HAL open science

Un oeil et Farey

Patrice Philippon

To cite this version:

Patrice Philippon. Un oeil et Farey. 2008. hal-00488471

HAL Id: hal-00488471

https://hal.science/hal-00488471v1

Preprint submitted on 2 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un œil et Farey

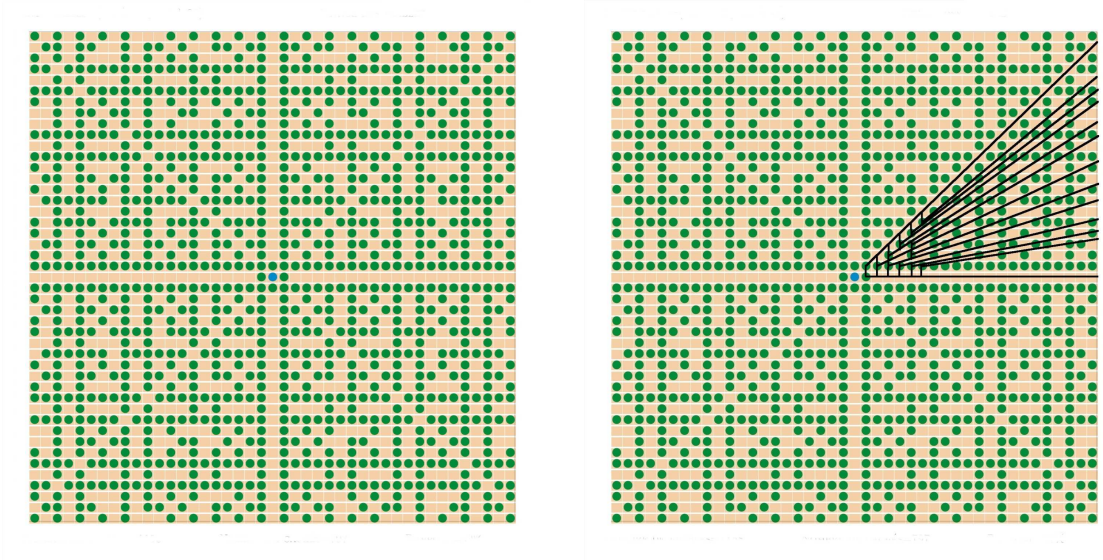
Patrice PHILIPPON

UMR 7586 du CNRS - Géométrie et Dynamique,
Université P. & M. Curie, T.46-56, 5ème ét., F-75252 PARIS cedex 05.

Résumé : Nous présentons les suites de Farey dans différents points de vue graphiques attractifs. En particulier, l'œil de Farey permet de visualiser les meilleures approximations rationnelles attachées à un nombre réel. Nous décrivons ensuite plusieurs algorithmes connus permettant de sélectionner dans la suite de Hurwitz des approximations de type particulier, y compris un algorithme, peut-être moins connu, produisant la suite des meilleures approximations rationnelles (dites aussi meilleures approximations de type 1). Nous étudions plus particulièrement ce dernier algorithme.

§ 1. Le jardin des visibles et le graphe de Farey

Le *jardin des visibles* (*i.e.* des points visibles depuis l'origine, cf. [2], page 29) est constitué du réseau $\mathbf{Z}^2$ où l'on plante un arbre aux points de coordonnées premières entre elles. Se dessine alors des demi-rayons partant de ces points visibles et couvrant tous les points de $\mathbf{Z}^2$ cachés (par un point visible) lorsqu'on regarde à partir de l'origine. On complète ces rayons en un *graphe des cachés* en reliant verticalement chaque point visible aux deux rayons voisins le long de la verticale passant par ce point visible.

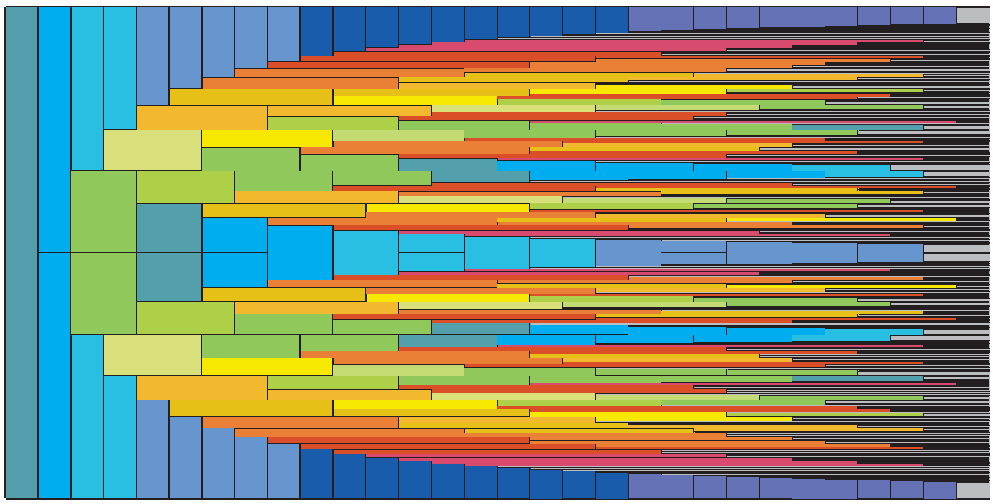


Le jardin des visibles et le graphe des cachés

Dans les représentations ci-dessus l'origine est le point bleu et nous n'avons esquissé qu'une partie du graphe des cachés, le graphe complet se déduit comme union des images par la famille de transformations $(x, y) \mapsto (\pm x, y + nx)$, $n \in \mathbf{Z}$, du graphe dessiné, plus éventuellement les deux demi-droites isolées $\{0\} \times [1, +\infty[$ et $\{0\} \times]-\infty, -1]$.

Pour une meilleure visibilité il s'avère judicieux de redresser le *graphe des cachés* par l'application $[1, \infty[\times \mathbf{R} \to [1, \infty[\times \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto (x, \frac{y}{x})$, obtenant ainsi la *bannière de Farey* où les arêtes radiales deviennent des arêtes parallèles au premier axe de coordonnée et les arêtes parallèles au second axe de coordonnée gardent la même direction.

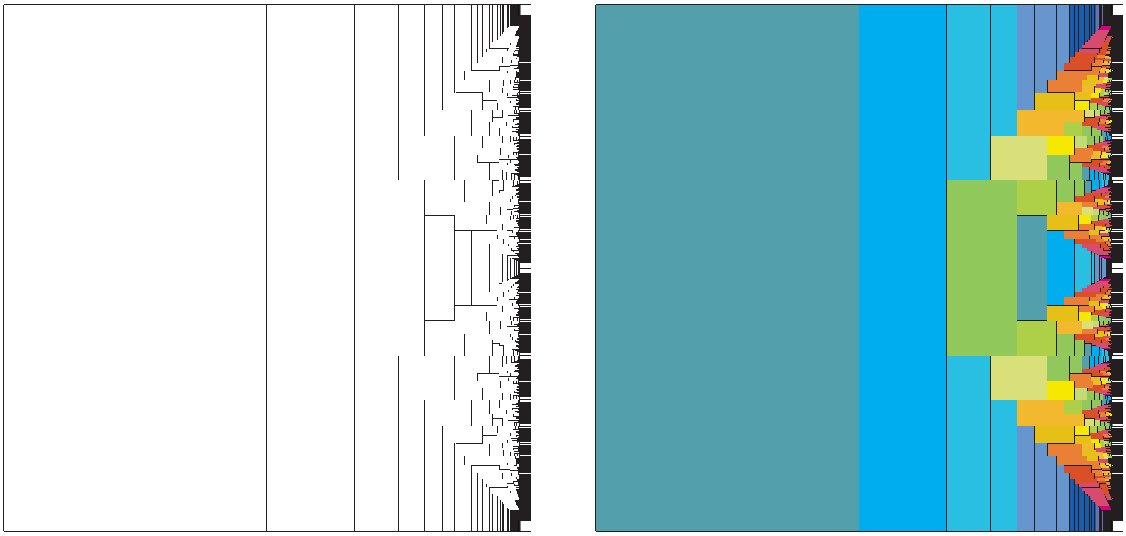
La *bannière de Farey* est le graphe dont les sommets sont les points $(q, \frac{p}{q}) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}$ lorsque $\frac{p}{q}$ parcourt l'ensemble des nombres rationnels (écrits sous forme réduite) et les arêtes les lignes horizontales $(u, \frac{1}{q})$, $u \geq \frac{p}{q}$, orientées de 1 vers $+\infty$, et les lignes verticales reliant chaque sommet aux lignes horizontales voisines, orientées des lignes vers le sommet. Le graphe obtenu est périodique par translation verticale de 1 et symétrique par rapport à la droite d'ordonnée $\frac{1}{2}$. On ne représente ci-dessous que la bande $[1, \infty[\times [0, 1]$, correspondant à la partie du graphe des cachés esquissée précédemment.



La bannière de Farey

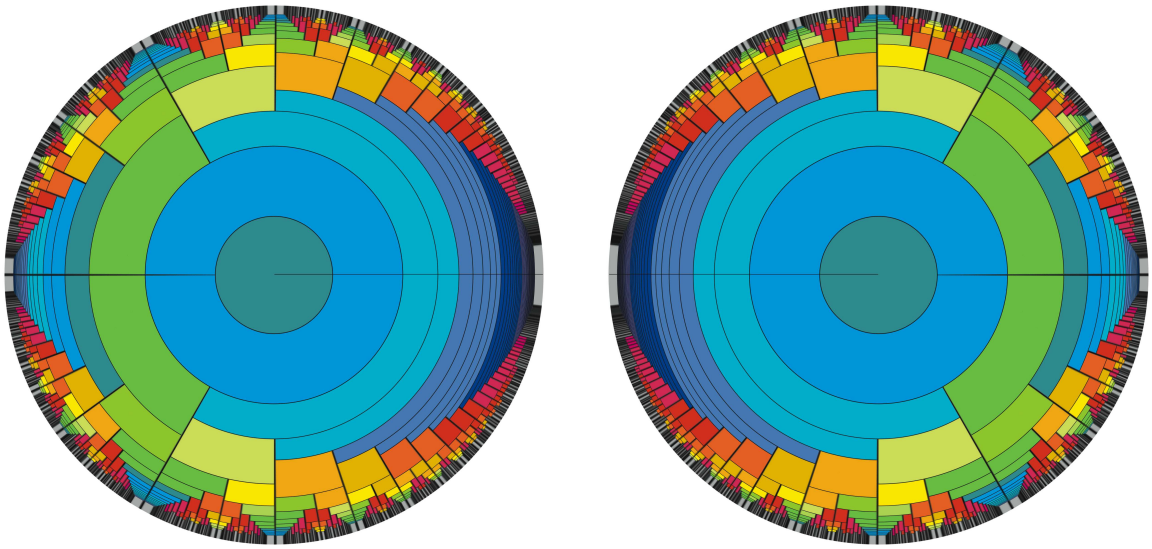
Rappelons que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ la *suite de Farey de niveau* n , notée $\mathcal{F}_n$, est la suite, rangée par ordre croissant, des rationnels de dénominateur au plus n et compris entre 0 et 1 : $\mathcal{F}_1 = 0, 1$, $\mathcal{F}_2 = 0, \frac{1}{2}, 1$, $\mathcal{F}_3 = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1 \ldots$ *voir* [4], §1 & 2 ou [2], chap. 3, par exemple. Dans [4] la suite de Farey de niveau n , $n \in \mathbf{N}$, est étendue à tous les rationnels en incluant de plus les « infinis » $\frac{-1}{0}$ et $\frac{1}{0}$ aux extrémités : $\mathcal{F}'_0 = \frac{-1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}$, $\mathcal{F}'_1 = \frac{-1}{0}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$, $\mathcal{F}'_2 = \frac{-1}{0}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0} \ldots$ On retrouve la suite $\mathcal{F}_n$ sur la bannière de Farey représentée ci-dessus, par exemple, comme la suite des ordonnées des arêtes horizontales du graphe de Farey rencontrées en remontant la ligne verticale d'abscisse n (ou d'abscisse quelconque entre n compris et $n + 1$ exclu).

Le *peigne de Farey* est la contraction horizontale dans la bande $[0,1[\times\mathbf{R}$ du graphe précédent par la transformation $(u,v) \longmapsto (\frac{u-1}{u},v)$. De même que pour la bannière de Farey, on ne représente que la partie du graphe dans le carré $[0,1[\times[0,1]$, le peigne complet est l'union des translatés par les points $(0,n)$, $n \in \mathbf{Z}$, de ce morceau.



Le peigne de Farey

L'*œil de Farey* est enfin obtenu par application au graphe précédent de la fonction exponentielle $(s,t) \longmapsto s\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}$, dont l'image se trouve dans le disque unité $D(0,1)$ du plan. Cette transformation rend compte de la périodicité de la bannière de Farey par les translations verticales entières. Ci-dessous c'est la figure de gauche qui représente l'œil de Farey déduit du peigne des figures précédentes par la transformation indiquée, la figure de droite en est le symétrique (par rapport soit à l'origine, soit à l'axe vertical, car l'œil est déjà symétrique par rapport à l'axe horizontal).



L'œil de Farey

En résumé on a les transformations suivantes entre ces différentes représentations du graphe de Farey :

$$\begin{array}{ccccccc}
[1,+\infty[\times\mathbf{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[\times[0,1[& \longrightarrow & [0,1]\times[0,1[& \longrightarrow & D(0,1) \\
(x,y) & \longmapsto & (x,\{\frac{y}{x}\}) & \longmapsto & (\frac{x-1}{x},\{\frac{y}{x}\}) & \longmapsto & (\frac{x-1}{x},2\pi\{\frac{y}{x}\}) \\
 & & (u,v) & \longmapsto & (\frac{u-1}{u},v) & \longmapsto & (\frac{u-1}{u},2\pi v) \\
 & & & & (s,t) & \longmapsto & (s,2\pi t) \\
 & & & & & & (\rho,\theta)
\end{array}$$

les trois premiers systèmes de coordonnées étant cartésiens et le dernier polaire. On note $\{\star\}$ le nombre dans l'intervalle $[0,1[$ congru à $\star$ modulo $\mathbf{Z}$.

Les dimensions fractale et de Hausdorff du peigne de Farey ou de l'œil de Farey comme sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ (c'est-à-dire du graphe image dans le carré ou le disque unité) est égale à $3/2$. En effet, le nombre N_ε de disques de diamètre ε nécessaires pour couvrir le peigne de Farey, par exemple, satisfait $\left|\log(N_\varepsilon)+\frac{3}{2}\log(\varepsilon)\right| = O_\varepsilon(1)$ pour $\varepsilon\to 0$. On vérifie que dans la partie du peigne de Farey comprise dans le rectangle $[1-\frac{1}{q},1-\frac{1}{q+1}]\times[0,1]$ avec $q\leq\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, chaque morceau d'arête du graphe doit être couvert séparément par autant de disques que sa longueur divisée par le diamètre du disque, soit au total un nombre de disques de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. En sommant pour $q=1,\ldots,\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ on trouve un nombre de disques de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}$ pour couvrir la partie du graphe contenue dans le rectangle $[0,1-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]\times[0,1]$. Enfin le rectangle $[1-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},1]\times[0,1]$ peut être couvert par au plus $(\sqrt{2}/\varepsilon)^{3/2}$ disques de diamètre ε et la dimension fractale est égale à la limite $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log(N_\varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|}$.

§ 2. **Chemins et meilleures approximations**

Rappelons que nous avons orienté les arêtes du graphe de Farey, de sorte que dans la bannière de Farey, par exemple, on peut se déplacer le long des arêtes horizontales de gauche à droite et sur les arêtes verticales en se dirigeant vers le sommet de l'unique arête horizontale prenant naissance sur l'arête verticale et filant à sa droite.

Un chemin dans la bannière de Farey peut être décrit par une suite de fractions $\frac{p_0}{q_0},\frac{p_1}{q_1},\ldots$ correspondant aux différentes arêtes horizontales empruntées. On notera en effet qu'on ne peut emprunter une telle arête horizontale qu'à partir de son sommet, auquel aboutissent les deux seules arêtes verticales orientées vers l'arête horizontale considérée.

Approximations unilatérales

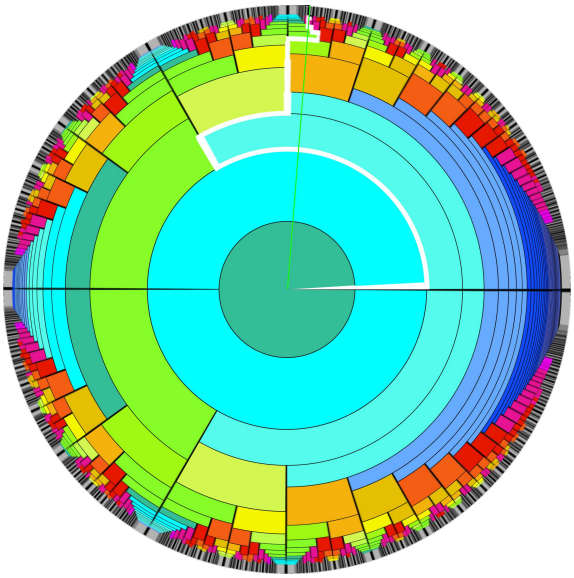
On considère la forme de surface suivante, exprimée dans les différents domaines de représentation du graphe de Farey décrits à la section précédente :

$$\frac{dx\wedge dy}{x} \quad\leftrightarrow\quad du\wedge dv \quad\leftrightarrow\quad \frac{ds\wedge dt}{(1-s)^2} \quad\leftrightarrow\quad \frac{d\rho\wedge d\theta}{2\pi(1-\rho)^2}$$

À un nombre réel $\xi\in[0,1[$ on associe dans l'œil de Farey le rayon d'angle $2\pi\xi$ et on considère le chemin du graphe de Farey qui minimise la surface comprise entre ce rayon et le chemin pour la forme ci-dessus. Ce chemin est décrit par la suite de fractions $\frac{p_0}{q_0},\frac{p_1}{q_1},\dots$ donnant la suite des *meilleures approximations de type* 1 de ξ, c'est-à-dire satisfaisant pour tout $k\in\mathbf{N}$:

$$(1)\qquad \forall(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*\ ,\ \ q\le q_k\ ,\ \ \frac{p}{q}\neq\frac{p_k}{q_k}\ ,\quad \left|\xi-\frac{p}{q}\right|>\left|\xi-\frac{p_k}{q_k}\right|\ .$$

On remarquera qu'étant donné que deux éléments consécutifs d'une suite de Farey $\mathcal{F}_n$, $n\in\mathbf{N}$, $n>1$, ne peuvent avoir le même dénominateur (*cf.* [2], Thm.31), la condition ci-dessus détermine uniquement $\frac{p_k}{q_k}$ dès que $q_k>1$. De plus, lorsque $q_k=1$ il n'y a ambiguïté à déterminer la meilleure approximation entière que pour les $\xi\in\frac{1}{2}+\mathbf{N}$. Ainsi à chaque réel ξ est associé un chemin dans l'œil de Farey qui devient ainsi un « approximoscope » :



L'approximoscope positionné à $\xi=\frac{9}{38}$ (rayon vert)

Sur l'image ci-dessus, en suivant l'éclair blanc on lit la suite des meilleures approximations de type 1 de $\frac{9}{38}$: 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{9}{38}$.

La surface comprise entre le rayon déterminé par ξ et un chemin associé à une suite $\frac{p_0}{q_0},\frac{p_1}{q_1},\dots$ s'écrit (pour le calcul on préférera revenir à la bannière de Farey)

$$(2)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}(q_{k+1}-q_k)\left|\xi-\frac{p_k}{q_k}\right|\ ,$$

ce qui montre que la suite des meilleures approximations de ξ détermine bien le chemin minimisant la surface qu'il délimite avec le rayon associé à ξ . Alternativement, c'est le chemin où les trajets radiaux font sur chaque circonférence un angle minimal avec la direction du rayon déterminé par ξ .

Remarque – On notera que les convergents du développement en fraction continue (régulière) de ξ sont des meilleures approximations de type 1 , au sens de (1) (*cf.* [2], Thm.181). Toutefois, ces convergents ne donnent pas toutes les meilleures approximations en ce sens. Ils donnent toutes les *meilleures approximations de type* 0 , au sens plus fort suivant (*cf.* [2], Thm.182) :

$$\forall (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \ , \ q \leq q_k \ , \ \frac{p}{q} \neq \frac{p_k}{q_k} \ , \quad |q\xi - p| > |q_k\xi - p_k| \ . \tag{3}$$

Exemples – Les convergents de la fraction continue régulière de $\frac{1}{4}$ sont 0 et $\frac{1}{4}$, les meilleures approximations de type 0 , alors que la suite des meilleures approximations de type 1 est $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

La première meilleure approximation $\frac{p_0}{q_0}$ de ξ (avec dénominateur $q_0 = 1$) est l'entier le plus proche de ξ et non sa partie entière (avec l'ambiguïté déjà mentionnée si $\xi \in \frac{1}{2} + \mathbf{N}$).

Approximations bilatérales

Avec les mêmes notations que ci-dessus, partant de la paire d'entiers $\left(\frac{[\xi]}{1}, \frac{[\xi]+1}{1}\right)$ encadrant un réel ξ on peut considérer la *chaîne de Hurwitz associée à* ξ , *voir* [4], formée des couples $\left(\frac{p'_k}{q'_k}, \frac{p''_k}{q''_k}\right)$, $k \in \mathbf{N}$, d'éléments des suites de Farey $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$, encadrant ξ (un même couple peut donner l'encadrement désiré pour plusieurs suites de Farey successives). Ainsi $\frac{p'_k}{q'_k}$ et $\frac{p''_k}{q''_k}$ sont des éléments consécutifs d'une suite de Farey $\mathcal{F}_n$. Mais, la première suite de Farey contenant un élément (nécessairement unique car deux éléments consécutifs d'une suite de Farey ne peuvent avoir le même dénominateur) strictement compris entre ces deux fractions est celle qui contient la *médiante* $\frac{p'_k+p''_k}{q'_k+q''_k}$ (*cf.* [2], Thm.29) et on voit donc que $\left(\frac{p'_{k+1}}{q'_{k+1}}, \frac{p''_{k+1}}{q''_{k+1}}\right)$ est soit $\left(\frac{p'_k}{q'_k}, \frac{p'_k+p''_k}{q'_k+q''_k}\right)$, soit $\left(\frac{p'_k+p''_k}{q'_k+q''_k}, \frac{p''_k}{q''_k}\right)$, selon que la médiante $\frac{p'_k+p''_k}{q'_k+q''_k}$ est supérieure ou inférieure à ξ .

Exemple – La chaîne de Hurwitz ainsi associée à $\frac{85}{38} = 2 + \frac{9}{38}$ est :

$$\left(\tfrac{2}{1}, \tfrac{3}{1}\right) \ \left(\tfrac{2}{1}, \tfrac{5}{2}\right) \ \left(\tfrac{2}{1}, \tfrac{7}{3}\right) \ \left(\tfrac{2}{1}, \tfrac{9}{4}\right) \ \left(\tfrac{11}{5}, \tfrac{9}{4}\right) \ \left(\tfrac{20}{9}, \tfrac{9}{4}\right) \ \left(\tfrac{29}{13}, \tfrac{9}{4}\right) \ \left(\tfrac{38}{17}, \tfrac{9}{4}\right) \ \left(\tfrac{38}{17}, \tfrac{47}{21}\right) \ \left(\tfrac{85}{38}\right) \quad .$$

Lorsque ξ est rationnel, il coïncide avec une des médiantes $\frac{p'_k+p''_k}{q'_k+q''_k}$, pour un certain k . Au-delà de cet indice k on peut poursuivre la chaîne de Hurwitz soit en conservant le couple $\left(\frac{p'_k}{q'_k}, \frac{p'_k+p''_k}{q'_k+q''_k}\right)$, soit le couple $\left(\frac{p'_k+p''_k}{q'_k+q''_k}, \frac{p''_k}{q''_k}\right)$. Nous préférons ici ne

pas considérer la chaîne de Hurwitz d'un nombre rationnel au-delà de la médiante avec laquelle il coïncide. Ainsi les rationnels sont les nombres ayant une chaîne de Hurwitz finie (le dernier couple se réduisant au rationnel donné).

Remarque – Lorsque ξ n'appartient pas à l'intervalle $[0,1]$ notre définition de chaîne de Hurwitz diffère de celle décrite dans [1] par exemple, *voir* aussi [4]. Dans ces références, si on suppose $\xi > 0$ par exemple, on part du couple $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right)$ et la chaîne de Hurwitz débute par $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right)$ $\left(\frac{2}{1}, \frac{1}{0}\right) \ldots \left(\frac{[\xi]}{1}, \frac{1}{0}\right)$ avant de faire apparaître le couple $\left(\frac{[\xi]}{1}, \frac{[\xi]+1}{1}\right)$ d'éléments de $\mathcal{F}_1$ encadrant ξ .

La chaîne de Hurwitz associée à ξ fournit simultanément les suites des meilleures approximations rationnelles de ξ par valeurs inférieures et supérieures. On considère aussi la *suite de Hurwitz* formée des composantes des couples d'une chaîne de Hurwitz, non répétées et rangées par dénominateurs croissants (c'est la suite des médiantes formées successivement). La suite de Hurwitz $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ de ξ débute par $\frac{p_0}{q_0} = \frac{[\xi]}{1}$ $\frac{p_1}{q_1} = \frac{[\xi]+1}{1}$ $\frac{p_2}{q_2} = \frac{2[\xi]+1}{2}$ $\ldots$ Cette suite contient toutes les « approximations rationnelles » de ξ (dans n'importe quel sens raisonnable) et en particulier les meilleures approximations de type 0 et 1 discutées précédemment, qu'il faut toutefois encore savoir trier.

Exemple – La suite de Hurwitz de $\frac{85}{38}$ est : $2\ 3\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{3}\ \frac{9}{4}\ \frac{11}{5}\ \frac{20}{9}\ \frac{29}{13}\ \frac{38}{17}\ \frac{47}{21}\ \frac{85}{38}$. Et les meilleures approximations de type 0 sont : $2\ \frac{9}{4}\ \frac{38}{17}\ \frac{85}{38}$.

La suite de Hurwitz $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ de ξ est caractérisée par la suite des signes associés aux sens des approximations successives de ξ par ses éléments. Plus précisément, on reconstruit pas à pas la suite de Hurwitz de ξ à partir de la partie entière de ξ et de la *suite caractéristique* des signes $\varepsilon_{k+1} := \frac{p_k - q_k\xi}{|p_k - q_k\xi|}$, $k \geq 2$. On posera $\varepsilon_1 = -1$ et $\varepsilon_2 = +1$ de sorte à compléter la suite caractéristique en $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$ (on notera le décalage d'indice par rapport à la suite de Hurwitz qui commence à l'indice 0). Pour retrouver la suite de Hurwitz à partir de la suite caractéristique on vérifie que le terme $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ est égal à la médiante de $\frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{p_\ell}{q_\ell}$ où ℓ est le plus grand indice $< k$ tel que $\varepsilon_k\varepsilon_\ell = -1$ et le couple correspondant de la chaîne de Hurwitz se déduit des signes ε_ℓ , ε_k et ε_{k+1} . Lorsque ξ est rationnel et k est le premier indice tel que $p_k - q_k\xi = 0$ on pose conventionnellement $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ et la suite caractéristique s'arrête à $k+1$.

Exemple – La suite caractéristique de $\frac{85}{38}$ est : $-\ +\ +\ +\ +\ -\ -\ -\ -\ +\ +$.

On vérifie encore, en écartant le premier signe et avec notre convention ci-dessus sur le dernier signe dans le cas d'un nombre rationnel, que les longueurs des blocs de signes identiques dans la suite caractéristique sont les quotients partiels du développement en fraction continue régulière de ξ , hormis pour la partie entière de ξ débutant à la fois le développement en fraction continue et la suite de Hurwitz dans notre description. Les approximations de type 0 (les convergents de cette fraction continue régulière) sont les

éléments $\frac{p_k}{q_k}$ de la suite de Hurwitz précédant un changement de signe (*i.e.* tels que $\varepsilon_{k+1}\varepsilon_{k+2} = -1$), *voir* [4], §3 & 5 et aussi §4 ci-après.

La suite de Hurwitz de ξ se représente sur le graphe de Farey par les deux chemins qui minimisent la surface que chacun d'eux délimite avec le rayon déterminé par ξ , mais avec la contrainte de ne jamais couper ce rayon. Il y a donc deux chemins s'approchant du rayon déterminé par ξ par l'un ou l'autre de ses côtés. Les arêtes radiales de chacun de ces deux chemins énumèrent les suites des meilleures approximations de ξ par valeur supérieure ou inférieure respectivement.

§ 3. **L'algorithme des meilleures approximations de type** 1

Nous voulons maintenant décrire un algorithme permettant de construire directement par induction les meilleures approximations de type 1 , plutôt que de les extraire de la suite de Hurwitz. Nous convertirons cet algorithme en un algorithme de développement en fraction continue à la section 5.

Soit $\frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ deux meilleures approximations successives d'un réel $\xi \in [0,1[$, que l'on supposera pour simplifier irrationnel. On a quatre positionnements possibles :

$$\text{Cas I} \ : \quad \xi \leq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} < \frac{p_k}{q_k} \qquad \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \leq \xi < \frac{p_k}{q_k}$$

$$\text{Cas II} : \quad \frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \leq \xi \qquad \frac{p_k}{q_k} < \xi \leq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

et en particulier il ne peut exister de fraction $\frac{p}{q}$ de dénominateur $0 < q \leq q_{k+1}$ strictement comprise entre $\frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$. En effet, celle-ci donnerait une approximation de ξ meilleure que $\frac{p_k}{q_k}$ contredisant, si $q \geq q_k$, le fait qu'il n'y pas de meilleure approximation autre que $\frac{p_k}{q_k}$ ou $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ de dénominateur compris entre q_k et q_{k+1} , ou, si $q \leq q_k$, que $\frac{p_k}{q_k}$ est une meilleure approximation. En conclusion, les fractions $\frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ sont (à l'ordre près) consécutives dans la suite de Farey $\mathcal{F}_{q_{k+1}}$, on a donc d'après [2], Thm.28 :

$$\varepsilon_{k+1} := p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k = \pm 1 \ . \tag{4}$$

Dans les cas I le signe est $+1$ (car $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} < \frac{p_k}{q_k}$) tandis que dans les cas II il est égal à -1 (car $\frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$), comme $\xi \neq \frac{p_k}{q_k}$ on a $\varepsilon_{k+1} = \frac{p_k - q_k\xi}{|p_k - q_k\xi|}$ en tout cas.

On vérifie alors sans difficulté la formule suivante :

$$\xi - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \xi - \frac{p_k}{q_k} + \frac{\varepsilon_{k+1}}{q_k q_{k+1}} \ . \tag{5}$$

En particulier, comme les quantités $\xi - \frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{\varepsilon_{k+1}}{q_k q_{k+1}}$ sont de signes opposés, on a

$$\left|\xi - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right| = \left|\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| - \frac{1}{q_k q_{k+1}}\right| \ . \tag{6}$$

Étant donné $\xi, p_k, q_k, p_{k-1}, q_{k-1}$ on peut déterminer p_{k+1}, q_{k+1} de la façon suivante. On cherche q_{k+1} congru à ε_{k+1} fois l'inverse de p_k modulo q_k. La formule (4) écrite pour $k-1$ donne $-p_k q_{k-1} \equiv \varepsilon_k \mathrm{mod}(q_k)$, ce qui montre que l'inverse de p_k modulo q_k est la classe de $-\varepsilon_k q_{k-1}$ et qu'on doit chercher $q_{k+1} \in \mathbf{N}^*$ de la forme $-\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k q_{k-1} + \lambda q_k$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

On fixe λ en imposant $\frac{1}{q_k q_{k+1}} < 2\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right|$, ce qui, vu (6) est équivalent à $\left|\xi - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right| < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right|$. On a donc les conditions $q_{k+1} > \frac{1}{2|p_k - q_k\xi|}$ et $q_{k+1} > q_k$. Comme il n'y a pas de meilleure approximation de ξ de dénominateur strictement compris entre q_k et q_{k+1}, il résulte que q_{k+1} est le plus petit entier $> \max\left(\frac{1}{2|p_k - q_k\xi|}; q_k\right)$ de la forme $-\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k q_{k-1} + \lambda q_k$, soit (les crochets $[\star]$ désignant la partie entière de $\star$) :

$$q_{k+1} = -\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k q_{k-1} + \left(1 + \left[\max\left(\frac{1}{2q_k|p_k - q_k\xi|}; 1\right) + \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k \frac{q_{k-1}}{q_k}\right]\right) q_k \ . \tag{7}$$

En fait, la condition $q_{k+1} > q_k$ découle de $q_{k+1} > \frac{1}{2|p_k - q_k\xi|}$:

Lemme 1 – *Si* $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ *et* $\frac{p_k}{q_k}$, $k \in \mathbf{N}^*$, *sont deux meilleures approximations successives de* ξ *et* $\varepsilon_k = \frac{p_{k-1} - q_{k-1}\xi}{|p_{k-1} - q_{k-1}\xi|}$, $\varepsilon_{k+1} = \frac{p_k - q_k\xi}{|p_k - q_k\xi|}$, *alors tout entier* $q > \frac{1}{2|p_k - q_k\xi|}$ *de la forme* $q = -\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k q_{k-1} + \lambda q_k$, $\lambda \in \mathbf{Z}$, *satisfait* $q > q_k$.

Le dénominateur de la meilleure approximation suivant $\frac{p_k}{q_k}$ *s'écrit* $q_{k+1} = a_{k+1}q_k - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k q_{k-1}$ *avec (les crochets* $[\star]$ *désignant la partie entière de* $\star$ *)*

$$a_{k+1} := 1 + \left[\frac{1}{2q_k|p_k - q_k\xi|} + \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k \frac{q_{k-1}}{q_k}\right] \ . \tag{8}$$

En particulier, on a $a_{k+1} \in \mathbf{N}^*$, $a_{k+1} - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k \geq 1$ *pour tout* $k \in \mathbf{N}$. *De plus,* $a_{k+1} - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k = 1$ *si et seulement si* $a_{k+1} = 2$ *et* $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ *et, si* ξ *est irrationnel, on a* $a_{k+1} - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k \geq 2$ *pour une infinité de* k.

Démonstration – Les entiers q considérés satisfont $pq_k - p_k q = \varepsilon_{k+1}$ où on a posé $p = -\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k p_{k-1} + \lambda p_k$. On vérifie alors (les quantités $\xi - \frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{\varepsilon_{k+1}}{qq_k}$ sont de signes opposés)

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| = \left|\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| - \frac{1}{qq_k}\right|$$

et si $q > \frac{1}{2|p_k - q_k\xi|}$ on en déduit

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| \ .$$

Comme il n'y a pas de meilleure approximation de ξ de dénominateur $\leq q_k$ autre que $\frac{p_k}{q_k}$, on a nécessairement $q > q_k$. En particulier et alternativement à la formule (7),

q_{k+1} peut aussi être trouvé comme le plus petit entier $> \frac{1}{2|p_k - q_k\xi|}$ de la forme $q_{k+1} = -\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k q_{k-1} + \lambda q_k$. La valeur de λ est alors donnée par le membre de droite de (8) et en posant $a_{k+1} = \lambda$ on obtient l'expression de q_{k+1} et la formule (8) voulues.

On vérifie sur l'expression de q_{k+1} que si $a_{k+1} \leq 0$ alors $q_{k+1} \leq -\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k q_{k-1} < q_k$ ce qui est impossible par ce qu'on vient d'établir, ceci montre $a_{k+1} \in \mathbf{N}^*$. Ainsi, si $\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k = -1$ alors $a_{k+1} - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k \geq 2$. Si $\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k = 1$ on a $q_{k+1} > q_k$ et $a_{k+1} \geq 2$, car sinon $q_{k+1} = q_k - q_{k-1} < q_k$. Ceci montre dans ce cas $a_{k+1} - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k \geq 1$ et qu'on ne peut avoir $a_{k+1} - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k = 1$ que lorsque $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ et $a_{k+1} = 2$. Mais, si ξ est irrationnel on ne peut avoir ε_k constant à partir d'un certain indice car, par exemple, les convergents du développement en fraction (régulière) alternent le sens de l'approximation, on a donc $a_{k+1} - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k \geq 2$ pour une infinité d'indices k . $\square$

On calcule ensuite p_{k+1} à partir de (4) :

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{1}{q_k}\left(p_k q_{k+1} - \varepsilon_{k+1}\right) \\ &= a_{k+1}p_k - \frac{\varepsilon_{k+1}}{q_k}\left(1 + \varepsilon_k p_k q_{k-1}\right) \\ &= a_{k+1}p_k - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k p_{k-1} \end{aligned}$$

car $p_{k-1} = \frac{1}{q_k}\left(\varepsilon_k + p_k q_{k-1}\right)$ d'après (4) exprimée pour $k-1$.

Finalement, on a les formules de récurrence suivantes, qui fournissent l'algorithme cherché pour construire la suite des meilleures approximations :

i) $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = a_0$ l'entier le plus proche de ξ , $q_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 1$ et ε_1 le signe de $a_0 - \xi$,

ii) puis, pour $k \geq 0$, a_{k+1} est déterminé par (8) et on a

$$\left\{\begin{aligned} p_{k+1} &= a_{k+1}p_k - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k p_{k-1} \\ q_{k+1} &= a_{k+1}q_k - \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k q_{k-1} \end{aligned}\right. , \tag{9}$$

où $\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k = \frac{p_k - q_k\xi}{|p_k - q_k\xi|} \cdot \frac{p_{k-1} - q_{k-1}\xi}{|p_{k-1} - q_{k-1}\xi|}$ représente le changement de sens entre les approximations $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ et $\frac{p_k}{q_k}$ de ξ .

Remarque – Les formules (9) conduisent naturellement à un développement en fraction continue du nombre ξ sur lequel nous nous attarderons aux sections 5 et 6. On notera qu'on a $a_{k+1} = -\varepsilon_k \operatorname{Det}\begin{pmatrix} p_{k+1} & p_{k-1} \\ q_{k+1} & q_{k-1} \end{pmatrix}$, le signe différant de celui des formules donnant le développement en fraction continue (régulière) de ξ .

§ 4. **Développements en fractions continues**

Pour cette section une très bonne référence est l'ouvrage de O.Perron [7], auquel nous renvoyons pour la plupart des définitions et affirmations.

On connait le développement en fraction continue « ordinaire » dont les convergents fournissent la suite des meilleures approximations de type 0 d'un réel. Ces fractions continues, de la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0, a_1, a_2, \dots] \tag{10}$$

où a_1 , a_2 , ... sont des entiers naturels positifs et a_0 un entier relatif, sont dites *régulières*. Les fractions continues régulières infinies sont convergentes et en bijection avec les nombres réels irrationnels. À chaque nombre réel rationnel correspond exactement deux fractions continues régulières finies (dont les nombres de quotients partiels sont de parités différentes), l'une dont le dernier quotient partiel est 1 et l'autre pas. Les développements en fractions continues régulières des nombres réels quadratiques sont ceux qui sont *ultimement périodiques*. Les développements en fraction continue régulière *purement périodiques* correspondent aux nombres réels quadratique *réduits* (*i.e.* > 1 et dont le conjugué est compris entre -1 et 0).

Plus généralement, les fractions continues *semi-régulières* sont celles de la forme

$$a_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{a_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{a_2 + \cfrac{\varepsilon_3}{a_3 + \dots}}} = a_0 + \underline{\varepsilon_1 \rfloor a_1} + \underline{\varepsilon_2 \rfloor a_2} + \dots \tag{11}$$

où $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ pour $i \geq 1$, a_1 , a_2 , ... sont des entiers naturels positifs satisfaisant $a_i + \varepsilon_{i+1} \geq 1$ pour $i \geq 1$ et, si la fraction continue est infinie, $a_i + \varepsilon_{i+1} \geq 2$ pour une infinité de i tandis que si la fraction continue est finie on demande que son dernier quotient partiel soit > 1 (sauf s'il coïncide avec le terme initial). Les fractions continues semi-régulières sont convergentes et à chaque nombre réel irrationnel et suite de signes $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ correspond un unique développement en fraction continue semi-régulière ayant les ε_i comme numérateurs partiels. Un nombre réel rationnel de dénominateur q a exactement q développements en fractions continues semi-régulières. Les fractions continues semi-régulières périodiques sont en bijection avec les développements des nombres réels quadratiques pour les suites périodiques de signes prescrites.

Une fraction continue semi-régulière est dite *singulière* si on a de plus $a_i \geq 2$ et $a_i + \varepsilon_i \geq 2$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$. Tout nombre réel a un développement en fraction continue singulière, unique s'il n'est pas équivalent à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (sous $\mathrm{Sl}_2(\mathbf{Z})$). Le développement en fraction continue singulière d'un nombre réel quadratique est périodique et réciproquement.

On peut développer un nombre réel en fraction continue avec l'algorithme ordinaire mais *selon l'entier le plus proche* (plutôt que selon la partie entière). On obtient des fractions continues semi-régulières satisfaisant de plus $a_i \geq 2$ et $a_i + \varepsilon_{i+1} \geq 2$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$. Ces développements sont les plus courts pour les nombres rationnels et ils sont périodiques pour les nombres quadratiques irrationnels.

Les développements des nombres rationnels en fractions continues singulières et selon l'entier le plus proche ont les mêmes quotients et numérateurs partiels, mais rangés en ordre inverse. Les convergents $\frac{p}{q}$ des développements en fraction continue singulière et selon l'entier le plus proche d'un nombre ξ sont les meilleures approximations de type 0 qui satisfont $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2q^2}$.

On obtient également par *réduction* du développement en fraction continue régulière d'un nombre réel ξ une fraction continue, dite *diagonale*, dont les convergents $\frac{p}{q}$ sont les meilleures approximations de type 0 satisfaisant $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q^2}$. Les développements en fraction continue diagonale des nombres quadratiques irrationnels sont périodiques.

Une fraction continue de la forme (11) avec $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ et a_i des entiers naturels positifs est dite *unitaire*. J.Goldman [1], Thm.6, montre que, sous réserve qu'elle ne fasse pas apparaître une fraction partielle égale à $\underline{-1}\rceil\overline{1}$, une telle fraction continue est convergente et ses convergents appartiennent tous à la suite de Hurwitz de sa limite. En particulier, la suite de Hurwitz d'un réel ξ s'identifie avec la suite des convergents d'une fraction continue unitaire (mais pas semi-régulière) telle que $\underline{\varepsilon_i}\rceil\overline{a_i} = \underline{1}\rceil\overline{1}$ ou $\underline{-1}\rceil\overline{2}$, pour $i \geq 1$ et $a_0 = [\xi]$. Si la suite de Hurwitz est finie la fraction continue est aussi finie tandis que si la suite de Hurwitz est infinie alors $\underline{1}\rceil\overline{1}$ apparaît une infinité de fois dans la fraction continue. Réciproquement, la suite des convergents d'une fraction continue de ce type est la suite de Hurwitz de sa limite.

Suites d'approximations

Les approximations de type 0 sont les convergents du développement en fraction régulière d'un réel ξ . Par ailleurs, la suite de Hurwitz de ξ est constituée de tous les convergents $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ de ce développement en fraction continue régulière et de tous les *convergents intermédiaires* (ils sont compris entre $\frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$) :

$$\frac{\lambda p_k + p_{k-1}}{\lambda q_k + q_{k-1}} \quad , \quad \lambda = 1, \ldots, a_{k+1} - 1 \quad , \quad k \in \mathbf{N}^* \quad .$$

On a plusieurs algorithmes qui sélectionnent des sous-suites intéressantes de la suite de Hurwitz et que nous voulons maintenant rappeler. Si ξ est rationnel les algorithmes s'arrêtent lorsque $v_{k+1} = \infty$, sinon ils se poursuivent indéfiniment. Nous avons en tout premier lieu :

le développement en fraction continue régulière :

0) $a_0 = [v_0]$ est la partie entière de $v_0 = \xi$, on pose $v_1 := \frac{1}{v_0 - a_0} > 0$;

k) $a_k = [v_k]$, $\varepsilon_k = +1$, puis $v_{k+1} := \frac{1}{v_k - a_k} > 0$,

dont les convergents sont les approximations de ξ de type 0 ;

puis :

un développement en fraction continue (semi-régulière) selon l'entier le plus proche :

-1) on pose $v_0 = \xi$;

k) a_k est l'entier le plus proche de v_k , puis $v_{k+1} := \frac{1}{|v_k - a_k|} > 0$ et ε_{k+1} le signe de $v_k - a_k$,

dont les convergents $\frac{p}{q}$ satisfont $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2q^2}$, *cf.* [3], §2 ;

autre développement en fraction continue (semi-régulière) selon l'entier le plus proche :

-1) on pose $v_0 = \xi$;

k) a_k est l'entier le plus proche de $v_k + 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$, puis $v_{k+1} := \frac{1}{|v_k - a_k|} > 0$ et ε_{k+1} le signe de $v_k - a_k$,

dont les convergents $\frac{p}{q}$ satisfont $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2q^2}$, *cf.* [3], §4. Plus généralement, McKinney [6] a étudié les développement selon l'entier le plus proche après translation par un réel λ fixé, qu'il appelle *λ-développement* ;

les développements en fraction continue « négative » :

0) $a_0 = [v_0] + 1$ avec $v_0 = \xi$, on pose $v_1 := \frac{1}{a_0 - v_0} > 0$ et $\varepsilon_1 = -1$;

k) $a_k = [v_k] + 1$, puis $v_{k+1} := \frac{1}{a_k - v_k} > 0$ et $\varepsilon_{k+1} = -1$,

dont les convergents sont les approximations de ξ par valeurs supérieures ;

0) $a_0 = [v_0]$ avec $v_0 = \xi$, on pose $v_1 := \frac{1}{v_0 - a_0} > 0$ et $\varepsilon_1 = +1$;

k) $a_k = [v_k] + 1$, puis $v_{k+1} := \frac{1}{a_k - v_k} > 0$ et $\varepsilon_{k+1} = -1$,

dont les convergents sont les approximations de ξ par valeurs inférieures ;

le développement en fraction continue unitaire « complet » :

0) $a_0 = [v_0]$ avec $v_0 = \xi$, on pose $v_1 := \frac{1}{a_0 - v_0} < 0$;

k) $\begin{cases} a_k = 1 \text{ et } \varepsilon_k = 1 & \text{si } v_k < 0 \\ a_k = 2 \text{ et } \varepsilon_k = -1 & \text{si } v_k > 0 \end{cases}$, puis $v_{k+1} := \frac{1}{a_k + \varepsilon_k v_k} = \frac{1}{a_k - |v_k|}$,

dont la suite des convergents est la suite de Hurwitz de ξ , *cf.* [1].

Le développement en fraction continue complet d'un réel ξ est relié de façon simple au développement en fraction continue régulière. Si $\xi = [c_0, c_1, c_2, \ldots]$ est la suite des quotients partiels de ce dernier, le développement en fraction continue complet s'écrit :

$$\xi = [\xi] + \underline{1}\overline{|1} + \overline{\big[\underbrace{\underline{1}\overline{|1} + \underline{-1}\overline{|2} + \ldots + \underline{-1}\overline{|2}}_{c_i \text{ termes}} + \big]}_{i \geq 1}$$

où la barre indique qu'à chaque lecture de la séquence entre crochets on doit la reproduire et l'appendre avec incrémentation de l'indice entier i de 1 à $+\infty$, chaque groupe successif contenant c_i termes dont le premier est $\underline{1}\overline{|1}$ et les éventuels autres $\underline{-1}\overline{|2}$. Lorsque $\xi = [c_0, c_1, \ldots, c_m]$ est rationnel il n'y a que m groupes et le dernier groupe ne contient que $c_m - 1$ termes de sorte que la longueur totale du développement en

fraction continue complet est $c_1 + \ldots + c_m$ (en dehors de la partie entière initiale). On a la correspondance suivante entre convergents du développement en fraction continue complet, suite de Hurwitz et suite caractéristique :

$$\begin{array}{cccccccccc}
[\xi]+ & \underline{1}\rfloor\overline{1}+ & \Big[& \underline{1}\rfloor\overline{1} & + & \underline{-1}\rfloor\overline{2} & +\ldots+ & \underline{-1}\rfloor\overline{2} & + & \underline{-1}\rfloor\overline{2} & + \Big]_{i\geq 1} \\
\frac{p_0}{q_0} & \frac{p_1}{q_1} & \Big[& \frac{p_{c_1+\ldots+c_{i-1}+2}}{q_{c_1+\ldots+c_{i-1}+2}} & & \frac{p_{c_1+\ldots+c_{i-1}+3}}{q_{c_1+\ldots+c_{i-1}+3}} & \ldots & \frac{p_{c_1+\ldots+c_i}}{q_{c_1+\ldots+c_i}} & & \frac{p_{c_1+\ldots+c_i+1}}{q_{c_1+\ldots+c_i+1}} & \Big]_{i\geq 1} \\
- & + & \Big[& (-1)^{i-1} & & (-1)^{i-1} & \ldots & (-1)^{i-1} & & (-1)^{i} & \Big]_{i\geq 1}
\end{array} .$$

On fera attention dans le tableau ci-dessus à ce que lorsque $c_i = 1$ ou $c_i = 2$ les fractions partielles correspondant aux convergents $\frac{p_{c_1+\ldots+c_i}}{q_{c_1+\ldots+c_i}}$ et $\frac{p_{c_1+\ldots+c_i+1}}{q_{c_1+\ldots+c_i+1}}$ ne sont plus nécessairement $\underline{-1}\rfloor\overline{2}$, car le premier terme de chaque groupe entre crochets est toujours $\underline{1}\rfloor\overline{1}$ et la fraction $\frac{p_{c_1+\ldots+c_i}}{q_{c_1+\ldots+c_i}}$ se retrouve même avant le début de ce groupe quand $c_1 = 1$. Les convergents du développement en fraction continue régulière (*i.e.* les meilleures approximations de type 0) sont $\frac{p_0}{q_0}$ et les $\frac{p_{c_1+\ldots+c_i}}{q_{c_1+\ldots+c_i}}$, $i \geq 1$.

Quotients complets

Les quantités v_k introduites ci-dessus sont liées aux quotients complets de la fraction continue de la forme (11), c'est-à-dire pour $k \in \mathbf{N}$:

$$v_k = a_k + \cfrac{\varepsilon_{k+1}}{a_{k+1} + \cfrac{\varepsilon_{k+2}}{a_{k+2} + \cfrac{\varepsilon_{k+3}}{a_{k+3} + \ldots}}} .$$

Supposons que la fraction (11) converge vers un réel ξ et notons v_k le quotient complet ci-dessus et $\frac{p_k}{q_k}$ ses convergents, on vérifie alors :

$$\xi = \frac{v_{k+1}p_k + \varepsilon_{k+1}p_{k-1}}{v_{k+1}q_k + \varepsilon_{k+1}q_{k-1}} \quad , \quad v_{k+1} = -\varepsilon_{k+1}\frac{q_{k-1}\xi - p_{k-1}}{q_k\xi - p_k} \quad \text{et} \quad v_{k+1} = \frac{\varepsilon_{k+1}}{v_k - a_k} .$$

Les quotients complets du développement en fraction régulière ont la propriété $v_k > 1$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On peut ainsi repérer les meilleures approximations de type 0 parmi les convergents des fractions continues selon l'entier le plus proche ou complète, par exemple (ou tout autre développement dont la suite des convergents contient la suite des meilleures approximations de type 0 rangée par dénominateurs croissants). Pratiquement on considère pour ces fractions le premier produit $v_2 \ldots v_{k_1+1}$ de module > 1 , puis les produits suivants $v_{k_{i-1}+2} \ldots v_{k_i+1}$ de module > 1 , qui donnent (avec $k_0 = 0$) les indices k_i correspondants aux meilleures approximations de type 0 . Les quotients complets et partiels du développement en fraction continue régulière sont alors $u_{i+1} := |v_{k_{i-1}+2} \ldots v_{k_i+1}| = \left|\frac{q_{k_{i-1}}\xi - p_{k_{i-1}}}{q_{k_i}\xi - p_{k_i}}\right|$ et $a_{i+1} := [u_{i+1}]$.

Remarque – Si ξ est la limite de la fraction continue (11), ses quotients complets sont donnés par l'action des éléments suivants de $\mathrm{Gl}_2(\mathbf{Z})$ sur ξ ($k \in \mathbf{N}$) :

$$v_{k+1} = [\varepsilon_{k+1}]ST^{-a_k}[\varepsilon_k]ST^{-a_{k-1}}[\varepsilon_{k-1}]ST^{-a_{k-2}} \ldots [\varepsilon_1]ST^{-a_0}(\xi) \ ,$$

où $S = x \mapsto \frac{1}{x}$, $T : x \mapsto x + 1$ et $[\varepsilon] : x \mapsto \varepsilon x$.

Convergents intermédiaires

Pour les meilleures approximations de type 1 on sait les obtenir comme convergents intermédiaires du développement en fraction continue régulière. Plus précisément, si $\left(\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i}\right)_{i\in\mathbf{N}}$ est la suite des meilleures approximations de type 0 d'un réel $\xi = [c_0, c_1, c_2 \ldots]$ les convergents intermédiaires entre $\frac{\tilde{p}_{i-1}}{\tilde{q}_{i-1}}$ et $\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i}$ s'écrivent

$$\frac{\lambda\tilde{p}_i + \tilde{p}_{i-1}}{\lambda\tilde{q}_i + \tilde{q}_{i-1}} \quad , \quad \lambda = 1, \ldots, c_{i+1} - 1 \ . \tag{12}$$

Alors, les meilleures approximations de type 1 (qui ne sont pas de type 0) s'écrivent, pour $\lambda, i \in \mathbf{N}^*$:

$$\frac{\lambda\tilde{p}_i + \tilde{p}_{i-1}}{\lambda\tilde{q}_i + \tilde{q}_{i-1}}$$

avec $c_{i+1} < 2\lambda \leq 2c_{i+1} - 2$ ou bien $2\lambda = c_{i+1}$ et $[c_{i+1}, c_i, \ldots, c_2, c_1] > [c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, \ldots]$, *voir* [7], Satz 22, p.60. En effet, la condition à vérifier par une meilleure approximation de type 1 est $\left|\xi - \frac{\lambda\tilde{p}_i+\tilde{p}_{i-1}}{\lambda\tilde{q}_i+\tilde{q}_{i-1}}\right| < \left|\xi - \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i}\right|$, qui s'écrit de façon équivalente $\left|\lambda + \frac{\tilde{q}_{i-1}\xi-\tilde{p}_{i-1}}{\tilde{q}_i\xi-\tilde{p}_i}\right| < \lambda + \frac{\tilde{q}_{i-1}}{\tilde{q}_i}$ ou encore, en étendant les notations du paragraphe précédent, $2\lambda > u_{i+1} - r_{i+1}$ où $u_{i+1} := -\frac{\tilde{q}_{i-1}\xi-\tilde{p}_{i-1}}{\tilde{q}_i\xi-\tilde{p}_i}$ et $r_{i+1} := \frac{\tilde{q}_{i-1}}{\tilde{q}_i}$. Comme $c_{i+1} = [u_{i+1}]$ cela donne $2\lambda \geq c_{i+1}$ avec égalité si et seulement si $u_{i+1} - [u_{i+1}] < r_{i+1}$, ce qui est la condition énoncée car $u_{i+1} - [u_{i+1}] = [c_{i+1}, c_{i+2}, \ldots]$ et $r_{i+1} = [c_{i+1}, c_i, \ldots, c_2, c_1]$.

Les convergents intermédiaires (12) sont les éléments de la suite de Hurwitz entre $\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i} = \frac{p_{c_1+\ldots+c_i}}{q_{c_1+\ldots+c_i}}$ et $\frac{\tilde{p}_{i+1}}{\tilde{q}_{i+1}} = \frac{p_{c_1+\ldots+c_{i+1}}}{q_{c_1+\ldots+c_{i+1}}}$. On vérifie en effet

$$\begin{pmatrix} p_{c_1+\ldots+c_i+\lambda} \\ q_{c_1+\ldots+c_i+\lambda} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_{c_1+\ldots+c_i} \\ q_{c_1+\ldots+c_i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{c_1+\ldots+c_{i-1}} \\ q_{c_1+\ldots+c_{i-1}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \tilde{p}_i \\ \tilde{q}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{p}_{i-1} \\ \tilde{q}_{i-1} \end{pmatrix} \ .$$

En se basant sur la section 3 précédente, nous voulons décrire dans la suivante un algorithme donnant la fraction continue unitaire dont la liste des convergents est constituée des meilleures approximations de type 1 d'un nombre réel, rangées par dénominateurs croissants.

§ 5. **Développement des meilleures approximations de type** 1

Nous reprenons les notations de la section 3, $\xi \in [0, 1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$ est un nombre réel et $\frac{p_k}{q_k}$, $k \in \mathbf{N}$, la suite de ses meilleures approximations de type 1 . Dans le lemme 1 nous avons introduit des suites d'entiers a_k et de signes ε_k , $k \in \mathbf{N}$, satisfaisant les relations (8) et (9).

Pour $k \in \mathbf{N}$ posons $b_k := (-1)^k \varepsilon_k a_k$ et considérons les fractions continues :

$$\xi = a_0 - \cfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{a_1 - \cfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{a_2 - \cfrac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{a_3 - \dots}}} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \dots}}} \quad . \tag{13}$$

Les numérateurs et dénominateurs des convergents de celle de gauche sont p_k et q_k, satisfaisant les relations (9), tandis que ceux de celle de droite satisfont ($p'_{-1} = 1$, $q'_{-1} = 0$, $p'_0 = b_0$, $q'_0 = 1$)

$$\begin{cases} p'_{k+1} = b_{k+1}p'_k + p'_{k-1} \\ q'_{k+1} = b_{k+1}q'_k + q'_{k-1} \end{cases} \tag{14}$$

et donc $p'_k = (-1)^{[k/2]}\varepsilon_0 \dots \varepsilon_k p_k$, $q'_k = (-1)^{[k/2]}\varepsilon_0 \dots \varepsilon_k q_k$ pour $k \in \mathbf{N}$. On a aussi

$$p'_k q'_{k+1} - p'_{k+1} q'_k = (-1)^{k+1} \tag{15}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Proposition 2 – *La fraction continue dans le membre de gauche de (13) est unitaire, convergente et satisfait* $a_k - \varepsilon_k\varepsilon_{k-1} \geq 1$ *pour tout* $k \in \mathbf{N}^*$ *, avec égalité si et seulement si* $a_k = 2$ *et* $\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1}$ *. De plus, si elle est infinie alors on a* $a_k - \varepsilon_k\varepsilon_{k-1} \geq 2$ *pour une infinité de* k *. En particulier, cette fraction continue ne fait pas intervenir de fraction partielle égale à* $\underline{-1}\overline{1}$ *.*

Démonstration – Cela résulte directement du lemme 1. □

Remarque – Lorsque ξ est rationnel, les conditions $a_k \in \mathbf{N}^*$ et $a_k - \varepsilon_k\varepsilon_{k-1} \geq 1$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, sont toujours satisfaites en vertu du même lemme 1, mais il se peut que le dernier quotient partiel soit 1. *Voir* l'exemple de $\frac{1}{4}$ dont le développement en fraction continue des meilleures approximations de type 1 s'écrit : $\frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{3+\frac{1}{1}}$ et non $\frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{4}$ qui est le développement en fraction continue des meilleures approximations de type 0.

Soit $r_{k+1} := \frac{q_{k-1}}{q_k}$ et

$$v_{k+1} := a_{k+1} - \cfrac{\varepsilon_{k+1}\varepsilon_{k+2}}{a_{k+2} - \cfrac{\varepsilon_{k+2}\varepsilon_{k+3}}{a_{k+3} - \cfrac{\varepsilon_{k+3}\varepsilon_{k+4}}{a_{k+4} - \dots}}} \quad ,$$

on vérifie, à l'aide de (9) pour la première égalité,

$$r_{k+1} = \frac{1}{a_k - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k r_k} \quad , \quad v_{k+1} = \frac{\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}}{a_k - v_k} \quad . \tag{16}$$

Puis

$$\xi = \frac{v_k p_{k-1} - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k p_{k-2}}{v_k q_{k-1} - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k q_{k-2}} \quad , \quad v_k = \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k \frac{q_{k-2}\xi - p_{k-2}}{q_{k-1}\xi - p_{k-1}} \quad , \tag{17}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
\xi - \frac{p_k}{q_k} &= \frac{(v_k p_{k-1} - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k p_{k-2})q_k - (v_k q_{k-1} - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k q_{k-2})p_k}{q_k(v_k q_{k-1} - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k q_{k-2})} \\
&= \frac{v_k(p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k) - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k(p_{k-2}q_k - q_{k-2}p_k)}{q_k(v_k q_{k-1} - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k q_{k-2})} \\
&= \frac{\varepsilon_k(v_k - a_k)}{q_k(v_k q_{k-1} - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k q_{k-2})}
\end{aligned}$$

car $p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k = \varepsilon_k$ et $p_{k-2}q_k - q_{k-2}p_k = \varepsilon_{k-1}a_k$. On poursuit le calcul en utilisant à nouveau (9) :

$$\begin{aligned}
q_k\xi - p_k &= \frac{\varepsilon_k(v_k - b_k)}{(a_k q_{k-1} - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k q_{k-2}) + (v_k - a_k)q_{k-1}} \\
&= \frac{\varepsilon_k(v_k - a_k)}{q_k + (v_k - a_k)q_{k-1}} \quad .
\end{aligned}$$

On a alors en inversant et changeant de signe les deux membres de l'égalité précédente $\frac{1}{p_k - q_k\xi} = \frac{\varepsilon_k q_k}{a_k - v_k} - \varepsilon_k q_{k-1}$, puis avec (16) et la définition de ε_{k+1} :

$$v_{k+1} = \frac{\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}}{a_k - v_k} = \frac{\varepsilon_{k+1}}{q_k(p_k - q_k\xi)} + \varepsilon_k\varepsilon_{k+1}\frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{1}{q_k|p_k - q_k\xi|} + \varepsilon_k\varepsilon_{k+1}r_{k+1} \quad .$$

D'après le lemme 1 on a $a_{k+1} \in \mathbf{N}^*$ et par suite $\frac{1}{2q_k|p_k - q_k\xi|} + \varepsilon_k\varepsilon_{k+1}r_{k+1} \geq 0$, ce qui montre $\frac{1}{2}(v_{k+1} + \varepsilon_k\varepsilon_{k+1}r_{k+1}) \geq 0$, $v_{k+1} > 0$ et

$$\frac{1}{2}(v_{k+1} - \varepsilon_k\varepsilon_{k+1}r_{k+1}) = \frac{1}{2q_k|p_k - q_k\xi|} > 0 \quad . \tag{18}$$

Cette quantité $v_{k+1} - \varepsilon_k\varepsilon_{k+1}r_{k+1}$ quantifie l'« excès » d'approximation de ξ par $\frac{p_k}{q_k}$ comparativement à la meilleure approximation « minimale » : $\frac{1}{q_k^2}$. En reportant l'expression (18) dans la définition (8) de a_{k+1} , on trouve

$$(-1)^{k+1}\varepsilon_{k+1}b_{k+1} = a_{k+1} = 1 + \left[\frac{1}{2}(v_{k+1} + \varepsilon_k\varepsilon_{k+1}r_{k+1})\right] \quad . \tag{19}$$

De plus, comme $v_{k+1} = \frac{\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}}{a_k - v_k} > 0$ on en déduit que ε_{k+1} est le signe de $\varepsilon_k(a_k - v_k)$.

Par ailleurs, il résulte de (16) :

$$\varepsilon_{k+1}v_{k+1} - \varepsilon_k r_{k+1} = \frac{\varepsilon_k v_k - \varepsilon_{k-1}r_k}{(a_k - v_k)(a_k - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k r_k)}$$

et

$$v_{k+1} = \cfrac{\varepsilon_{k+1}\varepsilon_k}{a_k - \cfrac{\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}}{\ddots \quad a_1 - \cfrac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{a_0 - \xi}}} \quad , \qquad r_{k+1} = \cfrac{1}{a_k - \cfrac{\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}}{a_{k-1} - \cfrac{\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-2}}{\ddots \quad - \cfrac{\varepsilon_2\varepsilon_1}{a_1}}}} \quad .$$

Posons $v_0 := \xi$, $r_0 := \infty$ et a_0 l'entier le plus proche de ξ , on a l'algorithme suivant pour déterminer la fraction continue dont les convergents forment la suite des meilleures approximations de type 1 d'un nombre réel ξ :

0) a_0 est l'entier relatif le plus proche de $v_0 = \xi$ et ε_0 le signe de ξ , soit $\varepsilon_1 := \varepsilon_0 \frac{a_0 - v_0}{|a_0 - v_0|}$, $v_1 := \frac{1}{|a_0 - v_0|}$ et $r_1 := \frac{1}{a_0 - \varepsilon_0 r_0} = 0$;

k) on pose $a_k := 1 + \left[\frac{1}{2}(v_k + \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k r_k)\right]$, puis $\varepsilon_{k+1} := \varepsilon_k \frac{a_k - v_k}{|a_k - v_k|}$, $v_{k+1} := \frac{1}{|a_k - v_k|}$ et $r_{k+1} := \frac{1}{a_k - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k r_k}$.

Si ξ est rationnel on arrête l'algorithme lorsque $a_k = v_k$.

On vérifie alors que les fractions continues (13) ainsi obtenues convergent vers ξ . En effet, d'après (9) et (14), leurs convergents forment la suite $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ des meilleures approximations de type 1 de ξ .

Remarques – 1) Avec les mêmes notations que précédemment, la fraction continue des meilleures approximations de type 1 de $-\xi$ est

$$-a_0 + \cfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{a_1 - \cfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{a_2 - \cfrac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{a_3 - \dots}}} \quad .$$

2) En confrontant les équations (16) et (19) on obtient

$$\frac{\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}}{v_{k+1}} = a_k - v_k = 1 + \left[\frac{1}{2}(v_k + \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k r_k)\right] - v_k \quad .$$

Comme $r_k < 1$ on observe donc que $\varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_k$ et v_{k+1} est petit (et en particulier plus petit que 1) dès que v_k est assez grand, précisément : $-\frac{v_k+1}{2} < \frac{\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}}{v_{k+1}} < -\frac{v_k-3}{2}$.

Mesures d'approximations

Dans le développement en fraction continue des meilleures approximations de type 1 d'un réel ξ on a un lien direct entre la qualité de l'approximation $\frac{p_k}{q_k}$ et

l'ampleur du saut vers q_{k+1} . rappelons que q_{k+1} est le plus petit entier de la forme $-\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k q_{k-1} + \lambda q_k$, $\lambda \in \mathbf{Z}$, satisfaisant $|q_k\xi - p_k| > \frac{1}{2q_{k+1}}$, d'où pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$\frac{1}{2q_{k+1}} < |p_k - q_k\xi| \leq \frac{1}{2(q_{k+1} - q_k)} \quad . \tag{20}$$

D'un autre côté, pour tous entiers $p, q \in \mathbf{Z}$ tels que $q_k \leq q < q_{k+1}$ on a $q_{k+1} \leq (a_{k+1} + 1)q_k$ et

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{2q_{k+1}q_k} > \frac{1}{2(a_{k+1}+1)q_k^2} > \frac{1}{2(a_{k+1}+1)q^2} \quad . \tag{21}$$

D'où l'intérêt de contrôler la variation des quotients partiels a_{k+1} pour obtenir de bonnes mesures d'approximation rationnelle d'un nombre réel ξ .

Le cas des nombres quadratiques : périodicité

Supposons maintenant ξ quadratique sur $\mathbf{Q}$ d'équation $ax^2 + bx + c = 0$, alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$, v_k satisfait l'équation quadratique

$$Av_k^2 + Bv_k + C = 0 \tag{22}$$

où

$$\begin{aligned} A &:= a{p'}_{k-1}^2 + b{p'}_{k-1}{q'}_{k-1} + c{q'}_{k-1}^2 \\ B &:= 2a{p'}_{k-1}{p'}_{k-2} + b({p'}_{k-1}{q'}_{k-2} + {p'}_{k-2}{q'}_{k-1}) + 2c{q'}_{k-1}{q'}_{k-2} \\ C &:= a{p'}_{k-2}^2 + b{p'}_{k-2}{q'}_{k-2} + c{q'}_{k-2}^2 \quad . \end{aligned}$$

On observe que les équations de ξ et v_k se déduisent l'une de l'autre par une transformation de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et ont donc même discriminant : $B^2 - 4AC = b^2 - 4ac$. Par ailleurs on vérifie

$$\left|\frac{C}{A}\right| \approx \frac{q_{k-2}|q_{k-2}\xi - p_{k-2}|}{q_{k-1}|q_{k-1}\xi - p_{k-1}|} = |r_k v_k| \leq |v_k| \quad ,$$

d'où ensuite

$$\left|\frac{B}{A}\right| \leq \sqrt{\frac{4C}{A} + \frac{b^2 - 4ac}{A}} \ll |v_k|^{1/2} \quad .$$

Ces estimations, reportées dans (22), montrent que $|v_k|$ est borné et donc, par (19), aussi $|b_k|$ qui, étant entier, ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs. On déduit de (14) que les quotients $\frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{1}{|r_{k+2}|}$ sont également bornés et, d'après (6), on a $\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{2q_k q_{k+1}} \gg \frac{1}{q_k^2}$.

En fait, comme dans le cas des fractions continues régulières le développement en fractions continues des meilleures approximations de type 1 des nombres quadratiques sont exactement ceux qui sont ultimement périodiques.

Théorème 3 – *Si* ξ *est un nombre irrationnel quadratique, son développement des meilleures approximations de type* 1 *est ultimement périodique et réciproquement.*

Démonstration – On montre comme pour le développement en fraction continue régulière que les quotients complets sont des nombres quadratiques de hauteur bornée, donc sont en nombre fini. Cela implique le retour d'au moins un de ces quotients complets dans la suite infinie qu'ils constituent. Toutefois, cela n'est pas suffisant pour assurer la périodicité de la suite car la définition du quotient partiel et donc du quotient complet suivant, dépend aussi de la valeur des quotients des dénominateurs partiels successifs, qui elle ne contient pas deux termes identiques. Mais on peut tout de même trouver une répétition dans la suite des triplets $(v_k, \varepsilon_k, \varepsilon_{k-1})$ qui sont en nombre fini, ceci assure la périodicité des fractions partielles.

Soit donc $k < \ell$ deux indices distincts et assez grands tels que $(v_k, \varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}) = (v_\ell, \varepsilon_\ell, \varepsilon_{\ell-1})$. Montrons qu'on a égalité des quotients partiels $a_k = a_\ell$ et pour cela comparons $\sigma(v_k) - \varepsilon_k\varepsilon_{k-1}r_k$ et $\sigma(v_\ell) - \varepsilon_\ell\varepsilon_{\ell-1}r_\ell$ en désignant par σ la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\xi)$. On sait que $\sigma(v_k) - \varepsilon_k\varepsilon_{k-1}r_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et on calcule

$$\begin{aligned}
\sigma(v_k) &= \varepsilon_k\varepsilon_{k-1}r_k\frac{\sigma(\xi) - p_{k-2}/q_{k-2}}{\sigma(\xi) - p_{k-1}/q_{k-1}} \\
&= \varepsilon_k\varepsilon_{k-1}r_k\frac{(\sigma(\xi) - \xi) + (\xi - p_{k-2}/q_{k-2})}{(\sigma(\xi) - \xi) + (\xi - p_{k-1}/q_{k-1})} \\
&= \varepsilon_k\varepsilon_{k-1}r_k\frac{(\sigma(\xi) - \xi) - \varepsilon_{k-1}\left|\xi - p_{k-2}/q_{k-2}\right|}{(\sigma(\xi) - \xi) - \varepsilon_k\left|\xi - p_{k-1}/q_{k-1}\right|} \quad .
\end{aligned}$$

Comme $|\xi - p_{k-1}/q_{k-1}| < |\xi - p_{k-2}/q_{k-2}|$ on vérifie que $\frac{(\sigma(\xi)-\xi)-\varepsilon_{k-1}|\xi-p_{k-2}/q_{k-2}|}{(\sigma(\xi)-\xi)-\varepsilon_k|\xi-p_{k-1}/q_{k-1}|}$ satisfait

$$\begin{cases} < 1 & \text{si } \varepsilon_{k-1} = \varepsilon_k = \frac{\sigma(\xi)-\xi}{|\sigma(\xi)-\xi|} \text{ ou } \varepsilon_{k-1} = -\varepsilon_k = \frac{\sigma(\xi)-\xi}{|\sigma(\xi)-\xi|} \\ > 1 & \text{si } -\varepsilon_{k-1} = \varepsilon_k = \frac{\sigma(\xi)-\xi}{|\sigma(\xi)-\xi|} \text{ ou } -\varepsilon_{k-1} = -\varepsilon_k = \frac{\sigma(\xi)-\xi}{|\sigma(\xi)-\xi|} \end{cases} .$$

Ainsi, le signe de $\sigma(v_k) - \varepsilon_k\varepsilon_{k-1}r_k$ ne dépend que des valeurs de ε_{k-1} et ε_k par rapport à $\frac{\sigma(\xi)-\xi}{|\sigma(\xi)-\xi|}$. On en déduit que le signe de

$$\frac{1}{2}(v_k + \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k r_k) - \frac{1}{2}(v_k + \sigma(v_k)) = -\frac{1}{2}(\sigma(v_k) - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k r_k)$$

ne dépend que des valeurs de ε_{k-1} et ε_k . Et comme $v_k = v_\ell$, $\varepsilon_{k-1} = \varepsilon_{\ell-1}$, $\varepsilon_k = \varepsilon_\ell$ et k est assez grand les quantités $\frac{1}{2}(v_k+\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k r_k)$ et $\frac{1}{2}(v_\ell+\varepsilon_{\ell-1}\varepsilon_\ell r_\ell)$ sont toutes deux voisines de $t := \frac{1}{2}(v_k+\sigma(v_k)) = \frac{1}{2}(v_\ell+\sigma(v_\ell))$ et du même côté de t . Que t soit entier ou non cela entraîne que les parties entières de $\frac{1}{2}(v_k + \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k r_k)$ et $\frac{1}{2}(v_\ell + \varepsilon_{\ell-1}\varepsilon_\ell r_\ell)$ sont égales et donc $a_k = a_\ell$. Les expressions de v_{k+1} et ε_{k+1} ne dépendant que de a_k , v_k et ε_k , il résulte $v_{k+1} = v_{\ell+1}$ et $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{\ell+1}$ et la périodicité de la suite (ε_k, a_k) pour k assez grand. □

§ 6. Quelques développements en fraction continue dont les convergents sont les meilleures approximations de type 1

Les algorithmes décrits aux sections 4 et 5 sont efficaces et faciles à programmer (avec PARI par exemple). Nous donnons ici les développements en fractions continues de type 0 (usuel) et de type 1 pour quelques nombres particuliers. Une barre indique une séquence qui se répète indéfiniment avec une éventuelle incrémentation d'un paramètre indiqué en indice. Des petits points indiquent que le développement se continue sans motif apparent. Nous décrirons ensuite précisément la structure des développements en fraction continue des meilleures approximations de type 1 .

Nota Bene – Sont indiquées en rouge les fractions partielles qui correspondent aux convergents donnant les meilleures approximations de type 0 .

$$\frac{1}{4} = [0,4] = 0 + \underline{1}\boxed{3} + \underline{1}\boxed{1}$$

$$\frac{85}{38} = [2,4,4,2] = 2 + \underline{1}\boxed{3} + \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{4} + \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{1}\boxed{1}$$

$$\frac{92}{13} = [7,13] = 7 + \underline{1}\boxed{7} + \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2}$$

$$\sqrt{2} = [1,\overline{2}] = 1 + \underline{1}\boxed{2} + \overline{[\ \underline{1}\boxed{1} + \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{3}\ ]}$$

$$\sqrt{3} = [1,\overline{1,2}] = 2 + \underline{-1}\boxed{2} + \overline{[\ \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{1}\boxed{1}\ ]}$$

$$\sqrt{5} = [2,\overline{4}] = 2 + \underline{1}\boxed{3} + \overline{[\ \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{3} + \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{4}\ ]}$$

$$\sqrt{6} = [2,\overline{2,4}] = 2 + \underline{1}\boxed{2} + \overline{[\ \underline{1}\boxed{2} + \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{3}\ ]}$$

$$\sqrt{7} = [2,\overline{1,1,1,4}] = 3 + \underline{-1}\boxed{2} + \overline{[\ \underline{1}\boxed{1} + \underline{1}\boxed{2} + \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{1}\boxed{1}\ ]}$$

$$\sqrt{167} = [12,\overline{1,11,1,24}]$$
$$= 13 + \underline{-1}\boxed{7} + \overline{[\ \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{1}\boxed{12} + \underline{1}\boxed{1} + \underbrace{\underline{-1}\boxed{2} + \ldots + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2}}_{12} + \underline{1}\boxed{6}\ ]}$$

$$\sqrt{\frac{69}{7}} = [3,\overline{7,6}] = 3 + \underline{1}\boxed{4} + \overline{[\ \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{4} + \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{5}\ ]}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [\overline{1}] = 2 + \underline{-1}\boxed{2} + \overline{[\ \underline{1}\boxed{1}\ ]}$$

$$\sqrt[q]{e} = [\overline{1, q-1+2qn, 1}]_{n\in\mathbf{N}}$$
$$= 1 + \underline{1}\boxed{\left[\tfrac{q+1}{2}\right]} + \underline{1}\boxed{1} + \underbrace{\underline{-1}\boxed{2} + \ldots + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2}}_{\left[\frac{q-2}{2}\right]} + \overline{\left[\ \underline{1}\boxed{1} + \underline{1}\boxed{\left[\tfrac{q}{2}\right] + qn} + \underline{1}\boxed{1} + \underbrace{\underline{-1}\boxed{2} + \ldots + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2}}_{\left[\frac{q-1}{2}\right] + qn}\ \right]}_{n\in\mathbf{N}^*}, \quad q \geq 3\ (\geq 6)$$

$$e = [2,\overline{1,2n,1}]_{n\in\mathbf{N}^*} = 3 + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{1}\boxed{1} + \underline{-1}\boxed{2} + \overline{\left[\ \underline{1}\boxed{1} + \underline{1}\boxed{n} + \underline{1}\boxed{1} + \underbrace{\underline{-1}\boxed{2} + \ldots + \underline{-1}\boxed{2} + \underline{-1}\boxed{2}}_{n}\ \right]}_{n\geq 2}$$

$$\sqrt{\mathrm{e}}=[\overline{1,1+4n,1}]_{n\in\mathbf{N}}=2+\underline{-1}\,\overline{2}+\left[\overline{\underline{1}\,\overline{1}+\underline{1}\,\overline{1+2n}+\underline{1}\,\overline{1}+\underbrace{\underline{-1}\,\overline{2}+\ldots+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}}_{0+2n}}\right]_{n\in\mathbf{N}^*}$$

$$\sqrt[3]{\mathrm{e}}=[\overline{1,2+6n,1}]_{n\in\mathbf{N}}=1+\underline{1}\,\overline{2}+\underline{1}\,\overline{1}+\left[\overline{\underline{1}\,\overline{1}+\underline{1}\,\overline{1+3n}+\underline{1}\,\overline{1}+\underbrace{\underline{-1}\,\overline{2}+\ldots+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}}_{1+3n}}\right]_{n\in\mathbf{N}^*}$$

$$\sqrt[4]{\mathrm{e}}=[\overline{1,3+8n,1}]_{n\in\mathbf{N}}=1+\underline{1}\,\overline{2}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{-1}\,\overline{2}+\left[\overline{\underline{1}\,\overline{1}+\underline{1}\,\overline{2+4n}+\underline{1}\,\overline{1}+\underbrace{\underline{-1}\,\overline{2}+\ldots+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}}_{1+4n}}\right]_{n\in\mathbf{N}^*}$$

$$\sqrt[5]{\mathrm{e}}=[\overline{1,4+10n,1}]_{n\in\mathbf{N}}=1+\underline{1}\,\overline{3}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{-1}\,\overline{2}+\left[\overline{\underline{1}\,\overline{1}+\underline{1}\,\overline{2+5n}+\underline{1}\,\overline{1}+\underbrace{\underline{-1}\,\overline{2}+\ldots+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}}_{2+5n}}\right]_{n\in\mathbf{N}^*}$$

$$\sqrt[6]{\mathrm{e}}=[\overline{1,5+12n,1}]_{n\in\mathbf{N}}=1+\underline{1}\,\overline{3}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\left[\overline{\underline{1}\,\overline{1}+\underline{1}\,\overline{3+6n}+\underline{1}\,\overline{1}+\underbrace{\underline{-1}\,\overline{2}+\ldots+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}}_{2+6n}}\right]_{n\in\mathbf{N}^*}$$

$$\sqrt[7]{\mathrm{e}}=[\overline{1,6+14n,1}]_{n\in\mathbf{N}}=1+\underline{1}\,\overline{4}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\left[\overline{\underline{1}\,\overline{1}+\underline{1}\,\overline{3+7n}+\underline{1}\,\overline{1}+\underbrace{\underline{-1}\,\overline{2}+\ldots+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}}_{3+7n}}\right]_{n\in\mathbf{N}^*}$$

$$\begin{aligned}\pi&=[3,7,15,1,\ldots]\\&=3+\underline{1}\,\overline{4}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{9}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{1}\,\overline{146}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^2&=[7,\overline{2+3n,1,1,3+3n,18+12n}]_{n\in\mathbf{N}}\\&=7+\underline{1}\,\overline{2}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{1}\,\overline{2}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{-1}\,\overline{10}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{4}\\&\quad+\left[\overline{\underline{1}\,\overline{1}+\underbrace{\underline{-1}\,\overline{2}+\ldots+\underline{-1}\,\overline{2}+\underline{-1}\,\overline{2}}_{2+\left[\frac{3(n-1)}{2}\right]}+\underline{1}\,\overline{1}+\underline{1}\,\overline{2+\left[\frac{3n}{2}\right]}+\underline{1}\,\overline{1}+\underbrace{\underline{-1}\,\overline{2}+\ldots+\underline{-1}\,\overline{2}}_{2+\left[\frac{3(n-1)}{2}\right]}+\underline{-1}\,\overline{10+6n}+\underline{1}\,\overline{1}+\underbrace{\underline{-1}\,\overline{2}+\ldots+\underline{-1}\,\overline{2}}_{8+6n}+\underline{-1}\,\overline{3+\left[\frac{3(n+1)}{2}\right]}}\right]_{n\in\mathbf{N}^*}\end{aligned}$$

Les premières formules donnant les développements en fraction continue régulière sont connus, *voir* [7] par exemple. Pour démontrer les égalités avec les développements en

fraction continue des meilleures approximations de type 1 , on peut ramener ces derniers aux premiers à l'aide de la transformation (élimination des convergents superflus, ici $\frac{p_i}{q_i}$) faisant passer du développement :

$$\ldots + \underline{c_i}\,\overline{\big|\, a_i} + \underline{c_{i+1}}\,\overline{\big|\, a_{i+1}} + \underline{c_{i+2}}\,\overline{\big|\, a_{i+2}} + \underline{c_{i+3}}\,\overline{\big|\, a_{i+3}} + \ldots$$

au développement :

$$\ldots + \underline{a_{i+1}c_i}\,\overline{\big|\, a_i a_{i+1} + c_{i+1}} + \underline{-c_{i+1}c_{i+2}}\,\overline{\big|\, a_{i+1}a_{i+2} + c_{i+2}} + \underline{a_{i+1}c_{i+3}}\,\overline{\big|\, a_{i+3}} + \ldots$$

De plus, lorsque la première approximation ne coïncide pas avec la partie entière du nombre, c'est le début du développement en fraction continue régulière que l'on raccourcit de son terme initial avec la transformation ($c_1 = 1$) :

$$a_0 + \underline{c_1}\,\overline{\big|\, a_1} + \underline{c_2}\,\overline{\big|\, a_2} + \ldots = (a_0 + c_1) + \underline{-c_1c_2}\,\overline{\big|\, a_2 + c_2} + \ldots$$

On constate alors que les développements déduits par ces méthodes coïncident avec les dévelopement en fraction continue réguliers connus.

Les mêmes méthodes permettent de déduire le développement en fraction continue des meilleures approximations de type 1 du développement en fraction continue complet avec les résultats sur les convergents intermédiaires rappelés à la fin de la section 4. Précisément, si $\xi = [c_0, c_1, c_2, \ldots]$ est la suite des quotients partiels du développement en fraction continue régulière on pose d'abord

$$c'_0 := \begin{cases} 1 & \text{si } \xi > [\xi] + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \xi < [\xi] + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad c'_i := \begin{cases} c_{i+1} & \text{si } \xi > [\xi] + \frac{1}{2} \\ c_i & \text{si } \xi < [\xi] + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{pour } i \geq 1 ,$$

puis $\lambda_0 = 0$ et pour $i \geq 1$

$$\lambda_i := \begin{cases} \frac{c'_i}{2} & c'_i \text{ est pair et } [c'_i, c'_{i-1}, \ldots, c_2, c_1] > [c'_i, c'_{i+1}, c'_{i+2}, \ldots] \\ \left[\frac{c'_i}{2}\right] + 1 & \text{sinon} \end{cases} ,$$

et enfin

$$a_0 := \begin{cases} [\xi] + 1 & \text{si } \xi > [\xi] + \frac{1}{2} \\ [\xi] & \text{si } \xi < [\xi] + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \underline{\varepsilon_i}\,\overline{\big|\, a_i} := \begin{cases} \underline{-1}\,\overline{\big|\, \lambda_i + 1} & \text{si } c'_{i-1} > \lambda_{i-1} \\ \underline{1}\,\overline{\big|\, \lambda_i} & \text{si } c'_{i-1} = \lambda_{i-1} \end{cases} , \quad i \geq 1 .$$

Alors le développement en fraction continue des meilleures approximations de type 1 s'écrit :

$$\xi = a_0 + \overline{\big[\underbrace{\underline{\varepsilon_i}\,\overline{\big|\, a_i} + \underline{1}\,\overline{\big|\, 1} + \underline{-1}\,\overline{\big|\, 2} + \ldots + \underline{-1}\,\overline{\big|\, 2} +}_{c'_i - \lambda_i + 1 \text{ termes}}\big]}_{i \geq 1} . \tag{23}$$

On sait quels sont exactement les éléments de la suite de Hurwitz qui sont les meilleures approximations de type 1 de ξ . Ce sont a_0 et les fractions $\frac{p_{c'_0 + \ldots + c'_{i-1} + \lambda}}{q_{c'_0 + \ldots + c'_{i-1} + \lambda}}$ avec $\lambda = \lambda_i, \ldots, c'_i$ et $i \geq 1$. il suffit donc d'éliminer les convergents superflus entre $\frac{p_{c'_0 + \ldots + c'_{i-1}}}{q_{c'_0 + \ldots + c'_{i-1}}}$ et $\frac{p_{c'_0 + \ldots + c'_{i-1} + \lambda_i}}{q_{c'_0 + \ldots + c'_{i-1} + \lambda_i}}$. On vérifiera sur les exemples décrits ci-dessus que les développements en fraction continue des meilleures approximations de type 1 ont bien la structure de la formule (23). Le point délicat est la vérification de la condition dans la définition de λ_i lorsque c'_i est pair, c'est ce que fait automatiquement l'algorithme présenté à la section 5.

Références

[1] Goldman J. – *Hurwitz sequences, the Farey process and general continued fractions*, Adv. in Math., 72/2, 1988, 239–260.

[2] Hardy G.H. & Wright E.M. – *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5ème édition, Oxford Univ. Press, 1979.

[3] Hurwitz A. – *Über eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung reeller Grössen*, Acta Math., 12, 1889, 367–405 & Oeuvres, tome II, 84–128.

[4] Hurwitz A. – *Über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche*, Math. Ann., 14, 1894, 417–436 & Oeuvres, tome II, 137–156.

[5] Jones W.B. & Thron W.J. – *Continued fractions : Analytic theory and applications*, Encycl. Math. Appl. 11, Addison Wesley Publ. Comp., 1980.

[6] McKinney T.E. – Concerning a Certain Type of Continued Fractions Depending on a Variable Parameter, Amer. J. Math., 29/3, 1907, 213–278.

[7] Perron O. – *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 2ème édition, Chelsea Publ. Company, New York, 1930.

[8] Richards I. – *Continued fractions without tears*, Math. Magazine, 54/4, 1981, 163–171.