{\infty} \alpha_1 \beta_1 u^{\beta_1 - 1} e^{-\alpha_1 u^{\beta_1}} \, \mathrm{d}u \qquad (\text{car } \beta_1 \geqslant 1) \\
&\leqslant \frac{M_1}{\alpha_1 \beta_1} e^{-\alpha_1 (nh)^{\beta_1}}
\end{aligned}$$

la même estimation valant pour $k < -n$, si bien que vérifier

$$\left| h \sum_{|k| > n} g(kh) \right| \leqslant \frac{2M_1}{\alpha_1 \beta_1} e^{-\alpha_1 (nh)^{\beta_1}} \leqslant e^{-D}$$

donne la condition annoncée.

– si $\beta_2 \geqslant 1$, $e^{-\alpha_2 (\frac{k}{h})^{\beta_2}} \leqslant e^{-\alpha_2 \frac{k}{h^{\beta_2}}}$, l'erreur de quadrature est majorée par la série géométrique

$$\sum_{k \neq 0} \left| \hat{g}(\frac{k}{h}) \right| \leqslant 2 \sum_{k \geqslant 1} M_2 e^{-\alpha_2 \frac{k}{h^{\beta_2}}} = \frac{2M_2}{e^{\frac{\alpha_2}{h^{\beta_2}}} - 1} \tag{5}$$

qui donne immédiatement la condition sur h. □

Pour avoir une bonne convergence, l'important est donc de minimiser $\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}$.

Décroissance doublement exponentielle Ceci correspond au cas $\beta_1 = \infty$ ci-dessus, et on obtient logiquement $D^{1/\beta_1} = \log(D)$.

Supposons donc

$$\left|g(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 |x|}} \tag{6}$$

$$\left|\hat{g}(x)\right| \leqslant M_2 e^{-\alpha_2 |x|} \tag{7}$$

pour des constantes $M_i, \alpha_i > 0$ et $\beta_1 > 0$.

Proposition 2 (*DE*)

Avec les hypothèses précédentes, il suffit de poser

$$nh \geqslant \frac{\log(D + \log(\frac{2M_1}{\alpha_1 \beta_1}))}{\beta_1}$$

$$\frac{1}{h} \geqslant \left(\frac{D + \log(2M_2 + e^{-D})}{\alpha_2}\right),$$

ce qui donne un nombre d'évaluations

$$n \sim \frac{D \log(D)}{\beta_1 \alpha_2}$$

Démonstration : Comme précédemment on majore

$$\begin{aligned}
\left| h \sum_{k=n+1}^{\infty} g(kh) \right| &\leqslant M_2 h \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\alpha e^{\beta x h}} \\
&\leqslant M_2 h \int_n^{\infty} e^{-\alpha e^{\beta x h}} \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{M_2 h}{\alpha \beta h e^{\beta n h}} \int_n^{\infty} \alpha \beta h e^{\beta x h} e^{-\alpha e^{\beta x h}} \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{M_2}{\alpha \beta e^{\beta n h}} e^{-\alpha e^{\beta n h}}
\end{aligned}$$

On a la même majoration pour les termes négatifs. En négligeant la division par $e^{\beta n h} > 1$, majorer ces deux erreurs de troncature par e^{-D} donne la condition. □

2.4 Régularité et décroissance

Le lien entre la régularité de la fonction g et la décroissance de sa transformée de Fourier $\hat{g}$ peut être explicité par des théorèmes de type Paley-Wiener. Du fait de la réciprocité de Fourier, tous les résultats peuvent être formulés indifféremment en remplaçant g par $\hat{g}$.

2.4.1 Régularité de g d'après la décroissance de $\hat{g}$

Tout d'abord, l'hypothèse d'une décroissance exponentielle de la transformée de Fourier implique immédiatement l'holomorphie de la fonction g au

voisinage de l'axe réel.

Proposition 3

Soit $\hat{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\hat{g}(x) = O(e^{-2\pi\tau|x|})$$

alors $\hat{g}$ est la transformée de Fourier d'une fonction g holomorphe sur une bande Δ_τ. De plus, pour tout $|t| < \tau$, $g \in L^2(\mathbb{R} + it)$.

Démonstration : Sous ces hypothèses, $\hat{g}$ est L^1, de même que $\hat{g}(x)e^{2i\pi xt}$ pour tout $|t| < \tau$, d'où l'existence de $g(x + it)$. De plus, $(2i\pi x)e^{2i\pi xt}\hat{g}(x)$ est elle aussi L^1, donc g est dérivable sur Δ_τ par dérivation sous le signe intégral.
L'égalité de Plancherel assure l'intégrabilité L^2. □

Corollaire 4

En particulier, si

$$\hat{g}(x) = O(e^{-\alpha|x|^\beta}) \text{ avec } \beta > 1$$

alors g est une fonction entière.

2.4.2 Décroissance de $\hat{g}$ d'après la régularité de g

Réciproquement, et c'est ce qui importe pour l'intégration numérique, on peut chercher à assurer la décroissance exponentielle de $\hat{g}$ à partir d'hypothèses sur g.

Si l'on ajoute des conditions convenables qui permettent de décaler la droite d'intégration dans la direction imaginaire, on peut chercher la décroissance de l'exponentielle hors de l'axe, ce qui donne le résultat suivant :

Proposition 5

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction L^1, telle que
- *g possède un prolongement analytique holomorphe sur un voisinage $\Delta_\tau = \mathbb{R} \times i[-\tau, \tau]$ de l'axe réel (que l'on note toujours g) ;*
- $\lim_{x\to\pm\infty} \int_{x-i\tau}^{x+i\tau} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$;
- $f \in L^1(\mathbb{R} \pm i\tau)$;

alors $\hat{g}$ vérifie

$$\hat{g}(x) \leqslant M_2 e^{-2\pi|x|\tau}$$

où $M_2 = \int_{\mathbb{R}} \left|g(x + i\tau)\right| + \left|g(x - i\tau)\right| \,\mathrm{d}x$.

Démonstration : En effet les hypothèses permettent, via la formule de Cauchy, de dire que pour tout $|t| \leqslant \tau$, $\int_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}+it}$.

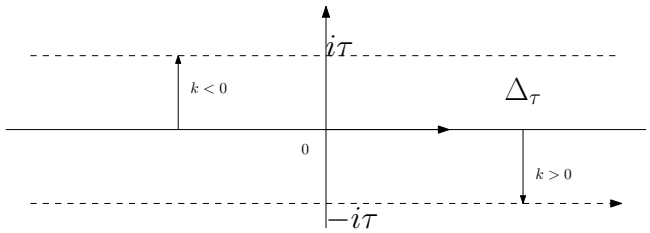


FIG. 1 – le décalage de la droite d'intégration

Ce qui donne en décalant la droite d'intégration vers le bas de $-i\tau$ pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}\left|\hat{g}(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x(z-i\tau)} g(z-i\tau)\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant e^{-2\pi x\tau}\int_{\mathbb{R}} \left|g(z-i\tau)\right|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left\|g(\cdot - i\tau)\right\|_1 e^{-2\pi x\tau}\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse d'intégrabilité.

De même, pour $x < 0$ en décalant vers le haut. □

Remarque : Les deux hypothèses supplémentaires sont cruciales :

- le fait qu'une transformée de Fourier ait une décroissance exponentielle n'entraîne pas d'hypothèse L^1 sur la fonction initiale : le cas le plus simple est celui de la fonction indicatrice $1_{[-1,1]}$ qui est la transformée de Fourier de la fonction $\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}$, laquelle n'est pas L^1.
- en ce qui concerne l'annulation en l'infini des intégrales de bord, la fonction $x \mapsto e^{-\cosh(x)}$ est L^1 sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} + 2i\pi$, mais explose complètement sur $\mathbb{R} + i\pi$ (où le cosinus hyperbolique est remplacé par son opposé).

Toutefois, nous verrons dans la section 2.6 (proposition 13) que ces deux hypothèses peuvent être obtenues à partir des hypothèses de décroissance que nous ferons sur g.

En combinant ces deux résultats, on a un moyen simple de connaître la vitesse de décroissance de la transformée de Fourier à partir d'hypothèses sur la fonction initiale :

Théorème 6

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à décroissance double-exponentielle possédant un prolongement holomorphe à une bande Δ_τ. Alors

- *si g est bornée sur Δ_τ et $g \in L^1(\mathbb{R} + i\tau)$, alors $\hat{g}(x) = O(e^{2\pi\tau x})$;*
- *si $\hat{g}(x) = O(e^{2\pi t x})$, alors $g \in L^2(\mathbb{R} + it)$;*

Démonstration : Pour le premier point, on applique la proposition 5, en déduisant l'hypothèse de décroissance en l'infini de la proposition 13. □

Remarque : On peut aussi raffiner le résultat à l'aide d'hypothèses sur $\hat{g}$: en effet, si $\hat{g}$ est $\mathscr{C}^1$ et que sa dérivée a également une décroissance exponentielle en $e^{-2\pi\tau x}$, alors du fait que xg est L^2 sur $\mathbb{R} + i\tau$ on déduit que g y est L^1.

Toutefois on cherche des conditions qui fassent intervenir uniquement g pour connaître précisément la décroissance de $\hat{g}$.

2.5 Autres exemples

2.5.1 Une autre fonction propre

Prenons l'autre exemple de fonction invariante par la transformation de Fourier

$$f : x \mapsto \frac{1}{\cosh(\pi x)}$$

On a alors $\cosh(\pi z) = 0 \Leftrightarrow z \in i(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$, donc f est holomorphe sur $\Delta_{\frac{1}{2}}$, et on a bien $\hat{f}(x) = f(x) = O(e^{-\frac{2\pi}{2}x}) = O(e^{-\pi x})$.

On pose ici $h = \frac{\pi}{D}$ et $nh = \frac{D}{\pi}$, soit $n = \frac{D^2}{\pi^2}$, ce qui ne donne qu'une convergence quadratique.

En outre f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc par un changement de variable on aura toujours $\beta_2 \leqslant 1$.

2.5.2 Surgaussienne

Essayons d'améliorer la cas de la Gaussienne, en considérant la fonction

$$f : x \mapsto e^{-\pi x^4}$$

À présent, $\beta_1 = 4$ et f est intégrable sur toutes les droites $\mathbb{R} + it$ puisque

$$-(x + it)^4 \sim -x^4$$

donc $\hat{f}$ a une décroissance plus qu'exponentielle, $\beta_2 \geqslant 1$.

2.6 Décroissance des fonctions holomorphes

La grande rigidité des fonctions holomorphes permet d'étendre des hypothèses de croissance ou de décroissance à un voisinage de l'endroit où on en dispose.

Nous donnons ici quelques résultats classiques obtenus à partir du principe du maximum par la théorie de Phrägmen-Lindelöf, et qui se ramènent tous à l'idée suivante :

> pour des variations de nature exponentielle, les variations les plus faibles sont obtenues par la fonction exponentielle elle-même.

Ces résultats sont donnés dans deux cadres :

– celui des fonctions à décroissance simplement exponentielle, définies sur des secteurs angulaires et pour lesquelles les fonctions de référence sont les exponentielles $e^{\alpha x^\beta}$.
– celui des fonctions à décroissance doublement exponentielle, définies soit sur des bandes Δ_τ auquel cas les fonctions de référence sont les doubles-exponentielles $e^{\alpha \cosh(\beta x)}$, ou bien sur des demi-bandes Δ_τ^+ pour des fonctions $e^{\alpha e^{\beta x}}$.

2.6.1 Fonctions à décroissance simplement exponentielle

Notons

$$C_\theta = \left\{ z = re^{it}, r \geqslant 1, -\theta \leqslant t \leqslant \theta \right\}$$

le secteur angulaire des $|z| \geqslant 1$ délimité par les deux rayons

$$R_{\pm\theta} = e^{i\pm\theta}[1, \infty[$$

Lemme 7

Si f est une fonction holomorphe sur C_θ, et vérifie
– $\left|f\right| \leqslant M$ *sur le bord de* C_θ *;*
– $\left|f(z)\right| = O(e^{\alpha|z|^\beta})$ *sur* C_θ *avec* $\beta\theta < \frac{\pi}{2}$ *;*
alors $\left|f\right| \leqslant M$ *uniformément sur* C_θ.

Démonstration : En effet, pour tout $\beta < \beta' < \frac{\pi}{2\theta}$, les fonctions $h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon z^{\beta'})$, $\varepsilon > 0$, sont bornées par 1 sur le bord de C_θ et ont une décroissance plus rapide que la croissance de f.

$$\left|h_\varepsilon(re^{i\tau})\right| = e^{-\varepsilon\cos(\beta'\tau)r^{\beta'}} \text{ avec } \beta'\tau \leqslant \beta'\theta < \frac{\pi}{2}$$

Par le principe du maximum, les fonctions fh_ε sont donc toutes bornées uniformément par le supremum de f sur le bord de C_θ. Or à z fixé, $h_\varepsilon(z) \to_{\varepsilon\to 0} 1$, donc cette borne est valide pour $f(z)$. □

Corollaire 8

En particulier, si f est bornée sur chaque rayon d'un secteur, elle l'est par ses majorants sur le bord.

Lemme 9

Si f est une fonction holomorphe bornée sur C_θ, et

$$\left|f(z)\right| = O(e^{-\alpha|z|^\beta}) \text{ sur un rayon } R_\tau, \tau \in]-\theta, \theta[$$

avec $\theta\beta > \frac{\pi}{2}$, alors f est nulle.

Démonstration : En effet pour $\beta' = \frac{\pi}{2\theta} < \beta$ et tout $n \geqslant 1$ la fonction $h_n(z) = e^{nz^{\beta'}}$ est bornée par 1 sur les rayons $R_{\pm\theta}$, par e^n sur la portion de cercle qui les joint, et elle a une croissance d'ordre β' inférieure à la décroissance de f sur R_τ. Notons M un majorant de f sur C_θ, Me^n y est un majorant de fh_n, et notons $M_n > M$ un majorant de fh_n sur le rayon R_τ. Donc le produit fh_n est borné par M_n sur le bord de chacun des secteurs $C_{-\theta,\tau}$ et $C_{\tau,\theta}$, et a une croissance d'ordre β' sur ces secteurs qui sont d'ouverture inférieure à $\frac{\pi}{\beta'}$, donc d'après le lemme **??** fh_n est uniformément borné sur chacun d'eux par M_n. Elle l'est donc sur C_θ, a priori par M_n mais le corollaire **??** montre qu'en réalité fh_n est bornée par ses valeurs sur le bord de C_θ, donc par Me^n. Pour tout z assez grand tel que $\mathrm{Re} z^{\beta'} > 1$, on en déduit que $|f(z)| \leqslant Me^{n-n\mathrm{Re} z^{\beta'}} \to_{n\to\infty} 0$, donc f est partout nulle. □

Théorème 10

Si f est une fonction holomorphe sur C_θ, telle que
- $|f(x)| = O(e^{-\alpha x^\beta})$ *sur un rayon* R_τ, $\tau \in]-\theta, \theta[$, *avec* $\beta > \frac{\pi}{2\theta}$;
- $|f(z)| \leqslant e^{A|z|^\rho}$ *sur* C_θ *avec* $\rho\theta < \frac{\pi}{2}$;

alors f est nulle.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $f(z)e^{-\lambda z^\rho}$ où λ est choisi de sorte que $\lambda \cos(\frac{\rho\theta}{2}) > A$. □

2.6.2 Fonctions à décroissance doublement exponentielle

Les résultats précédents s'obtiennent en remplaçant z^β par $e^{\beta z}$ sur des demi-bandes $\Delta_\tau^+ = [0, \infty[+i] - \tau, \tau[$, ou sur les bandes complètes Δ_τ en considérant plutôt les fonctions $e^{-\alpha \cosh(\beta z)}$.

Proposition 11

Soit f une fonction holomorphe sur la demi-bande $\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+ = \mathbb{R}_+ + i] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et telle que
- $|f| \leqslant M$ *sur* $\partial\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+$;
- $f(x+it) = O(e^{\alpha e^{\beta x}})$ *sur* $\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+$ *avec* $\beta < 1$;

Alors f est bornée sur $\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+$ et $|f| \leqslant M$.

Décroissance maximale De même, on limite la décroissance de fonctions qui possèdent une certaine bande d'holomorphie sur laquelle elles restent bornées : si β est l'ordre de décroissance et 2τ la largeur de la bande, on a $\beta 2\tau \leqslant \pi$.

Théorème 12

Soit f une fonction holomorphe et bornée sur une bande Δ_τ^+, qui possède une décroissance

$$f(x+it) = O(e^{-\alpha e^{\beta x}}), x > 0$$

avec $\beta > \frac{\pi}{2\tau}$, pour une certaine valeur $t \in]-\tau, \tau[$. Alors f est la fonction nulle.

Extension de la décroissance Dans ce cadre double-exponentiel, donnons un exemple d'utilisation plus précise du principe de Phrägmen-Lindelöf en étendant la décroissance d'une fonction à un voisinage.

Proposition 13

Si f est une fonction holomorphe sur une bande Δ_τ vérifiant
- *$f(x) = O(e^{-\alpha e^{\beta x}})$ sur $\mathbb{R}_+$;*
- *$\left|f\right| \leqslant M$ sur Δ_τ ;*

alors pour tout $|t| < \tau$,

$$\left|f(x+it)\right| \leqslant Me^{-\alpha_t e^{\beta x}}. \tag{8}$$

où $\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \frac{\sin(\beta t)}{\tan(\beta\tau)})$.

Démonstration : Si f est nulle, la conclusion est vraie. On suppose donc f non nulle, et le théorème 12 impose $\tau \leqslant \frac{\pi}{2\beta}$. On considère une fonction $h(z) = e^{(a+ib)e^{\beta z}}$ de sorte que hf soit bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+ + i\tau$. On sait que

$$\left|h(x+it)\right| = e^{(a\cos(\beta t) - b\sin(\beta t))e^{\beta x}}$$

donc si on choisit $a = \alpha$ et $b = \frac{\alpha}{\tan(\beta\tau)}$ on a $|h| = 1$ sur $\mathbb{R}_+ + i\tau$ et $\left|fh\right| \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$. Puisque en outre fh a une croissance d'ordre β sur la bande $\Delta_{0,\tau}$ de largeur $\tau \leqslant \frac{\pi}{2\beta} < \frac{\pi}{\beta}$, donc $\left|fh\right| \leqslant M$ sur $\Delta_{0,\tau}$. La même chose est vraie sur la demi-bande inférieure en prenant l'opposé de b, ce qui démontre le résultat. □

Remarque : Le résultat est valide sur les demi-bandes. Si $\beta\tau > \pi$ commencer par une bande plus petite pour montrer l'absurdité.

Théorème 14

Si f est une fonction holomorphe sur une bande Δ_τ vérifiant
- *$f(x) = O(e^{-\alpha e^{\beta x}})$ sur $\mathbb{R}_+$;*
- *$\left|f(x+it)\right| \leqslant Me^{\lambda x + Ae^{\gamma x}}$ sur Δ_τ ;*

alors pour tout $|t| < \tau$,

$$\left|f(x+it)\right| \leqslant Me^{\lambda x + A_t e^{\gamma x} - \alpha_t e^{\beta x}}. \tag{9}$$

où $\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \frac{\sin(\beta t)}{\tan(\beta\tau)})$ et $A_t = A\frac{\cos(\gamma t)}{\cos(\gamma\tau)}$.

Démonstration : D'après 12, on a $\beta\tau \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\gamma\tau) > 0$. On applique alors simplement le théorème précédent au produit fh, où on pose $h(z) = e^{-\lambda z - \frac{A}{\cos(\gamma\tau)}e^{\gamma z}}$ □

Remarque : Les résultats exprimés ici sur des bandes Δ_τ peuvent l'être sans changement sur des demi-bandes $\Delta_\tau^+ = \mathbb{R}_+ + i]-\tau,\tau[$, en veillant simplement au fait que dans ce cas les majorations font intervenir la majoration sur le bord $[-it, it]$.

2.7 Optimalité du principe double-exponentiel

2.7.1 Principe d'incertitude

De manière plus générale, le principe d'incertitude limite la décroissance simultanée de g et $\hat{g}$.

Les résultats énoncés précédemment permettent d'obtenir très simplement des résultats dans ce sens.

Si en effet on suppose disposer d'une décroissance exponentielle de la transformée de Fourier de g avec un paramètre $\beta_2 > 1$, alors par transformée de Fourier inverse

Lemme 15

Si $\left|\hat{g}(x)\right| \leqslant M_2 e^{\alpha_2 |x|^{\beta_2}}$, *alors*

$$\left|g(x+it)\right| \leqslant 2M_2 e^{\frac{(2\pi|t|+1)^{\lambda+1}}{(\alpha_2\beta_2)^\lambda}}, \quad \lambda = \frac{1}{\beta_2 - 1} \tag{10}$$

Démonstration : On majore simplement $\left|g(x+it)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ut - \alpha_2|u|^{\beta_2}}\,\mathrm{d}u$ à l'aide du lemme 65. □

Dès lors, si on suppose des décroissances de paramètres α_1, β_1 et α_2, β_2 sur g et $\hat{g}$ avec $\beta_1 > 1$ et $\beta_2 > 1$, g et $\hat{g}$ sont des fonctions entières.

Puisque $\beta_1 > 1$, en appliquant le théorème 10 sur un secteur d'ouverture $\frac{\pi}{\beta_1}$ on obtient $\lambda + 1 = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} \geqslant \beta_1$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \geqslant 1.$$

Le très élégant théorème suivant, dû à Beurling [Hör91], donne un énoncé très symétrique du principe d'incertitude

Théorème 16

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$, *alors*

$$\iint \left|g(x)\right| \left|\hat{g}(y)\right| e^{2\pi|xy|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$$

si et seulement si g *est nulle.*

2.7.2 Complexité minimale

Ainsi, sous réserve de majorer les erreurs de quadrature et de troncature comme nous l'avons fait, on a les résultats suivants :

Proposition 17

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à décroissance simplement exponentielle.

L'intégration numérique de g à précision D se fait au minimum en $O(\frac{D}{\pi})$, et ce cas est atteint pour les fonctions de Hermite.

S'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $g \notin L^2(\mathbb{R} + it)$ (en particulier si g n'est pas holomorphe sur le plan complexe tout entier), alors la complexité est au minimum en $O(D^{1+\frac{1}{\beta_1}})$.

Proposition 18

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à décroissance doublement exponentielle. Alors $\beta_2 \leqslant 1$ et si $\beta_2 = 1$ on a

$$\alpha_1 \beta_1 \leqslant \pi^2$$

Ainsi l'intégration numérique de g à précision D se fait au minimum en $\frac{D \log(D)}{\pi^2} + o(D \log D)$ évaluations.

Démonstration : En effet, si $\beta_2 > 1$ g serait bornée sur toutes les droites $\mathbb{R} + i\tau$, ce qui est impossible d'après 12. Le cas d'égalité se traite par le même théorème : pour tout α_2 la transformée de Fourier inverse permet de borner g sur les droites $\mathbb{R} + it$ avec $2\pi t < \alpha_2$, donc on ne peut avoir $\beta \frac{\alpha_2}{2\pi} > \frac{\pi}{2}$. □

2.8 Énoncé du théorème double-exponentiel

Le théorème général d'intégration des fonctions à décroissance doublement exponentielle consiste simplement à utiliser les résultats de la section précédente pour appliquer la proposition 2 uniquement en terme de la fonction g.

Nous donnons trois versions du théorème d'intégration pour les fonctions à décroissance doublement exponentielle : le premier fait appel à des hypothèses assez précises mais permet d'obtenir en pratique les meilleures constantes, tandis que les suivants affaiblissent les hypothèses au prix d'une perte de précision sur les constantes.

Théorème 19 (*intégration double exponentielle 1*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1. *f possède un prolongement holomorphe borné sur $\mathbb{R} \times [-i\tau, i\tau]$*
2. *$\left|f(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha e^{\beta|x|}}$ sur $\mathbb{R}$*
3. *$\int_{\mathbb{R}} \left|f(x - i\tau)\right| + \left|f(x + i\tau)\right| \, \mathrm{d}x \leqslant M_2$*

alors, pour tout $D > 0$, en posant

$$h = \frac{2\pi\tau}{D + \log(4M_2 + 2e^{-D})} \tag{11}$$

$$\textit{et} \quad n = \frac{\log(D + \log(\frac{4M_1}{\alpha\beta}))}{h\beta} \tag{12}$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - h \sum_{k=-n}^{n} f(kh) \right| \leqslant e^{-D}$$

Démonstration : On applique simplement le théorème 6 pour obtenir $\alpha_2 = 2\pi\tau$. □

En raison des résultats de 2.6, on peut assouplir les hypothèses

Théorème 20 (*intégration double exponentielle 2*)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1. *g possède un prolongement holomorphe sur une bande Δ_τ*
2. *$\left|g(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha e^{\beta|x|}}$ sur $\mathbb{R}$*
3. *$\left|g(z)\right| \leqslant M_2$ sur Δ_τ.*

alors, pour tout $D > 0$, en posant

$$\delta = \frac{1}{\tan(\beta\tau)} \qquad (\delta = 0 \textit{ si } \beta\tau = \frac{\pi}{2}) \tag{13}$$

$$t = \frac{1}{\beta} \arctan(\frac{D - \beta\delta\tau}{\delta D + \beta\tau}) \tag{14}$$

$$\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \delta \sin(\beta t)) \tag{15}$$

$$h = \frac{2\pi t}{D + \log(\frac{4M_2 e^{-\alpha_t}}{\alpha_t \beta} + 2e^{-D})} \tag{16}$$

$$\textit{et} \quad n = \frac{\log(D + \log(\frac{4M_1}{\alpha_1\beta_1}))}{h\beta_1} \tag{17}$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g - h \sum_{k=-n}^{n} g(kh) \right| \leqslant e^{-D}$$

Démonstration : D'après la proposition 13, pour tout $t < \tau$,

$$\left|g(x \pm it)\right| \leqslant M_2 e^{-\alpha(t)e^{\beta|x|}}$$

où $\alpha(t) = \cos(\beta t) - \delta \sin(\beta t)$, avec $\delta = \frac{1}{\tan(\beta\tau)}$. En particulier, pour tout $|t| < \tau$,

g vérifie les hypothèses de la proposition 5 avec $\|g(\cdot + it)\|_1 \leqslant \frac{2M_2 e^{-\alpha(t)}}{\alpha(t)\beta}$ (cf. (69)). On a donc

$$|\hat{g}(X)| \leqslant \frac{4M_2 e^{-\alpha(t)}}{\alpha(t)\beta} e^{-2\pi X t}$$

et $\alpha(t) \to 0$ pour $t \to \tau$.

Choix de t À X fixé, et en négligeant le terme $e^{-\alpha(t)}$, on minimise le membre de droite au maximum de $2\pi t X + \log(\alpha(t))$, soit en posant $\tan(\beta t) = \frac{2\pi X - \beta\delta}{\beta + 2\pi X\delta}$. Pour $D \to \infty$, on a $t \to \tau$ et $2\pi t X \sim D$, donc $X \sim \frac{D}{2\pi\tau}$. On pose donc

$$t = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{D - \beta\delta\tau}{\delta D + \beta\tau}\right)$$

Choix de h, de nh Une fois t fixé, les paramètres sont issus de la proposition 2. □

Complexité asymptotique De plus, on a

$$\tan(\beta t) = \tan(\beta\tau)\left(1 - \frac{\delta + \delta^{-1}}{D}\right) + O(D^{-2})$$

donc

$$t = \tau - \frac{1 + \delta^{-2}}{\beta(1 + \delta^{-2})D} + O(D^{-2}) = \tau - \frac{1}{\beta D} + O(D^{-2})$$

On en déduit

$$\alpha(t) = 0 + (\beta \sin(\beta\tau) + \beta\delta\cos(\beta\tau))\frac{1}{\beta D} + O(D^{-2}) = \frac{\sin(\beta\tau)(1 + \delta^2)}{D} + O(D^{-2})$$

et donc

$$n \sim \frac{\left(D + \log\left(\frac{4M_2 D}{\beta\sin(\beta\tau)(1+\delta^2)}\right)\right)\log\left(D + \frac{4M_1}{\alpha\beta}\right)}{2\pi\tau\beta}$$

Théorème 21 (*intégration double exponentielle 3*)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1. *g possède un prolongement holomorphe sur une bande Δ_τ*
2. *$|g(x)| \leqslant M_1 e^{-\alpha e^{\beta|x|}}$ sur $\mathbb{R}$*
3. *$|g(z)| \leqslant M_2 e^{\lambda|x| + A e^{\gamma|x|}}$ sur Δ_τ.*

pour des constantes positives telles que $\beta > \gamma$, alors, pour tout $D > 1$ et

tout $t \in]0, \tau[$, *en posant*

$$\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \delta \sin(\beta t)) \tag{18}$$

$$A_t = A \frac{\cos(\gamma t)}{\cos(\gamma \tau)} \tag{19}$$

$$C_t = A_t \left(\frac{A_t \gamma + \lambda + 1}{\alpha_t \beta} \right)^{\frac{\gamma}{\beta - \gamma}} - \alpha_t \left(\frac{A\gamma}{\alpha_t \beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \gamma}} \tag{20}$$

$$h = \frac{2\pi t}{D + C_t + \log(4M_2 + 2e^{-D-C_t})} \tag{21}$$

$$\textit{et} \quad n = \frac{\log(D + \log(\frac{4M_1}{\alpha\beta}))}{h\beta} \tag{22}$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g - h \sum_{k=-n}^{n} g(kh) \right| \leqslant e^{-D}$$

Démonstration : À présent, d'après la proposition 14 on étend la décroissance de g en

$$\left| g(x + it) \right| \leqslant M_2 e^{\lambda x + A_t e^{\gamma |x|} - \alpha_t e^{\beta |x|}}$$

d'où l'on tire

$$\left\| g(\cdot + it) \right\| \leqslant 2M_2 \exp(C_t)$$

avec C_t défini en (64). □

Et pour déterminer une bonne valeur de t, on peut remplacer α_t par son équivalent

$$\alpha_t \sim \alpha\beta(\sin(\beta\tau) + \sin(\beta\tau)^{-1})(\tau - t) \sim a(\tau - t)$$

et maximiser la valeur de h, c'est-à-dire résoudre numériquement sur $t \in]0, \tau[$

$$D + \log(4M_2 + 2e^{-D}) + U(\tau - t)^{-\frac{\gamma}{\beta - \gamma}} = \frac{\gamma}{\beta - \gamma} U t (\tau - t)^{-\frac{\beta}{\beta - \gamma}}$$

avec $U = A \left(\frac{A\gamma + \lambda + 1}{a\beta} \right)^{\frac{\gamma}{\beta - \gamma}} - a \left(\frac{A\gamma}{a\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \gamma}}$.

2.9 Exemples

On considère la fonction

$$f(z) = \exp(-2\alpha \cosh(z))$$

qui est holomorphe sur tout le plan complexe, possède une décroissance doublement exponentielle sur $\mathbb{R}$ pour des paramètres α donné et $\beta = 1$.

Explicitons dans ce cas les constantes M_1 et M_2, en fonction de α et τ.

$$\begin{aligned}\left|f(x+i\tau)\right| &= \left|e^{-2\alpha\cosh(x+i\tau)}\right| \\ &= e^{-2\alpha\cosh(x)\cos\tau} \\ &\leqslant e^{-\alpha\cos(\tau)e^{|x|}}\end{aligned}$$

donc en minorant $e^{|x|}$ par $1+|x|$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+i\tau)\right|\,\mathrm{d}x &\leqslant 2e^{-\alpha\cos\tau}\int_0^{\infty}e^{-\alpha\cos(\tau)x}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\frac{e^{-\alpha\cos\tau}}{\alpha\cos\tau}\end{aligned}$$

Donc en sommant la même valeur en $-\tau$,

$$M_1(f,\alpha,\tau) = 4\frac{e^{-\alpha\cos\tau}}{\alpha\cos\tau} \tag{23}$$

et l'erreur pour un pas h est de

$$4\frac{e^{-\alpha\cos\tau}}{\alpha\cos\tau}e^{-\frac{2\pi\tau}{h}}$$

que l'on minimise à h fixé en prenant $\tau = \arctan(2\pi/h)$.

D'autre part, $\left|f(x)\right| \leqslant e^{\alpha e^{|x|}}$ sur $\mathbb{R}$ donc $M_2 = 1$.

Ainsi, pour obtenir une erreur inférieure à $2e^{-D}$, on prend

$$\tau = \arctan(2D/\pi)$$

puis

$$h = \frac{2\pi\tau}{D+\log(M_1)}$$

et

$$t = nh = \log(D/a)$$

Soit un nombre d'évaluations de l'ordre de

$$\frac{D\log(D)}{\pi^2}.$$

3 Méthode d'application à l'intégration sur divers domaines

Il est rare d'intégrer des fonctions possédant des propriétés de décroissance correspondant à l'hypothèse (2) du théorème 19.

Dans le cas d'une fonction f

1. définie sur un intervalle I ;
2. possédant certaines propriétés d'intégrabilité sur I ;
3. holomorphe dans un voisinage Z de I sur lequel elle reste bornée, ou garde une croissance modérée ;

il convient d'introduire un changement de variable

$$z = \varphi(z')$$

de sorte que la fonction $g(z') = f \circ \varphi(z')$ vérifie les hypothèse du théorème 19, c'est-à-dire que

1. $\varphi(\mathbb{R}) = I$;
2. g ait une décroissance doublement-exponentielle sur $\mathbb{R}$;
3. il existe une valeur $\tau > 0$ et une zone $Z_\tau \subset Z$ telle que φ et φ' soient holomorphe sur Δ_τ, et $\varphi(\Delta_\tau) \subset Z_\tau$.

Pour chaque type d'intervalle, on étudiera un changement de variable φ et on explicitera des zones Z_τ adaptées.

En outre, pour choisir la borne de troncature, on se référera au lemme suivant

Lemme 22

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, on suppose que f est majorée par une fonction $F : I \to \mathbb{R}_+$ et que le changement φ est tel que $\varphi' \times F \circ \varphi$ soit décroissante sur $[nh, \infty[$, alors l'erreur de troncature réalisée lors de l'intégration vérifie

$$h \left| \sum_{|k|>n} g(kh) \right| \leqslant \int_{\varphi(nh)}^{\varphi(\infty)} F(t)\,\mathrm{d}t \tag{24}$$

Démonstration : En effet, si on dispose d'une fonction $F > 0$ décroissante et intégrable qui majore f sur I, alors puisque l'on choisira toujours des fonctions φ croissantes

$$h \left| \sum_{|k|>n} g(kh) \right| \leqslant h \sum_{|k|>n} \varphi'(kh) F(\varphi(kh)) \leqslant \int_{nh}^{\infty} \varphi'(t) F(\varphi(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varphi(nh)}^{\varphi(\infty)} F(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc l'erreur de troncature est toujours majorée par le reste intégral de la majoration F, pris en $\varphi(nh)$ qui tend très rapidement vers $\varphi(\infty)$. □

Pour éviter d'exhiber des majorations exactes trop compliquées de ces restes intégraux, on introduit la fonction implicite suivante pour des valeurs α, β et D strictement positives

$$L_{\alpha,\beta}(D) = \inf \left\{ X, \int_X^{\infty} e^{-\alpha x^\beta}\,\mathrm{d}x \leqslant e^{-D} \right\} \tag{25}$$

On a l'équivalent $L_{\alpha,\beta}(D) \sim \left(\frac{D}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

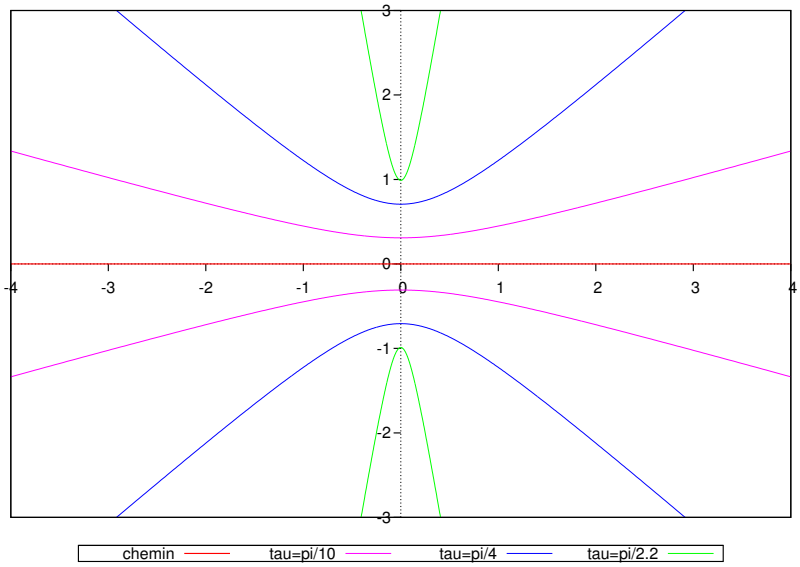
Ce type d'estimation est uniquement théorique. En pratique, lors d'une intégration, on se contente de sommer les termes $g(kh)$ jusqu'à ce que leur module soit négligeable.

3.1 Droite réelle

3.1.1 Cas d'une décroissance simplement exponentielle

On suppose $f(x) = O(e^{-\alpha|x|^\beta})$ sur $\mathbb{R}$, on pose alors :

$$\boxed{z = \varphi(z') = \sinh(z').}$$



Zone Z_τ Soit $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on note B_τ la bande définie par

$$B_\tau = \left\{z, \mathrm{Im}(z) \in [\tan \pi \mathrm{Re}(z), \tan \tau \mathrm{Re}(z) + \sin \tau]\right\}$$

et on appelle *cône épaissi* d'ouverture τ l'union des bandes $B_{\pm\delta}$, $\delta \leqslant \tau$.

$$Z_\tau = \left\{z, \left|\arg(z)\right| \leqslant \tau \bmod \pi\right\} + i[-\sin \tau, \sin \tau]$$

Lemme 23

Soit $\tau \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(x + i\tau) = \sinh(x + i\tau) \in B_\tau$$

En particulier $\varphi(\Delta_\tau) \subset Z_\tau$.

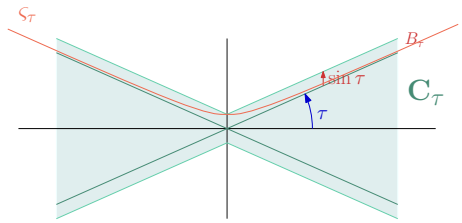


FIG. 2 – Le cône épaissi.

Démonstration : En effet, en posant $X + iY = \sinh(x + i\tau)$,

$$\begin{aligned} Y &= \cosh x \sin\tau = \sin\tau\sqrt{1+\sinh^2 x} \\ &= \sin\tau\sqrt{1+\frac{X^2}{\cos^2\tau}} \\ &= \tan\tau\sqrt{X^2+\cos^2\tau} \end{aligned}$$

On a donc toujours

$$X\tan\tau \leqslant Y \leqslant X\tan\tau + \sin\tau$$

c'est-à-dire que $\sinh(x + i\tau)$ est dans la bande B_τ. □

Théorème 24 (*changement de variable exponentiel*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $\tau \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant :

1. $\left|f(x)\right| \leqslant M_1 e^{-\alpha|x|^\beta}$ *pour $x \in \mathbb{R}$, avec $\alpha, \beta > 0$.*
2. *f possède un prolongement holomorphe sur un* cône épaissi Z_τ *;*
3. $\left|f(z)\right| \leqslant M_2 e^{Ae^{\gamma|z|}}$ *sur Z_τ avec $A \geqslant 0$ et $\gamma < \beta$;*

Alors pour $D > 1$ et $t < \tau$, en posant

$$h \leqslant \frac{2\pi t}{D + C_t + \log(4M_2 + 2e^{-D-C_t})}$$

$$nh \geqslant \operatorname{arcsinh}(L_{\alpha,\beta}(D + \log(2M_1)) \sim \frac{1}{\beta}\log(\frac{2}{\alpha}(D + \log(M_1)))$$

on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f - h\sum_{k=-n}^{n} f\Big(\sinh(kh)\Big)\cosh(kh)\right| < e^{-D}$$

Démonstration : **Remarque** : Quitte à faire un changement de variable initial $x \mapsto \lambda x$, on suppose $\alpha\beta \geqslant 1$ sans perdre en généralité.

$g(x) = \cosh(x) f(\sinh(x))$ a une décroissance doublement exponentielle sur $\mathbb{R}$ d'ordre α', β pour tout $\alpha' < \alpha$, et d'après les encadrements (62),

$$\begin{aligned} \left|g(x+it)\right| &\leqslant \left|f(\sinh(x+it))\right| \left|\cosh(x+it)\right| \\ &\leqslant M_2 e^{A(\cosh x)^\gamma} \cosh x \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant M_2 e^{x + Ae^{\gamma x}} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

donc g vérifie (3) avec $\lambda = 1$;

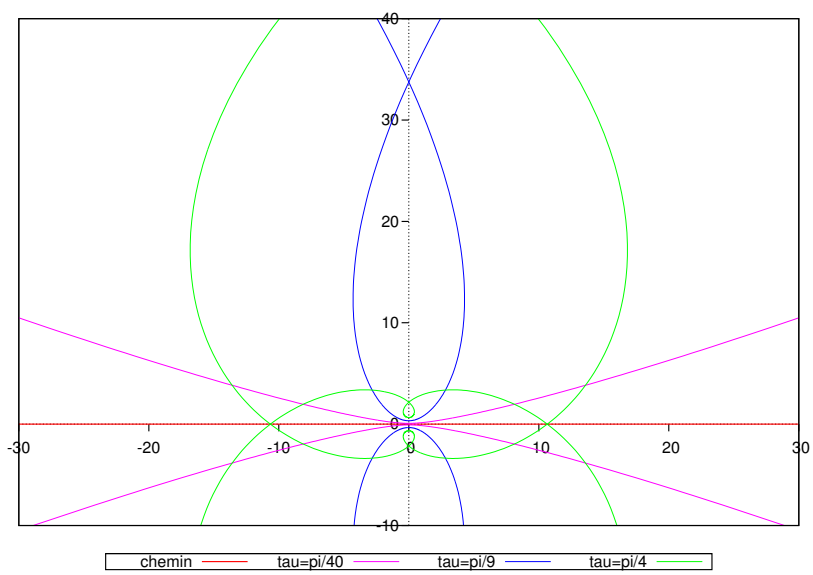
On peut donc poser h selon le théorème 21.

En ce qui concerne le produit nh, on utilise plutôt le lemme de troncature 22 en résolvant $\int_{\sinh(kh)}^{\infty} M_1 e^{-\alpha t^\beta} \, \mathrm{d}t < e^{-D}$. □

3.1.2 Cas d'une décroissance polynomiale

Si $f(x) = O(|x|^{-n})$ pour $n > 1$, on effectue le changement de variable

$$\boxed{z = \varphi(z') = \sinh(\sinh(z')).}$$



Zone Z_τ Dans ce cas, quelle que soit la valeur de τ, la zone couvre à peu près tout le plan complexe, mais on peut toujours isoler deux zones autour de $\pm i$.

Lemme 25

Soit $\tau < \frac{\pi}{2}$: on définit deux points $Y_{\min}$ et $Y_{\max}$ sur l'axe imaginaire, de hauteur respectives $\sin(\sin\tau)$ et $\cosh(\cos\tau\sqrt{(\frac{\pi}{2\sin\tau})^2 - 1})$, ainsi qu'un point

$X_{\max}$ de coordonnées

$$X_{\max} : \begin{pmatrix} \sinh(\cot\tau\sqrt{(\frac{\pi}{2}-\tau)^2-\sin^2\tau})\sin\tau \\ \cosh(\cot\tau\sqrt{(\frac{\pi}{2}-\tau)^2-\sin^2\tau})\cos\tau \end{pmatrix}.$$

Alors le triangle (ouvert) défini par ces trois points est situé en dehors de Z_τ, ainsi que ses symétriques par rapport aux axes et à l'origine.
En particulier, $\pm i \notin Z_\tau$.

Démonstration : On considère la zone délimitée par ς_τ : soit donc $z' = t + i\tau$, on pose $\alpha + i\beta = \sinh(z')$ et $x + iy = \sinh(\alpha + i\beta)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \alpha = \sinh t\cos\tau \\ \beta = \cosh t\sin\tau \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \sinh\alpha\cos\beta \\ y = \cosh\alpha\sin\beta \end{cases}.$$

On considère ς_τ comme une courbe paramétrée par α :

$$\varsigma_\tau(\alpha) : \begin{cases} x = \sinh\alpha\cos\beta \\ y = \cosh\alpha\sin\beta \end{cases}.$$

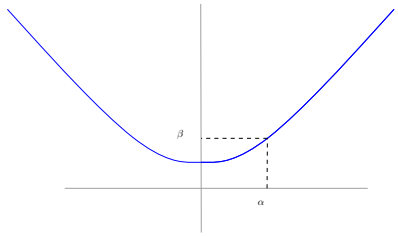
et ceci sur un intervalle $[0, \alpha_0]$ tel que $\beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ pour rester dans le quatran positif. C'est aussi une courbe paramétrée par β en vertu des relations

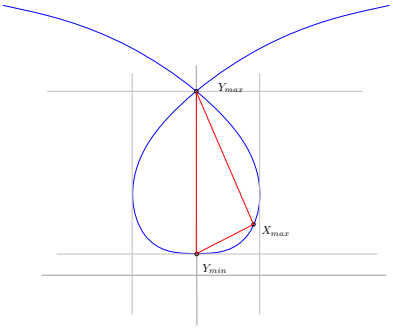
$$\begin{cases} \beta(\alpha) = \tan\tau\sqrt{\alpha^2+\cos^2\tau} \\ \alpha(\beta) = \cot\tau\sqrt{\beta^2-\sin^2\tau} \end{cases}.$$

On démontre alors

1. que ς_τ passe par les points Y_{min}, Y_{max} ainsi que par le point X_{max} défini dans l'énoncé ;
2. que ς_τ a une courbure constamment négative.

Cela permet de conclure comme annoncé, puisque sans changement de courbure ς_τ reste à droite de ses cordes.





Par symétrie, on suppose $t, \tau > 0$.

En $t = 0$, ς_τ passe par le point $(0, y_{min})$ où $y_{min} = \sin\beta = \sin\sin\tau$.
ς_τ coupe à nouveau l'axe des abscisses pour $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $x_0 = \operatorname{arccosh}(\frac{\pi}{2\sin\tau})$.
On a alors $\alpha_0 = \cos\tau\sqrt{\frac{\pi^2}{4\sin^2\tau} - 1}$, d'où une ordonnée

$$y = \cosh(\alpha_0) = \cosh(\cos\tau\sqrt{\frac{\pi^2}{4\sin^2\tau} - 1})$$

ce qui définit les points $Y_{\min}$ et $Y_{\max}$ annoncés.

Essayons de minorer la valeur maximale de x sur $[0, \alpha_0]$. De

$$\begin{cases} \beta(\alpha) \leqslant \alpha\tan\tau + \sin\tau \\ \beta'(\alpha) = \tan\tau\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\cos^2\tau}} \leqslant \tan\tau \end{cases}$$

on tire la minoration

$$x'(\alpha) = \cosh\alpha\cos\beta - \sinh\alpha\beta'\sin\beta \tag{26}$$

$$\geqslant \cosh\alpha(\cos\beta - \tan\tau\sin\beta)\ ; \tag{27}$$

en particulier $x'(\alpha) \geqslant 0$ pour $\tan\beta \leqslant \cot\tau$, c'est-à-dire $\beta \leqslant \frac{\pi}{2} - \tau = \beta_1$.

On pose alors $X_{\max}$ le point de paramètre $\alpha_1 = \alpha(\beta_1)$. En reportant les valeurs de β et $\alpha(\beta)$ dans x et y on trouve les coordonnées annoncées. Par construction, ς_τ passe par $X_{\max}$.

Le fait que la courbure soit de signe constant se démontre aisément par le calcul : on développe l'expression

$$y''(\alpha)x'(\alpha) - x''(\alpha)y'(\alpha)$$

en fonction de α, $\beta'(\alpha) > 0$ et $\beta''(\alpha) > 0$, en constatant après réduction qu'elle est formée de termes positifs. □

On obtient donc le résultat suivant :

Théorème 26 (*changement de variable double-exponentiel*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $\tau \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant :

1. *f possède un prolongement holomorphe sur une zone Z_τ définie ci-dessus ;*
2. *$\left|f(z)\right| \leqslant \frac{M_2}{(1+|z|))^{1+v}}$ sur Z_τ, avec $v > 0$;*
3. *$\left|f(x)\right| \leqslant M_1 x^{-\alpha}$ pour $x \in \mathbb{R}$, avec $\alpha > 1$.*

Alors, pour tout $D > 1$, en prenant

- *$h \leqslant \frac{D+\log(\frac{2M_2}{v\cos\tau})}{2\pi\tau}$;*
- *$nh \geqslant \operatorname{arcsinh}(\operatorname{arcsinh}(D + \log(\frac{2M_1}{\alpha-1}))) \sim$;*

on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f - h\sum_{k=-n}^{n} f\Big(\sinh(kh)\Big)\cosh(kh)\right| \leqslant e^{-D}$$

soit environ $D\log D$ évaluations de f.

Démonstration : –

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}+i\tau} \left|g(t)\right| \,\mathrm{d}t &\leqslant M_2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\cosh(x+i\tau)\cosh(\sinh(t+i\tau))\right|}{(1+\left|\sinh(\sinh(x+i\tau))\right|)^{1+v}} \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M_2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\cosh(t)\cosh(\sinh t\cos\tau)}{(1+\left|\sinh(\sinh t\cos\tau)\right|)^{1+v}} \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{M_2}{\cos\tau} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|u|)^{1+v}} \,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{2M_2}{v\cos\tau}\end{aligned}$$

ce qui permet de majorer $\hat{g}$.

– le reste intégral $\int_X^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ vaut $\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$, ce qui permet de déterminer nh selon le lemme 22. □

3.2 Demi-droite

3.2.1 Cas d'une décroissance exponentielle

Si f possède une limite finie en 0 vers laquelle elle ne tend pas trop vite (c-à-d. si elle possède un développement limité non nul en 0)[1], et si f possède une décroissance exponentielle de la forme

$$\left|f(x)\right| \leqslant M_1(1+x)^\sigma e^{-\alpha x^\beta},$$

on effectue le changement de variable

$$\boxed{z = \varphi(z') = e^{z'-\alpha e^{-\beta z'}}.}$$

Remarque : Pour simplifier les calculs, on suppose $\beta \geqslant 1$. On peut toujours s'y ramener par un changement de variable préliminaire.

Majorations On a pour $\left|\beta\tau\right| \leqslant \pi/2$

$$\varphi(x+i\tau) = e^{x+i\tau-\alpha e^{-\beta x-i\beta\tau}} \tag{28}$$

$$\varphi'(x+i\tau) = (1+\alpha\beta e^{-\beta x-i\beta\tau})\varphi(x+i\tau) \tag{29}$$

donc

$$\left|\varphi(x+i\tau)\right| = e^{x-\alpha\cos(\beta\tau)e^{-\beta x}} \tag{30}$$

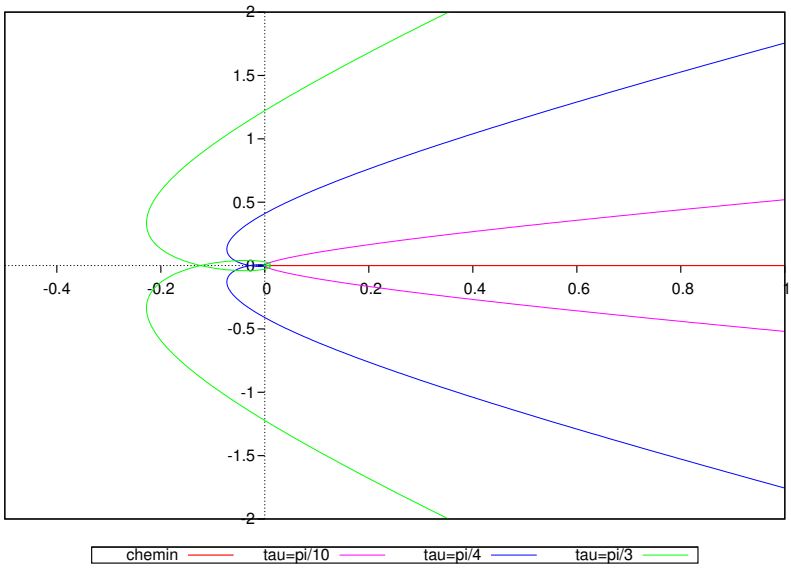
$$\left|\varphi'(x+i\tau)\right| \leqslant (1+\alpha\beta\cos(\beta\tau)e^{-\beta x})\left|\varphi(x+i\tau)\right| \tag{31}$$

$$\arg(\varphi(x+i\tau)) = \tau + \alpha\sin(\beta\tau)e^{-\beta x} \tag{32}$$

[1] On demandera de toutes façons que f soit holomorphe au voisinage de 0, donc ce sera le cas.

Zone Z_τ Étudions l'image par φ d'une bande Δ_τ :
$\varphi(x+i\tau) = \rho e^{i\theta}$ avec $\begin{cases} \rho = e^{x-\alpha\cos(\beta\tau)e^{-\beta x}} \\ \theta = \tau + \alpha\sin(\beta\tau)e^{-\beta x} \end{cases}$, donc pour $0 < \beta\tau < \frac{\pi}{2}$, la courbe obtenue est d'équation polaire :

$$\rho = \Big(\frac{\alpha\sin(\beta\tau)}{\theta-\tau}\Big)^{1/\beta} e^{-\frac{\theta-\tau}{\tan(\beta\tau)}}, \quad \theta > \tau. \tag{33}$$



On a une asymptote en $\theta = \tau$ et

$$\rho\sin(\theta-\tau) \sim_{\theta\to\tau} (\alpha\sin(\beta\tau))^{\frac{1}{\beta}}(\theta-\tau)^{1-\frac{1}{\beta}}$$

par valeurs inférieures, donc
- si $\beta = 1$, on a une droite asymptote $y = x\tan\tau + \alpha$, et la courbe reste en dessous de cette asymptote ;
- si $\beta > 1$, la courbe est également en-dessous de cette courbe, et tend vers son asymptote $y = x\tan(\beta\tau)$.

Cette courbe est incluse dans le demi-cône $|y| \leqslant \tan\tau(x+\alpha)$.

On peut remarquer que, ρ étant décroissante en θ, les abscisses sont minorées par celles obtenues pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, donc on peut tronquer le cône aux valeurs d'abscisse supérieures à

$$-\rho_m = -\rho(\pi/2) = -\frac{\alpha\sin(\beta\tau)}{\frac{\pi}{2}-\tau} e^{-\frac{\frac{\pi}{2}-\tau}{\tan(\beta\tau)}} \tag{34}$$

On appelle **cône tronqué** d'ouverture $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}[$ l'ensemble

$$T_\tau = \left\{ z, \begin{array}{l} |\mathrm{Im}(z)| \leqslant \tan(\tau)(\mathrm{Re}(z)+\alpha) \\ \mathrm{Re}(z) + \rho_m \geqslant 0 \end{array} \right\}.$$

Cet ensemble tend vers l'ensemble $\mathbb{R}_+$ quand $\tau \to 0$, et il contient la zone Δ'_τ.

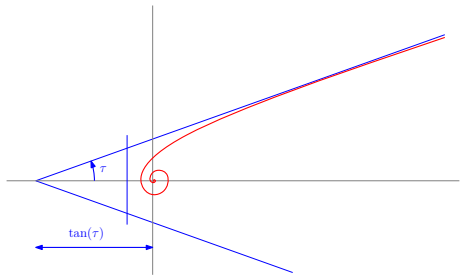


FIG. 3 – Cône tronqué.

Remarque : Dans le changement de variable φ, il n'est pas nécessaire de choisir α égal au α de décroissance de f : si une valeur plus faible permet d'obtenir un angle τ meilleur, on pourra prendre un pas h plus grand. Il faut mesurer les deux effets : cette augmentation de h tend à faire diminuer n, d'un autre côté une diminution de α augmente la valeur de $t_{\min}$ et donc le nombre de termes à sommer du côté négatif. L'influence de α est logarithmique, tandis que celle de τ est linéaire.

Ces observations fournissent le théorème suivant

Théorème 27

Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant :

1. *f possède un prolongement holomorphe sur un cône tronqué T_τ, $\tau < \frac{\pi}{2}$;*
2. *$\left|f(z)\right| \leqslant M_2 e^{A|z|^\gamma}$ sur T_τ avec $v > 0$;*
3. *$\left|f(x)\right| \leqslant M_2 e^{-\alpha x^\beta}$ sur $[0, \infty[$;*

alors pour $D > 1$, en posant

$$h = \frac{2\pi t}{D + C_t + \log(4M_2 + 2e^{-D-C_t})} \tag{35}$$

$$nh \geqslant \log L_{\alpha,\beta}(D + \log M) + \alpha e^{-\beta L_{\alpha,\beta}(D+\log M)} \tag{36}$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - h \sum_{k=-n}^{n} f(\varphi(kh))\varphi'(kh) \right| \leqslant e^{-D}.$$

Démonstration : On pose $g(z) = f \circ \varphi(z) \times \varphi'(z)$.

Pas d'intégration D'après les majorations effectuées sur φ, et puisque $\beta \geqslant 1$ on a pour $x \geqslant 0$ les majorations grossières $\left|\varphi'(x+it)\right| \leqslant e^x + \alpha\beta$, et $\left|\varphi'(-x+it)\right| \leqslant$

$\alpha\beta e^{\beta-1}x+1$.

Enfin $\left|\varphi(x+it)\right| \leqslant e^x$, donc d'après (2) $g(x+it) \leqslant M_2(1+\alpha\beta)e^{Ae^{\gamma x}+\lambda|x|}$ avec $\lambda = \max(1, \beta-1)$.

De plus, sur $\mathbb{R}$, on a

en $-\infty$: $\left|f\right| \leqslant M_1$ donc $g(-x) \leqslant \left|\varphi'(-x)\right| \leqslant (1+\alpha\beta e^{\beta x})e^{-x-\alpha e^{\beta x}} = O(e^{-\alpha' e^{\beta x}})$ pour tout $\alpha' < \alpha$.

en ∞ : $\varphi(x) \sim e^x$ donc $g(x) = O(e^{-\alpha' e^{\beta x}})$ pour tout $\alpha' < \alpha$.

Donc on peut appliquer le théorème 21 pour déterminer le pas h.

Troncature Enfin, on définit nh via le lemme 22, avec les estimations des restes intégraux suivantes :

- $\int_0^{\varphi(-x)} M_1 \,\mathrm{d}t \leqslant M_1\varphi(-x) = M_1 e^{-x-\alpha e^{\beta x}}$ donc pour une erreur de e^{-D} sur le reste $k < -n$ on pose $nh = \frac{1}{\beta}\log(\frac{D+\log M_1}{\alpha})$.
- $\int_{\varphi(x)}^{\infty} e^{-\alpha t^\beta} \,\mathrm{d}t \leqslant e^{-D}$ donne

$$\varphi(x) = e^{x-\alpha e^{-\beta x}} = L_{\alpha,\beta}(D+\log M_1).$$

En particulier $x \geqslant \log(L_{\alpha,\beta}(D+\log M_1))$, donc on pose soit $x = nh = \log L_{\alpha,\beta}(D+\log M) + \alpha e^{-\beta L_{\alpha,\beta}(D+\log M)} \sim \frac{1}{\beta}\log(\frac{D+\log M}{\alpha})$. □

3.3 Intervalle compact

Si l'intervalle est de la forme $[a, b]$, on effectue un changement de variable

$$\boxed{z = \varphi(z') = \frac{b-a}{2}\tanh(\lambda\sinh(z')) + \frac{a+b}{2}}$$

pour un paramètre $\lambda > 0$ que l'on déterminera.

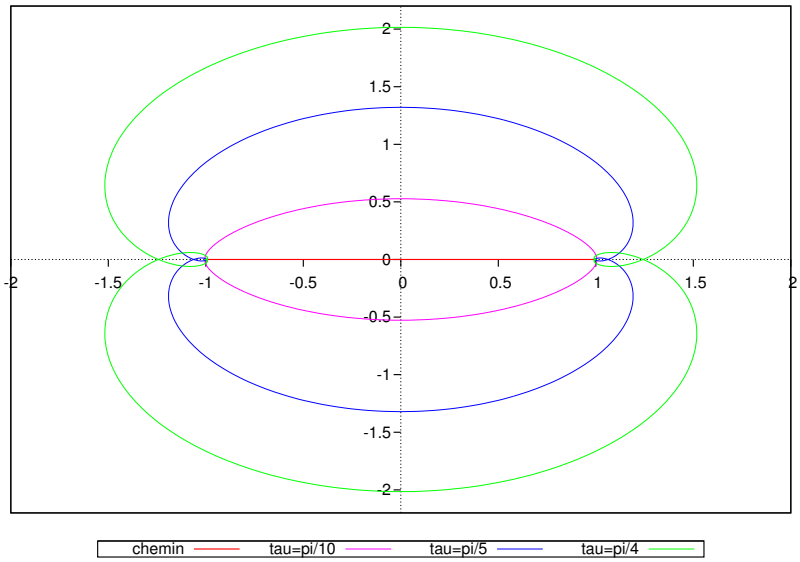
Par la suite, on suppose que $[a, b] = [-1, 1]$.

Définition

$$\varphi'(z) = \frac{\lambda\cosh(\lambda z)}{\cosh^2(\lambda\sinh(z))}$$

Les zéros de cosh sont situés en $i\pi/2 + 2i\pi\mathbb{Z}$, ils ne sont pas atteints dans la zone Δ_τ pour $\tau < \frac{\pi}{2}$ et $\lambda\sin\tau < \frac{\pi}{2}$. On suppose ces inégalités vérifiées, ce qui assure que φ et φ' sont holomorphes sur Δ_τ.

Zone Z_τ



On localise l'image de la bande Δ_τ de la manière suivante :

Lemme 28

Pour tout $z' \in \Delta_\tau$ avec λ, τ vérifiant $\lambda \sin(\tau) < \frac{\pi}{2}$, si l'on choisit $Y_\tau \in]\lambda \sin \tau, \frac{\pi}{2}[$, en posant $X_\tau = \frac{\sqrt{Y_\tau^2 - \lambda^2 \sin^2 \tau}}{\tan \tau}$, on a :

$$\left|\mathrm{Re}(\varphi(z'))\right| \leqslant X_m = \max\left(\frac{\tanh X_\tau}{\cos^2(Y_\tau)}, \frac{1}{\tanh(X_\tau)}\right)$$
$$\left|\mathrm{Im}(\varphi(z'))\right| \leqslant Y_m = \max\left(\tan(Y_\tau), \frac{1}{2\sinh^2 X_\tau}\right).$$

En particulier, pour $Y_\tau \to 0$ et $X_\tau \to \infty$, $\Delta'\tau$ converge vers le segment $[-1, 1]$.

On minimise X_m, Y_m en prenant pour Y_τ les solutions dans $]\lambda \sin \tau, \frac{\pi}{2}[$ de

$$\tanh(X_\tau) = \cos(Y_\tau) \qquad \textit{pour } X_m \tag{37}$$
$$2\sinh^2(X_\tau)\tan(Y_\tau) = 1 \qquad \textit{pour } Y_m \tag{38}$$

Remarque : Inversement, si l'on se donne des valeurs X_m et Y_m à ne pas dépasser, la détermination de X_τ et Y_τ par les équations

$$\tanh(X_\tau) = \frac{1}{X_m} \qquad \text{et } \cos(Y_\tau) = \frac{1}{X_m} \qquad \text{d'une part,} \tag{39}$$
$$\sinh^2(X_\tau) = \frac{1}{2Y_m} \qquad \text{et } \tan(Y_\tau) = Y_m \qquad \text{d'autre part} \tag{40}$$

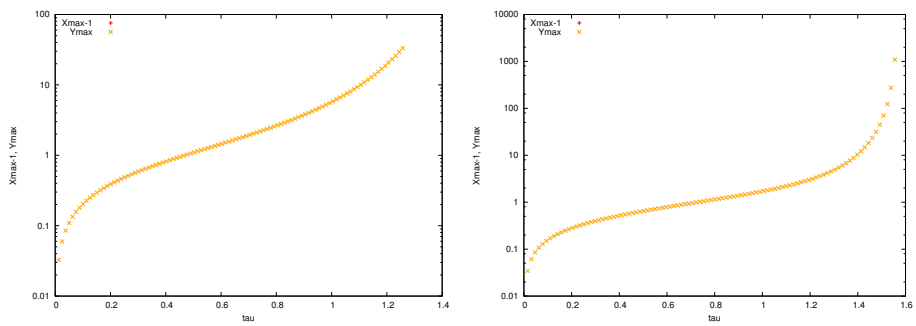


FIG. 4 – Encadrement de la zone Z_τ

et la relation

$$\tau = \mathrm{Im}(\mathrm{arcsinh}(\frac{X_\tau + iY_\tau}{\lambda}))$$

permettent de choisir une bonne valeur de τ, si l'on impose λ. On remarque que par construction, la condition $\lambda \sin\tau < \frac{\pi}{2}$ est vérifiée puisque le fait que X_τ, Y_τ sont sur la courbe $\mathscr{H}_\tau$ donne $\frac{Y_\tau^2}{\sin^2\tau} \geqslant \lambda^2$ et que l'on a $Y_\tau = \arccos(\frac{1}{X_m}) < \frac{\pi}{2}$.

Remarque : Le problème de minimisation possède des solutions uniques, puisque sur l'intervalle considéré, $X \in]0, X_{\frac{\pi}{2}}[$ et

- $\tanh(X)$ croît de 0 à $\tanh(X_{\frac{\pi}{2}}) > 0$ et $\cos(Y)$ décroît de $\cos(\sin\tau)$ à 0 ;
- $\sinh^2(X)\tan Y$, produit de deux fonctions croissantes, croît de 0 à ∞.

On détermine aisément ces solutions par la méthode de Newton.

Démonstration : On pose $\lambda \sinh(x + i\tau) = X + iY$ avec $Y = \tan\tau\sqrt{X^2 + \lambda^2\cos^2\tau} \in [X\tan\tau, X\tan\tau + \lambda\sin\tau]$.

Alors

$$\begin{aligned}
\tanh(X + iY) &= \frac{\sinh X\cos Y + i\cosh X\sin Y}{\cosh X\cos Y + i\sinh X\sin Y} \\
&= \frac{\sinh X\cosh X + i\cos Y\sin Y}{\cosh^2 X\cos^2 Y + \sinh^2 X\sin^2 Y} && (41a) \\
&= \frac{\sinh X\cosh X + i\cos Y\sin Y}{\sinh^2 X + \cos^2 Y} && (41b)
\end{aligned}$$

Par croissance de Y, et puisque $Y(0) = \lambda\sin(\tau) < \frac{\pi}{2}$, on déduit l'existence d'une valeur Y_τ annoncée.

On a

$$X_\tau = \frac{\sqrt{Y_\tau^2 - \lambda^2\sin^2\tau}}{\tan\tau}. \tag{42}$$

Alors, pour $X \in [0, X_\tau]$, $Y \leqslant Y_\tau < \frac{\pi}{2}$ donc d'après (41a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\varphi(z')) &\leqslant \frac{\sinh X \cosh X}{\cosh^2 X \cos^2 Y} \leqslant \frac{\tanh X_\tau}{\cos^2(Y_\tau)} \\
\mathrm{Im}(\varphi(z')) &\leqslant \frac{\cos Y \sin Y}{\cosh^2 X \cos^2 Y} \leqslant \tan Y_\tau
\end{aligned}$$

et pour $X \in [X_0, \infty[$, d'après (41b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\varphi(z')) &\leqslant \frac{\sinh X \cosh X}{\sinh^2 X} \leqslant \frac{1}{\tanh(X_\tau)} \\
\mathrm{Im}(\varphi(z')) &\leqslant \frac{\cos Y \sin Y}{\sinh^2 X} \leqslant \frac{1}{2\sinh^2 X_\tau}
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'encadrement annoncé. □

Majoration des transformées de Fourier Supposons que f est holomorphe et donc majorée sur Z_τ d'après le principe du maximum.

Pour étudier $\hat{g}_\tau(X)$, il suffit donc de majorer

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi'(t+i\tau)\right| \, \mathrm{d}t$$

.

Or, en reprenant les notations X, Y,

$$\left|\varphi'(t+i\tau)\right| = \left|\frac{\lambda \cosh(t+i\tau)}{\sinh^2(X) + \cos^2(Y)}\right| \mathrm{d}t$$

soit, par le changement de variable $X = \lambda \cos\tau \sinh(t)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi'(t+i\tau)\right| \leqslant 2\int_0^\infty \frac{\lambda \cosh(t)}{\sinh^2(X) + \cos^2(Y)} \leqslant \frac{2}{\cos(\tau)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}X}{\sinh^2(X) + \cos^2(Y(X))}$$

On sépare comme précédemment en une valeur $X_\tau > 0$ telle que $Y_\tau < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{X_\tau} &\leqslant \int_0^{X_\tau} \frac{\mathrm{d}X}{\cosh^2(X)\cos^2(Y)} \\
&= \frac{\tanh(X_\tau)}{\cos^2(Y_\tau)} \\
\int_{X_\tau}^\infty &\leqslant \int_{X_\tau}^\infty \frac{\mathrm{d}X}{\sinh^2(X) + \cos^2(Y)} \\
&\leqslant \int_{X_\tau}^\infty \frac{\mathrm{d}X}{\sinh^2(X)} \\
&= \frac{1}{\tanh(X_\tau)} - 1 < \frac{1}{\tanh(X_\tau)}
\end{aligned}$$

Cette dernière majoration nous ramène exactement à la forme (37), donc en séparant l'intégrale en la valeur X_τ, on obtient que chacune de ces intégrales est majorée par X_m.

Ainsi, $\int \left|\varphi'\right| \leqslant \frac{4X_m}{\cos(\tau)}$, et

$$\sum_{|k|>0} \hat{g}_\tau(\frac{k}{h}) \leqslant \frac{8X_m M_2}{\cos\tau(e^{2\pi\tau/h}-1)}$$

Donc pour avoir

$$\sum_{|k|>0} \hat{g}_\tau(\frac{k}{h}) \leqslant e^{-D}$$

on pose

$$h = \frac{2\pi\tau}{D + \log(\frac{8X_m M_2}{\cos\tau}+1)}$$

Borne de troncature **Lemme 29**

Si $\left|f\right| \leqslant M_1$ sur $]a,b[$, on a

$$h \sum_{|k|>n} g(kh) \leqslant M_1 2e^{-2\lambda\sinh(nh)}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} h\sum_{|k|>n} g(kh) &\leqslant hM_1 \int_{nh}^{\infty} \frac{\lambda\cosh(t)}{\cosh^2(\lambda\sinh(t))}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M_1 \int_{\lambda\sinh(nh)} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} \\ &\leqslant M_1 2e^{-2\lambda\sinh(nh)} \end{aligned}$$

□

On obtient donc le théorème :

Théorème 30

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que f possède un prolongement holomorphe à un rectangle $R = \frac{a+b}{2} + [-X_m, X_m] + i[-Y_m, Y_m]$ et vérifie :

- $\left|f\right| \leqslant M_1$ *sur* $]a,b[$;
- $\left|f\right| \leqslant M_2$ *sur* ∂R

Alors pour tout $D > 0$, en posant

- $\lambda = \frac{\pi}{2}$, τ *tel que* $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\Delta'_\tau \subset R$;
- $\varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\tanh(\lambda\sinh t)$;
- $nh \geqslant \operatorname{arcsinh}(\frac{D+\log(2^3 M_1)}{\lambda})$;

– $h = \frac{2\pi\tau}{D+\log(\frac{2^4 X_m M_2}{\cos\tau}+1)}$

on a

$$\left| \int_a^b f - h \sum_{k=-n}^{n} f(\varphi(kh))\varphi'(kh) \right| < e^{-D} \tag{43}$$

et une convergence

$$n \sim_{D\to\infty} \frac{(D + \log(\frac{X_m M_2}{\cos\tau}))\log(D)}{2\pi\tau} \tag{44}$$

4 Validité du principe

On teste la méthode double-exponentielle sur des fonctions régulières illustrant la nécessité des hypothèses du théorème 19.

4.1 Une intégrale de référence

À titre de référence,l'intégrale de la fonction gaussienne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \tag{45}$$

où $f : z \mapsto e^{-z^2}$ est entière et à décroissance exponentielle. Nous avons vu que l'on obtenait une complexité linéaire de $\frac{D}{\pi}$ en appliquant la méthode des trapèzes directement à f.

On peut néanmoins appliquer une transformation double-exponentielle : f restant bornée sur les cônes d'ouverture $\frac{\pi}{4}$, on obtient une complexité de

$$\frac{2D\log D}{\pi^2}.$$

4.2 Pôles hors de Z_τ

Un cas de convergence remarquable est celui de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}. \tag{46}$$

Il s'agit d'une fonction à décroissance polynomiale, pour laquelle le domaine d'holomorphie requis est le plan complexe privé de deux petites zones autour de $\pm i$. Ainsi, les pôles $\pm i$ de l'intégrande sont précisément évités par Z_τ quelle que soit la valeur $\tau < \frac{\pi}{2}$. La convergence est donc en $O(\frac{D\log D)}{\pi^2})$.

4.3 Cas problématiques

4.3.1 Pôles dans Z_τ

Si l'on décale simplement l'exemple 46, l'intégration par méthode double-exponentielle de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(x+10)^2}. \tag{47}$$

donne un résultat totalement aberrant. En effet les pôles sont désormais en $-10 \pm i$, qui se trouvent dans la zone Z_τ pour toute valeur de τ pas trop petite.

Nous verrons avec le lemme 32 comment prendre en compte ces pôles pour retrouver le résultat.

4.3.2 Pôles proches de l'axe

On considère la fonction

$$f : z \mapsto \frac{e^{-z^2}}{1-e^{iz-1}} \tag{48}$$

qui est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et possède une ligne de pôles parallèles à l'axe réel. Ils intersectent donc tout cône C_τ obtenu par changement de variable simplement exponentiel $z = \sinh(z')$. Les hypothèses du théorème 24 ne sont pas vérifiées.

Toutefois, on observe une convergence en $\sqrt{n}$, qui est expliquée par le théorème 31.

4.3.3 Fonction Gamma

On intègre la fonction Γ sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$.

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma(\delta + it)\,\mathrm{d}t \tag{49}$$

La formule de Stirling montre les estimations de croissance suivantes :

– sur les droites verticales

$$\log\left|\Gamma(\delta+it)\right| \sim -\frac{\pi}{2}\,|t| \tag{50}$$

– et sur les rayons $\theta \neq 0$

$$\log\left|\Gamma(\delta+re^{i\theta})\right| \sim \sin(\theta) r \log r \tag{51}$$

Les estimations précédentes montrent que $f(z) = \Gamma(\delta + iz)$ a une décroissance de nature simplement exponentielle sur l'axe réel.

Cependant la croissance de Γ à droite de l'axe ne permet pas d'obtenir une intégration de type double-exponentielle par le changement de variable

$$z = \sinh(z')$$

prescrit par la méthode générale, puisque f a une croissance exponentielle dans la partie inférieure de tout cône épaissi C_τ, $\tau > 0$.

En particulier, g n'est pas L^2 sur les droites $\mathbb{R} - i\tau$ pour $\tau > 0$, donc d'après le théorème 6, $\hat{g}$ a une décroissance au plus sous-exponentielle pour les valeurs positives.

Expérimentalement, nous obtenons pourtant une convergence à peine sous-linéaire, supérieure à ce que permet d'obtenir le théorème 31. Cette convergence peut toutefois s'expliquer par une estimation ad-hoc des transformées de Fourier, qui ont en effet une décroissance de type $e^{-\frac{X}{\log X}}$.

4.4 Résultats étendus

Lorsqu'on a une fonction f à décroissance simplement exponentielle sur la droite réelle, mais à laquelle le théorème 24 ne s'applique pas — soit que f ne soit pas holomorphe sur un cône C_τ, ou qu'elle ne possède pas une décroissance suffisante sur ce cône —, on peut, sous réserve de conditions affaiblies étudier la vitesse de convergence de la transformation double-exponentielle.

4.4.1 Bande d'holomorphie

Le cas se produit lorsque f ne possède qu'une bande d'holomorphie Δ_τ, comme dans l'exemple 48.

En exigeant alors une décroissance exponentielle uniforme sur toute la bande, on obtient le résultat suivant :

Théorème 31

Soit f une application telle que

1. *f possède un prolongement holomorphe sur une bande Δ_τ ;*
2. *$f(x+iy) \leqslant Me^{-\alpha|x|^\beta}$ uniformément en $y \in [-\tau, \tau]$;*

alors en appliquant la méthode d'intégration double-exponentielle à f on obtient une complexité de $O(\frac{D^{\frac{\beta+1}{\beta}} \log D}{2\pi\tau})$.

Remarque : L'hypothèse de décroissance est ici demandée uniformément sur toute la bande, et non plus sur l'axe réel seul. Elle est en effet utilisée pour estimer l'erreur de quadrature.

Remarque : Au facteur $\log D$ près, il s'agit de la complexité de l'intégration effectuée sans transformation double-exponentielle. Ainsi, effectuer une transformation double-exponentielle à une fonction qui ne le permettait pas ne fait perdre qu'un terme de complexité logarithmique.

Démonstration : On détermine tout d'abord un domaine $\tilde{\Delta} \subset \mathbb{C}$ tel que $\sinh(\tilde{\Delta}) \subset \Delta_\tau$.

Pour $x > 0$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\sinh(x+iy)) \leqslant \tau &\Leftrightarrow \cosh(x)\sin(y) \leqslant \tau \\ &\Leftrightarrow y \leqslant \arcsin\Big(\frac{\tau}{\cosh(x)}\Big)\end{aligned}$$

La fonction arcsin n'étant pas définie si $\tau > \frac{\pi}{2}$, on se contente de la majoration $\arcsin(x) \geqslant x$ pour définir

$$\tilde{\Delta} = \left\{ x + iy, |y| \leqslant \frac{\tau}{\cosh x} \right\}$$

On réalise une intégration double-exponentielle de f avec le changement de variable $\varphi(z) = \sinh(z)$, en posant donc

$$g(z) = f(\sinh z)\cosh(z), z \in \tilde{\Delta}.$$

L'hypothèse (3) du théorème 19 n'étant pas vérifiée, c'est l'estimation de l'erreur de quadrature qui doit être adaptée aux nouvelles hypothèses.

Soit donc $k > 0$, on doit trouver une majoration du coefficient de Fourier

$$\hat{g}(\frac{k}{h}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2i\pi kz}{h}} g(z)\,\mathrm{d}z$$

telle que la somme de ces coefficients tende vers 0 pour $h \to 0$ (on avait la majoration $e^{-\frac{2i\pi k\tau}{h}}$ dans le cadre du théorème 19).

On décale désormais le chemin d'intégration à la courbe

$$z = \gamma(t) = t - i\frac{\tau}{\cosh t}, \gamma'(t) = 1 + i\tau\frac{\sinh t}{\cosh t}$$

en notant que d'après l'hypothèse 2,

$$\big|g(\gamma(t))\big| = \big|f(\sinh(\gamma(t)))\cosh(\gamma(t)\big| \leqslant Me^{-\alpha\cos(\frac{\tau}{\cosh(t)})\sinh(t)}\cosh(t).$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}\left|\hat{g}(\frac{k}{h})\right| &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2\pi k\tau}{h\cosh t}} e^{-i\frac{2\pi kt}{h}} g(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant 2M(1+\tau)\int_0^\infty \underbrace{e^{-\frac{2\pi k\tau}{h}e^{-t}}}_{\varphi_1(t)} \underbrace{e^{-\alpha(\cos\tau)^\beta(\sinh t)^\beta}\cosh(t)}_{\varphi_2(t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On sépare cette intégrale en deux en une valeur $T > 0$:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) \leqslant e^{-\frac{2\pi k\tau}{h}e^{-T}} \text{ sur } [0,T] \\ \int_0^T \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sinh T} e^{-\alpha(\cos\tau)^\beta u^\beta}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{\alpha^{1/\beta}\cos\tau}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\beta} \end{cases} \tag{52}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) \leqslant 1 \text{ sur } [T,\infty] \\ \int_T^\infty \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\sinh T}^\infty e^{-\alpha(\cos\tau)^\beta u^\beta}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{e^{-\alpha e^{\beta T}}}{\alpha\beta} \text{ si } \beta \geqslant 1 \text{ (à corriger).} \end{cases} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-\frac{k2\pi\tau}{h}e^{-t}} e^{-\alpha(\cos\tau)^\beta(\sinh t)^\beta}\,\mathrm{d}t &\leqslant e^{-\frac{k2\pi\tau}{h}e^{-T}} \int_0^{\sinh T} e^{-\alpha(\cos\tau)^\beta u^\beta}\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant e^{-\frac{k2\pi\tau}{h}e^{-T}} \frac{1}{\alpha\beta} \text{ d'une part ;} \\ \int_T^\infty e^{-\frac{k2\pi\tau}{h}e^{-t}} e^{-\alpha e^{\beta t}}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_T^\infty e^{-\alpha e^{\beta t}}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{e^{-\alpha e^{\beta T}}}{\alpha\beta} \text{ d'autre part.}\end{aligned}$$

Ces termes sont égaux pour

$$T = \frac{1}{\beta+1}\log\Big(\frac{k2\pi\tau}{\alpha h}\Big)$$

et dans ce cas,

$$\left|\hat{g}(\frac{k}{h})\right| \leqslant \frac{2M(1+\tau)}{\alpha\beta} e^{-\left(\frac{k2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} \tag{54}$$

Il reste à majorer la somme de ces termes :

$$\sum_{k\geqslant 1} e^{-\left(\frac{k2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} \leqslant e^{-\left(\frac{2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} + \int_1^\infty e^{-\left(\frac{t2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}}\,\mathrm{d}t \tag{55}$$

Par un changement de variable $t = \frac{h}{2}\pi\tau u^{\frac{\beta+1}{\beta}}$, l'intégrale s'écrit

$$\frac{h(\beta+1)}{2\pi\tau\beta}\int_{(\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{\beta}{\beta+1}}}^\infty u^{\frac{1}{\beta}} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma_{\text{inc}}\left(1+\frac{1}{\beta}, (\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right)$$

où Γ_{inc} désigne la fonction Gamma incomplète.

En utilisant le lemme 67 pour $s = \frac{1}{\beta}$ et $x = (\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{\beta}{\beta+1}}$, et en supposant h assez petit pour que $\frac{x}{s} > 2$ de sorte que $(1-\frac{s}{x})^{-1} \leqslant 2$, l'intégrale est majorée par $2(\frac{a}{h})^{\frac{1}{\beta+1}} e^{-(\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{\beta}{\beta+1}}}$.

Donc la somme des (54) vérifie

$$\sum_{k\geqslant 1}\left|\hat{g}(\frac{k}{h})\right| \leqslant \frac{2M(1+\tau)}{\alpha\beta}\left[2(\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{1}{\beta+1}}+1\right] e^{-(\frac{2\pi\tau}{h})^{\frac{\beta}{\beta+1}}}$$

ce qui permet de définir h précisément. □

Exemple 1

On reprend l'exemple

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2}}{1-e^{iz-1}}\,\mathrm{d}z = \sqrt{2\pi}\sum_{k\geqslant 0} e^{-k-k^2/4}$$

$$f(z) = \frac{\exp(-z^2)}{1 - \exp(iz - 1)}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [-\tau, \tau]$ avec $\tau < 1$, on a la majoration uniforme en y

$$\begin{aligned} \left|f(x+iy)\right| &= \left|\frac{e^{-x^2+y^2-2ixy}}{1 - e^{ix-y-1}}\right| \\ &\leqslant \frac{e^{-x^2+y^2}}{1 - \left|e^{ix-y-1}\right|} \\ &\leqslant \frac{e^{\tau^2}}{1 - e^{\tau-1}} e^{-x^2} \end{aligned}$$

Donc f vérifie les hypothèses du théorème 31 pour les constantes $M = \frac{e^{\tau^2}}{1-e^{\tau-1}}$, $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

4.5 Fonctions méromorphes

La théorie de l'intégration double-exponentielle repose uniquement sur l'utilisation d'une hypothèse d'holomorphie autorisant un décalage idoine de contour permettant d'estimer le membre de droite de la formule de Poisson.

Ce procédé reste possible avec des fonctions méromorphes, si l'on prend en compte les pôles franchis lors du décalage des chemins dans l'estimation de l'erreur de quadrature 5, à l'aide de la formule des résidus.

Supposons donc une fonction g vérifiant les hypothèses du théorème 19, mais n'étant que méromorphe sur Δ_τ.

En notant (r_ρ) les résidus associés aux pôles (ρ) inclus dans Δ_τ, on a pour $X > 0$

$$\hat{g}(X) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi Xt} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}-i\tau} e^{-2i\pi Xt} g(t)\,\mathrm{d}t + 2i\pi \sum_{-\tau<\mathrm{Im}(\rho)<0} r_\rho e^{-2i\pi X\rho}$$

de sorte que la contribution de ces pôles à $\sum_{|k|>0} \hat{g}(k/h)$ est égale à

$$2i\pi \sum_\rho \sum_{k>0} r_\rho e^{s(\rho)2i\pi k\rho/h} = \sum_\rho \frac{2i\pi r_\rho}{e^{-s(\rho)2i\pi\rho/h} - 1} \tag{56}$$

où $s(\rho) = \pm 1$ est égal au signe de $\mathrm{Im}(\rho)$, puisque les pôles de partie imaginaire négative (resp. positive) sont pris en compte dans les décalages vers $-i\tau$ (resp. $+i\tau$), c'est-à-dire pour $k > 0$ (resp. < 0). Chaque cas faisant en sorte que la série en k soit sommable.

Pour conserver l'estimation (5) de l'erreur de quadrature, il suffit de corriger la formule d'intégration en ajoutant cette somme.

Dans le cas d'un changement de variable, la correction est donnée par le lemme suivant :

Lemme 32

Soit f une fonction méromorphe sur une zone Δ'_τ, dont les pôles ρ ont résidus r_ρ, et $\varphi : \Delta_\tau \to \Delta'_\tau$ un changement de variable holomorphe par lequel on applique un procédé d'intégration double-exponentielle à

$$g(z) = f \circ \varphi(z).\varphi'(z)$$

sur Δ_τ.

Alors l'erreur de quadrature peut s'estimer en

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{g}(\frac{k}{h}) - 2i\pi \sum_{\rho \in \Delta'_\tau} \frac{r_\rho}{e^{-s(\rho)2i\pi\varphi^{-1}(\rho)/h} - 1} \right| \leqslant \frac{M_1}{e^{2\pi\tau/h} - 1} \tag{57}$$

où $s(\rho)$ est le signe de $\mathrm{Im}(\varphi^{-1}(\rho)) \in \Delta_\tau$, et M_1 majore $\int_{\mathbb{R}} \left|g(t+i\tau)\right| + \left|g(t-i\tau)\right| \, \mathrm{d}t$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que pour un pôle ρ de f

$$res_{|z=\varphi^{-1}(\rho)} g(z) = res_{|\varphi(z)=\rho} f \circ \varphi(z)\varphi'(z) = res_{|z'=\rho} f(z') = r_\rho$$

□

4.6 Décalages de contour

Pour une fonction donnée, la décroissance de sa transformée de Fourier est directement liée à la largeur d'holomorphie de part et d'autre de l'axe d'intégration. Or si lors de la sommation on peut prendre en compte une inhomogénéité de la décroissance de f selon les axes positifs et négatifs, l'erreur de quadrature sera liée à la plus grande des valeurs $\hat{g}(\frac{1}{h})$ ou $\hat{g}(-\frac{1}{h})$.

Ainsi, si g possède une bande d'holomorphie bornée non symétrique autour de l'axe réel, il est très avantageux de décaler le chemin pour se situer exactement au milieu de cette bande.

Cette observation permet de résoudre le problème posé par l'intégration de la fonction gamma sur une droite verticale (49). Un décalage d'un angle $+i\theta$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ après transformation par sinh permet d'obtenir facilement une décroissance en $e^{-2\pi\theta x}$ de la transformée de Fourier selon les x positifs, et en $e^{-2\pi(\frac{\pi}{2}-\theta)|x|}$ sur l'axe négatif. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ on obtient une complexité d'ordre

$$\frac{2D \log D}{\pi}$$

Cette méthode est d'autant meilleure pour l'intégration de Gamma que par ce décalage on se situe sur un chemin où la décroissance de la fonction est amplifiée.

Il s'agit là du principe de la méthode du col, lui aussi dérivé du principe du maximum : une intégrale complexe a intérêt à être évaluée selon un chemin de

plus grande décroissance, les chemins de module décroissant existant toujours puisque les fonctions holomorphes sont harmoniques.

5 Exemple complet

5.1 Fonction d'erreur

On considère la fonction

$$\operatorname{erfc}(s) = \int_s^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

où pour $s = x + it$ l'intégration se fait sur la demi-droite $[x + it, \infty + it[$.

On sait que pour tout t

$$\int_{\mathbb{R}+it} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

et que

$$\int_{-\infty+it}^{-x+it} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{x-it}^{\infty-it} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

donc quitte à remplacer $\int_{-x+it}^{\infty}$ par $\sqrt{\pi} - \int_{x-it}^{i} nfty$ on suppose $x \geqslant 0$. Enfin, $\operatorname{erfc}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{erfc}(z)}$, donc on peut également supposer $t > 0$.

Pour $s = x + it$, on a

$$\left|e^{-(s+re^{i\tau})^2}\right| = e^{-x^2+t^2-2r(x\cos\tau - t\sin\tau)-r^2\cos(2\tau)} \tag{58}$$

5.1.1 Encadrement

D'une simple intégration par parties, on déduit l'encadrement suivant, valable pour $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\left|e^{-z^2}\right|}{2\,|z|\,(1+\frac{1}{2|z|^2})} \leqslant \left|\operatorname{erfc}(z)\right| \leqslant \frac{\left|e^{-z^2}\right|}{2\,|z|\,(1-\frac{1}{2|z|^2})}$$

Ainsi, on calculera plutôt $\operatorname{erfc}(z)e^{-x^2+t^2}$ avec une précision absolue donnée pour obtenir la précision relative correspondante sur le résultat.

5.1.2 Application directe

On intègre $f(z) = e^{-(s+z)^2}$ sur $[0, \infty[$ à l'aide du théorème 27.

Changement de variable D'après (58), on a $\left|f(u)\right| \leqslant e^{-x^2+t^2-2xu-u^2}$ pour $u \in [0,\infty[$, donc

$$\left|f(u)\right| \leqslant Me^{-\alpha u^\beta}$$

avec $M_1 = 1, \alpha = 1$ et $\beta = 2$.

On pose donc le changement de variable $z = \varphi(u) = e^{u-e^{-2u}}$.

Majoration sur T_τ D'après (58) f est bornée pour $\tau < \frac{\pi}{4}$, et a une croissance ou une décroissance (selon le signe de $x-t$) d'ordre 1 en $\tau = \frac{\pi}{4}$.

On choisit donc $\tau = \frac{\pi}{4}$. Dans ce cas, T_τ est incluse dans le secteur angulaire d'ouverture τ issu de $-a =$ et on a pour tout $z \in T_\tau$

$$\left|f(z)\right| = \left|f(-x+re^{i\theta})\right| \leqslant e^{-(x-a)^2+t^2-2r(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}t)} \leqslant e^{-(x-a)^2+t^2+\sqrt{2}(|z|+a)(t-x)^+}$$

d'après (58), en notant $(t-x)^+ = \max(t-x,0)$.

Ainsi, en posant $M = e^{-a^2+2ax+a\sqrt{2}(t-x)^+}$ et $A = \sqrt{2}(t-x)^+$, on a

$$\left|f(z)\right| \leqslant Me^{A|z|}$$

sur T_τ.

Ce qui permet d'appliquer le théorème 27.

5.1.3 Avec changement de variable préliminaire

On suppose $x > 0$ et on transforme d'abord l'intégrale en

$$\operatorname{erfc}(s) = \frac{1}{2}\int_{s^2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Dans ce cas, le changement est $\varphi(t) = e^{t-e^{-t}}$ est de paramètres $\alpha, \beta = 1$, et on intègre toujours sur une demi-droite horizontale, issue à présent du point $z = (x^2-t^2)+i2xt$. Puisque $x > 0$, cette droite ne passe pas sur l'axe réel négatif et l'intégrande

$$f(u) = e^{-u}\sqrt{u}$$

est bien défini.

Choix de τ Si $t \leqslant x$, alors $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$ et on peut prendre τ tel que $\rho_m < |z|$.

Si $t > x$, alors la zone T_τ d'équation $\left|y - \operatorname{Im}(z)\right| \leqslant \tan\tau(x - \operatorname{Re}(z)+1)$ évite la singularité en 0 pour $\tan\tau < \frac{2xt}{1+t^2-x^2}$.

On pose alors $r_{\min} = (2xy - \tan(\tau)(t^2+1-x^2))\sin(\tau)$ la distance entre T_τ et l'origine de sorte que sur T_τ où $\operatorname{Re}(u) \geqslant -\rho_m$, on ait

$$\left|f(u)\right| \leqslant \frac{e^{-(x^2-t^2+\operatorname{Re}(u))}}{\sqrt{r_{\min}}}$$

A Formulaire

Les changements de variable faisant fréquemment intervenir les fonctions hyperboliques, on en donne ici quelques propriétés.

Trajectoires des fonctions hyperboliques Pour tous complexes x, τ :

$$\sinh(x+i\tau) = \sinh(x)\cos(\tau) + i\cosh(x)\sin(\tau) \tag{59}$$
$$\cosh(x+i\tau) = \cosh(x)\cos(\tau) + i\sinh(x)\sin(\tau) \tag{60}$$

Ainsi, la courbe paramétrée par $x \mapsto \sinh(x+i\tau)$ suit une hyperbole que l'on notera par la suite $\mathscr{H}_\tau$, d'équation cartésienne

$$\mathscr{H}_\tau : Y^2 - \tan^2\tau X^2 = \sin^2\tau \tag{61}$$

soit

$$Y = \tan\tau\sqrt{X^2+\cos^2\tau}$$

Il est commode d'écrire un paramétrage mesurant l'écart aux asymptotes $Y = |X|\tan\tau$ sous la forme

$$\begin{aligned}\sinh(x+i\theta) &= \sinh(x)\cos(\theta) + i\cosh(x)\sin(\theta)\\ &= \sinh(x)e^{i\theta} + ie^{-x}\sin\theta\end{aligned}$$

où $e^{-x}\sin\theta$ est le terme d'écart.

Pour tous réels x, τ,

$$\big|\sinh(x)\big| \leqslant \big|\sinh(x+i\tau)\big| = \sqrt{\sin^2(\tau)+\sinh^2(x)} \leqslant \cosh(x) \tag{62}$$
$$\big|\sinh(x)\big| \leqslant \big|\cosh(x+i\tau)\big| = \sqrt{\cos^2(\tau)+\sinh^2(x)} \leqslant \cosh(x) \tag{63}$$

B Majorations

Intégrales **Lemme 33**

Pour $\beta > \gamma > 0$ et $A, \alpha > 0$ on a

$$\int_0^\infty e^{\lambda x + Ae^{\gamma x} - \alpha e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \exp\left[A\left(\frac{A\gamma+\lambda+1}{\alpha\beta}\right)^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}} - \alpha\left(\frac{A\gamma}{\alpha\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}\right] \tag{64}$$

et si $A = 0$

$$\int_0^\infty e^{\lambda x - \alpha e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{\lambda+1}{\alpha\beta e}\right)^{\frac{\lambda}{\beta}} \tag{65}$$

Démonstration : En sortant $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, on majore l'intégrale par $\sup e^{(\lambda+1)x + Ae^{\gamma x} - \alpha e^{\beta x}}$, lequel est obtenu pour $\frac{(\lambda+1)e^{-\gamma x} + A\gamma}{\alpha\beta} = e^{(\beta-\gamma)x}$. Avec l'encadrement $0 < e^{-\gamma x} < 1$ on obtient le premier résultat. Le second correspond à $e^{-\gamma x} = 1$. □

Lemme 34

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $X \in [0, \infty]$,

$$\int_0^X e^{-\alpha t^\beta}\,\mathrm{d}t \leqslant \alpha^{-1/\beta}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\beta} \tag{66}$$

Démonstration : $\leqslant \int_0^\infty$ puis changement de variable. □

Fonction gamma incomplète Lemme 35

Soient s, x tels que $x > |s| > 0$,

$$\left|\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x)\right| \leqslant (1 - \frac{|s|}{x})^{-1} x^{\mathrm{Re}(s)} e^{-x} \tag{67}$$

et si s, x vérifient $\mathrm{Re}(s) \leqslant 1$ et $x > 0$, alors

$$\left|\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x)\right| \leqslant (1 + \frac{|s|}{x}) x^{\mathrm{Re}(s)} e^{-x} \tag{68}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x) &= \int_x^\infty u^s e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= x^s e^{-x} + s\int_x^\infty \frac{u^s e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

donc dans le premier cas on écrit

$$\left|\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x)\right| \leqslant x^{\mathrm{Re}(s)} e^{-x} + \frac{|s|}{x}\left|\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x)\right|$$

et dans le second, puisque $\mathrm{Re}(s) - 1 \leqslant 0$,

$$\left|\Gamma_{\mathrm{inc}}(1+s,x)\right| \leqslant x^{\mathrm{Re}(s)} e^{-x} + |s|\, x^{\mathrm{Re}(s)-1} e^{-x}$$

□

Restes intégraux Lemme 36

Pour tous $\alpha, \beta > 0$,

$$\int_X^\infty e^{-\alpha e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e^{-ae^{\beta X}}}{\alpha\beta e^{\beta X}} \tag{69}$$

Démonstration : $\int_X^\infty e^{-\alpha e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\alpha\beta e^{\beta X}}\int_X^\infty \alpha\beta e^{\beta x} e^{-\alpha e^{\beta x}}\,\mathrm{d}x$ □

Lemme 37

Soient $\alpha, \gamma > 0$ et a, X tels que $\alpha(X+a) > \gamma$, alors

$$\int_X^\infty (a+t)^\gamma e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(X+a)^\gamma e^{-\alpha X}}{\alpha - \frac{\gamma}{X+a}} \tag{70}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} I &= e^{\alpha a}\int_{X+a} u^\gamma e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{e^{\alpha a}}{\alpha^{1+\gamma}}\int_{\alpha(X+a)} u^\gamma e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{e^{\alpha a}\Gamma_{\mathrm{inc}}(\gamma+1, \alpha(X+a))}{\alpha^{1+\gamma}} \\ &\leqslant \frac{e^{\alpha a}}{\alpha^{1+\gamma}(1-\frac{\gamma}{\alpha(X+a)}}(\alpha(X+a))^\gamma e^{-\alpha(X+a)} \end{aligned}$$

d'après (67). □

Lemme 38

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha X^\beta > 1/\beta - 1$ (en particulier si $\alpha\beta \geqslant 1$),

$$\int_X^\infty e^{-\alpha t^\beta}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{X^{1-\beta}e^{-\alpha X^\beta}}{\alpha\beta - \frac{1-\beta}{X^\beta}}$$

Si $\beta \geqslant 1$,

$$\int_X^\infty e^{-\alpha t^\beta}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{e^{-\alpha X^\beta}}{\alpha\beta}$$

Démonstration : On pose $u = t^\beta$, alors $I = \beta^{-1}\int_{X^\beta}^\infty u^{\frac{1}{\beta}-1}e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u$ et on applique le lemme 70. □

Références

[Hör91] Lars Hörmander. A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs. *Ark. Mat.*, 29(2) :237–240, 1991.

[Sug97] Masaaki Sugihara. Optimality of the double exponential formula—functional analysis approach. *Numerische Mathematik*, 75(3) :379–395, 1997.

[Tit39] E. C. Titchmarsh. *The theory of Functions*. Oxford University Press, New York, second edition, 1939. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.

[TM73] Hidetosi Takahasi and Masatake Mori. Double exponential formulas for numerical integration. *Kyoto University. Research Institute for Mathematical Sciences. Publications*, 9 :721–741, 1973.