



HAL
open science

How to generate an object under an ordinary Boltzmann distribution via an exponential Boltzmann sampler.

Olivier Bodini

► **To cite this version:**

Olivier Bodini. How to generate an object under an ordinary Boltzmann distribution via an exponential Boltzmann sampler.. 2010. hal-00489209v1

HAL Id: hal-00489209

<https://hal.science/hal-00489209v1>

Preprint submitted on 4 Jun 2010 (v1), last revised 15 Jun 2010 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HOW TO GENERATE AN OBJECT UNDER AN ORDINARY BOLTZMANN DISTRIBUTION VIA AN EXPONENTIAL BOLTZMANN SAMPLER.

O. BODINI[†]

ABSTRACT. Cette note rapide présente une façon efficace de passer d'un générateur de Boltzmann exponentiel à un générateur de Boltzmann ordinaire.

INTRODUCTION AND MOTIVATIONS

Les générateurs de Boltzmann introduit par Duchon, Flajolet, Louchard et Schaeffer [2], constituent une avancée importante pour la génération aléatoire. Ils permettent aujourd'hui d'engendrer des objets de tailles inexperées avec les techniques précédentes. Nous montrons dans cette petite note comment transformer un générateur exponentiel de Boltzmann pour une classe combinatoire \mathcal{C} , c'est à dire un générateur dont la probabilité de tirer un objet ω de taille n est $\frac{x^n}{n!C(x)}$ en un générateur ordinaire de Boltzmann : i.e. avec la probabilité de tirer un objet ω de taille n en $\frac{x^n}{C(x)}$. Ce petit résultat est le premier maillon nécessaire à l'elaboration d'un générateur de Boltzmann pour l'opérateur Shuffle.

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS DE BASE

Nous renvoyons le lecteur au livre "Analytic Combinatorics" [3] pour une remarquable exposition de ce qu'est la combinatoire symbolique. Cette note utilise la terminologie et les concepts de base de ce domaine des mathématiques.

Nous rappelons ici brièvement les notions de combinatoire symbolique qui nous seront utiles par la suite : Une *classe combinatoire* est un couple $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ (simplement \mathcal{A} s'il n'y a pas d'ambiguité) où \mathcal{A} est l'ensemble des objets de la classe et $|\cdot|$ une fonction taille $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ associé aux objets. De plus nous désirons qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'objet de même taille. Etant donnée \mathcal{A} une classe combinatoire. Nous notons $\hat{A}(x)$ la *serie génératrice exponentielle* de \mathcal{A} (EGF): $\hat{A}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ où a_n est le nombre d'objets dans \mathcal{A} de taille n . Parallelement, la *fonction génératrice ordinaire* de \mathcal{A} (OGF) est $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

2. GÉNÉRATION ALÉATOIRE

On rappelle ici les deux types de générateurs de Boltzmann comme introduit dans [2]. Les *générateurs exponentiels* qui sont des générateurs qui doivent renvoyer un objet ω de taille n avec probabilité $\frac{x^n}{n!C(x)}$ et les *générateurs ordinaires* qui doivent renvoyer un objet ω de taille n avec probabilité $\frac{x^n}{C(x)}$.

[†] ANR GAMMA 07-2_195422 grant of the French *Agence Nationale de la recherche*.

Montrons ci-dessous comment passer de manière efficace d'un générateur de Boltzmann exponentiel vers un générateur de Boltzmann ordinaire. L'idée est similiaire à celle présente dans l'article [1] permettant de passer d'un générateur de Boltzmann d'une classe pointée \mathcal{A}^\bullet à un générateur de Boltzmann pour la classe \mathcal{A} . Cette approche a été pour la première fois évoquée lors d'une discussion entre P. Flajolet et M. Soria. Nous reprenons donc ici l'idée de ne pas sélectionner le paramètre de Boltzmann de manière déterministe mais de le choisir de manière probabiliste à partir d'une distribution continue de probabilité bien choisie. Plus explicitement, en voici le principe :

Algorithm 1: $\Gamma_{x\mathcal{A}}$

Output: un objet tiré suivant une probabilité de Boltzmann ordinaire

- 1 Tirer un paramètre u suivant la densité de probabilité $\frac{e^{-u}\hat{A}(xu)}{A(x)}$
 - 2 Tirer un objet γ avec le générateur exponentiel de paramètre xu : $\gamma = \hat{\Gamma}_{xu}\mathcal{A}$.
 - 3 **return** l'objet γ .
-

Proof. Tout d'abord $d(u) = \frac{e^{-u}\hat{A}(xu)}{A(x)}$ est bien une densité de probabilité sur

$[0, \infty]$. C'est une fonction positive et $\int_{u=0}^{\infty} \frac{e^{-u}\hat{A}(xu)}{A(x)} du = 1$. Il reste à montrer qu'un

objet γ de taille n est bien retourné avec probabilité $\frac{x^n}{C(x)}$. Pour que l'objet γ soit retourné, il faut avec tirer une certaine valeur pour u , puis avoir tiré γ avec le générateur $\hat{\Gamma}_{xu}\mathcal{A}$. Ceci donne la probabilité : $p(\gamma) = \int_{u=0}^{\infty} \frac{e^{-u}\hat{A}(xu)}{A(x)} \frac{(xu)^n}{n!\hat{A}(xu)} du$.

Soit après simplification, $p(\gamma) = \frac{x^n}{n!A(x)} \int_{u=0}^{\infty} e^{-u}u^n du$. Mais $\int_{u=0}^{\infty} e^{-u}u^n du = n!$ et

le théorème s'ensuit. \square

En conclusion, en utilisant des techniques classiques permettant de tirer suivant une certaine densité de probabilité (voir L. Devroye), il est possible de faire un tirage de u en temps constant et donc, l'algorithme ci-dessus et un générateur ordinaire de même complexité que le générateur exponentiel.

3. REMERCIEMENT

En tout premier lieu, P. Flajolet sans qui cette note n'aurait pas lieu.

REFERENCES

- [1] O. Bodini, O. Roussel, and M. Soria. Boltzmann samplers for first order combinatorial differential equations. *Submitted*, 2010.
- [2] P. Duchon, P. Flajolet, G. Louchard, and G. Schaeffer. Boltzmann samplers for the random generation of combinatorial structures. *Combinatorics, Probability and Computing*, 13:2004, 2004.
- [3] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

HOW TO GENERATE AN OBJECT UNDER AN ORDINARY BOLTZMANN DISTRIBUTION VIA AN EXPONENTIAL BOLT

† OLIVIER.BODINI@LIP6.FR