Propriété de décomposition en KK-théorie équivariante pour l'action d'un groupoïde

Hervé Oyono-Oyono

Appendice de l'article de V. Lafforgue *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach, groupoïdes et conjecture de Baum-Connes*, Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu **6** (2007), n° 3, 415–451.

Propriété de décomposition en $\mathrm{KK}-$théorie équivariante par l'action d'un groupoïde

Hervé OYONO-OYONO

Keywords : Kasparov bivariant $\mathrm{KK}-$theory, Groupoids.
M.S.C :19K35,(20L05,22A22,46L80).

1. Introduction

V. Lafforgue a montré dans [4] que tout élément de $\mathrm{KK}-$théorie équivariante par rapport à l'action d'un groupe pouvait s'écrire comme le produit d'un élément induit par un morphisme et de l'inverse en $\mathrm{KK}-$théorie équivariante d'un élément induit par un morphisme (c'est à dire vérifiant la condition 2 de la définition 2.1 dans le cas où $\mathcal{G}$ est un groupe). Ce résultat est crucial pour montrer la relation de compatibilité "minimale" entre produit en $\mathrm{KK}-$théorie de Kasparov et application de descente en $\mathrm{KK}-$théorie des algèbres de Banach. La preuve donnée dans [4] utilise un résultat de K. Thomsen sur l'existence d'unités approchées invariantes (voir [8]). Afin d'éviter d'avoir recours à un résultat analogue dans le cas des groupoïdes pour montrer cette relation de compatibilité "minimale", nous montrons que tout élément de $\mathrm{KK}-$théorie équivariante par rapport à un groupoïde satisfait une propriété de décomposition un peu plus générale que la précédente : la propriété de décomposition (d) (voir définition 2.1). Nous renvoyons le lecteur à [2] et à [5] pour les définitions de la $\mathrm{KK}-$théorie de Kasparov et la $\mathrm{KK}-$théorie des algèbres de Banach équivariantes par l'action d'un groupoïde.

2. Propriété de décomposition (d)

Dans tout cet article, les groupoïdes seront supposés localement compact et munis d'un système de Haar et pour tout groupoïde localement compacts $\mathcal{G}$, nous désignerons par $\mathcal{G}$-algèbre une C^*-algèbre séparable munie d'une action de $\mathcal{G}$ [2].

Definition 2.1. *Soient $\mathcal{G}$ un groupoïde, A et B deux $\mathcal{G}$-algèbres et α un élément de $\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A,B)$. On dit que α a la propriété de décomposition (d) si α vérifie la condition suivante : il existe*

- *$A_0,\dots,A_n$ des $\mathcal{G}$-algèbres avec $A=A_0$ et $B=A_n$,*
- *$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ avec $\alpha_i\in\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A_{i-1},A_i)$ d'une des deux formes suivantes :*
  1. *α_i est induit par un morphisme $A_i\to A_{i+1}$;*
  2. *Il existe un morphisme $\theta_i : A_{i+1}\to A_i$ tel que $[\theta_i]\otimes_{A_i}\alpha_i=1_{A_{i+1}}$ et $\alpha_i\otimes_{A_{i+1}}[\theta_i]=1_{A_i}$ où $[\theta_i]\in\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A_{i+1},A_i)$ est induit par le morphisme θ_i, autrement dit α_i est l'inverse en KK-théorie $\mathcal{G}$-équivariante d'un morphisme ;*

tels que

$$\alpha = \alpha_1 \otimes_{A_1} \cdots \otimes_{A_n} \alpha_n.$$

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant :

Theorem 2.2. *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde et soit A et B deux $\mathcal{G}$-algèbres. Alors tout élément α de $\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A,B)$ a la propriété de décomposition (d).*

La démonstration de ce théorème sera donnée dans la section suivante. La fin de cette section est consacrée à des rappels sur les actions de groupoïdes (voir [2]). Nous renvoyons le lecteur à [6] pour la définition des groupoïdes et à [1] pour la notion de $C(X)-$algèbres. Dans toute la suite, $\mathcal{G}$ désignera un groupoïde, X l'espace de ses unités, $s : \mathcal{G} \to X$ l'application source et $r : \mathcal{G} \to X$ l'application but. Si x est un élément de X, on note $\mathcal{G}^x = \{\gamma \in \mathcal{G} \text{ tel que } r(\gamma) = x\}$. On suppose que $\mathcal{G}$ est muni d'un système de Haar $(\lambda^x)_{x\in X}$.

Soit B une $C(X)$-algèbre. Pour tout $x \in X$, on note B_x la fibre de B en x et pour tout $b \in B$ on désigne par $b(x) \in B_x$ la fibre de b en x. Soient $s^*B = B \otimes_s C_0(\mathcal{G})$ et $r^*B = B \otimes_r C_0(\mathcal{G})$ les tirés en arrière respectifs de B par s et r. Les algèbres s^*B et r^*B sont des $C(\mathcal{G})$-algèbres dont les fibres en $\gamma \in \mathcal{G}$ sont respectivement $B_{s(\gamma)}$ et $B_{r(\gamma)}$. On rappelle qu'une action de $\mathcal{G}$ sur B est la donnée d'un isomorphisme de $C(\mathcal{G})$-algèbre $\beta : s^*B \to r^*B$ tel que $\beta_\gamma \cdot \beta_{\gamma'} = \beta_{\gamma\circ\gamma'}$ lorsque $s(\gamma) = r(\gamma')$.

Soit Ξ un B-module de Hilbert à droite, on définit de même Ξ_x la fibre de Ξ en x, $s^*\Xi = \Xi \otimes_s C_0(\mathcal{G})$ et $r^*\Xi = \Xi \otimes_r C_0(\mathcal{G})$ respectivement les tirés en arrière de Ξ par s et r. Alors, $s^*\Xi$ est un s^*B-module de Hilbert à droite dont la fibre en $\gamma \in \mathcal{G}$ est $\Xi_{s(\gamma)}$ et $r^*\Xi$ est un r^*B-module de Hilbert à droite dont la fibre en $\gamma \in \mathcal{G}$ est $\Xi_{r(\gamma)}$. Si σ est dans $r^*\Xi$, on note $\sigma(\gamma) \in \Xi_{r(\gamma)}$ la fibre de σ en γ.

Une action de $\mathcal{G}$ sur Ξ est alors la donnée d'un unitaire V de $\mathcal{L}(s^*\Xi, r^*\Xi)$ tel que $V_\gamma \cdot V_{\gamma'} = V_{\gamma\circ\gamma'}$ lorsque $s(\gamma) = r(\gamma')$, la structure de s^*B-module de Hilbert à droite sur $r^*\Xi$ étant obtenue grâce à l'isomorphisme $\beta^{-1} : r^*B \to s^*B$.

On définit $L^2(\mathcal{G})$ le $C(X)$-module de Hilbert à droite comme étant la complétion de l'algèbre $C_c(\mathcal{G})$ des fonctions continue sur $\mathcal{G}$ à support compact pour le $C_0(X)$-produit scalaire $\langle \phi/\phi' \rangle(x) = \int_{\gamma\in\mathcal{G}^x} \bar{\phi} \cdot \phi' d\lambda^x(\gamma)$ pour tout $x \in X$, où ϕ et ϕ' sont des éléments de $C_c(\mathcal{G})$. Le $C(X)$-module de Hilbert à droite $L^2(\mathcal{G})$ est alors muni d'une action de $\mathcal{G}$ (la représentation régulière gauche de $\mathcal{G}$). Soit Ξ un B-module de Hilbert à droite muni d'une action de $\mathcal{G}$. Considérons $L^2(\mathcal{G}, \Xi) = \Xi \otimes_{C_0(X)} L^2(\mathcal{G})$ muni de l'action diagonale de $\mathcal{G}$. Soit $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$ le sous-r^*B-module de $r^*\Xi$ des éléments à support compact, c'est à dire des éléments de la forme $f \cdot \sigma$ où f est une fonction de $C_c(\mathcal{G})$ et σ appartient à $r^*\Xi$. On a une inclusion à image dense de $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$ dans $L^2(\mathcal{G}, \Xi)$.

3. Preuve du théorème 2.2

Pour toute C^*-algèbre séparable B et pour tout B-module de Hilbert à droite Ξ, on désigne par $\mathcal{L}(\Xi)$ la C^*-algèbre des endomorphismes adjoinables de $\mathcal{L}(\Xi)$ et par $\mathcal{K}(\Xi)$ l'idéal des opérateurs compact de $\mathcal{L}(\Xi)$. Le théorème 2.2 est alors une conséquence des quatre lemmes suivants.

Lemma 3.1. *Soit B une $\mathcal{G}$-algèbre et soit Ξ un B-module de Hilbert $\mathcal{G}$-équivariant. Supposons que l'idéal engendré par $\{\langle \xi, \nu \rangle\,;(\xi, \nu) \in \Xi^2\}$ soit dense dans B, alors les éléments*

$$M \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(\Xi), B)$$

et

$$M' \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(B, \mathcal{K}(\Xi))$$

induits par les Morita équivalences $\mathcal{G}$-équivariantes entre B et $\mathcal{K}(\Xi)$ vérifient la propriété de décomposition (d).

Démonstration. Soit $i_1 : B \to \mathcal{K}(\Xi \oplus B)$ et $i_2 : \mathcal{K}(\Xi) \to \mathcal{K}(\Xi \oplus B)$ les inclusions naturelles. Alors,

- Les éléments $[i_1] \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(B, \mathcal{K}(\Xi \oplus B))$ et $[i_2] \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(\Xi), \mathcal{K}(\Xi \oplus B))$ induits par i_1 et i_2 sont inversibles en KK-théorie $\mathcal{G}$-équivariante.
- $M = [i_2] \otimes [i_1]^{-1}$ et $M' = [i_1] \otimes [i_2]^{-1}$.

□

On rappelle que pour toutes $\mathcal{G}$-algèbres A, B et D, P.Y Legall a défini [2] un morphisme naturel $\tau_D : \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A \otimes D, B \otimes D)$ associant a tout A-B-bimodule de Kasparov $\mathcal{G}$-équivariant (Ξ, π, T) le A-B-bimodule de Kasparov $\mathcal{G}$-equivariant $(\Xi \otimes_{C_0(X)} D, \pi \otimes_{C_0(X)} Id_D, T \otimes_{C_0(X)} Id_D)$. De plus, ce morphisme τ_D respecte le produit de Kasparov et par naturalité, si $\alpha \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A, B)$ vérifie la propriété de décomposition (d), alors $\tau_D(\alpha)$ vérifie aussi la propriété de décomposition (d).

Soit I l'intervalle $]0, 1[$ et soit $\partial_X \in \mathrm{KK}_1^{\mathcal{G}}(C_0(X), C_0(X) \otimes C_0(I))$ l'élément de bord de la suite exacte $\mathcal{G}$-équivariante

$$0 \longrightarrow C_0(X) \otimes C_0(I) \longrightarrow C_0(X) \otimes C_0([0, 1[) \longrightarrow C_0(X) \longrightarrow 0.$$

L'algèbre $C_0(X) \otimes C_0([0, 1[)$ étant contractile de façon $\mathcal{G}$-équivariante, l'élément ∂_X est inversible.

Lemma 3.2. *Soit A et B deux $\mathcal{G}$-algèbres et soit α un élément de $\mathrm{KK}_1^{\mathcal{G}}(A, B)$ admettant comme représentant un A-B-bimodule de Kasparov $\mathcal{G}$-équivariant (Ξ, π, T), où T est un opérateur $\mathcal{G}$-équivariant de $\mathcal{L}(\Xi)$. Alors, il existe $\alpha' \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A \otimes C_0(I), B)$ vérifiant la propriété de décomposition (d) tel que*

$$\alpha = \tau_A(\partial_X) \otimes \alpha'.$$

Démonstration. Rappelons que π est une représentation $A \to \mathcal{L}(\Xi)$ telle que pour tout $a \in A$, le commutateur $[\pi(a), T]$ soit dans $\mathcal{K}(\Xi)$. Quitte à rajouter un A-B-bimodule de Kasparov $\mathcal{G}$-équivariant dégénéré, on peut supposer que l'idéal engendré par $\{\langle \xi, \nu \rangle \,;\, (\xi, \nu) \in \Xi^2\}$ est dense dans B. Posons $P = \dfrac{1}{2}(Id_\Xi + T)$ et considérons la $\mathcal{G}$-algèbre

$$\mathcal{A}_P = \{(x, a) \in \mathcal{L}(\Xi) \oplus A \text{ tel que } x - P \cdot \pi(a) \cdot P \in \mathcal{K}(\Xi)\}.$$

La suite exacte courte $\mathcal{G}$-équivariante

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\Xi) \longrightarrow \mathcal{A}_P \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

admet comme section complètement positive $\mathcal{G}$-équivariante $a \mapsto (P \cdot \pi(a) \cdot P, a)$.

Soit $M \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(\Xi), B)$ l'élément implémentant la Morita équivalence $\mathcal{G}$-équivariante entre B et $\mathcal{K}(\Xi)$. D'après [7], le bord de la suite exacte est précisément $\alpha \otimes M$. Soit

$$S = \{(x, f) \in \mathcal{L}(\Xi) \oplus (A \otimes C_0([0, 1[)) \text{ tel que } x - P \cdot \pi(f(0)) \cdot P \in \mathcal{K}(\Xi)\},$$

$$\begin{array}{rccc} e: & \mathcal{K}(\Xi) & \longrightarrow & S \\ & x & \mapsto & (x, 0) \end{array}$$

et

$$j: \begin{array}{ccc} A \otimes C_0(I) & \longrightarrow & S \\ f & \mapsto & (0, f) \end{array}.$$

La suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{K}(\Xi) \longrightarrow \mathcal{A}_P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ admettant une section complètement positive et $\mathcal{G}$-équivariante, l'élément $[e] \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(\Xi), S)$ induit par e est inversible et d'après [7],

$$\alpha \otimes M = \tau_A(\partial_X) \otimes [j] \otimes [e]^{-1},$$

où $[j]$ est l'élément de $\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A \otimes C_0(I), S)$ induit by j. Le lemme est alors une conséquence du lemme 3.1. $\square$

Lemma 3.3.

$$\partial_X \otimes \tau_{C_0(X)\otimes C_0(I)}(\partial_X) \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(C_0(X), C_0(X) \otimes C_0(I) \otimes C_0(I))$$

vérifie la propriété de décomposition (d).

Démonstration. Soit A et B deux C^*-algèbres séparables. On munit $A \otimes C_0(X)$ et $B \otimes C_0(X)$ de l'action triviale de $\mathcal{G}$. Le morphisme naturel :

$$\mathrm{KK}(A, B) \longrightarrow \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A \otimes C_0(X), B \otimes C_0(X))$$

respecte les produits de Kasparov [3]. De plus, $\partial_X \otimes \tau_{C_0(X)\otimes C_0(I)}(\partial_X)$ est l'image par cette application du générateur de Bott de $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^2))$. D'après le lemme 1.6.11 de [4] appliqué au groupe trivial, tout élément de $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^2))$ vérifie la propriété de décomposition (d). $\square$

Lemma 3.4. *Soit A et B deux $\mathcal{G}$-algèbres et soit α un élément de* $\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A, B)$. *Soit $M_1 \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G})), C_0(X))$ l'élément implémentant la Morita équivalence $\mathcal{G}$-équivariante entre $C_0(X)$ et $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))$. Alors $\tau_A(M_1) \otimes \alpha \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A)), B)$ peut être représenté par un $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A))$-$B$- bimodule de Kasparov $\mathcal{G}$-équivariant dont l'opérateur est $\mathcal{G}$-équivariant.*

La preuve de ce lemme sera donné dans la section suivante.

Fin de la preuve du théorème 2.2 :

Soit A et B deux $\mathcal{G}$-algèbres et soit α un élément de $\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A, B)$. Soit $M_1 \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G})), C_0(X))$ l'élément implémentant la Morita équivalence $\mathcal{G}$-équivariante entre $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))$ et $C_0(X)$. Alors, d'après le lemme 3.4, l'élément

$$\tau_{A\otimes C_0(I)}(M_1) \otimes \tau_A(\partial_X^{-1}) \otimes \alpha \in \mathrm{KK}_1^{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A)) \otimes C_0(I), B)$$

peut être représenté par un bimodule de Kasparov (π, Ξ, T), où T est un opérateur $\mathcal{G}$-équivariant de $\mathcal{L}(\Xi)$. Or nous savons d'après le lemme 3.2 qu'il existe un élément α' de $\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A)) \otimes C_0(I) \otimes C_0(I), B)$ vérifiant la propriété de décomposition (d) tel que

$$\tau_{A\otimes C_0(I)}(M_1) \otimes \tau_A(\partial_X^{-1}) \otimes \alpha = \tau_{\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G},A))\otimes C_0(I)}(\partial_X) \otimes \alpha'.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \tau_A(\partial_X^{-1}) \otimes \alpha &= \tau_{A\otimes C_0(I)}(M_1^{-1}) \otimes \tau_{\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G},A))\otimes C_0(I)}(\partial_X) \otimes \alpha' \\ &= \tau_{A\otimes C_0(I)}(M_1^{-1} \otimes \tau_{\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))}(\partial_X)) \otimes \alpha'. \end{aligned}$$

Le produit $M_1^{-1} \otimes \tau_{\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))}(\partial_X)$ étant extérieur, il est commutatif et donc

$$M_1^{-1} \otimes \tau_{\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))}(\partial_X) = \partial_X \otimes \tau_{C_0(I)}(M_1^{-1}).$$

On en conclut que

$$\alpha = \tau_A(\partial_X) \otimes \tau_{A\otimes C_0(I)}(\partial_X) \otimes \tau_{A\otimes C_0(I)\otimes C_0(I)}(M_1^{-1}) \otimes \alpha',$$

et comme

$$\tau_A(\partial_X) \otimes \tau_{A\otimes C_0(I)}(\partial_X) = \tau_A(\partial_X \otimes \tau_{C_0(X)\otimes C_0(I)}(\partial_X)),$$

le théorème est alors une conséquence du lemme 3.3.

4. Preuve du lemme 3.4

Les notations et les rappels concernant les actions de groupoïdes nécessaire à cette section sont rappelés à la fin de la section 2. Lorsque B est une $\mathcal{G}$-algèbre, Ξ un B-module et T un élément de $\mathcal{L}(\Xi)$, on désigne pour tout $x \in X$ par T_x la fibre de T en x. Le lemme 3.4 est alors une conséquence du lemme suivant :

Lemma 4.1. *Soit B une $\mathcal{G}$-algèbre, Ξ un B-module de Hilbert à droite muni d'une action de $\mathcal{G}$ et F un élément de $\mathcal{L}(\Xi)$.*

(1) *Il existe un élément F' de $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \Xi))$ tel que pour tout élément σ de $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$, on ait*

$$F' \cdot \sigma \in C_c(\mathcal{G}, \Xi)$$

et

$$(F' \cdot \sigma)(\gamma) = V_\gamma \cdot F_{s(\gamma)} \cdot V_\gamma^{-1} \cdot \sigma(\gamma).$$

En particulier, l'opérateur F' est $\mathcal{G}$-équivariant.

(2) *Si (Ξ, π, F) est un A-B-bimodule de Kasparov $\mathcal{G}$-équivariant, alors*

$$(L^2(\mathcal{G}, \Xi), \pi', F \otimes_{C_0(X)} Id_{L^2(\mathcal{G})})$$

est un $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A))$-$B$-bimodule de Kasparov $\mathcal{G}$-équivariant équivalent à $(L^2(\mathcal{G}, \Xi), \pi', F')$, où π' est la représentation naturelle de $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A))$ sur $L^2(\mathcal{G}, \Xi)$ induite par π.

Ce lemme est un corollaire du lemme suivant :

Lemma 4.2. *Soit B une $\mathcal{G}$-algèbre et soit Ξ un B-module de Hilbert à droite.*

(1) *Il existe un morphisme de C^*-algèbres*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(r^*\Xi) & \longrightarrow & \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \Xi)) \\ T & \mapsto & \widetilde{T} \end{array}$$

tel que pour tout T appartenant à $\mathcal{L}(r^*\Xi)$ et pour tout σ appartenant à $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$, on ait $\widetilde{T} \cdot \sigma \in C_c(\mathcal{G}, \Xi)$ et $(\widetilde{T} \cdot \sigma)(\gamma) = T_{r(\gamma)} \cdot \sigma(\gamma)$.

(2) *Si $T \in \mathcal{K}(r^*\Xi)$, alors pour tout $\Theta \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))$, on a*

$$(Id_\Xi \otimes_{C_0(X)} \Theta) \cdot \widetilde{T} \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, \Xi)).$$

Démonstration. Si σ est un élément de $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$, alors $\sigma' = T \cdot \sigma$ appartient à $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$,

$$\begin{aligned} \langle \sigma'/\sigma' \rangle(x) &= \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \langle T_x \cdot \sigma(\gamma)/T_x \cdot \sigma(\gamma) \rangle \, d\lambda^x(\gamma) \\ &\leq \|T\|^2 \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \langle \sigma/\sigma \rangle(\gamma) \, d\lambda^x(\gamma) \end{aligned}$$

et donc, $\sigma \mapsto \sigma'$ définit un élément $\widetilde{T} \in L^2(\mathcal{G}, \Xi)$. On vérifie aisément que $T \to \widetilde{T}$ est un morphisme de C^*-algèbres. Pour montrer le deuxième point du lemme, on peut supposer Θ et T de rang un. Lorsque η_1 et η_2 sont des éléments de Ξ, on note

$$\begin{array}{cccc} \Theta^{\Xi}_{\eta_1,\eta_2} : & \Xi & \longrightarrow & \Xi \\ & \eta & \mapsto & \eta_1\langle \eta_2/\eta\rangle \end{array}$$

Soit e_1 et e_2 deux éléments de Ξ et soit ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 et ψ_2 des éléments de $C_c(\mathcal{G})$. Alors

$$(Id_{\Xi} \otimes_{C_0(X)} \Theta^{L^2(\mathcal{G})}_{\psi_1,\psi_2}) \cdot \widetilde{\Theta}^{r^*\Xi}_{e_1 \otimes_r \phi_1, e_2 \otimes_r \phi_2} = \Theta^{L^2(\mathcal{G},\Xi)}_{e_1 \otimes_{C_0(X)} \psi_1, e_2 \otimes_{C_0(X)} \overline{\phi}_1 \phi_2 \psi_2}$$

□

Fin de la preuve du lemme 4.1 :

Soit (Ξ, π, F) un A-B-bimodule de Kasparov $\mathcal{G}$-équivariant et soit $T = V \cdot (F \otimes_s Id_{C_0(\mathcal{G})}) \cdot V^{-1} \in \mathcal{L}(r^*\Xi)$. Alors

$$T_{r(\gamma)} = V_\gamma \cdot F_{s(\gamma)} \cdot V_\gamma^{-1}.$$

Posons $F' = \widetilde{T}$. D'après le lemme 4.2,

$$(F' \cdot \sigma)(\gamma) = V_\gamma \cdot F_{s(\gamma)} \cdot V_\gamma^{-1} \cdot \sigma(\gamma),$$

et donc F' et $\mathcal{G}$-équivariant. Soit Θ un élément de $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))$. Montrons que pour tout $a \in A$, on a

$$(\pi(a) \otimes_{C_0(X)} \Theta) \cdot (F \otimes_{C_0(X)} Id_{L^2(\mathcal{G})} - F') \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, \Xi)).$$

On peut supposer que $\Theta = \Theta' \cdot \phi$ où $\Theta' \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))$ (l'action de $C_c(\mathcal{G})$ sur $L^2(\mathcal{G})$ étant par multiplication ponctuelle). On a

$$\begin{aligned}(\pi(a) \otimes_{C_0(X)} \Theta) \cdot (F \otimes_{C_0(X)} Id_{L^2(\mathcal{G})} - F') = \\ (Id_{\Xi} \otimes_{C_0(X)} \Theta') \cdot (\pi(a) \otimes_{C_0(X)} \phi) \cdot (F \otimes_{C_0(X)} Id_{L^2(\mathcal{G})} - F').\end{aligned}$$

Mais $(\pi(a) \otimes_{C_0(X)} \phi) \cdot (F \otimes_{C_0(X)} Id_{L^2(\mathcal{G})} - F')$ est l'image de

$$(\pi(a) \otimes_r \phi) \cdot (F \otimes_r Id_{C_0(\mathcal{G})} - V \cdot F \otimes_s Id_{C_0(\mathcal{G})} \cdot V^{-1})$$

par le morphisme du lemme 4.2, et comme (Ξ, π, F) est un A-B-bimodule de Kasparov $\mathcal{G}$-équivariant, on a

$$(\pi(a) \otimes_r \phi) \cdot (F \otimes_s Id_{C_0(\mathcal{G})} - V \cdot (F \otimes_s Id_{C_0(\mathcal{G})}) \cdot V^{-1}) \in \mathcal{K}(r * \Xi).$$

Donc, d'après le lemme 4.2.2,

$$(\pi(a) \otimes_{C_0(X)} \Theta) \cdot (F \otimes_{C_0(X)} Id_{L^2(\mathcal{G})} - F') \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, \Xi))$$

et donc $(L^2(\mathcal{G}, \Xi), \pi', F')$ est un A-B-bimodule de Kasparov $\mathcal{G}$-équivariant équivalent à $(L^2(\mathcal{G}, \Xi), \pi', F \otimes_{C_0(X)} Id_{L^2(\mathcal{G})})$.

5. Application

Nous allons montrer grâce au théorème 2.2 l'analogue de la proposition 1.6.10 de [5]. Pour les définitions de complétion inconditionnelle pour un groupoïde ainsi que de l'application de descente en KK −théorie des algèbres de Banach équivariantes par l'action d'un groupoïde, nous renvoyons le lecteur à [5].

Proposition 5.1. *Soit*
- $\mathcal{G}$ *un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar,*
- $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ *une complétion inconditionnelle de l'algèbre de convolution* $C_c(\mathcal{G})$*,*
- A*,* B *et* D *des* $\mathcal{G}$*-algèbres,*
- $j_{\mathcal{A}}$ *le foncteur de descente*
- Σ *le foncteur naturel* $\mathrm{KK}^{ban}(\cdot,\cdot) \longrightarrow Hom(\mathrm{K}(\cdot),\mathrm{K}(\cdot))$*.*

Alors pour tous éléments α *de* $\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(A,B)$ *et* β *de* $\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(B,D)$*, on a*

$$\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes \beta)) = \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) \circ \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\beta)).$$

Démonstration. D'après le théorème 2.2, il suffit de considérer les éléments α d'une des deux formes de la définition 2.1.

(1) Si α est induit par un morphisme, ceci est une conséquence de la fonctorialité de Σ, $j_{\mathcal{A}}$ et de $\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\cdot,\cdot) \longrightarrow \mathrm{KK}^{\mathrm{ban}}_{\mathcal{G}}(\cdot,\cdot)$.

(2) Soit $\theta : B \to A$ tel que $[\theta] \otimes_A \alpha = 1_B$ et $\alpha \otimes_B [\theta] = 1_A$ où $[\theta] \in \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(B,A)$ est induit par le morphisme θ. En écrivant

$$\beta = [\theta] \otimes_A \alpha \otimes_B \beta,$$

on a d'après le raisonnement précédent

$$\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\beta)) = \Sigma(j_{\mathcal{A}}([\theta])) \circ \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes_B \beta)).$$

La proposition est alors une conséquence de l'égalité

$$\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) \circ \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\theta)) = Id_{\mathrm{K}(A)},$$

résultant de la fonctorialité de $j_{\mathcal{A}}$ et de Σ.

□

6. aa

Références

[1] E. Blanchard. *Déformations de C^*-algèbres de Hopf,* Bul. Soc. Math. France **124** (1996), 141–215.

[2] P. Y. Le Gall. *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes I*, K-Theory **16** (1999), n° 4, 361–390.

[3] G. G. Kasparov. *Equivariant* KK*-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math **91** (1988), n° 1, 147–203.

[4] V. Lafforgue. *K-théorie bivariante pour les algébres de Banach et conjecture de Baum-Connes. (French) [Bivariant K-theory for Banach algebras and the Baum-Connes conjecture] Invent. Math.* **149** (2002), n° 1, 1–95.

[5] V. Lafforgue. *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach, groupoïdes et conjecture de Baum-Connes*. Preprint, 1999.

[6] J. Renault. *A groupoid approach to C^*-algebras*. Lecture Note in Mathematics, Springer-Verlag, volume 793, New-York, 1980.

[7] G. Skandalis. *Exact sequences for the Kasparov groups of graded algebras*, Can. J. Math. **37** (1980), n° 2, 193–216.

[8] K. Thomsen. *Asymptotic homomorphisms and equivariant* KK-*theory*, J. Funct. Anal. **163** (1999), n$^{\rm o}$ 2, 324–343.