



# Couplage Planification/Ordonnancement : une approche par décomposition et génération de coupes

O. Guyon<sup>1,2</sup>, N. Brahimi<sup>2</sup>, E. Pinson<sup>1</sup>, D. Rivreau<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institut de Mathématiques Appliquées (UCO)

<sup>2</sup>Ecole des Mines de Nantes

21 février 2007

# Sommaire

hal-00481496, version 1 - 30 Sep 2010

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation
- 2 Techniques de résolution
  - Relaxation lagrangienne
  - Décomposition de Benders
  - Décomposition et génération de coupes
- 3 Conclusion
  - Expérimentations numériques
  - Bilan

## 1 Introduction

- Problème
- Formalisation

## 2 Techniques de résolution

- Relaxation lagrangienne
- Décomposition de Benders
- Décomposition et génération de coupes

## 3 Conclusion

- Expérimentations numériques
- Bilan

hal-00481496, version 1 - 30 Sep 2016  
Présentation du problème

## Données

- $J$  ( $n$  jobs) :
  - durée  $p_j$
  - domaine d'exécution  $D_j = [r_j, d_j]$
  - préemptif
  - requiert un opérateur pour chaque unité de temps d'exécution
- $O$  ( $m$  opérateurs)
  - ensemble de roulements affectables  $\Omega_o$  (de coût  $\eta_\omega^o$ )

## Objectif

Déterminer un ordonnancement (sur un horizon temporel  $H$ ) de l'ensemble des jobs en affectant à chaque opérateur un roulement, en satisfaisant au moindre coût les besoins en effectif

## Références bibliographiques

- *Artigues Gendreau Rousseau*
  - Etat de l'art sur le problème
  - Séparation entre activités des opérateurs et exécution des jobs
- *Danniels and Mazzola*
  - Durée des jobs variant selon le mode de fabrication
- *Bailey et al.*
  - Trouver un compromis entre le coût des opérateurs et la durée globale du projet
- ...

## 1 Introduction

- Problème
- Formalisation

## 2 Techniques de résolution

- Relaxation lagrangienne
- Décomposition de Benders
- Décomposition et génération de coupes

## 3 Conclusion

- Expérimentations numériques
- Bilan

## Variables de décision

*Planification* (affectation des roulements aux opérateurs)

$$\forall o \in O, \forall \omega \in \Omega_o, y_{\omega}^o = \begin{cases} 1 & \text{si profil } \omega \text{ affecté à opérateur } o \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Ordonnancement* (affectation des jobs aux unités de temps)

$$\forall j \in J, \forall t \in H, x_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{si une unité du job } j \text{ est exécutée à } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Programme linéaire

$$[P] : \min \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \eta_{\omega}^o y_{\omega}^o \quad (1)$$

$$\forall o \in O \quad \sum_{\omega \in \Omega_o} y_{\omega}^o = 1 \quad (2)$$

$$\forall j \in J \quad \sum_{t \in D_j} x_{jt} = p_j \quad (3)$$

$$\forall t \in H \quad \sum_{j \in J} x_{jt} \leq \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t y_{\omega}^o \quad (4)$$

$$\forall o \in O, \forall \omega \in \Omega_o \quad y_{\omega}^o \in \{0, 1\} \quad (5)$$

$$\forall j \in J, \forall t \in H \quad x_{jt} \in \{0, 1\} \quad (6)$$

avec :  $\forall \omega \in \Omega, \forall t \in H, \sigma_{\omega}^t = 1$  ssi  $\omega$  couvre  $t$



# Approches de résolution

- Borne inférieure : Relaxation lagrangienne
- Solution exacte :
  - Décomposition de Benders
  - Décomposition et génération de coupes

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation
- 2 Techniques de résolution
  - Relaxation lagrangienne
  - Décomposition de Benders
  - Décomposition et génération de coupes
- 3 Conclusion
  - Expérimentations numériques
  - Bilan

## Relaxation lagrangienne (1/2)

$$[P] \quad \min \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \eta_{\omega}^o y_{\omega}^o$$
$$\sum_{\omega \in \Omega_o} y_{\omega}^o = 1 \quad \forall o$$
$$\sum_{t \in D_j} x_{jt} = p_j \quad \forall j$$

$$\sum_{j \in J} x_{jt} \leq \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t y_{\omega}^o$$

contraintes couplantes  $\forall t$ 
$$y_{\omega}^o \in \{0, 1\} \quad \forall o, \forall \omega$$
$$x_{jt} \in \{0, 1\} \quad \forall j, \forall t$$

## Relaxation lagrangienne (2/2)

$$\begin{aligned} [SP(\pi)] \quad \min \quad & \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \eta_{\omega}^o y_{\omega}^o + \sum_{t \in H} \left( \pi_t \left( \sum_{j \in J} x_{jt} - \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t y_{\omega}^o \right) \right) \\ & \sum_{\omega \in \Omega_o} y_{\omega}^o = 1 && \forall o \\ & \sum_{t \in D_j} x_{jt} = p_j && \forall j \\ & \sum_{j \in J} x_{jt} \leq \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t y_{\omega}^o \quad \rightsquigarrow \pi_t \geq 0 && \forall t \\ & y_{\omega}^o \in \{0, 1\} && \forall o, \forall \omega \\ & x_{jt} \in \{0, 1\} && \forall j, \forall t \end{aligned}$$

## Borne inférieure de Lagrange

Fonction duale  $L(\pi)$ 

$$L(\pi) = \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \eta_{\omega}^o y_{\omega}^o + \sum_{t \in H} \left( \pi_t \left( \sum_{j \in J} x_{jt} - \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t y_{\omega}^o \right) \right)$$

Borne inférieure de Lagrange

$$\max_{\pi} [L(\pi)]$$

Sous-problème [SP( $\pi$ )] avec  $\pi$  fixé

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \eta_{\omega}^o y_{\omega}^o + \sum_{t \in H} \pi_t \left( \sum_{j \in J} x_{jt} - \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t y_{\omega}^o \right) \\ & \sum_{\omega \in \Omega_o} y_{\omega}^o = 1 && \forall o \\ & t \in D_j x_{jt} = p_j && \forall j \\ & y_{\omega}^o \in \{0, 1\} && \forall o, \forall \omega \\ & x_{jt} \in \{0, 1\} && \forall j, \forall t \end{aligned}$$



Résolution de  $[SP_y(\pi)]$  - Affectation  $\omega \rightarrow o$ 

$$[SP_y(\pi)] : \min \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} (\eta_\omega^o - \sum_{t \in H} \pi_t \sigma_\omega^t) y_\omega^o$$

$$\forall o \in O \quad \sum_{\omega \in \Omega_o} y_\omega^o = 1$$

$$\forall o \in O, \forall \omega \in \Omega_o \quad y_\omega^o \in \{0, 1\}$$

## Polynômial

Pour chaque opérateur, prendre le roulement de moindre *coût régularisé*

$$\forall o \in O, y_{\omega'}^o = 1 \Rightarrow \omega' = \arg \min_{\omega \in \Omega_o} (\eta_\omega^o - \sum_{t \in H} \pi_t \sigma_\omega^t)$$



Résolution de  $[SP_x(\pi)]$  - Affectation  $j \rightarrow t$ 

$$\begin{aligned} [SP_x(\pi)] : \min & \sum_{j \in J} \sum_{t \in H} \pi_t x_{jt} \\ \forall j \in J & \sum_{t \in D_j} x_{jt} = p_j \\ \forall j \in J, \forall t \in H & x_{jt} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

## Polynômial

Pour chaque job, fixer les  $p_j$  *premiers plus petits coûts réduits de  $D_j$*  ( $\pi_t/t \in D_j$ )

Tri :  $\forall j \in J, \forall t \in D_j$ , on change les indices :  $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \dots \leq \pi_{D_j}$

$$\forall j \in J, \forall \pi_t \in [\pi_1 \dots \pi_{p_j}], x_{jt} = 1$$

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation
- 2 Techniques de résolution
  - Relaxation lagrangienne
  - **Décomposition de Benders**
  - Décomposition et génération de coupes
- 3 Conclusion
  - Expérimentations numériques
  - Bilan

## Benders dans le cas général (1/3)

$$[P] \quad \min \quad cx + fy$$

$$\boxed{Dx + Fy = d}$$

$$x, y \geq 0$$

contraintes couplantes

## Benders dans le cas général (2/3)

$$\begin{aligned} [SP_{\bar{y}}] \quad \min \quad & cx + fy \\ & Dx = d - F\bar{y} \quad \rightsquigarrow y \in Y \rightarrow \bar{y} \\ & x, \bar{y} \geq 0 \end{aligned}$$

## Benders dans le cas général (3/3)

$$\begin{array}{ll} [SP_{\bar{y}}] & \min \quad cx \\ & Dx = d - F\bar{y} \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \text{Dual} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} [DSP_{\bar{y}}] & \max v(d - F\bar{y}) \\ & vD \geq c \\ & v \geq 0 \end{array}$$

Dualité forte :  $\text{Optimum}[SP_{\bar{y}}] = \text{Optimum}[DSP_{\bar{y}}]$

Particularités de  $[DSP_{\bar{y}}]$ 

- contraintes indépendantes de  $\bar{y}$
- optimum atteint sur un des points extrêmes  $v^1, v^2, \dots, v^q$

## Benders dans le cas général (3)

## Réécriture de [P]

- $P : \min \{cx + fy\}$
- $P : \min_{y \in Y} \{fy + \text{optimum}(SP_y)\}$
- $P : \min_{y \in Y} \{fy + \text{optimum}(DSP_y)\}$
- $P : \min_{y \in Y} \{fy + \max_{j=1 \dots q} (v^j(d - Fy))\}$

$$\begin{aligned} [P] : \min \quad & z \\ & z \geq fy + v^1(d - Fy) \\ & z \geq fy + v^2(d - Fy) \\ & \dots\dots\dots \\ & z \geq fy + v^q(d - Fy) \\ & y \in Y \end{aligned}$$

## Benders dans le cas général (4)

## Définition de l'ensemble des coupes

$$J = 1 \dots q \quad \text{Cut} \leftarrow \{z \geq fy + v^j(d - Fy), j \in J\}$$

$$[P] : \min \quad z$$
$$\quad \quad \quad \text{Cut}$$
$$\quad \quad \quad y \in Y$$

## Résolution de [P]

Résolution itérative en ajoutant une coupe l'une après l'autre

Condition d'arrêt :  $\text{Optimum}([P]) = \text{Optimum}([DSP_{\bar{y}}])$

## Benders dans le cas général (5)

## Avertissement

Dans les explications précédentes,  $[SP_{\bar{y}}]$  doit toujours admettre au moins une solution réalisable.

Sinon, d'autres coupes (*rayons extrêmes*) sont nécessaires.

## Coupes supplémentaires : Théorème de Farkas-Minkowski

$SP_{\bar{y}}$  a une solution  $x \geq 0$  ssi

$$u(d - F\bar{y}) \leq 0 \text{ pour tout } u \text{ vérifiant } uD \leq 0$$



## Benders dans notre application - [P]

$$\begin{aligned} [P] : \min \quad & z \\ \forall o \quad & \sum_{\omega \in \Omega_o} y_{\omega}^o = 1 \\ & \text{Cut} \\ \forall o, \forall \omega \quad & y_{\omega}^o \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Benders dans notre application (2) -  $[SP_{\bar{y}}]$ 

$$[SP_{\bar{y}}] : \min \quad 0 + \sum_{t \in H} M \cdot z_t$$

$$\forall j \in J \quad \sum_{t \in D_j} x_{jt} = p_j$$

$$\forall t \in H \quad \sum_{j \in J} x_{jt} - z_t \leq \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t \bar{y}_{\omega}^o$$

$$\forall j \in J, \forall t \in H \quad x_{jt} \leq 1$$

$$\forall j \in J, \forall t \in H \quad x_{jt} \in \mathbb{R}^+$$

$$\forall t \in H \quad z_t \in \mathbb{R}^+$$

$z_t \rightsquigarrow$  réalisabilité de  $SP_{\bar{y}}$      $x_{jt} \in \mathbb{R}^+ \rightsquigarrow$  vérifier dualité forte

Benders dans notre application (3) -  $[DSP_{\bar{y}}]$ 

$$\begin{aligned} [DSP_{\bar{y}}] : \max \quad & \sum_{j \in J} u_j p_j + \sum_{t \in H} v_t \left( \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t \bar{y}_{\omega}^o \right) + \sum_{j \in J} \sum_{t \in H} w_j^t \\ \forall j \in J, \forall t \in H \quad & \alpha_j^t u_j + v_t + w_j^t \leq 0 \\ \forall t \in H \quad & -v_t \leq M \\ \forall j \in J \quad & u_j \leq 0 \\ \forall t \in H, \quad & v_t \leq 0 \\ \forall j \in J, \forall t \in H \quad & w_j^t \leq 0 \end{aligned}$$

avec :  $\forall j \in J, \forall t \in H, \alpha_j^t = 1$ ssi  $t \in D_j$

## Benders dans notre application (3) - Coupe

$$\sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \eta_{\omega}^o y_{\omega}^o + \sum_{j \in J} u_j^* p_j + \sum_{t \in H} v_t^* \left( \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t y_{\omega}^o \right) + \sum_{j \in J} \sum_{t \in H} w_j^{t*} \leq z$$

soit :

$$\sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} y_{\omega}^o \left( \eta_{\omega}^o + \sum_{t \in H} v_t^* \sigma_{\omega}^t \right) + \sum_{j \in J} \left( u_j^* p_j + \sum_{t \in H} w_j^{t*} \right) \leq z$$

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation
- 2 Techniques de résolution
  - Relaxation lagrangienne
  - Décomposition de Benders
  - Décomposition et génération de coupes
- 3 Conclusion
  - Expérimentations numériques
  - Bilan

- Décomposition de  $[P] \rightarrow [PR]$  et  $[SP]$
- Résolution de  $[PR] : \bar{y}$ , roulement  $\rightarrow$  opérateur
- Résolution de  $[SP(\bar{y})] : \text{job} \rightarrow$  unités de temps
- Si on arrive à planifier tous les jobs : OPTIMUM
- Sinon : Génération d'une coupe invalidant  $\bar{y}$  dans  $[PR]$  et réitération

## Résolution de [PR]

$$[PR] : \min \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \eta_{\omega}^o y_{\omega}^o$$

$$\forall o \in O \quad \sum_{\omega \in \Omega_o} y_{\omega}^o = 1$$

*Cut*

$$\forall o \in O, \forall \omega \in \Omega_o \quad y_{\omega}^o \in \{0, 1\}$$

## Résolution de [PR]

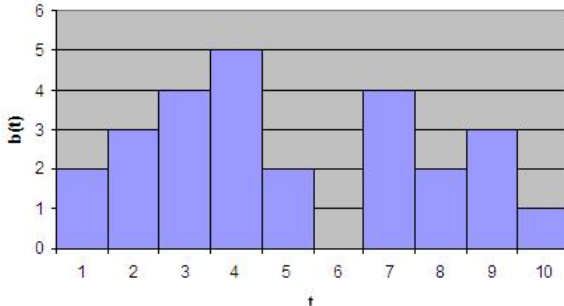
Affectation optimale des roulements aux opérateurs  $\rightsquigarrow \bar{y}$

hal-00481496, version 1 - 30 Sep 2010  
Courbe de disponibilité des opérateurs

## Courbe de disponibilité des opérateurs

$$\forall t \in H, b_t = \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t \bar{y}_{\omega}^o$$

Courbe de disponibilité des opérateurs





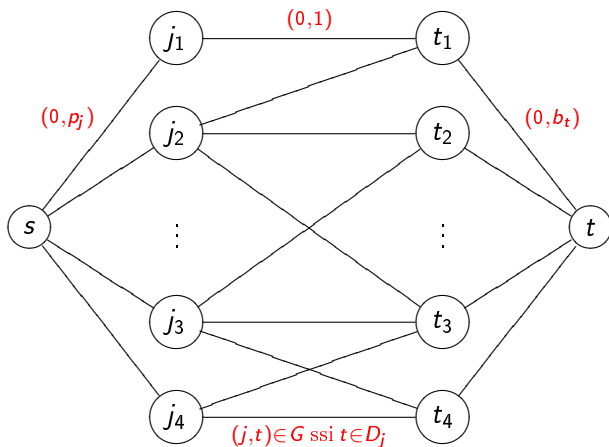
Résolution de  $[SP(\bar{y})]$ 

$$\begin{aligned} [SP(\bar{y})] : \max \quad z = & \sum_{j \in J} \sum_{t \in D_j} x_{jt} \\ \forall t \in H \quad & \sum_{j \in J} x_{jt} \leq b_t \\ \forall j \in J \quad & \sum_{t \in D_j} x_{jt} \leq p_j \\ \forall j \in J, \forall t \in H \quad & x_{jt} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

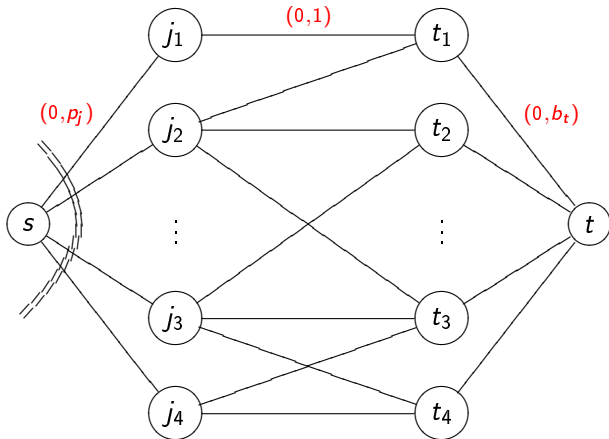
Résolution de  $[SP(\bar{y})]$ 

*Flot maximal sur un graphe biparti  $(J, T, U)$*

# Définition du graphe de flot (1)



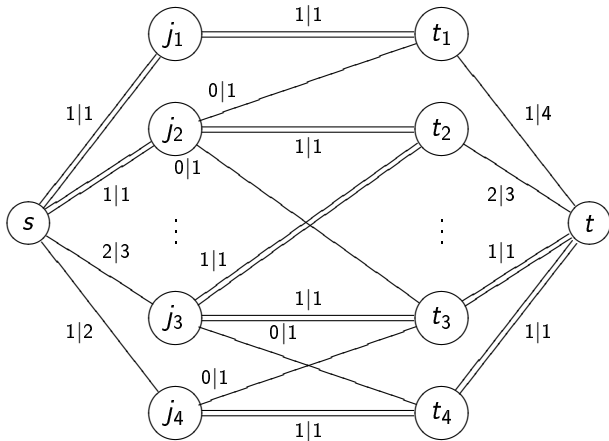
# Définition du graphe de flot (2)



Solution réalisable  $\Leftrightarrow$  Flot max =  $\sum_{j \in J} p_j$

hal-00481496, version 1 - 30 Sep 2016

# Définition du graphe de flot (3)

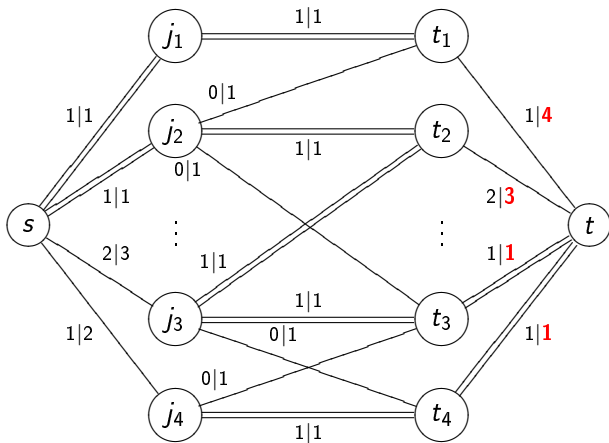


$$\sum_{j \in J} p_j = 7$$

$$\text{Flot max} = 5$$

hal-00481496, version 1 - 30 Sep 2016

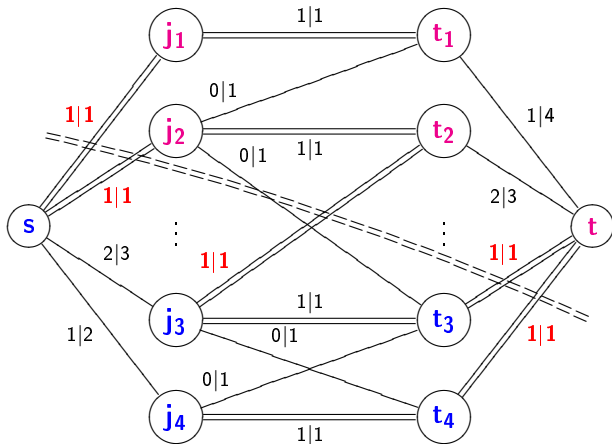
# Définition du graphe de flot (4)



Il faut modifier les  $b_t$

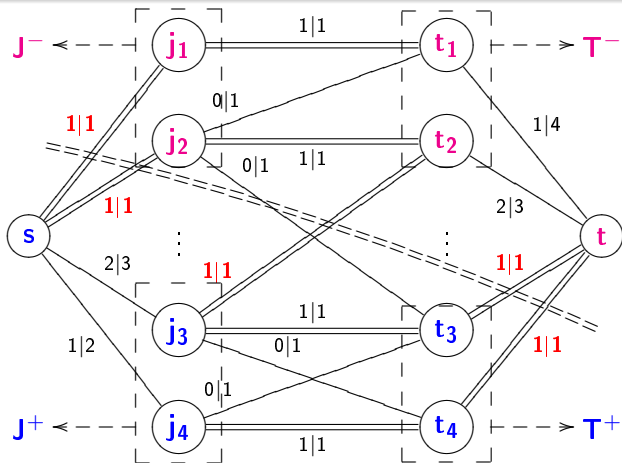
hal-00481496, version 1 - 30 Sep 2016

# Définition du graphe de flot (5)



Coupe minimale  $\{s, j_3, j_4, t_3, t_4\} \cup \{j_1, j_2, t_1, t_2, t\}$

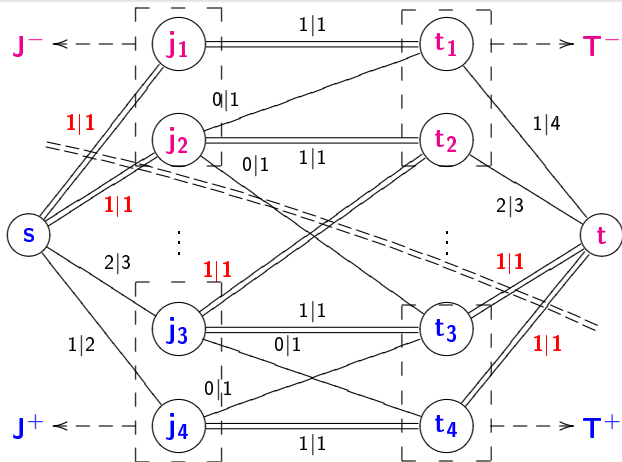
# Définition du graphe de flot (6)



$$F^- = \sum_{u \in \omega^+(T^-)} \phi_u = \sum_{j \in J^-} p_j + \text{card}\{(i, j) | i \in J^+ \wedge j \in T^-\}$$

hal-00481496, version 1 - 30 Sep 2016

# Définition du graphe de flot (7)

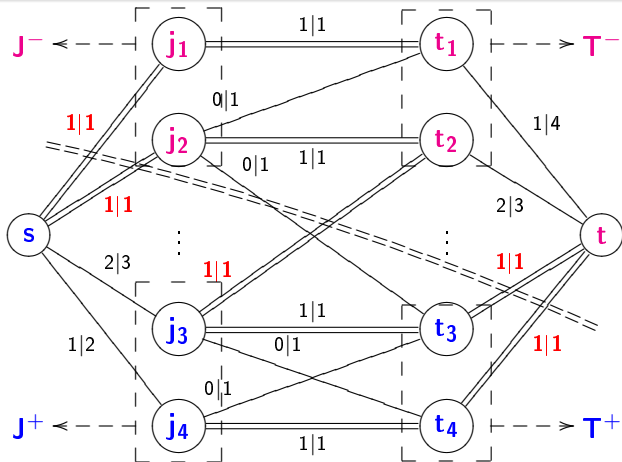


Nécessairement,  $F^+ = \sum_{u \in \omega^+(T^+)} \phi_u \geq \sum_{j \in J} p_j - F^-$

hal-00481496, version 1 - 30 Sep 2010



# Définition du graphe de flot (8)



$$F^+ = \sum_{t \in T^+} b_t$$

hal-00481496, version 1 - 30 Sep 2010

## Génération de coupes

## Expression de la coupe

$$F^+ \geq \sum_{j \in J} p_j - F^-$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t \in T^+} b_t \geq \sum_{j \in J} p_j - \left( \sum_{j \in J^-} p_j + \text{card} \{ (i,j) / i \in J^+ \wedge j \in T^- \} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t \in T^+} \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \sigma_{\omega}^t y_{\omega}^o \geq \sum_{j \in J^+} p_j - \text{card} \{ (i,j) / i \in J^+ \wedge j \in T^- \}$$

## [PR] avec coupes

$$[PR] : \min \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} \eta_{\omega}^o y_{\omega}^o$$

$$\forall o \in O \quad \sum_{\omega \in \Omega_o} y_{\omega}^o = 1$$

$$\forall i \in [1 \dots p] \quad \sum_{o \in O} \sum_{\omega \in \Omega_o} (\alpha_i)_\omega^o y_{\omega}^o \geq \sum_{j \in J^+} p_j - \beta_i$$

$$\forall o \in O, \forall \omega \in \Omega_o \quad y_{\omega}^o \in \{0, 1\}$$

avec  $\beta_i = \text{card} \{(i, j) / i \in J^+ \wedge j \in T^-\}$  et  $(\alpha_i)_\omega^o = \sum_{t \in T_i^+} \sigma_{\omega}^t$

## Caractérisation de [PR]

Peut être mis sous forme d'un

*Sac à Dos Multichoix Multidimensionnel*

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation
- 2 Techniques de résolution
  - Relaxation lagrangienne
  - Décomposition de Benders
  - Décomposition et génération de coupes
- 3 Conclusion
  - Expérimentations numériques
  - Bilan

## Générateur de données

- Moduler le taux de travail sur l'horizon
- Dispersion des fenêtres d'exécution des jobs
- Moduler le nombre de roulements affectables à chaque opérateur

## Résultats préliminaires (1)

## Conditions

- processus arrêté au bout de 60s
- $n \in \{50, 75\}$
- $m \in \{10, 20, 30\}$
- $\text{card}_\Omega \in \{10, 20\}$
- 264 fichiers tests
- Solveur PL : cplex ; Processeur : Pentium D 3.00 GHz

n	MIP	Benders	Coupe
50	74.07%	5.56%	86.11%
75	66.67%	2.08%	85.42%
<b>TOTAL</b>	<b>78.79%</b>	<b>7.20%</b>	<b>84.09%</b>

*Pourcentage d'instances résolues en moins de 60s*

## Résultats préliminaires (2)

(n,m)	MIP	Benders		Coupe	
	tps	tps	nb coupes	tps	nb coupes
(50,10)	14.53s	X	X	3.14s	2.60
(50,20)	2.62s	3.81s	6.83	1.49s	2.53
(50,30)	2.23s	X	X	5.56s	2.82
<b>50 JOBS</b>	<b>4.60s</b>	<b>3.81s</b>	<b>6.83</b>	<b>2.59s</b>	<b>2.48</b>
(75,10)	X	X	X	X	X
(75,20)	4.50s	18.69s	10	2.06s	2.02
(75,30)	X	X	X	X	X
<b>75 JOBS</b>	<b>4.50s</b>	<b>18.69s</b>	<b>10</b>	<b>2.06s</b>	<b>2.02</b>

- 1 Introduction
  - Problème
  - Formalisation
- 2 Techniques de résolution
  - Relaxation lagrangienne
  - Décomposition de Benders
  - Décomposition et génération de coupes
- 3 Conclusion
  - Expérimentations numériques
  - Bilan



- Approche par décomposition et génération de coupes compétitive
- Dans la décomposition et génération de coupes
  - $P$  est un flot maximum  $\rightsquigarrow$  **Polynômial**
  - $SP\bar{y}$  est un Sac à Dos Multichoix Multidimensionnel
    - $\rightsquigarrow$  **Heuristiques puissantes connues** (*Ackbar et al., ...*)
    - *Donc* : on peut (sans solveur de PL) obtenir des résultats approchés de qualité