



**HAL**  
open science

## Sur une nouvelle espece de calcul

Jean Bernoulli

► **To cite this version:**

Jean Bernoulli. Sur une nouvelle espece de calcul. Recueil pour les astronomes, Desaint, Libraire rue du Foin, Paris, pp.33, 1771. hal-00482605

**HAL Id: hal-00482605**

**<https://hal.science/hal-00482605>**

Submitted on 11 May 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L. 88-1

RECUEIL  
POUR LES  
ASTRONOMES.

PAR  
M. JEAN BERNOULLI  
*Astronome Royal &c.*

TOME I.

Mathematisches Institut  
der  
Reichsuniversität Straßburg



A BERLIN,

Chez l'AUTEUR

& se trouve à Paris chez DESAINT, Libraire, rue du foin.

MDCCLXXI.

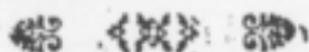
A 130<sup>T</sup>

*Sur une nouvelle espece de Calcul.*

Dans deux mémoires que j'ai présentés à l'Académie le 3 Mai & le 13 Decembre 1770, j'ai exposé une méthode particuliere de calculer, qui est d'un usage fort étendu, & qu'on peut appliquer principalement avec beaucoup d'utilité dans l'Astronomie *Tabulaire*. Je vais tâcher de donner ici une idée de cette méthode & j'en ferai, pour l'éclaircir, l'application à un exemple.

§. 1. Je suppose qu'on veuille construire une Table pour prendre des parties proportionnelles; qu'on veuille exprimer ces parties soit en nombres absolument entiers, soit en nombres entiers accompagnés d'une ou de plusieurs décimales; & puisque de cette façon on ne peut s'empêcher de négliger le plus souvent une petite quantité; qu'on ne veuille cependant jamais négliger plus que la moitié d'une unité du dernier chiffre; c'est à dire qu'on ne veuille pas négliger plus qu'un demi, lorsqu'on n'admet dans la Table que des nombres entiers; qu'on ne veuille pas négliger plus de  $\frac{1}{20}$ , lorsqu'on admet des dixièmes; qu'on ne veuille pas négliger plus de  $\frac{1}{200}$ , lorsqu'on pousse les parties proportionnelles jusqu'à deux décimales; & ainsi de suite.

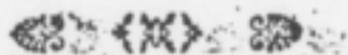
§. 2. Cela posé, si nous considérons la maniere  
dont



dont de telles tables sont construites, nous voyons que chaque partie proportionnelle, ou chaque terme de la table, est le produit ou le 4<sup>e</sup> terme d'une règle de trois, dont le premier terme d'abord, que je nommerai  $c$ , est constant; c'est un module ou une base qui indique combien d'unités on suppose comprises entre deux termes entre les quels on veut interpoler un autre terme composé du plus petit de ces deux termes & d'une partie proportionnelle exprimée par un certain nombre des mêmes unités. Par ex. toutes les fois que dans les petites tables des logarithmes des sinus, on cherche le logarithme qui répond à un angle exprimé en degrés, minutes & secondes, le nombre constant  $c$  est 60. Quant au second & au troisième terme, ils sont allés arbitraires, mais ils changent continuellement de valeur & l'on peut faire en sorte que l'un, que je nommerai  $n$ , représente successivement tous les nombres naturels. Si on veut que l'autre nombre, que nous désignerons par  $m$ , ait aussi successivement les mêmes valeurs, chaque terme de la table s'y trouvera deux fois; à moins qu'on ne l'évite en donnant à la table une forme triangulaire, ainsi que cela s'est fait dans la table sexagénaire qui accompagne les anciennes Tables astronomiques, & de la même manière qu'on dispose quelques fois le livret: car remarquons en passant qu'une telle

Table de parties proportionnelles n'est autre chose qu'un livret où tous les produits sont divisés par un nombre constant. Observons aussi que  $n$  ne doit jamais surpasser  $c$ , parce que ce cas ne se présente jamais.

§. 3. Qu'on s'imagine à présent toutes les valeurs 1, 2, 3, 4 &c. de  $n$ , rangées verticalement à la tête de la Table qu'on veut construire, & qu'on veuille commencer par déterminer pour un certain nombre  $m$ , tous les termes qui répondent à ces valeurs de  $n$ ; la voye la plus sûre fera sans doute de faire la règle de trois pour chaque terme en particulier; mais cette voye seroit bien longue & bien pénible, & on pensera naturellement à abréger le travail en cherchant de cette manière les parties proportionnelles, seulement pour des valeurs de  $n$  prises de distance en distance & en interpolant ensuite les autres termes, avec le jugement & l'attention nécessaires, sans faire les règles de trois. Cette méthode cependant fera encore ou bien longue ou peu sûre, à cause de la condition qu'on s'est imposée de ne jamais négliger plus que la moitié de l'unité du dernier chiffre; or la Méthode dont je me propose de rendre compte, satisfait exactement à cette condition, & quel que soit le nombre des  $n$ , on n'a besoin de faire, pour une valeur donnée de  $m$ , qu'une seule règle de trois; tous



les autres termes se déterminant par de simples additions, au moyen de certaines formules générales que j'ai trouvées; & cette méthode est d'une telle facilité dans l'application, qu'on est souvent en état d'écrire, sans autre calcul, les produits de plus 1000 règles de trois, en deux heures de tems. Voici les propositions dont il faut faire usage.

§. 4. Qu'on désigne par  $p$  les parties proportionnelles cherchées, & que  $\frac{m n}{c} = P$ ; c'est à dire que  $P$  soit le terme trouvé par l'unique règle de trois que j'ai dit qu'on étoit obligé de faire. Nous verrons plus bas pour quelle valeur de  $n$  il faut faire cette règle de trois dans chaque cas.

§. 5. Comme  $n$  va toujours en augmentant & que  $\frac{m}{c}$  est constant pour un cas donné, les valeurs  $p$  iront aussi toujours en augmentant & tout se réduit à savoir combien d'unités il faut ajouter au dernier chiffre de  $P$ , & aux termes suivans, à mesure que  $n$  croît d'une, de deux, de trois &c. unités.

§. 6. Il est clair que, *in abstracto*, c'est de  $\frac{m}{c}$  unités que les valeurs  $p$  augmentent successivement pour chaque addition de 1 à la valeur de  $n$ ; mais comme on n'admet dans la Table que des

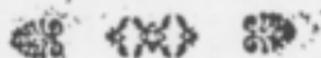
des nombres entiers (car les fractions décimales peuvent même être regardées comme des nombres entiers), il est clair aussi, que si  $\frac{m}{c}$  n'est pas un nombre entier, le nombre des unités à ajouter aux derniers chiffres des termes  $p$ , ne peut être toujours le même: par exemple, si  $\frac{m}{c} = \frac{7}{3}$ ; & que  $P =$  un nombre entier; la première augmentation fera 0 unités, puisque  $\frac{7}{3}$  est moins que  $\frac{1}{2}$ ; ainsi le terme correspondant à  $n + 1$  sera encore  $P$ ; mais à  $n + 2$  répondra  $P + \frac{1}{3}$  ou  $P + 1$ ; à  $n + 3$  répondra  $P + \frac{2}{3}$  ou  $P + 1$ ; à  $n + 4$  répondra  $P + \frac{2}{3}$  ou  $P + 1$ ; à  $n + 5$  répondra  $P + \frac{1}{3}$  ou  $P + 2$  &c. ainsi l'augmentation de  $P$  aura été d'abord 0, puis 1, puis 2 fois 0, puis 1 &c.

§. 7. On peut remarquer que la différence pour ces augmentations des  $p$  ne roulera jamais que sur une unité de plus ou de moins; c'est à dire que si  $m = x + \frac{a}{c}$ , ce sera toujours ou  $x$  unités ou  $x + 1$  unités qu'il faudra ajouter au dernier chiffre à mesure que  $n$  croît de 1.

§. 8. De plus si on entend par  $\frac{h}{k}$  la fraction

$\frac{a}{c}$  réduite à ses moindres termes, ou que  $\frac{m}{c} =$

$x + \frac{a}{c} = x + \frac{h}{k}$ ; il ne m'a pas été difficile de



prouver, qu'au bout d'une période de  $k$  termes les augmentations des  $p$  doivent revenir dans le même ordre; c'est à dire que si on nomme  $\Pi$  le terme correspondant à  $n + k$ , il faudra ajouter à  $\Pi$ , pour  $n + k + 1$ , le même nombre d'unités qu'on avoit ajouté à  $P$  pour  $n + 1$ ; que pour avoir le terme qui répond à  $n + k + 2$ , il faut ajouter au nouveau terme le même nombre d'unités qu'on avoit ajouté au terme correspondant à  $n + 1$ , afin d'avoir celui qui devoit répondre à  $n + 2$ ; & ainsi de suite. Et cela est vrai que  $P$ , ou  $\frac{m}{c}n$ , soit *in abstracto* un nombre entier ou non; parce que si  $P$  est un nombre entier ou entier avec des décimales, accompagné d'une fraction qu'on ait négligée,  $\Pi$  sera accompagné de la même fraction à négliger.

§. 9. Il n'a pas été difficile non plus de prouver, que dans une période de  $k$  termes, c'étoit toujours  $k - h$  fois qu'il falloit augmenter les  $p$  de  $x$  unités, &  $k$  fois qu'il falloit les augmenter de  $x + 1$  unités.

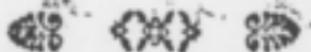
§. 10. Le principal étoit donc de déterminer la loi intérieure de ces périodes; savoir de trouver, pour un cas donné, quand il falloit ajouter  $x$  & quand il falloit ajouter  $x + 1$ . C'est ce qui souvent n'est pas facile; tout dépend du rapport de  $h$  à  $k$ ; la difficulté est nulle lorsque  $h$  est

Q; parce que dans ce cas on a  $\frac{m}{c} = x$ , de sorte qu'on a toujours le même nombre d'unités à ajouter; nous verrons ce qu'il faut faire dans chaque cas, après avoir fait précéder le résultat d'une autre recherche.

§. II. Où les périodes doivent-elles commencer? c'est à dire pour quelle valeur de  $n$  doit-on faire la règle de trois; afin de déterminer le terme  $P = \frac{m n}{c}$ , duquel on veut partir? La réponse à cette question ne paroît pas d'abord limitée; mais elle le devient si on a égard à certaines considérations, que j'indique dans mon mémoire & des quelles je tire les conclusions suivantes.

Je distingue deux cas: celui où  $k$  est pair & celui où  $k$  est impair, & j'établis 1°. que lorsque  $k$  est pair, dans le quel cas par conséquent  $h$  est impair, il faut commencer la période, ou faire la règle de trois, au terme où  $n = \frac{2rk + k + 2}{2h} + 1$ ; en entendant par  $r$  le plus petit nombre entier tel que  $\frac{2rk + k + 2}{2h}$  soit un nombre entier M.

2°. Je dis que lorsque  $k$  est impair, & par conséquent  $h$  pair, il faut commencer la période



au terme qui répond à  $n = \frac{2kr + k + 1}{2h} + 1$ ;  
 en donnant à  $r$  la même signification. Je dési-  
 gnerai  $\frac{2kr + k + 1}{2h}$  par  $N$ .

§. 12. On a des tables de nombres premiers, de diviseurs de nombres &c. qui sont souvent d'un grand secours pour déterminer facilement ces nombres  $M$  &  $N$ ; mais ce qui rend cette détermination possible & facile dans tous les cas, c'est que les deux équations que j'ai indiquées étant des équations indéterminées du premier degré, on n'a qu'à y appliquer les règles que les Géomètres prescrivent pour la résolution des équations de cette espèce. La première règle qu'on ait eu, & qui a été imaginée par M. BACHET de MÉZIRIAC, il y a 160 ans, est fort générale & très ingénieuse, mais elle est difficile à entendre. M. EULER a donné pour la même résolution une méthode plus facile dans les anciens Comment. de Pétersbourg, Tom. VII. qui a été suivie dans la 2<sup>e</sup> Edition des *Leçons de Mathém.* de M. de la CAILLE & dans le *Cours de Mathém.* de M. BEZOUT, & que M. EULER lui même a insérée dernièrement dans son *Algebre*. Enfin M. DE LA GRANGE a donné pour le même objet, dans un Mémoire lu à l'Académie le 21 Juin 1770, & inséré dans les *Mém.* de Berlin pour 1768, une règle un peu dif-

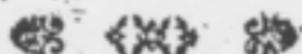
férente, déduite d'une belle *méthode nouvelle pour résoudre les problèmes indéterminés, en nombres entiers*. Toutes ces règles se réduisent au fond à la Théorie des fractions continues, mais cela ne paroît dans aucune si évidemment que dans la dernière; & comme ce que je dirai sur la détermination de la loi intérieure des périodes présuppose aussi la connoissance de cette Théorie; ce sera une raison de plus, pour indiquer d'après les règles de M. DE LA GRANGE, comment on doit déterminer le commencement de ces périodes, moyennant les équations du § précédent.

§. 13. Considérons l'équation  $N = \frac{2rk + k + 1}{2h}$

& mettons la sous cette forme,  $hN = rk + \frac{k + 1}{2}$ , ou  $q = hN - rk$ , en transposant &

en supposant  $\frac{k + 1}{2} = q$ . Il faut réduire en

fraction continue la fraction  $\frac{k}{h}$ ; cela se fait en pratiquant sur cette fraction la même opération que l'on emploie pour trouver le plus grand commun diviseur de  $h$  & de  $k$ ; c'est à dire qu'on divise  $k$  par  $h$ , ensuite  $h$  par le reste de la première division, le nouveau reste par celui de la seconde, & ainsi de suite, jusqu'à ce que la division se fasse exactement; on aura des quotiens  $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{iv} \dots \lambda^s, \lambda^{s+1}$ , au moyen des



quels on formera la fraction continue

$$\lambda' + \frac{1}{\lambda'' + \frac{1}{\lambda''' + \dots - \frac{1}{\lambda^{\beta+1}}}}$$

Cette fraction continue est une série; moins on en néglige de termes plus on approchera de la valeur de  $\frac{k}{h}$ ; & si on prend la somme de tous

les termes, elle doit être égale exactement à  $\frac{k}{h}$ . Or

si l'on ne prend qu'un seul terme, on a la somme  $\lambda'$  ou

$$\frac{\lambda'}{1}$$

si on prend deux termes, on a

$$\frac{\lambda' \lambda'' + 1}{\lambda''}$$

si l'on prend 3 termes, on a

$$\frac{\lambda' \lambda'' \lambda''' + \lambda''' + \lambda'}{\lambda'' \lambda''' + 1}$$

&c.

&c.

Il est clair que si l'on désigne les numérateurs de ces fractions par  $l', l'', l''', \dots$  & les dénominateurs par  $L', L'', L''', \dots$ , un numérateur  $l^{\pi}$  quelconque est  $= \lambda^{\pi} (l^{\pi-1} - 1) + l^{\pi-2}$ , & un dénominateur  $L^{\pi}$  quelconque  $= \lambda^{\pi} (L^{\pi-1} - 1) + L^{\pi-2}$ . Il est clair aussi que ces sommes fractionnaires formeront une nouvelle suite (\*)

$$\frac{l'}{L'} \frac{l''}{L''} \frac{l'''}{L'''} \dots$$

$$\frac{l^{\beta}}{L^{\beta}} \frac{l^{\beta+1}}{L^{\beta+1}}$$

dont

(\*) On met ordinairement à la tête de cette suite les deux termes  $\frac{2}{1}$  &  $\frac{1}{1}$ ; il est facile de prouver qu'on peut

dont le dernier terme équivaut évidemment à  $\frac{k}{h}$ ; puis qu'il exprime la somme de tous les termes de la fraction continue.

Cela posé il ne reste, d'après la règle de M. DE LA GRANGE, qu'à faire  $r = q t + m h$  &  $N = q s + m k$ . On entend par  $m$  un nombre entier quelconque positif ou négatif; il faut que  $s = \mp l e$ , &  $t = \mp L e$ , & le signe supérieur a lieu pour le cas où le quantième  $q$  est impair & l'inférieur pour celui où  $q$  est pair.

§. 14. Si on a bien compris le paragraphe précédent, on ne peut jamais être embarrassé où l'on doit commencer les périodes; on se rappellera que  $h$  &  $k$  doivent toujours être des nombres premiers entr'eux; on tiendra compte de l'unité qui étoit ajoutée aux valeurs de  $M$  & de  $N$ ; & lorsque c'est la formule  $M$  qu'on employe, ce sera  $\frac{1}{2} k + 1$  qu'on exprimera par  $q$ .

§. 15. Je vais maintenant établir, en peu de mots, la manière de former la loi intérieure des périodes. On a  $\frac{m}{e} = x + \frac{h}{k}$ , & il faut toujours

R 5 ré-

peut le faire; mais c'est à quoi il n'est pas nécessaire que nous nous arrêtions ici. On peut puiser les lumières qu'on désirera tant sur la formation & sur d'autres belles propriétés de cette dernière série, que sur les fractions continues en général, dans le Chap. XVIII de l'*Introd. in Anal. Inf.* de M. EULER; & dans les Mémoires de M. DE LA GRANGE (Mém. de Berlin pr. 1767 & 68).



réduire cette fraction  $\frac{h}{k}$  en une fraction continue, ou bien reprendre celle qu'on a trouvée en cherchant le commencement de la période; cela posé :

Lorsque  $h = 0$ ; on a  $\frac{m}{c} = x$ ; c'est à dire que le dernier chiffre des  $p$  augmente régulièrement de  $x$  unités.

Lorsque  $h = 1$ ; on a  $\frac{m}{c} = x + \frac{1}{k}$ , & je dis qu'il faut augmenter les derniers chiffres des

$p - k - 1$  fois de  $x$

&  $1 - x + 1$ ,

Lorsque  $\frac{m}{c} = x + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$ ,

il faut augmenter - d'abord  $\gamma$  fois de  $x$

&  $1 - x + 1$

ensuite  $\delta - 1$  fois  $\left\{ \begin{array}{l} \gamma - 1 - x \\ 1 - x + 1 \end{array} \right.$

Lorsque  $\frac{m}{c} = x + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\epsilon}$

il faut augmenter d'abord  $\epsilon - 1$  fois  $\left\{ \begin{array}{l} \gamma \text{ de fois } x \\ 1 - x + 1 \\ \delta - 1 \text{ fois } \left\{ \begin{array}{l} \gamma - 1 - x \\ 1 - x + 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$

ensuite

$$\delta \text{ fois } \left\{ \frac{\gamma - 1 - x}{1 - x + 1} \right.$$

Or si l'on range ces formules dans la Table III, en les désignant par A, B, C, D, &c; qu'on mette au dessus les lettres qui leur sont particulières, & qu'on peut nommer leurs *caractéristiques*; qu'enfin on désigne par A' B' C' &c. les formules un peu différentes qu'on obtient en augmentant respectivement d'une unité les caractéristiques de A, B, C &c, il est évident que ces formules formeront la série qui suit.

$$A, (\gamma - 1) A + A', B' + (\delta - 1) B, (\varepsilon - 1) C + C', D' + (\eta - 1) D, (\theta - 1) E + E', \&c.$$

c'est à dire que

$$A = A$$

$$B = (\gamma - 1) A + A'$$

$$C = B' + (\delta - 1) B$$

$$D = (\varepsilon - 1) C + C'$$

$$E = D' + (\eta - 1) D$$

&c.

On remarquera de soi-même que l'ordre des deux termes qui composent chaque formule, hors la première, ne peut être changé; parce qu'il n'est pas indifférent ici, comme dans l'Algebre ordinaire qu'on dise  $a + b$  ou  $b + a$ ; on remarque-



ra de plus, que la somme des quantités qu'on peut nommer les coefficients de  $x$ , doit toujours équivaloir au nombre  $k$  de la période. Mais passons à un exemple; il rendra l'application de notre méthode plus aisée, & fournira matière encore à d'autres remarques.

§. 16. *Exemple*: On trouve dans la *Connoissance des Tems* de cette année, une Table calculée par M. GUÉRIN pour la correction du lieu de la Lune; cette Table suppose qu'on ait trouvé le lieu de la Lune par des parties proportionnelles; il seroit donc commode d'avoir une autre table dans laquelle on trouveroit ces parties proportionnelles tout calculées, par ex. de 4' en 4', comme l'est la table de M. GUÉRIN, & pour les différentes variations du mouvement de la Lune en 12 heures de tems; ainsi construisons la partie de cette Table dont il faudroit faire usage lorsque le mouvement de la Lune en 12 heures est de  $6^{\circ}.48'.32''$ , comme dans l'exemple que donne M. DE LA LANDE à la page 205.

Nous avons d'abord  $c = 12$  heures  $= 180$  fois 4 minutes; c'est à dire qu'il faut chercher 180 parties proportionnelles.

De plus  $m = 6^{\circ}.48'.32'' = 24512''$

donc

$$\frac{m}{c} = x + \frac{h}{k} = 136 + \frac{8}{5} = 136 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

en



en faisant  $8 \left| \begin{array}{l} 45 \\ 40 \end{array} \right| \gamma = \lambda' = \gamma$

$$5 \left| \begin{array}{l} 8 \\ 5 \end{array} \right| \delta = \lambda'' = \delta$$

$$3 \left| \begin{array}{l} 5 \\ 3 \end{array} \right| \epsilon = \lambda''' = \epsilon$$

$$\left| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right| \zeta = \lambda^\zeta = \eta$$

$$\left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right| \zeta = \lambda^{\zeta+1} = 0$$

o

Ainsi par le §. 13. nous avons la série qui suit pour les sommes  $\frac{l'}{L'}$ ,  $\frac{l''}{L''}$  &c. qu'on nomme aussi les *fractions principales*,

$$\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{11}{3}, \frac{17}{4}, \frac{45}{5}$$

& il s'en ensuit que le commencement des périodes se détermine en faisant  $q = \frac{k+1}{2} = 23$ ;  $s = l^\zeta = 17$ , &  $t = L^\zeta = 3$ , dans les équations  $r = qt + mh$  &  $N = qs + mk$ ; & par conséquent  $r = 23 \times 3 + 8m$  &  $N = 23 \times 17 + 45m$ , où il faut faire  $m = -8$ ; vu que de cette manière on obtiendra pour  $r$  &  $N$  les plus petites valeurs possibles, savoir  $r = 5$  &  $N = 31$ .

Maintenant la formule  $F$  dont il faut faire usage pour la disposition intérieure des périodes est  $(\theta - 1) E + E' = E + E'$ ; or si dans la table du §. préc. on augmente la caractéristique  $\eta$  de l'uni-

l'uni-

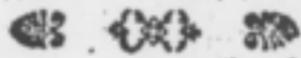
l'unité, & qu'on omette les termes affectés de  $\delta - 1$  & de  $\varepsilon - 1$ , à cause de  $\delta - 1 = 0$  & de  $\varepsilon - 1 = 0$ , il est clair que la formule  $E + E'$  prend cette forme.

	{	5 fois	136	=	2'. 16''
		1	— 137	=	2. 17
ajoutés d'abord	E =	5	— 136	=	2. 16
		1	— 137	=	2. 17
		4	— 136	=	2. 16
		1	— 137	=	2. 17
		5	— 136	=	2. 16
		1	— 137	=	2. 17
ensuite	E' =	5	— 136	=	2. 16
		1	— 137	=	2. 17
		4	— 136	=	2. 16
		1	— 137	=	2. 17
		5	— 136	=	2. 16
		1	— 137	=	2. 17
		4	— 136	=	2. 16
		1	— 137	=	2. 17

Ce seroit pour la valeur de  $n = N + 1 = 32$ , qu'il faudroit commencer à construire les périodes suivant la loi que nous venons d'indiquer; mais remarquons encore qu'il est superflu de faire la règle de trois, même pour ce seul 32<sup>e</sup> terme: on n'a qu'à remonter, dans la formule, jusqu'au signe  $\rightarrow$  & prendre

2 fois	136	=	2. 16
1	— 137	=	2. 17
5	— 136	=	2. 16
			&c.

on sera conduit, de cette manière, au 32<sup>e</sup> terme, sans



sans faire la regle de trois; on continuera après cela en suivant la formule depuis le commencement jusqu'à la fin; & c'est enfin la table IV qui en résultera.

§. 17. Je ne crains peut-être pas sans raison que le détail dans le quel j'ai été obligé d'entrer pour expliquer ma méthode n'effraye ceux qui calculent des Tables subsidiaires. Ainsi convaincu néanmoins de son utilité, je ne dois pas négliger de faire quelques remarques qui pourroient échapper à plusieurs, & qui ne peuvent que ramener leur attention sur cette espece de calcul.

§. 18. *Remarque 1.* J'observerai d'abord en général, que le principal est de bien entrer dans l'esprit de la méthode; elle n'est certainement pas difficile à saisir & son application n'est ensuite plus qu'un jeu. De plus on rencontrera rarement des cas plus embarrassans que celui qui j'ai développé; & surtout en Astronomie, parce que le nombre *c* sera presque toujours un nombre qui aura beaucoup de diviseurs; c'est à dire quelque multiple de 10, de 24, de 60, &c. On trouve aussi de bien plus grandes facilités, lorsqu'au lieu de chercher les parties proportionnelles en fractions sexagésimales, on les cherche en décimales. Enfin cette méthode admet un très grand nombre d'artifices & de façons d'abréger; la plû-



Table IV.

T A B L E

de 180 parties proportionnelles de 6° 48' 32"

Inter-valles.	Parties proportionnelles.																	
	H. M.	D. M. S.	H. M.															
0 34	0 2	16	2 4	1 10	22	4 4	6 12	18 27	6 4	9 1	3 26	32	8 4	12 1	4	10 4	5 42	43
0 8	0 4	32	2 8	1 12	38	4 8	6 2	20 43	6 8	9 2	3 28	48	8 8	12 2	8	10 8	5 44	59
0 12	0 6	49	2 12	1 14	54	4 12	6 3	22 59	6 12	9 3	3 31	5	8 12	12 3	10	10 12	5 47	15
0 16	0 9	5	2 16	1 17	10	4 16	6 4	25 15	6 16	9 4	3 33	21	8 16	12 4	16	10 16	5 49	31
0 20	0 11	21	2 20	1 19	26	4 20	6 5	27 32	6 20	9 5	3 35	37	8 20	12 5	20	10 20	5 51	48
0 24	0 13	37	2 24	1 21	42	4 24	6 6	29 48	6 24	9 6	3 37	53	8 24	12 6	24	10 24	5 54	4
0 28	0 15	53	2 28	1 23	59	4 28	6 7	32 4	6 28	9 7	3 40	9	8 28	12 7	28	10 28	5 56	20
0 32	0 18	9	2 32	1 26	15	4 32	6 8	34 20	6 32	9 8	3 42	25	8 32	12 8	32	10 32	5 58	36
0 36	0 20	26	2 36	1 28	31	4 36	6 9	36 36	6 36	9 9	3 44	42	8 36	12 9	36	10 36	6 0	52
0 40	0 22	42	2 40	1 30	47	4 40	6 10	38 52	6 40	10 0	3 46	58	8 40	12 10	40	10 40	6 3	8
0 44	0 24	58	2 44	1 33	3	4 44	6 11	41 9	6 44	10 1	3 49	14	8 44	12 11	44	10 44	6 5	25
0 48	0 27	14	2 48	1 35	19	4 48	6 12	43 25	6 48	10 2	3 51	30	8 48	12 12	48	10 48	6 7	41
0 52	0 29	30	2 52	1 37	36	4 52	6 13	45 41	6 52	10 3	3 53	46	8 52	12 13	52	10 52	6 9	57
0 56	0 31	46	2 56	1 39	52	4 56	6 14	47 57	6 56	10 4	3 56	2	8 56	12 14	56	10 56	6 12	13
1 0	0 34	3	3 0	1 42	8	5 0	6 15	50 13	7 0	10 5	3 58	19	9 0	12 15	0	10 56	6 14	29
1 4	0 36	19	3 4	1 44	24	5 4	6 16	52 30	7 4	10 6	4 0	35	9 4	12 16	4	10 56	6 16	46
1 8	0 38	35	3 8	1 46	40	5 8	6 17	54 46	7 8	10 7	4 2	51	9 8	12 17	8	10 56	6 19	2
1 12	0 40	51	3 12	1 48	57	5 12	6 18	57 2	7 12	10 8	4 5	7	9 12	12 18	12	10 56	6 21	18
1 16	0 43	7	3 16	1 51	13	5 16	6 19	59 18	7 16	10 9	4 7	23	9 16	12 19	16	10 56	6 23	34
1 20	0 45	24	3 20	1 53	29	5 20	6 20	1 34	7 20	10 10	4 9	40	9 20	12 20	20	10 56	6 25	50
1 24	0 47	40	3 24	1 55	45	5 24	6 21	3 50	7 24	10 11	4 11	56	9 24	12 21	24	10 56	6 28	6
1 28	0 49	56	3 28	1 58	1	5 28	6 22	6 7	7 28	10 12	4 14	12	9 28	12 22	28	10 56	6 30	23
1 32	0 52	12	3 32	1 52	17	5 32	6 23	8 23	7 32	10 13	4 16	28	9 32	12 23	32	10 56	6 32	39
1 36	0 54	28	3 36	1 54	33	5 36	6 24	10 39	7 36	10 14	4 18	44	9 36	12 24	36	10 56	6 34	55
1 40	0 56	44	3 40	1 56	49	5 40	6 25	12 55	7 40	10 15	4 21	0	9 40	12 25	40	10 56	6 37	11
1 44	0 59	1	3 44	1 59	65	5 44	6 26	15 11	7 44	10 16	4 23	17	9 44	12 26	44	10 56	6 39	27
1 48	1 1	17	3 48	2 1	33	5 48	6 27	17 27	7 48	10 17	4 25	33	9 48	12 27	48	10 56	6 41	43
1 52	1 3	33	3 52	2 3	49	5 52	6 28	19 44	7 52	10 18	4 27	49	9 52	12 28	52	10 56	6 44	0
1 56	1 5	49	3 56	2 5	65	5 56	6 29	22 0	7 56	10 19	4 30	5	9 56	12 29	56	10 56	6 46	16
2 0	1 8	5	4 0	2 8	81	6 0	6 30	24 16	8 0	10 20	4 32	21	10 0	12 30	60	10 56	6 48	32

8

plupart se présentent aussitôt à l'esprit, dans l'application; je n'en indiquerai qu'un petit nombre.

§. 19. *Rcm. 2.* Lorsque les nombres  $p$  sont de grands nombres, on a rarement besoin d'écrire chacun tout à la fois; on peut faire mieux ordinairement, en n'écrivant que le dernier ou les deux derniers chiffres, & en remplissant ensuite à loisir le reste des colonnes, ce qui se fait facilement; & il ne faut pas croire qu'on soit obligé de suivre pour chaque période séparément la formule qu'on a sous les yeux; on peut s'en dispenser aussitôt qu'on a écrit  $k$  termes; car puisqu'au bout de  $k$  termes, les augmentations des  $p$  reviennent dans le même ordre, il est clair que les derniers chiffres du 1<sup>r</sup>. 2<sup>d</sup>. 3<sup>e</sup>. &c. terme de la seconde période, différeront tous d'un même nombre d'unités des 1, 2, 3, &c. termes de la première période, & qu'on n'a par conséquent qu'à suivre du doigt les derniers chiffres de la première période & les copier, ou tels qu'ils sont, comme on peut souvent le faire, ou en ajoutant la différence constante dont je parle; on complete ensuite aisément chaque terme par ordre. En effet si le premier terme est  $x + \frac{h}{k}$ , le  $k + 1^e$ . terme sera  $(k + 1) x + h + \frac{h}{k}$ ; le  $k + 2^e$ . terme différera du  $k + 1^e$  autant que le second

second différoit du premier; & ainsi de suite; or la partie  $(k + 1) x$  est ordinairement un petit nombre de minutes, si la Table est en parties sexagésimales, ou bien c'est un nombre rond de dizaines ou de centaines; ainsi comme toutes les fractions  $\frac{h}{k}$  se négligent quand elles ne surpassent pas  $\frac{1}{2}$ , ce n'est qu'un petit nombre  $h$  ou tout au plus  $h + 1$  d'unités qu'il s'agit d'ajouter aux derniers chiffres de la première période pour former la seconde, aux derniers de la seconde pour former la troisième &c. C'est ainsi qu'en construisant la table qu'on vient de voir, lorsque j'eus écrit les 45 premiers termes en suivant la formule du §. 16. je n'ai fait ensuite qu'ajouter toujours 8 secondes, en commençant par le premier; quand la somme passoit 60, je négligeois des 60 & en remplissant ensuite les minutes j'ajoutois 3 minutes au lieu de 2, quand je voyois que le nombre des secondes au lieu d'augmenter avoit diminué; comme par ex. pour les valeurs de  $n = 4$ ,  $n = 19$ ,  $n = 82$  &c.

§. 17. *Rem. 3<sup>e</sup>.* Puisque dans la valeur  $\frac{m}{c} = x + \frac{h}{k}$ ;  $x$  est un nombre constant, & dont il revient toujours un multiple proportionnel à  $n$ ; il est évident qu'on peut s'épargner la peine d'ajouter



ier successivement; de grands nombres pour exprimer les valeurs  $p$ , & qu'on peut en même tems réduire la table, à un moindre espace, en mettant à la tête de la colonne le nombre constant  $x$  & en inférant dans la Table seulement les parties proportionnelles  $\frac{nh}{k}$ ; mais lorsqu'il s'agira ensuite de tirer de la Table la partie proportionnelle qu'on demande pour une valeur donnée de  $n$ , il faudra d'abord multiplier cette valeur par  $x$  & ajouter ensuite au produit le terme  $p$  correspondant dans la colonne. C'est ainsi qu'on auroit pu mettre la table précédente sous la forme No. I.: alors pour

No. I.

$n$	$x = 2'. 16''$
1	0''
2	0
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	2
10	2
11	2
12	2
13	2
14	2
15	2
16	2
17	2
18	2
19	2
20	2
21	2
22	2
23	2
24	2
25	2
26	2
27	2
28	2
29	2
30	2
31	2
32	2
33	2
34	2
35	2
36	2
37	2
38	2
39	2
40	2
41	2
42	2
43	2
44	2
45	2
46	2
47	2
48	2
49	2
50	2
51	2
52	2
53	2
54	2
55	2
56	2
57	2
58	2
59	2
60	2
61	2
62	2
63	2
64	2
65	2
66	2
67	2
68	2
69	2
70	2
71	2
72	2
73	2
74	2
75	2
76	2
77	2
78	2
79	2
80	2
81	2
82	2
83	2
84	2
85	2
86	2
87	2
88	2
89	2
90	2
91	2
92	2
93	2
94	2
95	2
96	2
97	2
98	2
99	2
100	2
101	2
102	2
103	2
104	2
105	2
106	2
107	2
108	2
109	2
110	2
111	2
112	2
113	2
114	2
115	2
116	2
117	2
118	2
119	2
120	2
121	2
122	2
123	2
124	2
125	2
126	2
127	2
128	2
129	2
130	2
131	2
132	2
133	2
134	2
135	2
136	2
137	2
138	2
139	2
140	2
141	2
142	2
143	2
144	2
145	2
146	2
147	2
148	2
149	2
150	2
151	2
152	2
153	2
154	2
155	2
156	2
157	2
158	2
159	2
160	2
161	2
162	2
163	2
164	2
165	2
166	2
167	2
168	2
169	2
170	2
171	2
172	2
173	2
174	2
175	2
176	2
177	2
178	2
179	2
180	2
181	2
182	2
183	2
184	2
185	2
186	2
187	2
188	2
189	2
190	2
191	2
192	2
193	2
194	2
195	2
196	2
197	2
198	2
199	2
200	2

No. II.

$n$	$x = 2'$
1	0'. 16''
2	0. 32
3	0. 49
4	1. 5
5	1. 21
6	1. 37
7	1. 53
8	2. 9
9	2. 26
10	2. 42
11	2. 58
12	3. 14
13	3. 31
14	3. 47
15	4. 3
16	4. 19
17	4. 35
18	4. 51
19	5. 7
20	5. 23
21	5. 39
22	5. 55
23	6. 11
24	6. 27
25	6. 43
26	6. 59
27	7. 15
28	7. 31
29	7. 47
30	8. 3
31	8. 19
32	8. 35
33	8. 51
34	9. 7
35	9. 23
36	9. 39
37	9. 55
38	10. 11
39	10. 27
40	10. 43
41	10. 59
42	11. 15
43	11. 31
44	11. 47
45	12. 3
46	12. 19
47	12. 35
48	12. 51
49	13. 7
50	13. 23
51	13. 39
52	13. 55
53	14. 11
54	14. 27
55	14. 43
56	14. 59
57	15. 15
58	15. 31
59	15. 47
60	16. 3
61	16. 19
62	16. 35
63	16. 51
64	17. 7
65	17. 23
66	17. 39
67	17. 55
68	18. 11
69	18. 27
70	18. 43
71	18. 59
72	19. 15
73	19. 31
74	19. 47
75	20. 3
76	20. 19
77	20. 35
78	20. 51
79	21. 7
80	21. 23
81	21. 39
82	21. 55
83	22. 11
84	22. 27
85	22. 43
86	22. 59
87	23. 15
88	23. 31
89	23. 47
90	24. 3
91	24. 19
92	24. 35
93	24. 51
94	25. 7
95	25. 23
96	25. 39
97	25. 55
98	26. 11
99	26. 27
100	26. 43
101	26. 59
102	27. 15
103	27. 31
104	27. 47
105	28. 3
106	28. 19
107	28. 35
108	28. 51
109	29. 7
110	29. 23
111	29. 39
112	29. 55
113	30. 11
114	30. 27
115	30. 43
116	30. 59
117	31. 15
118	31. 31
119	31. 47
120	32. 3
121	32. 19
122	32. 35
123	32. 51
124	33. 7
125	33. 23
126	33. 39
127	33. 55
128	34. 11
129	34. 27
130	34. 43
131	34. 59
132	35. 15
133	35. 31
134	35. 47
135	36. 3
136	36. 19
137	36. 35
138	36. 51
139	37. 7
140	37. 23
141	37. 39
142	37. 55
143	38. 11
144	38. 27
145	38. 43
146	38. 59
147	39. 15
148	39. 31
149	39. 47
150	40. 3
151	40. 19
152	40. 35
153	40. 51
154	41. 7
155	41. 23
156	41. 39
157	41. 55
158	42. 11
159	42. 27
160	42. 43
161	42. 59
162	43. 15
163	43. 31
164	43. 47
165	44. 3
166	44. 19
167	44. 35
168	44. 51
169	45. 7
170	45. 23
171	45. 39
172	45. 55
173	46. 11
174	46. 27
175	46. 43
176	46. 59
177	47. 15
178	47. 31
179	47. 47
180	48. 3
181	48. 19
182	48. 35
183	48. 51
184	49. 7
185	49. 23
186	49. 39
187	49. 55
188	50. 11
189	50. 27
190	50. 43
191	50. 59
192	51. 15
193	51. 31
194	51. 47
195	52. 3
196	52. 19
197	52. 35
198	52. 51
199	53. 7
200	53. 23

avoir, par ex. la partie proportionnelle pour  $n = 9$

on auroit écrit  $9. (2'. 16) + 2 = 18 + 146 = 20'. 26''$ . Mais comme, à cause de ces  $16''$ , cette multiplication de  $n$  par  $x$  seroit embarrassante pour de grandes valeurs de  $n$ , je remarquerai de plus qu'on peut aussi ne mettre à part, à la tête de la colonne, qu'une partie de la constante  $x$ , dans notre cas par ex.  $2'$ , & faire entrer les  $16''$  & leurs multiples dans la table, comme au No. II; elle ne laissera pas d'être réduite à un moindre espace, parce qu'elle ne renfermera que des minutes & des secondes, & les parties proportionnelles se prendront presque aussi facilement que dans la grande table.

§. 18. Rem. 4<sup>e</sup>. Par une raison semblable; quel que grand que soit le nombre des valeurs de  $m$ , pour les quelles on se propose de construire une Table, on n'a jamais besoin de faire plus de  $c$  préparations pour le commencement & pour la loi intérieure des périodes. En effet, qu'on ait fait ces deux préparations pour une certaine valeur de  $m$  & qu'on ait traité de la manière prescrite la valeur  $\frac{m}{c} = x + \frac{h}{k}$ , il est clair que la préparation restera la même quand  $m$  deviendra  $m + c$ , puisqu'on aura alors  $\frac{m+c}{c} = x + 1 + \frac{h}{k}$  & qu'on n'aura d'autre changement à faire que de prendre la partie constante  $x$  de 1 plus grande. Cette propriété facilite beaucoup l'opération lors-



qu'on cherche les parties proportionnelles en décimales, parce qu'ordinairement  $c$  est un multiple de 10; car puisque dans toutes les divisions où l'on cherche le quotient en entiers & en fractions décimales, on se représente le dividende comme multiplié par 10 ou 100 ou &c. en se réservant distinguer ensuite par une virgule les fractions d'avec les entiers, il est clair qu'il faudra aussi dans notre cas se représenter constamment  $m$ , comme 10 ou 100 fois &c. plus grand qu'il n'est; & que par conséquent si  $c$  est un multiple  $\frac{c}{m}$  de 10, de 100 &c. on pourra construire la Table simplement pour la base beaucoup moindre  $\frac{c}{10}$  ou  $\frac{c}{100}$  &c; mais on mettra les virgules à leur place & on continuera cependant les  $p$  jusqu'au terme  $n = c$ . Par ex. en construisant une Table pour la base 360, & en prenant les dixièmes, afin de ne négliger jamais que tout au plus des  $\frac{1}{20}$ cs. on n'auroit besoin que de 36 préparations; aucune période ne seroit de plus de 36 termes; la plupart en auroit moins, parce que 36 a beaucoup de diviseurs; & lors même que  $k$  sera 136, la fraction continue  $= \frac{h}{k}$  ne pourra jamais avoir qu'un très petit nombre de termes, ce qui rendra les préparations très faciles. On abrégeroit peut-être trop, mais on pourroit réduire aussi la Table en ne poussant pas les  $p$  au delà du terme  $n = \frac{c}{10}$  &c. & en se réservant

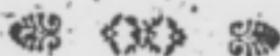
ensuite d'ajouter au  $p$ , qu'on trouve dans la Table, autant de fois  $m$  qu'il y a de fois  $c$  entre le  $n$ , pour le quel on cherche  $p$ , & celui pour le quel on a pris  $p$  dans la Table; car si

$$\frac{10 m n}{c} = p + d, \text{ \& qu'on fasse } n = n + \frac{f m c}{c}, \text{ on aura}$$

$$\frac{10 m n}{c} = \frac{10 m n}{c} + \frac{f m c}{c} = p + d + f m. \text{ Soit}$$

$c = 360, m = 7, n = 11, f = 9$ ; le  $p$  ou  $p + d$  qui répond à  $n = 11$ , sera 0, 2 & celui qui répond à  $n = 9$ ,  $36 + 11 = 335$ , seroit, en regardant les décimales comme des entiers,  $9 m + 0.2 = 63 + 0.2 = 65$ ; c'est à dire que ce nouveau  $p$  seroit = 6, 5.

§. 19. Rem. 5. Mais il y a plus; je dis que dans l'exemple précédent on n'a même besoin que de 18 formules; qu'au fond on n'a même en tout que 18 préparations à faire tant pour le commencement que pour la disposition intérieure des périodes; & qu'en général si  $k$  est le plus grand nombre de termes que les périodes puissent avoir dans une Table proposée, le nombre des préparations se réduit à  $\frac{1}{2} k$ . Cette remarque, importante ici, se fonde sur ce qu'à une valeur quelconque de  $h$ , plus petite que  $\frac{1}{2} k$ , répond toujours une autre valeur de  $h$ , plus grande que  $\frac{1}{2} k$ , pour la quelle la loi intérieure des périodes est absolument la même, si on met partout  $x + 1$  à la place de  $x$  &  $x$  à la place de  $x + 1$  dans les formules dont on a besoin pour les valeurs de  $b$  plus petites



que  $\frac{1}{2}k$ . Cette valeur correspondante de  $h$  est  $k-h$  comme il est aisé de le soupçonner. Quant au commencement des périodes, il est différent si  $k$  est pair : J'ai prouvé que dans ces cas de  $h > \frac{1}{2}k$ , si on veut faire usage des formules qui répondent à  $h < \frac{1}{2}k$ , il faut commencer la période au terme  $n = \frac{2kr+k}{2h} + 1$  quand  $k$  est pair, & au terme  $n = \frac{2rk+k-1}{2h} + 1$  quand  $k$  est impair ; en entendant, comme plus haut, par  $r$  le plus petit nombre entier tel que  $\frac{2kr+k}{2h}$  soit un nombre entier  $M'$ , & que  $\frac{2rk+k-1}{2h}$  soit un nombre entier  $N'$ .

Or, la résolution de ces équations indéterminées souffre d'autant moins de difficultés, que la première équation  $M'$  admet une solution générale, savoir  $r = \frac{h-1}{2}$  ; & que pour la seconde  $N'$  on n'a qu'à reprendre  $N$  ; parce qu'on trouvera actuellement pour  $N'$  la même valeur qu'auparavant pour  $N$ . On aura de cette manière pour le commencement de la période, quand  $k$  est pair, en général  $n = \frac{k+2}{2}$ , & quand  $k$  est impair, on fera usage de la valeur de  $n$  déjà déterminée pour la valeur  $k-h$  correspondante au  $h$  actuel. Par ex. si on veut construire les parties proportionnelles pour 60. 50'. 28'' de mouvement de la Lune en 12 heures, & pour le même

même intervalle que je l'ai fait au §. 16. on aura  
 $\frac{m}{c} = x + \frac{h}{k} = 136 + \frac{17}{5}$ . Ainsi  $h$  étant ici ce  
 qu'étoit  $k-h$  dans notre exemple du §. 16. je dis  
 qu'on n'a qu'à former les périodes suivant cette  
 formule

- 5 fois 2'. 17"
- 1 — 2. 16
- 5 — 2. 17
- &c.

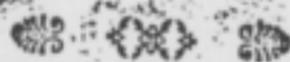
& en commençant, comme auparavant au terme 32<sup>e</sup>.

§. 20. Rem. 6<sup>e</sup>. Une autre remarque qui est de  
 conséquence ici, c'est qu'on peut le plus souvent  
 abréger considérablement les formules préparatoi-  
 res pour la loi intérieure des périodes, en intro-  
 duisant des signes négatifs dans les fractions conti-  
 nues équivalentes aux fractions  $\frac{h}{k}$ . Je n'ai pas tardé  
 à faire cette remarque lorsque j'ai commencé ces re-  
 cherches, & je l'ai indiquée dans ma première lec-  
 ture, mais j'en ai réservé le développement pour  
 une troisième lecture & je me flatte de trouver ai-  
 sément les règles générales qu'elle doit fournir:  
 en attendant j'expliquerai par un exemple ce que  
 je veux dire. Nous avons vu plus haut (§. 16.)

que  $\frac{m}{c} = x + \frac{h}{k} =$

$$x + \frac{8}{45} = x + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15}$$

γ   δ   ε   η   θ

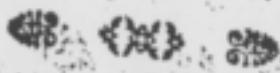


La formule  $F$ , qui appartient à cette fraction continue, est fort longue; ainsi qu'on le voit dans la Table IV; mais comme notre fraction continue peut se mettre aussi sous cette forme,  $x + \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}}$ , où il n'y a que trois termes, au lieu de cinq, il est naturel de penser qu'on pourra la rapporter aussi à une formule beaucoup moins composée & semblable à la formule  $D$ ; & nous avons vu en effet que la formule  $(\theta - 1)E + E' = F$ , dont nous avons fait usage, s'est réduite à un petit nombre de termes, plusieurs coefficients s'étant évanouis en substituant.

§. 21. *Rem. 7<sup>e</sup>.* Lorsqu'en construisant une certaine Table, on aura fait les préparations nécessaires pour les différentes valeurs de  $\frac{h}{k}$ , on fera bien de les conserver, parce que l'occasion peut se présenter de les employer pour quelque autre Table. Par ex. une Table où l'on trouveroit pour chaque dixième seconde la partie proportionnelle du mouvement horaire du Soleil, ne seroit pas inutile; or quand  $m$  ou le mouvement horaire du Soleil seroit  $2'. 3'', 4$ , on auroit  $\frac{m}{c} = \frac{1504}{360} = x + \frac{h}{k} = 4 + \frac{8}{45}$ ; ainsi on pourroit faire usage de la plus grande partie de la préparation du §. 16.

§. 22. *Rem. 8<sup>e</sup>.* Avec quelque attention on remarquera que ma méthode est aussi fort utile pour des Tables d'interpolation à raison des secondes & troi-

troisiemes différences; & que, par Ex. la Table de M. GUÉRIN (*Conn. des Tems* pour 1771, pag. 162 & suiv.) auroit pu se construire par cette méthode avec beaucoup de facilité. Mais la premiere chose qu'on observera, c'est qu'il auroit fallu déterminer de suite les colonnes horizontales & non les verticales; car si  $dd$  marque la seconde différence,  $\mu$  le nombre des intervalles entre les quels on veut interpoler, &  $\pi$  l'index du nombre qu'on cherche parmi les  $\mu + 1$  termes qui forment ces  $\mu$  intervalles, il est clair que chaque terme étant  $= \pi \left( \frac{\mu - \pi}{2\mu\mu} \right) dd$ , on ne pourra appliquer notre formule  $\frac{mn}{c} = P$ , qu'en faisant  $\pi = dd$ ,  $c = 2\mu\mu$ , &  $m = \pi(\mu - \pi)$ ; parce que ce ne sont que les secondes différences  $dd$  qui peuvent être censées augmenter en progression arithmétique. J'ai fait un essai de cette application en déterminant toutes les valeurs de  $\pi \left( \frac{\mu - \pi}{2\mu\mu} \right) dd$ , qui répondent à 1<sup>h</sup>. 48'. & voici comment j'ai raisonné. 1°. M. GUÉRIN a fait varier  $dd$  de 10'' en 10'', depuis 0' jusqu'à 10', ainsi il y a 60 termes à déterminer. 2°. Le rapport de  $\pi$  à  $\mu$  étant constant, pour le cas proposé, on peut faire  $\pi = 27$  &  $\mu = 179$ . 3°. Ainsi pour  $dd = 10''$ , on a  $\frac{\pi(\mu - \pi)}{2\mu\mu} dd = \frac{20520''}{32041''}$ . 4°. Et puisque  $dd$  augmente proportionnellement à 1, 2, 3, 4. &c. & qu'on cherche les termes de la Table en dixie-



mes de secondes, on a ici des termes  $p$  qui augmentent successivement de  $\frac{m}{c} = \frac{205200}{32841}$ . Mais le dénominateur 32041 fourniroit une période beaucoup trop longue, puisqu'on n'a que 60 termes à construire; il faut donc penser à réduire cette fraction à de moindres termes, sans se relâcher cependant sur l'exactitude qu'on demande.

6°. Si on réduit la fraction  $\frac{205200}{32841}$  en décimales, on a  $\frac{640}{18}$  ou  $\frac{64}{18} = 3\frac{2}{9}$ ; ainsi chaque période ne seroit que de cinq termes, mais on négligeroit de cette manière la fraction  $\frac{1376}{328418}$  qui se multiplieroit près de 60 fois vers le dernier terme, & il en résulteroit alors une erreur de  $\frac{1}{4}$  de dixième de seconde, qui jointe à celle qu'on ne peut éviter, d'ailleurs, produiroit plus de  $\frac{1}{8}$  d'erreur.

7°. Il vaudra donc mieux réduire  $\frac{205200}{32841}$  en fraction continue, & comme les fractions principales qu'on en déduira seront autant de valeurs approchées de  $\frac{205200}{32841}$ , il sera facile d'en choisir une qui ait un petit nombre pour dénominateur & qu'on puisse adopter pour  $\frac{m}{c}$ , sans se soustraire à la condition qu'on s'est imposée.

8°. Or les fractions principales que je trouve, sont  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{26}{9}, \frac{301}{47}, \frac{3070}{512}, \&c.$  & celle-ci  $\frac{269}{42}$  satisfait déjà suffisamment, puisqu'elle diffère de  $\frac{205200}{32841}$  seulement de  $\frac{622}{32841}$  par excès; erreur qui ne peut influer dans les résultats qu'on

qu'on cherche \*). 9°. Regardant donc  $\pi$  comme =  $\frac{200}{41} = 6 + \frac{1}{41} = 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{82}$ , j'ai vu qu'il falloit commencer la période au 27<sup>e</sup> terme & suivre la formule que voici; & en vérifiant de cette manière 60 termes de la table de M. GUÉRIN je n'en ai jamais trouvés en défaut de plus d'un dixième de seconde.

2 fois	0,6
7 fois	0,7
	0,6
	0,7
	0,6
	0,7
	0,6
	0,7
2 fois	0,6
	0,7

§. 23. Rem. 9<sup>e</sup>. Si on se proposoit de construire une Table de parties proportionnelles pour le mouvement de la Lune en 12 heures, ou quelque autre Table de cette espèce, j'aimerois mieux qu'on fit les intervalles, non de 4 minutes; mais de 10 minutes; car les nouvelles proportionnelles qu'on auroit à prendre pour les 600 secondes intermédiaires se trouveroient alors immédiatement dans une Table

Je me contenterai de remarquer en général, que si on veut réduire ainsi la fraction  $\pi \left( \frac{\mu - \pi}{2\mu\mu} \right)$  à de moindres termes & être absolument exact, de quoi on peut cependant se dispenser, très souvent, il faut toujours choisir parmi les fractions principales une de celles qui pèchent par excès; & voir en gros si la différence multipliée par la plus grande valeur de  $\pi$ , ne va pas au delà de  $\frac{1}{k}$ , quand  $k$  est pair, & au delà de  $\frac{1}{2k}$ , lorsque  $k$  est impair; la raison en est que dans ma méthode on néglige jusqu'à  $\frac{1}{2}$  unité du dernier chiffre & qu'on ne prend jamais de trop que  $\frac{1}{2} - \frac{1}{k}$  unités ou  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$  unités. Je m'étendrai sur cette règle davantage autre part.

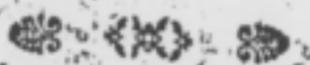


Table *sexcentenaire* que je construis dans mes momens de loisir avec l'aide d'une autre personne, & qui servira pour toutes les Tables d'Equations du centre, de Réductions à l'Equateur &c; qui tiendra lieu des logarithmes logistiques de STREET, enfin qui sera d'un usage aussi étendu, que comme de par la forme que je lui donnerai: on se passe quelque fois de pareilles tables lorsqu'on n'a qu'une ou deux proportions à faire, mais personne n'ignore combien elles font plaisir dans des calculs astronomiques, un peu longs, & surtout lorsqu'on calcule des Ephémérides.

§ 24. Je finirai ici ce long article; je me flatte qu'il est assez clair pour qu'on en puisse faire usage & passés, utile pour qu'on ne regrette pas la peine d'y donner quelque attention. Je réserve pour un ouvrage plus étendu les démonstrations & plusieurs remarques que j'ai omises; ainsi que des préparations de Tables, & même des Tables calculées. Cet ouvrage concernera non seulement cette nouvelle méthode, mais en général les interpolations, la Trigonométrie & d'autres matières importantes en Astronomie; & je me flatte de mettre sous les yeux des Astronomes, différentes méthodes d'abrèger considérablement leurs calculs, qu'ils ne connoissoient pas encore, ou que, par des raisons qui cesseront, ils ont négligé de saisir, lorsqu'elles leur ont été présentées pour la première fois; je commencerai par publier un *prospectus* de cet ouvrage, mais ce ne sera que quand j'aurai assez bien digéré mes idées pour ne rien promettre que je ne puisse tenir, & dont l'utilité ne puisse être reconnue généralement.