



HAL
open science

”La méthode de la seconde quantification” de F. A. Berezin. Regards quarante ans plus tard

Yurii Neretin, Claude Roger (traducteur)

► **To cite this version:**

Yurii Neretin, Claude Roger (traducteur). ”La méthode de la seconde quantification” de F. A. Berezin. Regards quarante ans plus tard. 2010. hal-00478476

HAL Id: hal-00478476

<https://hal.science/hal-00478476>

Preprint submitted on 30 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

“La méthode de la seconde quantification”
de F. A. Berezin.
Regards quarante ans plus tard *

Y.A. Neretin

Et voici la fable orientale
Qu’un jour me raconta un vieux sage.
“Chez nous, les contes de fées eux-mêmes sont cruels”
En y songeant, j’ai mesuré mon cou !
Vladimir Vissotsky.

Pour commencer, j’essaierai de raconter l’histoire des origines du livre de Berezin [16] et de montrer son influence sur la vie mathématique. Je donnerai dans les paragraphes 2 et 3 un abrégé des deux constructions les plus compliquées de ce livre, que l’on peut maintenant décrire de façon suffisamment simple. Enfin, j’examine dans le dernier paragraphe quelques exemples (mais assez peu) d’applications que cette construction a pu connaître dans les années passées.

1 Les groupes de dimension infinie(1965).

1.1. La photo instantanée d’un souvenir fugitif. Au MekhMat de Moscou¹ chaque anniversaire était autrefois l’occasion d’une grande exposition de photographies anciennes....C’est ainsi que je découvris une photo portant la souscription “Après le cours du professeur Friedrichs”. Comme d’habitude, une longue file de 10 à 15 personnes s’étendait autour du tableau. Parmi ceux-ci (on était à la fin des années 50) se trouvait le jeune Félix Berezin. Cet homme allait devenir, au cours des années 60-70, l’un des plus brillants mathématiciens du Moscou de l’époque. Maintenant, alors que suivant la rumeur générale, l’obscurité des œuvres mathématiques devient notoire et en quelque sorte nécessaire, il nous est difficile d’en donner une appréciation objective. Mais, d’une manière ou d’une autre, sa notoriété, déjà plus grande 25 ans après sa mort², n’est en aucune façon disparue. Il faut se rappeler ici, que nous parlons de quelqu’un qui marchait seul et à l’avant-garde, un style pas très apprécié de nos jours avec la socialisation montante³ de la science (et déjà assez peu apprécié à son époque). En ce temps-là, l’homme qui figurait sur la photo portait un nom déjà célèbre, et ses travaux de l’époque n’ont pas sombré dans l’oubli.

*traduit du russe par Claude Roger, avec l’aide d’Olga Kravchenko, Dimitri Millionschikov, et Aleksandr Kosyak.

¹MekhMat : abrégé pour la Faculté de Mécanique et Mathématique de l’Université de Moscou (MGU). ndt

²le 14 juillet 1980

³Pour éviter des associations de mots pas très précises, il est peut-être plus juste de dire “sociocentralisation” (quand l’occupation principale et/ou le but scientifique principal devient le *social bargaining*).

Cependant, ce n'est pas principalement en raison de ces travaux-là que nous nous souvenons de lui⁴. Il s'est trouvé (qui aurait pu l'imaginer) que les chemins de Friedrichs et de Berezin se sont croisés. Berezin est devenu ce qu'il est devenu au cours du travail d'élaboration de son livre "Seconde quantification". Son point de départ était le livre de Kurt Friedrichs "Mathematical

⁴Il faut dire que ces travaux (1956-58), en collaboration partielle avec I. M. Gel'fand et F.I. Karpelevich, eurent une grande influence; voir la crise qui s'est maintenant produite en théorie des représentations; ils sont redevenus plus intéressants que les textes contemporains, car écrits de façon compréhensible. Disons qu'un sujet mathématique assez chaud de la décennie précédente était le problème du spectre de la somme de deux matrices hermitiennes (avec leur variante infinie); la multitude des spectres possibles remplit alors le polyèdre de Horn-Klyashko de façon assez compliquée. Si je ne me trompe pas, la première tentative de description en fut donnée dans l'article de Berezin et Gel'fand (1956). Ce polyèdre est notamment pourvu d'une mesure naturelle, et la dite mesure fut déterminée dans cet article. La densité de la mesure donne une somme alternée, mais ceci ne fournit pas encore de réponse à la question du support de la mesure, c'est à dire ne donne pas une description explicite du polyèdre.

La description définitive des inégalités définissant le polyèdre fut obtenue par A. Klyashko [75] en 1966. Un peu plus tôt, une assertion légèrement plus faible fut obtenue par O.Helmk et I. Rosenthal [56]. L'étude de l'histoire de ce problème nous emmène loin des objectifs de cette remarque, mais un des éléments intéressants de l'histoire est que, comme les gens n'ont pas vu les "passages faciles", l'inégalité de Horn-Klyashko constitue une conséquence directe du théorème du minimax de Wieland [138](1955), et du théorème sur l'intersection des cycles de Schubert, connu encore plus tôt (disons, Hodge 1942). Il fallait tout simplement le voir etc...Mais on ne comprend pas comment on aurait pu le voir. A ce propos, c'est dans ce même travail "Berezin-Gel'fand" que fut découvert(et peut-être pour la première fois) le lien entre ce problème et la question de la décomposition des produits tensoriels des représentations de dimension finie du groupe unitaire. Cet article contient lui-même beaucoup de prolongements des travaux de I.M. Gel'fand et M.A.Naïmark [45], I.M.Gel'fand [41], V.B.Lidskii [80] des années 1950.

Un autre travail intéressant de Berezin datant de cette époque est "Les opérateurs de Laplace sur les groupes semi-simples"(1956-57)[9], [10], [11], [12], [13]. On doit remarquer ensuite que son théorème sur la classification des représentations non réductibles des groupes semi-simples complexes, contenait de sérieuses lacunes qui provoquèrent en leur temps des discussions animées. Berezin répondit à l'objection de Harish-Chandra dans un article séparé[13], mais la controverse à ce sujet ne s'apaisa pas totalement (j'ai pu voir une correspondance entre D.P. Zhelobenko et M. Duflo, qui en débattait encore en 1973). Dans le livre de Zhelobenko [140](1974), les résultats de Berezin furent enfin dépassés, et son travail y fut exposé séparément (dans le supplément I).

Bien que la présence de lacunes dans l'article initial soit affligeante, l'analyse de cet article est remarquable. De toutes façons, avec les théorèmes de Harish-Chandra sur les sous-facteurs de 1953 et les travaux de Berezin de 1956 sur les caractères, commençait une "lutte" de 30 ans pour la classification de toutes les représentations non réductibles des groupes semi-simples. L'histoire ultérieure connut aussi une suite de grandes "ruptures" (en règle générale, de l'ordre de 7-8 ans) entre les annonces correctes (Zhelobenko-Naïmark, Casselman, Langlands), et les publications avec preuves complètes.

D'autre part, dans ce même article Berezin réglait le compte (les lacunes étaient à un autre endroit) de la partie radiale de l'opérateur de Laplace sur les groupes semi-simples (ce fut fait simultanément par Harish-Chandra); ce travail n'a pas l'air aujourd'hui moins important que le reste de l'article. Ce fut le commencement d'*une toute autre histoire* (le *pas* suivant, il me semble, fut accompli par M.A. Olshanetsky et A.M.Perelomov dans [103]; pour l'état contemporain du sujet, qui a déjà progressé très loin, voir chez I. Cherednik [32]).

Après cette série d'articles il y eut le travail de Berezin et Karpelevich (1958) où furent obtenues des formules explicites pour les fonctions sphériques sur les groupes $U(p, q)$, par des déterminants formés des fonctions hypergéométriques de Gauss ${}_2F_1$. La formule a longtemps semblé énigmatique (cf. l'article de Hoogenboom en 1982 sur ce sujet); mais maintenant, tout en conservant sa beauté, elle est devenue à moitié évidente.

Ce fut ensuite le *déclenchement de l'appareil photo*, et Berezin abandonna la théorie classique des représentations. Dans la première moitié des années 60, il fut l'un des initiateurs de l'étude de l'analyse harmonique sur les espaces pseudoriemanniens symétriques (cf. le travail de son élève V.F.Molchanov [93]), mais il ne s'en occupa pas lui-même.

aspects of quantum theory of fields”. Il est possible⁵ que ce moment précis où l’appareil photographique s’est déclenché ait été un tournant du destin mathématique de cet homme encore jeune.

En réalité, je ne sais pas (et probablement personne d’autre ne sait) si ce tournant s’est produit d’un seul coup, et si oui, à ce moment précis. Mes notes concernent la période qui a suivi ce tournant.

1.2. Le livre de Berezin. Ce fut le premier livre sur les groupes de dimension infinie et leurs représentations. Rappelons comment cela s’est produit. Friedrichs formula et essaya de résoudre le problème du domaine maximal de définition de la représentation de Weil du groupe symplectique de dimension infinie, et de la représentation spinorielle du groupe orthogonal de dimension infinie. J’ai formulé cette phrase de façon volontairement banale. L’article d’André Weil devait paraître 15 ans après celui de Friedrichs⁶.

La question de Friedrichs peut se formuler de façon plus percutante : “décrire la nature du groupe de symétries de l’espace de Fock” ou bien “décrire le groupe de symétrie de la théorie du champ libre”, ou encore “décrire le groupe d’automorphismes de l’algèbre des relations de commutation canoniques”, comme disait Friedrichs lui-même (et après lui Berezin). Indépendamment de sa formulation, cette question de maximalité fut dictée à Friedrichs par la *nature des choses* physiques (ou du moins par ce qu’il percevait comme tel)⁷.

Il est apparu au début des années 80 que pour atteindre ce *domaine maximal de définition*, il fallait aussi se battre dans le domaine mathématique. C’est que nos objets vont apparaître comme *universels*⁸. Il semble, que la représentation des groupes de dimension infinie présente un aspect “laissez-passer” à travers la représentation spinorielle ou la représentation de Weil⁹. C’est

⁵J’ai autrefois étudié ce livre avec attention. Je pense qu’il aurait fallu un choc extérieur puissant, pour que l’on commence à s’en faire une idée exacte. Il est encore plus difficile d’y trouver ce qui est vraiment important, si on ne sait pas d’avance ce que l’on cherche. D’autre part, ce livre eut encore une influence certaine sur un mathématicien illustre, Irving Segal, duquel nous parlerons plusieurs fois plus bas.

⁶L’histoire de la “représentation de Weil” est la suivante. Friedrichs remarqua aux alentours de 1950 que le théorème de Stone-Von Neumann impliquait l’existence d’une représentation projective unitaire du groupe symplectique $Sp(2n, \mathbb{R})$. Mais il n’était personnellement intéressé que par le cas $n = \infty$, pour lequel l’implication logique ne fonctionnait pas ; il s’attaqua au problème et se heurta à des obstacles, dont les prolongements ont été discutés dans notre histoire.

Irving Segal trouva en 1959 une construction évidente de cette représentation pour un n fini. En 1964 André Weil écrivit un article, généralisant la construction de Segal aux corps p -adiques (avec diverses applications à la théorie des nombres), après quoi est apparu le terme *représentation de Weil*, qui s’est trouvé en concurrence avec une dizaine d’autres, moins usités. À ce propos, on trouve encore chez Weil un article sur la représentation spinorielle, qu’il écrivit sous le pseudonyme de Lipschitz.

⁷En rédigeant ces notes, j’ai compris qu’il y avait une imprécision dans les idées courantes sur l’histoire des mathématiques. Pour parler du début de la théorie des représentations en dimension infinie, on a coutume d’invoquer les travaux de Gel’fand-Naïmark et Bargmann 1946-50. Si on parle précisément de la “théorie des représentations” proprement dite, ceci est tout à fait exact. Mais les articles de Friedrichs de 1951-53 (à partir desquels son livre fut élaboré mécaniquement) en furent réellement le troisième point de départ. Et de ce point sortirent aussi beaucoup d’autres choses. Berezin y a vu la croisée des chemins et il y est entré.

⁸Une discussion détaillée se trouve dans [96], au même endroit il y a des références ultérieures ; dans la bibliographie donnée ci-dessous on trouve les travaux de I. Frenkel [38], de R.S. Ismagilov [63], de I.A Neretin [94], [95], de G.I. Olshanskii [105]– [106], de Graeme Segal [114], voir par ex. plus loin 1.13. Comme variante “dégénérée” de cette universalité on peut considérer le schéma d’Araki, dans la bibliographie ci-dessous, voir [6], [62], [64], [96], [126], [127].

⁹Un peu plus tôt Roger Howe [59] découvrit l’universalité de cette même représentation au niveau de la

pourquoi, afin de construire les représentations du groupe G , il faut tout simplement le plonger dans les groupes symplectique ou orthogonal de dimension infinie (lesquels ne sont cependant pas définis de manière évidente ; par ailleurs, les plongements ne sont pas triviaux). Il apparaît que l'on peut souvent démontrer les théorèmes généraux, sans développer une quelconque *théorie*, mais simplement en analysant les propriétés des objets universels. Pour les groupes de dimension infinie, cette universalité remplace l'induction parabolique au sens de Gel'fand-Naimark et Harish-Chandra.

Indépendamment de Berezin et à peu près en même temps, les travaux de David Shale et de Forrest Stinespring contenaient une description détaillée des groupes en question. Ces problèmes embrouillés de priorité, vieux de 45 ans, ne sont plus vraiment intéressants aujourd'hui. C'est Berezin qui en a fait significativement davantage.

Berezin a écrit des formules explicites pour ces représentations ; elles s'écrivent à l'aide d'opérateurs intégraux, et de plus, pour une représentation donnée, le travail avec ces opérateurs intégraux s'avère être des plus simples. Personne n'avait jamais rien vu d'analogue à cette époque. À ce propos, bien que la représentation spinorielle (objet évidemment fondamental) ait été découverte par Elie Cartan en 1913 (cf [31]), elle est restée mal *sentie* au niveau des groupes de Lie jusqu'à Berezin. Beaucoup de choses furent ensuite déduites de ces formules, nous en reparlerons plus loin.

1.3. Les modèles d'espaces de Fock. Travailler en *théorie des champs* rend nécessaire d'utiliser des fonctions à une infinité de variables. Comment écrire de telles fonctions ? Encore plus difficile : comment écrire des opérateurs sur des espaces de telles fonctions ? Nous en savons maintenant et pouvons en faire beaucoup plus que Berezin n'en savait et pouvait faire à l'époque. Et on se heurte à ces *maudites* questions chaque fois que l'on essaie d'aller un peu plus loin que là où tout le monde est déjà passé. L'idée d'utiliser les processus stochastiques était alors dans l'air. Pour parler un langage bureaucratique, elle était *sur le drapeau* de la physique mathématique, tout comme la géométrie algébrique devait l'être dans les années 90. En particulier, le modèle d'Irving Segal avec *la mesure gaussienne sur l'espace de Hilbert, concentrée en dehors de lui* était disponible (et, de plus, très joli). Berezin réussit à s'en passer et introduisit le modèle holomorphe de l'espace de Fock bosonique. Il trouva également la manière de travailler avec les opérateurs, de façon curieusement simple. Il réussit au total à éviter laborieusement le processus de convergence et les batailles contre les divergences artificielles, qui l'attendaient sur la voie paraissant la plus naturelle.

Le modèle holomorphe fut découvert en même temps par Irving Segal et Valentin Bargmann. Ils se sont toutefois contentés d'en montrer l'existence.

1.4. L'analyse avec les variables impaires. On peut débattre ici pour savoir si elles sont de nature vraiment nouvelle ou ne sont qu'une réécriture habile. Il reste le souvenir d'anciens travaux de physique de L. Onsager, N.N. Bogolioubov, I.M. Khalatnikov et du livre de C. Chevalley *Théorie algébrique des spineurs* que Berezin ne connaissait probablement pas encore. Mais la proclamation suivant laquelle tout ceci était bien de l'analyse, était une innovation, imposée par la nature des choses du monde dans lequel entrait Berezin. On ne sait pourquoi, le monde grassmannien apparaissait comme une copie mystérieuse du nôtre, dans un genre

dimension finie(cf. quelques uns de ses articles dans [72], [35], [5], qui en font l'écho). D'ailleurs, comme l'a remarqué G.I. Olshanskii, ces deux *universalités* sont liées entre elles.

authentique. Et il était évident qu’une telle proclamation allait avoir de sérieuses conséquences.

1.5. Superanalyse. Superalgèbres. Supergroupes. Il n’y avait encore rien de tel dans le livre ; cela allait être l’étape suivante, mais cette étape était déjà indispensable. Dans le livre, l’identité boson-fermion était tout simplement éblouissante¹⁰. C’est pourquoi il fallait considérer l’espace mixte, c’est pourquoi il fallait considérer les opérateurs quadratiques mixtes. Et c’était de la superanalyse. C’était des superalgèbres¹¹. Et la question “physique ou pas physique” était sans importance. La suite du chemin n’avait rien d’évident¹², mais c’était les aspérités d’une route dont la direction était en principe claire.

1.6. Le livre de Berezin et les physiciens. Je ne suis pas physicien et mon point de vue n’est pas celui de la physique. Je ne pense pas que le livre de Berezin soit un livre de physique. C’était un livre qui fut écrit sous une forte influence de la physique et s’est trouvé pendant quelque temps important pour les physiciens de la théorie des champs. Il fut rapidement traduit en anglais, et une partie importante de ce livre passa immédiatement au rang de common knowledge¹³ (en particulier sous la forme d’une exposition partielle dans des manuels de physique).

Après cette étape, le livre lui-même commença à perdre de son importance en tant que référence. Mais on s’en souvint pendant longtemps, et Felix Alexandrovich lui-même commença à devenir célèbre auprès des physiciens. Ceci devait à son tour lui donner une notoriété certaine dans le monde des mathématiciens.

1.7. Les extensions centrales et les conséquences qu’elles entraînent. Les extensions centrales des groupes de dimension infinie devinrent à la mode aux environs de l’année 1980. Je me souviens des discussions, assez vives et passionnées, à propos des extensions des groupes de difféomorphismes du cercle, des groupes de lacets, des groupes symplectiques et orthogonaux infinis. Les deux premiers étaient des objets vraiment nouveaux, les deux derniers figuraient dans le livre de Berezin, en petits caractères et dans des formules très simples et explicites.

À ce propos, ces formules sont universelles. Presque toutes les autres extensions connues

¹⁰Nous y sommes habitués, mais en ce temps-là ce n’était pas si simple. Il fallait pour cela bien comprendre et le cas bosonique et le cas fermionique, sinon ils n’étaient pas vraiment ressemblants...

¹¹On a rencontré très tôt le supercommutateur en géométrie différentielle, topologie, et algèbre homologique (ce qui est au fond la même chose), mais tout ceci ne donnait pas réellement des superalgèbres, au sens de la *théorie des superalgèbres de Lie*.

¹²Un pas décisif, concrétisant un objet hypothétique (l’idée en fut exprimée à la fin de la note [17] en 1967) fut le travail de Berezin et G.I. Kac (1970), dans lequel les supergroupes formels furent introduits. Il me semble que cela joua le rôle d’une *barrière de potentiel*, séparant les mathématiques sérieuses de tout ce qui aurait pu concerner les *jeux sur les définitions*. Ces mêmes supergroupes formels ont constitué une étape vers les *supergroupes globaux* et les *superespaces* qui allaient être introduits par D. A. Leites et F. A. Berezin dans [79], [24].

Le travail de Berezin et G.I. Kac est curieux aussi par son aspect psychologique. Parfois, en regardant l’article, il est intéressant d’essayer de se représenter, et “comment était-il possible d’inventer ça”, et ne sachant ni ce qu’il contient ni ce qui va s’ensuivre, mais en ayant tout de même la possibilité d’une vision à *vol d’oiseau*. Cet article est du genre simple, mais la question qu’il pose se transforme en un pénible casse-tête. On est d’autre part surpris de ce que les auteurs n’aient pas fait quelques pas de plus (mais cela peut se produire à la montée). D’une manière ou d’une autre, il était déjà possible, en partant de là, d’aller plus loin dans ce domaine.

Je n’ai pas souvent entendu mentionner le nom du second auteur de l’article, G.I. Kac. Il faut mentionner que ses travaux sur les *groupes annulaires* ont été pour beaucoup dans d’autres *explosions*, et notamment celle des *groupes quantiques* (ce même travail de G.I.Kac est cité dans [34])

¹³En anglais dans le texte(N. d. T.).

pourraient être obtenues par induction à partir de ces deux-là¹⁴. Je ne sais pas si cela a été écrit quelque part¹⁵, mais c’est un fait. À part cela, ces formules ne sont pas du tout évidentes dans le cas de la dimension finie. C’est seulement en 1978 que les formulations correspondantes (incluant le cas $SL(2, \mathbb{R})$) furent redécouvertes par Alain Guichardet et David Wigner [49]¹⁶, provoquant alors une surprise étonnée.

Dans toute la *mouvance* scientifique ultérieure, on ne parle pas des extensions de Berezin.. On aurait pu dire que Berezin était “en avance sur son temps”, qu’ensuite ses propres œuvres furent *redécouvertes*, qu’ensuite les extensions centrales furent découvertes indépendamment de Berezin, etc..etc...Il me semble que de telles formulations n’ont pas vraiment de sens.

C’est un cas amusant que celui que nous étudions là (quoique, parmi tous les sujets scientifiques examinés dans l’article, celui de l’extension centrale ne soit pas le plus important). Le problème est que le livre “Seconde quantification” est devenu tout de suite bien connu, et tout ce qui a suivi, indépendamment du problème de sa dépendance formelle, s’est produit après la parution du livre. Etudions ceci sur l’exemple de la découverte de l’algèbre de Virasoro au cours des années 1968-1971.

Les mathématiciens croient souvent que cette algèbre est *tombée du ciel* en 1970, comme une *révélation physique*. Elle est née en fait de calculs physiques, mais tout à fait mathématiques.. Plus précisément, l’algèbre de Virasoro est une sous-algèbre de l’algèbre de Lie des opérateurs quadratiques¹⁷, laquelle est à son tour l’algèbre de Lie du groupe symplectique de dimension infinie, ce dernier admettant l’extension de Berezin. D’un point de vue mathématique, il y eut donc deux étapes : la détermination de la sous-algèbre de Lie appropriée de l’algèbre symplectique, et ensuite l’extension centrale induite.

Il est douteux que les physiciens aient pu raisonner ainsi. Mais chez eux, les opérateurs quadratiques faisaient partie du common knowledge¹⁸ et cette connaissance a été fructueuse. Je n’en connais pas l’origine exacte, mais ces opérateurs sont par exemple étudiés de façon détaillée dans “Seconde quantification”, qui en est une des sources possibles, mais il est peu probable qu’elle en ait été la seule. Le mécanisme de la découverte de l’extension centrale pour l’algèbre affine fut analogue.

L’algèbre de Virasoro est apparue chez les mathématiciens en l’année 1968 (I.M. Gel’fand, D.B. Fuks [42]). En principe, la description de l’extension centrale de l’algèbre de Lie des champs de vecteurs sur le cercle est un problème trivial que n’importe quel mathématicien professionnel peut résoudre en quelque temps. D’un autre côté, sa découverte a constitué un résultat important.

La question se pose de savoir pourquoi l’algèbre de Virasoro n’est pas née plus tôt (disons, par exemple, en l’an 1935). La réponse est très simple : rechercher les extensions centrales d’algèbres ou de groupes de dimension infinie n’était venu à l’idée de personne – ce n’est pas évident de voir

¹⁴Plus précisément, plongeons un groupe G de dimension infinie dans (disons) le groupe orthogonal ; il existe une extension centrale du groupe orthogonal qui induit une extension centrale du groupe G .

¹⁵l’auteur pêche ici par excès de modestie, car son propre livre [96] répond pour une bonne part à la question. ndt

¹⁶Nous laisserons de côté la discussion proprement dite de ce travail.

¹⁷C’est à dire l’algèbre de Lie des expressions quadratiques en les opérateurs de création/annihilation $z_j, \frac{\partial}{\partial z_j}$

¹⁸En anglais dans le texte. ndt

le problème. L'existence d'extensions analogues était connue en 1965, ce qui pouvait fournir un prétexte pour réfléchir à ce problème. Les auteurs de [42] avaient d'autres raisons de s'intéresser aux extensions et à la cohomologie des algèbres de Lie de dimension infinie, mais dans ce cas, un prétexte supplémentaire ne fait pas de mal.

Cela a un sens de se placer d'un point de vue éloigné, un peu à la manière de Micromégas [134]. Dans de telles situations on peut parfois constater l'utilisation directe des résultats, on peut voir ou soupçonner la dépendance des idées. Mais la question de *l'indépendance* en tant que telle n'a pas de sens¹⁹.

1.8. Les systèmes d'états cohérents.(cf. [108], [70]) Ce terme²⁰ est utilisé très souvent, mais ne signifie rien en lui-même. C'est un système de vecteurs, judicieusement choisi, dans un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire défini. Il se trouve que pour travailler dans un espace de Hilbert, il n'est pas nécessaire d'avoir une base, un *système d'états cohérents* est tout à fait suffisant²¹. La vérité a besoin d'être précisée par *l'habileté manuelle*. Il se trouve ensuite qu'il existe des espaces de nature compliquée, pour lesquels des bases explicitement définies ne donnent que l'envie de ne jamais en savoir davantage. Il se trouve qu'il existe des espaces

¹⁹De ce point de vue, une question plus intéressante est celle du destin absolument insensé de l'idée de supersymétrie en physique. Elle fut énoncée par Berezin immédiatement après "Seconde quantification", et par la suite ce ne fut pas clair si les physiciens l'ont suivi ou s'ils l'ont inventé par eux-mêmes (ou encore s'il existait quelque variante intermédiaire, disons sa seconde apparition sous l'influence de "Seconde quantification", qui était tout à fait possible).

Déjà en compilant la bibliographie de cet article, je suis tombé sur la phrase de A.S. Wightman en 1986 (MR 0869059) "...The first edition of this book was influential in two ways. First, it summarized several decades of applications of the formalism of second quantization. Second, by developing systematically the formalism of functions of anticommuting variables it displayed the parallelism between Bose and Fermi systems in a new way". Ceci concorde d'une manière exemplaire avec la *contrainte* de supersymétrie dont j'ai parlé plus haut. Mais ce livre même était déjà écrit sous l'effet de l'étonnement devant ce *parallélisme* (c'est visible d'après le texte).

Il me semble que la question de l'indépendance par rapport à l'idée de supersymétrie des articles [17], [22] à l'intérieur de l'Union Soviétique (c'est là que sont parus les premiers travaux [132], [46], [133] sur la supersymétrie) n'a pas de sens, la question de l'indépendance de "Seconde quantification" n'en ayant pas davantage. Je ne comprends tout simplement pas ce que le mot "indépendance" pourrait bien signifier dans le cas présent. Ce mot n'a aucun rapport, direct ou indirect avec la signification ou l'originalité de ce travail de pionnier, entraînant sous sa bannière un large mouvement vers la physique théorique proprement dite. Ce sont d'autres choses qui sont en question.

D'autre part, la *dépendance* à proprement parler (au sens de son utilisation directe) est parfois ici immédiatement visible. M. Marinov [88] en discuta dans ses notes à propos du moment de la découverte de la supersymétrie, en particulier il examina pour les premiers travaux physiques sur ce thème, leurs chaînes de dépendances avec "Seconde quantification". Ses remarques sont curieuses, mais nous n'avons pas le temps d'en parler ici. Il y a encore un curieux article de M. Shifman [121] sur cette même période de l'histoire, où (provenant d'autres *systèmes de valeurs*) est effleurée la question des *idées qui sont dans l'air*.

Je reviendrai plus bas une nouvelle fois sur le sens du mot "indépendance" en discutant d'un sujet, qui pour certaines raisons m'est personnellement bien connu. Je m'arrêterai sur ce sujet en raison du destin compliqué de Berezin lui-même, sur lequel je vais brièvement passer un peu plus loin.

²⁰Introduit par I.Klauder.

²¹Je vais le dire d'une autre façon. On parle de produire une quantité autosuffisante de noyaux comme outils de travail dans des espaces de Hilbert *concrets*, de façon à sortir de la trilogie $l_2 - L^2 - H^2$. J'ai connu l'époque (après la publication de [18]), où cela était encore surprenant. Je ne suis pas capable de suivre l'histoire de la dite production des noyaux, cf. les travaux anciens de I. Schonberg (1938), C. Bergman, M.G. Krein (1949). Le sujet remonte peut-être à l'article de Karl Menger(1924) sur les plongements isométriques des espaces métriques dans des Hilbert, et respectivement, aux conditions pour avoir des noyaux définis positifs.

dont les aspects extérieurs sont différents (comme par exemple de dimensions différentes) avec un seul et unique système d'états cohérents etc. etc. Il se trouve encore que la non-unicité du développement en états cohérents, dont les inconvénients sautent aux yeux, présente un avantage très sérieux. Aucune *grande théorie* là-dedans, uniquement de l'habileté manuelle. Mais il s'agit de la développer. Cette théorie apparaît déjà dans le livre de Berezin en tant qu'instrument, mais il n'y en a pas encore d'exposition sous forme *autodidacte*. Je répète que tout ceci est presque trivial et devrait figurer depuis longtemps dans les manuels d'analyse fonctionnelle.

1.9. Un commentaire d'ordre général. Les gens écrivent habituellement des livres qui essaient d'expliquer ce qui est déjà connu. Rien de tel chez Berezin. C'est ainsi qu'en 1965 tout était nouveau dans ce texte²².

1.10. Le livre de Berezin comme monument littéraire. Il faut préciser tout de suite que ce genre d'écrit ne se présente pas sous un aspect particulièrement élégant. Les travaux de Berezin étaient d'une lecture pénible.²³ D'autre part, l'auteur d'un travail original se trouve toujours dans quelque position d'infériorité en comparaison avec l'auteur d'un travail ordinaire. Bref, le livre eut une histoire difficile.

Ce livre n'avait en somme rien de simple. Son lecteur se trouve dans la position du skieur qui est en seconde position sur la trace. Mais d'un autre côté, il ne rencontre la résistance d'aucun autre obstacle que ceux liés à la nature du terrain et de la piste. Dans la plupart des livres de mathématiques contemporaines, la nature de la difficulté de lecture est tout autre. Je reviendrai plus tard sur cette question. Le livre fut enfin publié avec l'appui des physiciens, et il a évidemment été conçu à l'intention de ceux-ci. Ce fut vraiment fait au mieux, mais sa perception par les mathématiciens n'en fut pas rendue plus simple. Il se présente pourtant comme un travail mathématique parfaitement rigoureux et austère. A ce propos, en tant que texte technique d'analyse, avec ses détails alambiqués sans être ennuyeux, ce livre est très intéressant et instructif.

1.11. Les groupes de dimension infinie. Moscou, 1965-1975. Dans les années 1946-1950, I.M. Gel'fand et M.A. Naïmark d'une part et V. Bargmann de l'autre déclarèrent que les représentations des groupes semisimples étaient très intéressantes, et qu'il y avait des choses à y faire. Voici une liste de quelques personnes qui dans les années 1950-1965 en Union Soviétique²⁴ s'occupèrent des groupes semisimples et de leurs représentations, pour une raison ou une autre (pas nécessairement sous l'influence de Gel'fand et Naïmark), à un âge ou un autre, avec une intensité ou une autre : F.A. Berezin, I.Ia. Vilenkin, E.B. Vinberg, S.G. Gindikin, M.I. Graev,

²²Il existe de tels livres. Le lecteur peut essayer d'en chercher des exemples.

²³Et c'était même compréhensible. À ce propos, les éditions par A.A. Kirillov et V. P. Palamodov des notes posthumes inachevées de Berezin fournissent de beaux textes compréhensibles. Plus généralement, Kirillov a fait beaucoup pour la diffusion des idées de Berezin.

²⁴Pour s'écarter un peu du Moscou-centrisme, il faut noter que les travaux [7], [44] attirèrent une *réaction en chaîne* en direction de l'Ouest. En qualité de *phénomène de la nature* isolé apparut la figure énigmatique d'Harish-Chandra, plutôt *tank isolé* que *loup solitaire*. Il avança toute sa vie dans une seule direction, écrasant tous les obstacles sur son chemin, et laissant derrière lui ce chemin libre, frappant par la grandeur de son imagination. Je rappelle que Berezin était en 1956-1957 son digne concurrent scientifique, avant son propre tournant. En raison de la triste question, dont nous discuterons un peu plus loin (et pour comparer), je note que Harish-Chandra inventa la technique de la *défense cuirassée* de son travail scientifique, le rendant presque impossible à comprendre effectivement pour un regard extérieur. Avec ceci il garantissait son invulnérabilité et la possibilité d'un travail en dehors d'une *atmosphère de compétition*, mais, d'un autre côté, il apporta par là sa contribution personnelle au caractère incompréhensible des mathématiques contemporaines.

E.B. Dynkin, D.P. Zhelobenko, R.S. Ismagilov, F.I. Karpelevich, A.A. Kirillov, A.Ou Klimyk, M.G. Krein, R.A. Minlos, V.F. Molchanov, M.N. Olevskii, M.A. Ol'shanetskii, A.L. Onichtchik, A.M. Perelomov, I.I. Piatetskii-Shapiro, P.K. Rashevskii, S.V. Fomin, M.L. Zetlin. Il faut dire que cette liste est imposante.

J'énumère maintenant quelques travaux sur les groupes et algèbres de Lie de dimension infinie, publiés au cours de la décennie suivante 1965-75 :

- l'article de V.I. Arnol'd sur les géodésiques du groupe des difféomorphismes et les problèmes hydrodynamiques, 1966 ;
- commencé en 1967, l'article de R.S. Ismagilov sur le groupe SL_2 sur les corps locaux non archimédiens²⁵ ;
- le livre de G.E. Shilov et Van Dyk Tin' "Intégrale, mesure et dérivation sur les espaces vectoriels", 1967 ;
- commencés en 1968 , les travaux sur la cohomologie des algèbres de Lie de dimension infinie, de I.M. Gel'fand et D.B. Fuks, et aussi L.V. Gontcharova et M.V. Losik ;
- la géométrie différentielle formelle de I.M. Gel'fand et D.A. Kazhdan ;
- les travaux de I.L. Kantor et V. G. Kac sur les algèbres de Lie affines ;
- les travaux de A. M. Vershik, I.M. Gel'fand et M.I. Graev, et aussi de R.S. Ismagilov, à la frontière de la théorie des représentations et des processus aléatoires²⁶.

Ce sont tous des travaux brillants et novateurs. Mais il est clair que dans les années 1965-67 il y eut quelques changements (d'autre part, il n'y avait pas encore de crise en ce temps-là, car la théorie des groupes semi-simples était loin d'être en train de s'épuiser).

Essayons de nous représenter le Moscou mathématique des années 60. Il est possible que les gens de l'époque aient pu se mettre en tête qu'ils formaient un groupe monstrueusement grand. Mais leur objet était peu captivant. Eh bien, on pouvait y jouer avec les définitions. Et après ? Certains (peu de gens) savaient, qu'il existait une action quelque peu étrange du groupe orthogonal infini sur un espace mesuré, construite par Irving Segal, et décrite par lui d'une façon pas très claire²⁷.

Mais dans les années 1960-62 Berezin expliqua (et en 1965, il arriva à se faire entendre) que les groupes de dimension infinie (en attendant encore quelques-autres) n'étaient pas des généralisations pour le plaisir de généraliser, mais qu'ils présentaient vraiment un contenu nouveau. Il a montré que ce n'étaient pas des monstres, mais des objets palpables. C'est qu'avec

²⁵De tous les travaux mentionnés dans cette liste, celui-ci est le moins cité. C'est cependant ici que fut découverte la multiplication des doubles cosets dans les groupes de dimension infinie.

²⁶Pour être précis, il faut mentionner encore le travail de A. I. Kostrikin et I.P. Shafarevich [77] (1965), qui se trouvaient du côté de ce mouvement. Ils découvrirent que les multiples exemples étranges d'algèbres de Lie simples sur un corps fini, se trouvent être tout simplement des imitations en caractéristique finie des algèbres de Lie de champs de vecteurs. C'est à dire que les objets pertinents sont ici de dimension finie. Mais la source idéologique (qu'on n'utilise pas pour elle-même) était le théorème *infini* d'Elie Cartan sur les pseudogroupes primitifs [30], qui connut un regain d'intérêt au début des années 60. Je pense que ce théorème fut un point de départ important aussi pour I.L. Kantor.

²⁷Il est visible de loin qu'il existait déjà des travaux sérieux ayant un rapport avec les représentations des groupes de dimension infinie, par exemple l'article de I. Schoenberg [112], [111] et l'article de M. G. Krein [78] (il y a des chances qu'il n'ait pas été écrit sans l'influence de Schoenberg ou/et de K. Menger). On voit de loin, qu'en jetant un œil de façon un tout petit peu différente sur Schoenberg-1938 on aurait pu d'un seul coup *se retrouver* en l'an 1962. C'est seulement un de ces incroyables *tout petit peu*.

eux, on pouvait écrire des formules. Et enfin, l'intérêt *physique* parlait de lui-même. C'était l'époque où entre gens sérieux et *intellectuellement mobiles*, on avait des raisons bien fondées de comprendre que ces groupes n'étaient pas pathologiques, mais des objets qui leur étaient nécessaires.

Mais, l'année 1965 fut indiscutablement une année de changement des goûts. Et il y avait aussi une raison à ce changement de goûts. Et, quoiqu'on en dise, avec le livre de Berezin commença un grand *mouvement scientifico-social*, du moins à la dimension d'une ville. Mais d'une ville qui était importante dans les mathématiques de cette époque.

Ceci changea les points de vue de façon essentielle. Ceci posa de nouveaux problèmes, que l'on avait tout simplement pas vus plus tôt. Il y avait de la *main d'œuvre*. Et plus loin se trouvait le *nouvel eldorado* avec sa nouvelle (qui se propulsait déjà toute seule) idéologie²⁸. Mais voilà que Berezin lui-même ne s'occupe plus de groupes de dimension infinie....

1.12. Berezin après “Seconde quantification”. En l'an 1965, il était dans la position d'un homme se trouvant déjà sur un sommet élevé. Il est possible, qu'une partie de ce qu'il a vu à l'époque ait été un mirage. C'était aussi le prix à payer pour monter très haut, les visions dans la brume lointaine ne peuvent pas toujours être interprétées correctement (mais cela a plutôt réussi à Berezin, et c'était une des énigmes de sa personnalité). Mais il faut remarquer que les observations d'un homme, contemplant le monde depuis une certaine vallée, ou au milieu d'une foule courant sur place (et non dépourvue d'agressivité), ne manquent pas d'extravagance, mais tout en étant d'un autre point de vue socialement indiscutables.

On peut citer des pièces essentielles des travaux de Berezin des 15 années suivantes – ce sont la superanalyse, la théorie générale des symboles d'opérateurs, et les concepts généraux de la quantification²⁹, les espaces hilbertiens de fonctions holomorphes. Nous avons déjà dit que la superanalyse était un *passage obligatoire*. Deux autres sujets sont également apparus comme des prolongements de “Seconde quantification”.

Dans cette énumération j'ai très probablement oublié bien des travaux que je n'ai jamais lus ni même vus³⁰. Mais j'en ai lu pas mal, et il faut dire que Berezin a toujours été un homme capable de voir ce que n'importe qui d'autre à sa place n'aurait pas vu. Je pense qu'en l'année 1960 il s'est placé à un point de vue global non trivial, il n'en est jamais sorti et ceci a été en vérité la source de sa puissance.

Je parle ici de choses, qui sont à l'origine de mon activité et me sont bien connues. Le travail de Berezin “Quantification dans les espaces symétriques”(1975) ouvrit un nouveau sujet dans

²⁸En 1970 environ, A.A.Kirillov commença sa *propagande* pour la théorie des représentations des groupes de dimension infinie (par exemple, dans son livre de l'an 1972 les groupes de dimension infinie sont présentés comme un avenir vraisemblable de la théorie des représentations). Il n'y avait encore rien de tel à ce moment-là, à part le livre de Berezin (et, probablement, les réalisations sous forme exploratoire des travaux du même Kirillov). Mais il y allait y avoir du nouveau très prochainement.

²⁹Il n'est pas possible d'examiner ici ces travaux ; j'espère qu'un autre auteur de ce recueil pourra le faire mieux que je ne saurais le faire, cf., par ex., l'article de A. S. Schwarz. Je me rappelle notamment que Berezin est connu principalement comme fondateur des supermathématiques. Cf. également l'article de A. S. Losev sur les ouvertures récentes de la superanalyse.

³⁰Cf le tour d'horizon des travaux de Berezin, fait par P. A. Minlos, et également l'étonnante bibliographie détaillée à la fin du livre [20] (MathSciNet ne les a pas tous répertoriés, mais d'autre part, certains autres de ses travaux sont dans MathSciNet et pas dans cette bibliographie). Dans la nécrologie des Uspekhi Fizicheskikh Nauk [101] les travaux sur les problèmes quantiques à corps multiples sont soulignés.

la théorie des représentations des groupes semi-simples réels - celui de l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes dans les espaces symétriques³¹.

Ces mêmes objets furent bientôt obtenus d'une autre façon par Michèle Vergne et Hugo Rossi [125], et aussi Nolan Wallach [136]. Il fut ensuite évident pour tous, qu'il fallait considérer des espaces de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles dans ces mêmes domaines. Ceci allait être l'endroit des "courses" à venir pour les 10 années suivantes ; c'étaient des travaux intéressants et substantiels (cf. M. Kashiwara, M.Vergne [72], T.Enright, R.Howe, N.Wallach [35]³²) ; au total, malheureusement, ils ne furent jamais réécrits de façon compréhensible.

Mais Berezin dans une courte remarque en 1978³³ [19] fit un pas dans une direction totalement différente, ceci eut soudain un écho en l'an 1994 chez Harald Upmaier et André Unterberger, et au total amena le rétablissement (mais je crains qu'il ne soit que temporaire) de l'analyse harmonique non commutative, qui commençait déjà à s'effondrer.

1.13. Le livre de Berezin 15 ans après. Bien que beaucoup de choses se passant dans ce livre soient rapidement entrées dans les usages, deux de ces constructions les plus fondamentales (à mon avis), sont restées longtemps sans applications en mathématiques. Elles furent élaborées en 1979-80 (mais les publications sortirent un peu plus tard) dans les travaux de G. I. Olshanskii, R.S. Ismagilov, Graeme Segal et l'auteur des présentes notes. Les travaux énumérés ici étaient consacrés à différentes choses, dans les trois premiers cas ils utilisèrent directement les constructions de "Seconde quantification" ; quant à moi, si étrange que cela puisse paraître, je n'en connaissais encore rien, à l'exception du livre de Shilov et Van Dik Tinh et de l'article de Shale.

1.14. 40 ans après. Un point de vue du présent sur le passé et du passé sur le présent. La situation en mathématiques et en physique mathématique des 10 -15 dernières années devint rapidement plus sinistre. Ce point de vue n'est maintenant pas très original, cf. par exemple les articles de V.I. Arnol'd et S.P. Novikov sur ce sujet. En particulier, une crise se déclencha à propos de la capacité (et du désir !) des mathématiciens à se comprendre les uns les autres. Cette *particularité*, à son tour, devait en provoquer beaucoup d'autres, pas si particulières

³¹Un petit supplément sur l'histoire du sujet. Harish-Chandra en 1955 [54] introduisit les séries dites holomorphes discrètes (il est plaisant de voir que dans cette construction il y avait des objets *utilitaires*, appelés beaucoup plus tard *modules de Verma*, qui étaient utilisés par Harish-Chandra et dans d'autres travaux). Ainsi ces *séries* avaient l'air de n'être que des éléments de grandes *zoologies* de représentations unitaires et à ce titre furent étudiées périodiquement par les spécialistes (par exemple, M.I. Graev [48]). Berezin découvrit que ces séries admettaient des prolongements analytiques à paramètres, et le tableau commença rapidement à devenir intéressant, parce que beaucoup de phénomènes supplémentaires sont apparus, et des liens avec d'autres domaines des mathématiques etc... commencèrent à se découvrir (à ce moment on prit conscience également du rôle considérable des travaux de E.A. Gutkin en collaboration avec Berezin). Finalement, c'est un domaine riche en perspectives qui est apparu, et l'activité y commença et se développa encore, tandis que beaucoup d'autres domaines qui semblaient importants en 1975, ont sombré dans l'oubli (c'est avec tristesse que j'observe ceci).

³²Voir également l'article de G.I. Olshanskii [104] écrit pour *soutenir* la théorie des représentations des groupes de dimension infinie.

³³Je ne suis pas certain de la date. Selon les souvenirs de E.G. Karpel, Berezin soumit le 06.09.1973 un gros article aux Izvestiya de l'Académie des Sciences de l'URSS. La rédaction demanda de diviser l'article en trois parties, la seconde fut l'article mentionné (1975), la troisième partie fut finalement rejetée. Je ne suis pas sûr de son contenu, et rien de correspondant à cette chose, à l'exception de la note de 1978, ne se trouve dans les publications de Berezin. A ce propos, je ne vois pas de raisons de voir *une malveillance préméditée* dans le fonctionnement de la rédaction des Izvestiya ; on ne sait pour quelle raison, ils n'aimaient pas alors les gros articles, et il y a bien des chances que les trois parties durent toutes être référées séparément.

que ça. La question d’Arnol’d “Les mathématiques survivront-elles ?” n’est pas pure rhétorique. Les réactions raisonnables se firent attendre longtemps, et il est impossible de sortir de l’impasse sans de lourdes pertes. Les grandes masses des textes fondamentaux commencèrent à se fossiliser irréversiblement. Ils ne purent jamais être lus par personne.

La complexité des mathématiques contemporaines (la mathématique est tout à fait une science ³⁴pure, mais la réalité est devenue maintenant un peu plus compliquée) se trouve n’être qu’une explication superficielle. Les textes mathématiques contemporains sont en fait significativement plus compliqués que leur contenu. Les gens épuisent leurs forces en tentant de lire les textes, sans parvenir vraiment à la signification de la chose en elle-même³⁵. À propos, la tête étant justement remplie à un tel point de sa *propre* terminologie, personne ne veut plus comprendre la terminologie des autres ³⁶.

Une autre explication est l’intensification de la *sociocentralisation*³⁷ de la science. D’un côté, les mathématiciens ont objectivement de plus grandes possibilités de travail individuel que d’autres scientifiques. Mais de l’autre, il n’y a pas dans les mathématiques pures de forces extérieures résistant à ce sociocentrisme. Enfin, dans les conditions d’incompréhensibilité des textes, l’évaluation individuelle des autres activités devient impossible. C’est à dire, la formation de l’opinion publique se fait clairement par un processus social distinct du professionnalisme scientifique proprement dit³⁸. Dans les temps actuels, nous dirons plus précisément que la pensée

³⁴Ce n’est pas tout à fait vrai, que la mathématique soit une “science” au sens ancien du mot, maintenant c’est plutôt un genre d’activité, elle ne peut exister en dehors de l’activité, ce qui crée des problèmes pour établir des contacts avec les non-mathématiciens.

³⁵C’est étonnant de voir combien cela a changé au cours des 25 dernières années. Ainsi, lorsque j’étais doctorant, ayant acheté dans un magasin un livre flambant neuf, une traduction des éditions Mir, j’ai pu m’asseoir dans un train de banlieue et me mettre à le lire tranquillement. Il est intéressant de nos jours de s’imaginer un doctorant en mathématiques, lisant dans les transports publics une monographie ne relevant même pas de sa propre thématique.

C’est ainsi qu’apparurent déjà ces articles impossibles à lire, mais ceci provoqua de l’étonnement pendant un certain temps, en attendant que tous ne finissent par s’y habituer. Ces exposés de congrès, où l’orateur n’avait pas le moindre désir d’être compris, et les auditeurs n’avaient même pas l’idée de comprendre quoi que ce soit, commencent à apparaître dans ma mémoire, et ils sont progressivement devenus les spectacles dominants.

³⁶Une des sources de complexité se trouve être parfois les *courses* mentionnées dans l’article. Ce mot a un rapport avec un phénomène largement répandu (cf par exemple, en déplaçant le symbole, dans [86] et la description d’une discussion bien connue dans [67]). Je vais essayer de donner une définition. C’est une situation dans laquelle beaucoup de gens essaient de résoudre les problèmes considérés comme importants par une partie de la société, mais le fait d’être le premier à résoudre le problème est présenté comme un but fixé publiquement. On peut en partie considérer ceci comme une concentration de forces dans une *direction importante*.

D’un autre côté, on voudrait atteindre simultanément la transparence, mais ceci exige de sérieux efforts supplémentaires, c’est à dire que d’un côté, on se détourne du but, et de l’autre on simplifie son accès pour les autres. “*Mais la vérité, vous le savez, c’est ce qui simplifie et non ce qui crée le chaos.*” [110](en français dans le texte). Mais les efforts dans cette direction ne sont pas avantageux parce qu’ils ne sont en général pas récompensés (et comment établir leurs prix- ce n’est pas simple). Tout cela se met à fonctionner automatiquement tout de suite comme un mécanisme social aveugle.

L’ambiance interne des compétitions, et ces mêmes compétitions comme moyen de sélection sociale, ce sont des questions distinctes.

³⁷L’auteur utilise ici des expressions comme *sociocentrisme* et ses dérivés pour caractériser un système dans lequel la société est placée au centre de l’Être ; donc à notre avis, l’hégélianisme dégénéré de la période brejnevienne. ndt

³⁸Il faut remarquer de plus que l’une et l’autre sont liées au processus : “il ne faut pas multiplier les entités sans nécessité” (*Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem.*) (Guillaume d’Occam)

mathématique se fait *apparence*, isolée de la réalité (sociale) présente. La mathématique se dirige résolument vers sa propre *hauteur béante* [142].

Berezin lui même vivait *au bon vieux temps*, quand tout cela était encore loin. Mais voici qu'il eut à le connaître, avec *l'aurore du socialisme scientifique (mathématique)*.

La Moscou mathématique des années 1945-1990 a été un phénomène remarquable, peut-être même unique dans toute l'histoire des sciences. Mais, à cause de la fermeture et de l'importance relative de ce monde, le processus de sociocentralisation s'y est déroulé relativement vite. Et, pour beaucoup à cause de l'inertie de ces processus (qui se sont transformés en farce), maintenant, 17 ans après, Moscou n'est plus un centre mathématique.

Berezin se trouvait seul *sous le feu* de quelques coteries scientifiques. Mais je pense que Berezin a pu devenir ce qu'il est devenu et accomplir ce qu'il a accompli, non seulement malgré la provenance de l'opposition, mais même, pour beaucoup, grâce à elle.

*Le marteau si lourd,
Fracasse la vitre,
Et forge l'épée.*³⁹

Il semble que ceci lui a coûté personnellement très cher. Quant à nous, nous ne devons pas

³⁹A.S. Pouchkine, Poltava. ndt

regretter que Berezin soit devenu Berezin^{40, 41}.

Revenons à la crise actuelle. Dans celle-ci quelques vieux *montages idéologiques* jouèrent leur rôle. Nous interprétons la mathématique comme une réunion de *théories*. Chaque théorie est ciblée sur la description des domaines qui relèvent de sa juridiction. *L'étude de la théorie* est proposée à l'homme qui désire seulement y faire une promenade. Mais cette théorie n'est qu'une œuvre humaine, qui (même avant l'époque du sociocentrisme) ne s'est créée que pour la commodité des gens qui se trouvaient dans ce domaine.

⁴⁰Je voulais me restreindre à ce paragraphe *optimiste*, mais sur la recommandation d'un des référés j'ai étoffé le texte.

Les éditions World Scientific ont publié récemment un recueil d'articles sur Berezin [120]. L'homme qui lirait quelque article de ce recueil, cesserait de comprendre quoi que ce soit, sauf que la vie de Berezin fut un écheveau de difficultés de nature mystérieuse.

J'ai toujours vu Berezin comme un *héros intellectuel* et jamais je n'ai essayé de connaître les *détails* de son conflit avec la communauté mathématique. J'ai *deviné* cet événement avec surprise, en lisant des articles mathématiques (vu qu'à cette époque les gens savaient lire entre les lignes). Le conflit en question consistait en une chaîne apparente de collisions, mais en ce qui concerne la typologie, je ne peux pas dire que cela revienne au même (et en général, quelle importance de savoir qui se querelle avec qui, et quand, ou au sujet de quoi). Je mentionnerai seulement quelques détails, qui ne sautent pas du premier coup aux yeux du lecteur de ce recueil.

En premier lieu, "Seconde quantification", en étant un livre de théorie des représentations se trouva entièrement placé aux limites du cercle des idées de l'école soviétique de théorie des représentations (dans laquelle on trouve nombre de travaux précoces de Berezin) d'un côté et de son rival, Harish-Chandra en personne, de l'autre). C'est stupéfiant mais c'est ainsi.

Deuxièmement, notre évaluation actuelle de beaucoup de travaux de Berezin (par exemple, ses premiers travaux sur la superanalyse ou [18]) contient de sérieuses erreurs de point de vue. Du point de vue mathématique contemporain, aucun des *problèmes actuels* n'y est résolu, ce ne sont que des travaux incompréhensibles portant *on ne sait pas sur quoi* (les articles sur les symboles étaient sous ce rapport les mieux réussis).

On peut être ravi de ces travaux, les critiquer ou ne pas se sentir concerné par eux. Mais n'importe qui de familier avec l'humeur scientifico-sociale contemporaine, remarquera qu'une telle *répartition* ne laissait rien prévoir de bon pour l'homme dont la situation dans la hiérarchie scientifique n'était pas suffisamment élevée (et avec cela, les dangers d'une grande diversité). Une situation semblable est d'autant plus dangereuse que le niveau de sociocentrisme est le plus élevé. Mais telle était Moscou, fermée, divisée sur des rivalités de partis scientifiques, avec ses *guerres de positions* (où seule le parti adverse doit respecter les règles) et les problèmes de maintien de la discipline au sein du parti.

Une situation de danger explosif n'attire pas nécessairement les explosions. Mais elle peut les provoquer.

Les gens qui, à un degré ou un autre ont pris part aux événements ultérieurs n'étaient pas les pires des hommes, plutôt le contraire. J'ai fait plus haut quelques observations peu flatteuses pour la communauté mathématique moscovite. Mais elle n'était pas la pire au monde – il suffit de regarder ses réalisations scientifiques, qui en sont l'aspect le plus flatteur. À ce propos, elle était une communauté libre à un point tel que les représentants d'autres sciences (et même les mathématiciens actuels) ne peuvent comprendre. Malheureusement, il y a par ailleurs les lois ordinaires de la *socialisation* auxquelles tous les groupes humains sont soumis, à un degré plus ou moins important. Les réactions des structures sociales, écrasant les possibilités de comportement asocial de la part de leurs membres, furent curieusement typiques (voir l'examen de ces problèmes dans [83] et un travail phénoménologico-descriptif analogue dans [142]).

Il me semble que Berezin a aussi *fait sa percée* sur le *front social*, et en l'année 1980, le conflit s'approchait de son épuisement naturel.

⁴¹Le conflit d'une personnalité éminente avec son entourage n'est pas un phénomène vraiment rare. Dans l'histoire des mathématiques russes il y eut le destin compliqué de N. I. Lobachevsky (cf. [82]); pas aussi marquant et moins connu fut le cas de F.E. Molin (cf. [92]). En dernier, il se heurta à l'obstruction liée à la mise en œuvre de la théorie non encore existante (et sa naissance ne se fit pas sans sa participation) des représentations, et la théorie des algèbres associatives. Il me semble quant à moi que ces conflits prenaient alors des formes moins rudes.

Laissons maintenant ces sujets de côté, et tel Vassili Tiorkin (*personnage d'un livre de Tvardovsky, rédacteur en chef de Novyi Mir, N.d.T.*), revenons à ce monde [123].

Un des moyens possibles, par lesquels les contemporains essaient de restaurer le tableau général des mathématiques – la création d’espèces de *postes de commandement*. Leur description devait se faire dans la langue de l’humanité commune (communauté mathématique), et pour ces mêmes *théories du haut* (du haut, pas du bas) chaque théorie devait être accessible à la compréhension générale.

Revenons au livre de Berezin. En mathématiques il entraîna derrière lui deux grands *tourbillons* – les groupes de dimension infinie et la superanalyse – mais également d’autres conséquences, que j’ai mentionnées en partie plus haut. Comme je l’ai fait remarquer ci-dessus, ce livre n’était pas un modèle de livre mathématique facile à lire. Ceci était une conséquence nécessaire de sa grande originalité au moment de sa création, approfondie par les problèmes connexes. Mais ce n’était pas un livre ardu à comprendre au sens contemporain. A part cela, les défauts de ce genre ne sont pas fatals, ils peuvent évidemment être revus et corrigés dans la génération suivante de la littérature.

D’un autre côté, dans la *physique de la théorie des champs* de l’époque, il a visiblement joué un rôle qui n’était pas seulement celui de *la place d’armes d’une future offensive*, mais bien celui d’un texte simplifié et *influent* (cf. plus haut la citation de Wightman).

Enfin voilà, le livre de Berezin est un exemple intéressant de livre *non théorique*. On ne trouve chez lui aucune construction générale, mais simplement la description de deux *postes de commande* bien concrets ⁴².

Non, l’auteur ne connaissait pas Felix Alexandrovich. Au printemps de l’année 1980, en tant qu’étudiant de cinquième année, j’étais assis au dernier rang d’un cours spécial de “mécanique

⁴²Les chercheurs de la vague suivante, au début des années 70, se retrouvèrent sur les problèmes de *théoricité-non théoricité* de la théorie des représentations des groupes de dimension infinie : A.A. Kirillov, I.M. Gel’fand, M.I. Graev, A.M. Vershik, R.S. Ismagilov. Il est possible de commencer un raisonnement par “prenons un groupe de Lie arbitraire”. Mais après les mots “prenons un groupe de dimension infinie arbitraire”, le mot “alors” flotte dans l’air (ne rien dire de plus est impossible, même avec une définition plus précise). On peut dire, “prenons un groupe de lacets”, ou “prenons une paire (G, K) d’Olshanskii” (mais, l’un ou l’autre, se trouvent, au fond, être des éléments de la liste). À vrai dire (mais pas toujours), la phrase “prenons une représentation arbitraire de tel groupe G (que l’on précise)” est risquée. Il peut ne pas se produire d’autres occasions de pouvoir dire “alors”. Dans les années 70-80 on mit au point progressivement d’autres approches, dépassant cette étrangeté apparente.

Il s’est trouvé que les représentations des groupes de dimension infinie forment un tableau parfaitement cohérent, que l’une ou l’autre méthode apparaissent cohérentes avec des groupes d’aspect extérieur totalement différent, que les différentes classes de groupes directement liées entre elles peuvent se considérer comme un ensemble naturel. Mais ce tableau *organisé* objectivement cohérent n’est pas une *théorie axiomatique* au sens de N. Bourbaki. Et c’est pourquoi l’*entrée* dans les représentations des groupes de dimension infinie ne pouvait être que non-théorique (c a d sur des tentatives de résolution d’exemples concrets par des intuitions fructueuses). Comme nous en avons déjà débattu, c’est exactement comme cela que ça s’est produit.

Il est curieux que dans l’école soviétique de théorie classique des représentations deux tendances aient été liées entre elles, la non-théorique et la théorique, dont les chefs de file étaient, il me semble, I.M. Gel’fand et M.A. Naïmark d’un côté (quand on misait sur des écrits compréhensibles et adaptés à leur lecture, des travaux montrant la possibilité de situations concrètes et de fonctionnement par analogie), et E. B. Dynkin (avec l’élaboration d’approches communes et de techniques unificatrices) de l’autre. Mais ces tendances s’entremêlaient véritablement, et même ses *fondeurs*, pouvaient parfois se présenter dans le camp opposé, sans que personne n’y trouve à redire.

À ce propos, une *entrée* dans les représentations des groupes de dimension infinie eut lieu encore en 1964, et notamment la parution du travail de Elmar Thoma décrivant toutes les fonctions centrales définies positives sur le groupe symétrique infini (c’est à dire une approche elle aussi non-théorique). Par la suite ce théorème eut une influence importante par lui-même, et aussi comme objet à imiter (cf. [128], [129], [28]). Il semble que la première réaction sérieuse à ce travail ait été le travail de S. Stratila et D. Voiculescu dans les années 1975-1976, cf. [131].

quantique”. Pendant le mois de juin de cette même année je me rendis à la chaire TFAF⁴³, afin de poser à Berezin une question mathématique. La secrétaire me dit qu’il était parti depuis deux jours et qu’il ne rentrerait qu’en septembre.....En novembre, parcourant un article sur un *abracadabra physique*, je compris qu’aux opérateurs quadratiques (infinitésimaux) de Virasoro correspondaient des opérateurs de groupes et que par là-même les formules de Virasoro se déformaient⁴⁴.

2 Le groupe des automorphismes de l’algèbre des relations de commutation canoniques.

On décrit ici la construction de Berezin du groupe d’automorphismes de l’algèbre des relations de commutations canoniques. Je ne donnerai pas la démonstration, car il me semble qu’elle ne consiste qu’en un assortiment d’exercices d’analyse fonctionnelle.

2.1. L’espace de Fock bosonique à nombre fini de degrés de liberté. Désignons par $\lambda(z)$ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C}^n , normalisée de la façon suivante :

$$d\lambda(z) = \pi^{-n} \prod dx_j dy_j, \quad \text{avec } x_j = \operatorname{Re} z_j, y_j = \operatorname{Im} z_j.$$

L’espace de Fock bosonique \mathcal{F}_n est l’espace des fonctions holomorphes $f(z)$ sur \mathbb{C}^n , vérifiant la condition

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d\lambda(z) < \infty.$$

Nous définirons sur \mathcal{F}_n un produit scalaire par la formule :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{C}^n} f(z) \overline{g(z)} e^{-|z|^2} d\lambda(z).$$

2.1.1. Proposition. *Les fonctions de la forme*

$$z^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

⁴³Théorie des fonctions et analyse fonctionnelle (*Chaire dirigée par I.M. Gel’fand. ndt*).

⁴⁴Il est arrivé que, beaucoup plus tard [97] je me suis placé dans la *continuité* d’une remarque mentionnée dans [19] durant l’année 1978. Ce fut amusant au point de vue de la question des *influences pas claires*, discutée plus haut. Au sujet de la note [19], G.I. Olshanskii et moi *sortirent* en second en 1984 ; nous n’avions pas réellement d’intersection (mais l’influence de l’article de Berezin [19] était directe), extérieurement rien ne se ressemblait ; ainsi nous n’avions même pas remarqué la proximité de nos travaux. En l’année 1995 nous nous préparions enfin à écrire ce travail *de façon humaine*, et ce faisant, je suis revenu à l’objet en question. Je progressais autant que je pouvais, mais les buts lointains paraissaient inaccessibles. Ce fut une bifurcation, et je serais sans doute allé d’un autre côté... Mais V.F. Molchanov me dit que Berezin “avait calculé une formule de Plancherel “dans telle et telle situation. J’en déduisis qu’une certaine intégrale pouvait se calculer, et, à proprement parler, le fait de la calculabilité de cette intégrale (mais par une formule non définitive) fut pour moi une information décisive. En même temps, je me suis amusé à voir les traces des anciens dans ce paysage-là.

D’un point de vue de *lawyer* (*En anglais dans le texte, ndt*) mes articles ultérieurs sur le *noyau de Berezin* ne dépendaient pas de Berezin. Mais on ne comprend pas ce que peut signifier le mot indépendance quand tout peut être décidé en un segment de phrase (j’ai observé ceci maintes fois dans d’autres situations, et chez moi et chez d’autres).

où $k_j = 0, 1, 2, \dots$, forment une base orthogonale de \mathcal{F}_n , et en outre

$$\|z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}\|^2 = k_1! \dots k_n!$$

2.1.2. Théorème. *L'espace \mathcal{F}_n est un espace de Hilbert (i.e., il est complet). Autrement dit, le sous-espace des fonctions holomorphes de L^2 est fermé dans L^2 .*

2.2. Exemple. Les vecteurs de Gauss. Considérons la fonction

$$\mathbf{b}_T(z) := \exp\left\{\frac{1}{2}zTz^t\right\}$$

où T est une matrice symétrique.

2.2.3. Observation. *Le vecteur \mathbf{b}_T appartient à \mathcal{F}_n si et seulement si $\|T\| < 1$.*

Un calcul simple donne

$$\langle \mathbf{b}_T, \mathbf{b}_S \rangle = \det\left[(1 - TS^*)^{-1/2}\right],$$

d'où :

$$\|\mathbf{b}_T\| = \det(1 - TT^*)^{-1/4} \quad (2.1)$$

2.3. Ce qu'on appelle les "états cohérents" . Pour $a \in \mathbb{C}^n$ nous définissons la fonction

$$\varphi_a(z) := \exp\left\{\sum_j z_j \bar{a}_j\right\}.$$

2.3.4. Théorème. *Pour une fonction $f \in \mathcal{F}_n$ quelconque, la "propriété de reproduction" suivante est vérifiée :*

$$f(a) = \langle f, \varphi_a \rangle. \quad (2.2)$$

On a en particulier

$$\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = \exp\left\{\sum b_j \bar{a}_j\right\} = \varphi_a(b) = \overline{\varphi_b(a)}.$$

2.4. Comment s'écrivent les opérateurs ?

2.4.5. Théorème. *Un opérateur borné quelconque A dans l'espace \mathcal{F}_n peut se représenter comme suit :*

$$Af(z) = \int_{\mathbb{C}^n} K(z, \bar{u}) f(u) e^{-|u|^2} d\lambda(u), \quad (2.3)$$

où $K(z, \bar{u})$ est une fonction holomorphe en z et antiholomorphe en u . De plus, cette intégrale est absolument convergente pour toute $f \in \mathcal{F}_n$.

Autrement dit, un opérateur borné arbitraire dans \mathcal{F}_n consiste en un opérateur intégral au sens littéral du mot. Pour un opérateur donné A , désignons par $c_{\mathbf{k}\mathbf{l}}$ ces coefficients matriciels dans la base standard

$$c_{\mathbf{k}\mathbf{l}} := \langle Az^{\mathbf{l}}, z^{\mathbf{k}} \rangle .$$

Un tel noyau s'écrit comme suit

$$K(z, \bar{u}) = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{l}} c_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \frac{z^{\mathbf{k}} \bar{u}^{\mathbf{l}}}{\mathbf{k}! \mathbf{l}!} .$$

Ceci est facile à vérifier d'après le théorème, (bien que l' "interversion" de l'intégrale généralisée et de la sommation de la série exige une preuve bien fondée).

Un autre point de vue est possible, suivant lequel notamment le noyau peut être décrit par la formule suivante

$$K(a, \bar{b}) = \langle A\varphi_b, \varphi_a \rangle = \langle \varphi_b, A^*\varphi_a \rangle = A\varphi_b(a) = \overline{A^*\varphi_a(b)} . \quad (2.4)$$

Nous avons maintenant une explication de la forme de l'intégrale (2.3). Nous avons en effet,

$$\int_{\mathbb{C}^n} K(z, \bar{u}) f(u) e^{-|u|^2} d\lambda(u) = \langle f, A^*\varphi_z \rangle , \quad (2.5)$$

i.e. notre intégrale se trouve être le produit scalaire de f et de $A^*\varphi_z \in \mathcal{F}_n$, et on en déduit ensuite (l'opérateur A étant borné), que $\varphi_z \in \mathcal{F}_n$.

2.5. Comment multiplier les opérateurs ? Soient A et B des opérateurs dans \mathcal{F}_n , soient K, L leurs noyaux ,

$$\begin{aligned} Af(z) &= \int_{\mathbb{C}^n} K(z, \bar{u}) f(u) e^{-|u|^2} d\lambda(u), \\ Bf(u) &= \int_{\mathbb{C}^n} L(u, \bar{w}) f(w) e^{-|w|^2} d\lambda(w). \end{aligned}$$

Alors le noyau M de la composition AB se calcule par la formule simple suivante

$$M(z, \bar{w}) = \int_{\mathbb{C}^n} K(z, \bar{u}) L(u, \bar{w}) e^{-|u|^2} d\lambda(u). \quad (2.6)$$

Les questions de l'interversion des limites du domaine d'intégration et de la convergence de l'intégrale sont sous entendues. On peut échapper à cette question en remarquant que l'intégrale (2.6) se ramène de nouveau au produit scalaire des fonctions

$$L(u, \bar{w}) = B\varphi_w(u), \quad \overline{K(z, \bar{u})} = A^*\varphi_z(u),$$

et c'est pourquoi l'intégrale converge.

2.6. La réalisation du groupe symplectique. La réalisation du groupe symplectique $Sp(2n, \mathbb{R})$ se fait sous la forme de matrices $(n+n) \times (n+n)$ $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vérifiant la relation

$$h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} h^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

(où t représente la transposition). Autrement dit, ces matrices respectent la forme bilinéaire antisymétrique $\{\cdot, \cdot\}$ sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il est pratique de passer à la réalisation complexe de notre groupe, notamment en remplaçant la matrice h par

$$JhJ^{-1}, \text{ où } J := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Nous obtenons un groupe de matrices munies d'une décomposition en blocs

$$g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

dans laquelle la barre désigne la conjugaison complexe.

Ils satisfont comme précédemment à la condition de symplecticité (2.7), et d'un autre côté, ils vérifient de plus la condition

$$g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Pour le lecteur, faisons quelques rappels à propos de groupes classiques, en signalant que :

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = U(n, n) \cap Sp(2n, \mathbb{C}) = U(n, n) \cap GL(2n, \mathbb{R}) = Sp(2n, \mathbb{C}) \cap GL(2n, \mathbb{R}).$$

2.7. La formule de Berezin. La "Représentation de Weil". La matrice symplectique (2.9) permet de définir un opérateur sur l'espace de Fock \mathcal{F}_n , par la formule :

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} f(z) &= \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} \exp \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Psi}\Phi^{-1} & \Phi^{t-1} \\ \bar{\Phi}^{-1} & -\bar{\Phi}^{-1}\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \bar{u}^t \end{pmatrix} \right\} f(u) e^{-|u|^2} d\bar{u} du. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ici z et \bar{u} sont des matrices lignes

$$z = (z_1 \quad \dots \quad z_n), \quad \bar{u} = (\bar{u}_1 \quad \dots \quad \bar{u}_n).$$

Elles donnent dans l'exposant de l'exponentielle des termes quadratiques en z, \bar{u} .

Notons également que Φ est toujours inversible, ceci se déduit facilement de (2.10).

2.7.6. Théorème. *a) Les opérateurs $\widetilde{W}(\cdot)$ sont unitaires avec*

$$\widetilde{W} \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} = \det(\Phi^* \Phi)^{-1/4} W \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}.$$

b) Les opérateurs $W(\cdot)$ définissent une représentation projective du groupe $Sp(2n, \mathbb{R})$, précisément

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Psi_1 \\ \bar{\Psi}_1 & \bar{\Phi}_1 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} \Phi_2 & \Psi_2 \\ \bar{\Psi}_2 & \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \\ = \det(1 + \Phi_1^{-1} \Psi_1 \bar{\Psi}_2 \Phi_2^{-1})^{-1/2} W \left(\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Psi_1 \\ \bar{\Psi}_1 & \bar{\Phi}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_2 & \Psi_2 \\ \bar{\Psi}_2 & \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

En reformulant le théorème, on vérifie facilement cette formule avec la multiplication des opérateurs.

2.8. Les extensions centrales. Soit G un groupe quelconque, A un groupe abélien. Essayons de munir l'ensemble $G \times A$ d'une loi de groupe suivant la formule

$$(g_1, a_1) \circ (g_2, a_2) = (g_1 g_2, a_1 \cdot a_2 \cdot c(g_1, g_2)),$$

où c est une fonction $G \times G \rightarrow A$. Pour assurer l'associativité, la relation suivante doit être vérifiée :

$$c(g_1, g_2) \cdot c(g_1 g_2, g_3) = c(g_1, g_2 g_3) \cdot c(g_2, g_3). \quad (2.13)$$

Le groupe ainsi obtenu s'appelle *extension centrale* du groupe G , et la fonction $c(\cdot, \cdot)$, vérifiant (2.13), le *2-cocycle* (Pour les détails, voir [73]).

Par exemple, la fonction ⁴⁵

$$c : Sp(2n, \mathbb{R}) \times Sp(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

définie par la formule

$$c(g_1, g_2) = \det(1 + \Phi_1^{-1} \Psi_1 \bar{\Psi}_2 \Phi_2^{-1})^{-1/2} \quad (2.14)$$

(donnée plus haut dans la formule (2.12)) se trouve être un 2-cocycle. La finesse de la formule est dans le fait que l'on doit avoir :

$$\|\Phi_1^{-1} \Psi_1\| < 1, \quad \|\bar{\Psi}_2 \Phi_2^{-1}\| < 1.$$

Ce n'est pas difficile de le montrer à l'aide de (2.10). Par conséquent,

$$\|\Phi_1^{-1} \Psi_1 \bar{\Psi}_2 \Phi_2^{-1}\| < 1,$$

et c'est pourquoi nous pouvons extraire la racine carrée dans (2.14), en développant en séries entières,

$$(1 + A)^{-1/2} := 1 - \frac{A}{2} + \frac{A^2}{8} - \dots,$$

ce qui permet d'en finir déjà avec le déterminant.⁴⁶

Remarquons que (2.14) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$c(g_1, g_2) = \det(\Phi_1^{-1} \Phi_3 \Phi_2^{-1})^{-1/2},$$

⁴⁵ci-dessous \mathbb{C}^* désigne le groupe multiplicatif des complexes non nuls.

⁴⁶Si on règle le problème du déterminant tout de suite, on ne peut plus choisir le signe approprié pour l'extraction de la racine .

où Φ_3 est le bloc correspondant à la matrice $g_3 := g_1 g_2$. Sous une telle forme, l'identité (2.13) paraît évidente. Pour la même raison, pour g_1, g_2 , suffisamment proches de l'identité, nous pouvons écrire

$$\det\left(\Phi_1^{-1}\Phi_3\Phi_2^{-1}\right)^{-1/2} = \det\Phi_1^{1/2} \cdot \det\Phi_3^{-1/2} \cdot \det\Phi_2^{1/2}$$

On en déduit ensuite tous les facteurs dans (2.13) .

Afin de pouvoir sortir du voisinage de l'unité, nous invoquerons le prolongement analytique.

REMARQUE. Dans un contexte plus général [18] on écrit naturellement le cocycle sous forme additive (par ex. si A est précisément le groupe additif \mathbb{C})

$$c^*(g_1, g_2) = \text{tr} \ln\left(\Phi_1^{-1}\Phi_3\Phi_2^{-1}\right)$$

Ainsi notre cocycle ‘‘multiplicatif’’ antérieur c se transforme en c^* suivant la formule

$$c(g_1, g_2) = \exp\left\{-\frac{1}{2}c^*(g_1, g_2)\right\}$$

2.9. L'espace de Fock. Passage à la limite pour $n \rightarrow \infty$. Considérons l'injection $J_n : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{n+1}$, qui à chaque fonction $f(z_1, \dots, z_n)$ associe elle-même suivant la correspondance :

$$J_n f(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = f(z_1, \dots, z_n).$$

2.9.7. Proposition. *L'injection \mathcal{F}_n est une isométrie.*

Nous pouvons considérer maintenant la suite infinie d'injections,

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}_{n-1} \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \dots,$$

considérer ensuite le complété de l'union des espaces \mathcal{F}_n . Nous obtenons par ce procédé l'espace de Hilbert \mathcal{F}_∞ et c'est l'espace de Fock .

Notre objectif suivant est de rendre l'espace \mathcal{F}_∞ un peu plus palpable. Nous aborderons ce problème de deux points de vue.

Notons par \mathbf{k} une suite arbitraire

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3, \dots),$$

où k_i est un entier non négatif, vérifiant $k_j = 0$ pour j assez grand. Notons par $z^{\mathbf{k}}$ le monôme

$$z^{\mathbf{k}} := \prod_i z_i^{k_i}.$$

Chacun de ces monômes se trouve dans un certain \mathcal{F}_n , et donc dans \mathcal{F}_∞ , qui contient tous les \mathcal{F}_n .

Nous obtenons finalement que les vecteurs $z^{\mathbf{k}}$ forment une base orthogonale (non ortho-normée) de \mathcal{F}_∞ . Un vecteur arbitraire $h \in \mathcal{F}_\infty$ se décompose dans cette base suivant la série

$$h = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}} \tag{2.15}$$

2.9.8. Proposition. *La série (2.15) converge pour tous les $z \in \ell_2$. De plus, elle converge absolument et normalement sur une boule arbitraire de rayon fini dans ℓ_2 .*

En d'autres termes, nous avons montré que l'espace \mathcal{F}_∞ peut s'interpréter comme espace de fonctions holomorphes à nombre infini d'indéterminées.

Afin de mieux comprendre ce fait, prenons un autre point de vue. Soit le vecteur $a = (a_1, a_2, \dots)$ de l'espace ℓ_2 (i.e., $\sum |a_j|^2 < \infty$). Nous notons $a^{[N]} := (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$. Considérons les vecteurs

$$\varphi_{a^{[N]}} \in \mathcal{F}_N.$$

Il est facile de voir que cette suite est fondamentale dans \mathcal{F}_∞ , c'est pourquoi elle s'obtient par le produit avec un certain vecteur $\varphi_a \in \mathcal{F}_\infty$. Ensuite, pour un vecteur arbitraire $h \in \mathcal{F}_\infty$, nous définissons une fonction sur ℓ_2 suivant la formule

$$f_h(z) = \langle h, \varphi_z \rangle_{\mathcal{F}_\infty}.$$

Cette fonction est la somme de la série (2.15).

2.9.9. Observation. *Nous pouvons considérer les fonctions de l'espace \mathcal{F}_∞ comme des fonctions "holomorphes" sur ℓ_2 . La propriété de reproduction (2.2) reste valable.*

2.10. Exemple : les vecteurs de Gauss

2.10.10. Proposition. *La fonction*

$$\mathbf{b}_{T(z)} := \exp\left\{\frac{1}{2}zTz^t\right\}$$

est dans \mathcal{F}_∞ si et seulement si $\|T\| < 1$ et T est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Rappelons qu'un opérateur A sur un espace de Hilbert est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si il satisfait aux deux conditions équivalentes suivantes :

- la somme des carrés des éléments matriciels converge $\sum |a_{ij}|^2 < \infty$;
- A est compact et la somme des valeurs propres de A^*A converge.

Pour montrer la proposition précédente, il faut appliquer convenablement la formule (2.1) et si nécessaire utiliser un manuel d'analyse fonctionnelle.

2.11. Comment travailler alors avec les opérateurs ? De la façon suivante : en ce qui concerne les intégrales des formules (2.6), (2.5) il est préférable de les oublier⁴⁷ et des les considérer comme de purs symboles. Le noyau de l'opérateur apparaît ensuite (2.4). Les formules (2.6) et (2.5) s'interprètent comme des produits scalaires.

2.12. Le groupe d'automorphismes de l'algèbre des relations de commutation canoniques SpU . Notre prochain objectif est la construction d'un analogue de la représentation de Weil. Considérons maintenant les matrices de dimension $(\infty + \infty) \times (\infty + \infty)$, munies d'une structure par blocs $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$ qui sont bornés et conjugués au sens habituel (en tant qu'opérateurs dans $\ell_2 \oplus \ell_2$), et satisfont à la relation symplectique (2.7). Mais un tel groupe

⁴⁷Il est aussi possible de les considérer comme de vraies intégrales.

est trop gros pour pouvoir définir la représentation de Weil, et il n'admet pas de représentation unitaire.

Nous allons considérer un sous groupe plus petit $SpU(\infty)$, formé des matrices vérifiant la condition supplémentaire suivante :

– Le bloc Ψ est un opérateur de Hilbert-Schmidt .

2.13. A nouveau la formule de Berezin. Nous définissons la représentation de Weil de $SpU(\infty)$ par la même formule que précédemment.

2.13.11. Théorème. *Le théorème 2.7.6 reste valable.*

Il faut pour cela calculer les produits scalaires des vecteurs de Gauss. C'est un bel exercice d'analyse fonctionnelle pour un cours de licence.

2.14. Pourquoi les conditions de Hilbert-Schmidt sont nécessaires. Il faut considérer la formule indiquée dans la représentation de Weil, et interpréter les opérateurs intégraux de l'espèce (2.5). Soit $K(z, \bar{u})$ un noyau d'opérateur intégral borné. Ainsi la fonction $\overline{K(z, \bar{u})}$, pour un z fixé quelconque, doit être un élément de \mathcal{F}_∞ . Dans le cas qui nous intéresse, de telles fonctions sont de la forme

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}u\Phi^{-1}\Psi u^t + uu^t\right\}$$

On en déduit que $\Phi^{-1}\Psi$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et de plus, à partir de la condition (2.10), il est facile de voir que Ψ est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt .

2.15. Pourquoi \mathcal{F}_∞ est-il bien l'espace de Fock ? Je précise que du point de vue de l'histoire des sciences, c'était un hasard étrange que des constructions de dimension infinie soient apparues dès le début, mais il est devenu clair par la suite qu'elles provenaient aussi de cas de dimension finie. ^{48 49}

L'espace de Fock originel est défini comme la somme directe de tous les produits symétriques $\mathcal{S}^m(\mathcal{H})$ d'un espace de Hilbert \mathcal{H} quelconque :

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{S}^m(\mathcal{H}).$$

L'étude de ce modèle montre que l'espace \mathcal{S}^m consiste simplement en les polynômes homogènes de degré m . Ainsi notre espace \mathcal{F}_∞ coïncide évidemment avec l'espace de Fock.

Il est intéressant de noter que le modèle holomorphe dans toute sa simplicité ne fut découvert que trente ans après l'article de V.A. Fock.

⁴⁸La méthode de réduction précédente n'éclaircit pas l'origine de cette même formule (2.11), il est beaucoup plus simple, à ce sujet, de se référer au même livre. Mais connaissant déjà la formule de Berezin, on peut considérer un problème différent et (comme l'ont proposé il y a quelque temps G. I. Olshanskii et R. Howe) considérer le sous-groupe des opérateurs arbitraires avec noyau de Gauss, à partir duquel le groupe symplectique s'obtient facilement cf. [96], [107].

⁴⁹Encore un phénomène curieux et visible de loin. L'induction parabolique ne "marche" pas pour les groupes classiques de dimension infinie. Une simple induction unitaire dans le style de Mackey (cf. [73]) est utile, mais de possibilités limitées.

3 «Le groupe des automorphismes des relations d'anticommuation canoniques.»

Cette partie se présente comme un exercice d'algèbre linéaire, se changeant peu à peu en analyse fonctionnelle. Le théorème 3.10.16 [96], n'est toutefois pas immédiat (ou plutôt je ne sais pas le démontrer simplement). Dans le paragraphe suivant nous supposerons connus certains résultats de supermathématique.

3.1. L'algèbre de Grassmann. Considérons l'algèbre Λ_n définie par les générateurs $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ et les relations

$$\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i.$$

Par conséquent $\xi_j^2 = 0$. Il est facile de voir que $\dim \Lambda_n = 2^n$, et les monômes

$$\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}, \quad \text{où } i_1 < i_2 < \dots < i_k \tag{3.1}$$

forment une base de Λ_n .

Nous construirons un produit scalaire sur Λ_n en posant que ces monômes forment une base orthonormée de Λ_n .

3.2. L'intégrale de Berezin. L'intégrale de Berezin :

$$\int f(\xi) d\xi = \int f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_n d\xi_{n-1} \dots d\xi_1$$

se définit comme une fonctionnelle linéaire sur Λ_n , sachant que

$$\int \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = 1.$$

L'intégrale sur les monômes restants (3.1) est égale à 0.

3.3. L'intégrale de Berezin avec la mesure de Gauss. Définissons une famille supplémentaire de variables anticommutantes $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n$,

$$\bar{\xi}_i \bar{\xi}_j = -\bar{\xi}_j \bar{\xi}_i, \quad \bar{\xi}_i \xi_j = -\xi_j \bar{\xi}_i.$$

Posons

$$d\xi d\bar{\xi} := d\xi_1 d\bar{\xi}_1 \dots d\xi_n d\bar{\xi}_n.$$

Nous nous intéressons aux intégrales de la forme

$$\int f(\bar{\xi}) g(\xi) e^{-\sum \xi_j \bar{\xi}_j} d\xi d\bar{\xi}.$$

il est facile de voir que

$$\int \left(\prod_i \bar{\xi}_{k_i} \xi_{k_i} \right) e^{-\sum \xi_j \bar{\xi}_j} d\xi d\bar{\xi} = 1.$$

L'intégrale des autres monômes est égale à 0. Par exemple :

$$\int \xi_{29} \bar{\xi}_{29} \xi_{31} \bar{\xi}_{31} d\xi d\bar{\xi} = 1, \quad \int \xi_{29} \bar{\xi}_{29} \xi_{31} d\xi d\bar{\xi} = 0$$

3.4. Comment s'écrivent les opérateurs? Soient encore $\eta, \bar{\eta}$ un couple de variables anticommutantes .

3.4.12. Observation. *Un opérateur quelconque A sur Λ_n peut s'écrire sous la forme :*

$$Af(\xi) = \int K(\xi, \bar{\eta}) f(\eta) e^{-\eta \bar{\eta}^t} d\eta d\bar{\eta}.$$

Les coefficients du polynôme $K(\xi, \eta)$ consistent simplement en les éléments matriciels de l'opérateur A dans la base standard.

3.5. Le groupe orthogonal. Nous considérons maintenant $O(2n, \mathbb{C})$ le groupe des matrices $(n+n) \times (n+n)$ à coefficients complexes $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, vérifiant la condition

$$g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Nous considérons ensuite $SO(2n, \mathbb{C})$ le sous groupe de $O(2n, \mathbb{C})$, formé des matrices de déterminant 1. Nous aurons également à considérer le groupe $O(2n, \mathbb{R})$, que nous réalisons comme groupe des matrices de la forme

$$g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix},$$

qui satisfont à la condition (3.2).

3.6. Représentations spinorielles du groupe $SO(2n, \mathbb{C})$. Pour une matrice orthogonale

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SO(2n, \mathbb{C})$$

nous déterminons un opérateur dans Λ_n par la formule

$$\begin{aligned} \mathfrak{spin} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} f(\xi) &= \\ &= \int \exp \left\{ \frac{1}{2} (\xi \quad \bar{\eta}) \begin{pmatrix} BD^{-1} & -D^{t-1} \\ D^{-1} & D^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \right\} f(\eta) e^{-\eta \bar{\eta}^t} d\eta d\bar{\eta}^t. \end{aligned}$$

Cette formule n'est bien définie que sur le sous ensemble ouvert $\det D \neq 0$ de $SO(2n, \mathbb{C})$.⁵⁰

3.6.13. Théorème. *Les opérateurs $\mathfrak{spin}(g)$ définissent une représentation projective du groupe $SO(2n, \mathbb{C})$. Plus précisément :*

$$\mathfrak{spin}(g_1) \mathfrak{spin}(g_2) = \det(1 + D_1^{-1}C_1B_2D_2^{-1})^{1/2} \mathfrak{spin}(g_1g_2).$$

⁵⁰Sur l'autre composante de $O(2n, \mathbb{C})$ le bloc D n'est jamais modifié. Dans le cas symplectique (cf. plus haut), le bloc Φ est toujours transformé.

3.6.14. Théorème. *Les opérateurs*

$$\widetilde{\text{spin}} \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} := \det(\Phi)^{1/2} \cdot \text{spin} \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$$

définissent une représentation projective unitaire du groupe $SO(2n, \mathbb{R})$.

3.7. L'espace de Fock fermionique. Deux topologies. Considérons une famille infinie de variables grassmanniennes ξ_1, ξ_2, \dots . Considérons l'espace vectoriel dont les monômes

$$\xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k}, \quad \text{avec } i_1 < i_2 < \dots < i_k \quad (3.3)$$

forment une base.

Nous définissons l'espace de Hilbert Λ_∞ comme l'espace dont les monômes (3.3) forment une base orthonormée. Cet espace s'appelle *l'espace de Fock fermionique*.

Nous notons ensuite par Λ_∞^k le sous-espace de Λ_∞ , formé des vecteurs de la base (3.3) de degré k . Un vecteur arbitraire f de Λ_∞ se décompose en une somme

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi), \quad \text{où } f_k \in \Lambda_\infty^k. \quad (3.4)$$

Nous désignons ensuite par \mathcal{L}_∞ l'espace formé de tous les vecteurs $f \in \Lambda_\infty$, satisfaisant à la condition

$$\text{Pour un } C \text{ arbitraire, il existe une constante } A, \text{ telle que } \|f_k\| \leq A e^{-Ck}.$$

Cet espace est muni d'une famille de semi-normes

$$\|f\|_C := \sup_k e^{Ck} \|f_k\|.$$

Un exemple important (à mon avis pas totalement évident) de fonction $f \in \mathcal{L}_\infty$, est celui des

$$\exp \left\{ \sum a_j \xi_{2j} \xi_{2j+1} \right\}, \quad \text{où } \sum |a_j|^2 < \infty.$$

3.8. Le groupe d'automorphismes des relations d'anticommutation. Nous voulons ensuite construire l'analogie infini de la représentation spinorielle.

Considérons pour commencer le groupe orthogonal infini dans sa totalité. Il se compose de matrices g formées de blocs $(\infty + \infty) \times (\infty + \infty)$, telles que

- elles sont de la forme $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$;
- elles satisfont à la condition d'orthogonalité (3.2) ;
- elles sont bornées et inversibles dans $\ell_2 \oplus \ell_2$.

La représentation spinorielle de ce groupe n'est pas définie.

Comme dans le cas bosonique, nous allons considérer à nouveau un plus petit sous-groupe (notons le par $OU(\infty)$) formé des matrices pour lesquelles les Ψ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

3.9. Complexification du groupe $OU(\infty)$. De plus, nous allons considérer l'analogie du groupe orthogonal complexe. Notons par $OGL(\infty)$ le groupe des matrices

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

qui sont orthogonales au sens de (3.2), bornées et inversibles dans $\ell_2 \oplus \ell_2$ et satisfaisant à la condition : B et C sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt .

3.10. La représentation spinorielle.

3.10.15. Théorème. *Les opérateurs*

$$\tilde{\mathbf{spin}}(g) := \det(\Phi\Phi^*)^{1/4} \mathbf{spin}(g)$$

forment une représentation projective unitaire du groupe $OU(\infty)$ dans l'espace de Fock hilbertien fermionique Λ_∞ .

3.10.16. Théorème. *Les opérateurs $\mathbf{spin}(g)$ déterminent une représentation projective du groupe $OGL(\infty)$ dans l'espace de Fock fermionique semi-normé \mathcal{L}_∞*

REMARQUE. À proprement parler, nos formules ne permettent de définir la représentation que sur la composante neutre du groupe. Mais son prolongement au groupe entier ne coûte ni beaucoup de travail ni beaucoup de mots.

4 Quelques applications à la théorie des représentations.

Nous allons donner ici quelques applications de la représentation de Weil et de la représentation spinorielle à la théorie générale des représentations.

Par ailleurs, la question de la signification propre du terme *Théorie des représentations* est vraiment une question de goût. Par exemple, la construction de 4.1 et 4.3 est largement populaire en physique mathématique, la construction de 4.4 concerne en partie les fonctions thêta et les formes automorphes, la construction 4.5 relève évidemment de la superanalyse, et 4.6 est un procédé de construction en théorie des champs conformes.

Dans les trois premiers cas, on peut remarquer l'importance de la condition de Hilbert-Schmidt par laquelle «la lutte est arrivée» dans les années 1959–65.

4.1. Exemple de représentation du groupe des difféomorphismes du cercle de poids supérieur. Nous notons par Diff le groupe des difféomorphismes du cercle préservant l'orientation. Notre but : plonger Diff dans le groupe SpU .

Considérons l'espace de Hilbert \mathcal{H} formé des fonctions sur le cercle de moyenne nulle, les f telles que :

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right) \right| f(\varphi) g(\psi) d\varphi d\psi.$$

On peut le représenter plus simplement par la formule

$$\langle e^{in\varphi}, e^{im\varphi} \rangle = \frac{1}{|n|} \cdot \delta_{m,n}.$$

Nous scindons ensuite notre espace de Hilbert en somme directe de deux sous espaces, l'un d'eux, H_+ formé des fonctions de la forme $\sum_{k>0} c_k e^{ik\varphi}$, admettant un prolongement holomorphe à l'intérieur du disque unité, et l'autre, H_- , formé des fonctions de la forme $\sum_{k<0} c_k e^{ik\varphi}$, se prolongeant holomorphiquement à l'extérieur du disque unité.

Enfin, nous obtenons sur H la forme bilinéaire antisymétrique (symplectique) suivant :

$$\{f, g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left[\int_0^\varphi g(\psi) d\psi \right] d\varphi.$$

Nous obtenons ainsi une structure comme décrite plus haut dans 2.12, précisément un espace de Hilbert muni d'une forme bilinéaire antisymétrique et scindé en somme directe de deux sous espaces. De façon analogue, nous obtenons le groupe $SpU(H)$ des isométries de cet espace de Hilbert H .

Soit $q \in \text{Diff}$ un difféomorphisme du cercle. Considérons l'opérateur $T(q)$ sur l'espace H , défini par la formule

$$T(q) f(\varphi) = f(q(\varphi)) q'(\varphi).$$

4.1.17. Théorème. $T(q) \in SpU(H)$.

C'est maintenant le moment de procéder par la même occasion, aux vérifications nécessaires des conditions de Hilbert-Schmidt.

Il faut pour cela considérer la transformée de Hilbert

$$If\varphi = \int_0^{2\pi} \text{ctg}\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) f(\psi) d\psi,$$

qui admet les valeurs propres $\pm i$ sur les sous espaces H_\pm . Ensuite, il faut se convaincre de ce que le commutateur $[T(q), I]$ est bien un opérateur intégral de noyau infiniment dérivable.

Enfin nous pouvons restreindre la représentation de Weil du groupe $SpU(H)$ au sous-groupe Diff afin d'obtenir une représentation projective unitaire du groupe Diff .

Cette construction a été réalisée par beaucoup d'auteurs à l'automne de 1980; j'en ai parlé dans la section 1. Au niveau de l'algèbre de Lie c'est la construction de Virasoro en 1970, ou plutôt cette construction a été comprise comme une réaction à l'article de Virasoro.

4.2. Exemple. Une utilisation de structure quaternionique. Au début nous allons répéter sous d'autres termes la réalisation du groupe orthogonal complet $O(2n, \mathbb{R})$ sous forme de matrices complexes $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$.

Considérons l'espace euclidien standard \mathbb{C}^n muni d'une base e_1, \dots, e_n , et le groupe $O(2n, \mathbb{R})$ des opérateurs \mathbb{R} -linéaires orthogonaux sur cet espace.

Considérons ensuite la base réelle $e_1, \dots, e_n, f_1 := ie_1, \dots, f_n := ie_n$ de \mathbb{C}^n et transformons-la en la base

$$e_1 + if_1, \dots, e_n + if_n, e_1 - if_1, \dots, e_n - if_n.$$

Nous obtenons ainsi une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$.

Considérons ensuite l'espace des fonctions L^2 sur le cercle, et son sous-espace L^2_- formé des fonctions impaires f ,

$$f(\varphi + \pi) = -f(\varphi).$$

Fixons ensuite la variable s et considérons l'opérateur intégral sur L^2_- , donné par la formule

$$J_s f(\varphi) := \frac{1}{\Gamma(1+is)} \int_0^{2\pi} |\sin(\varphi - \psi)|^{-1-is} \operatorname{sgn} \sin(\varphi - \psi) \overline{f(\psi)} d\psi$$

4.2.18. Théorème. a) L 'opérateur J_s est antilinéaire, c'est à dire

$$J_s i f = -i J_s f$$

b) L 'opérateur J_s est unitaire.

c) $J_s^2 = -1$.

Les assertions b), c) ne sont pas immédiates; leur preuve nécessite le calcul de $J_s f$ pour $f(\varphi) = e^{(2n+1)i\varphi}$.

La formulation de ce théorème signifie que L^2_- devient pour nous un espace de Hilbert quaternionique, grâce à la structure donnée par les opérateurs (\mathbb{R} -linéaires) suivants :

$$\alpha + \beta i + \gamma J_s + \delta i J_s, \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Nous dirons qu'un opérateur est *unitaire-quaternionique*, s'il se prolonge avec la multiplication quaternionique.

Nous définissons ensuite le groupe USp comme groupe de tous les opérateurs unitaires \mathbb{C} -linéaires A , de la forme $A = B(1 + T)$, où B est un opérateur unitaire-quaternionique, et T un opérateur de Hilbert-Schmidt⁵¹.

Nous considérons ensuite le groupe $\operatorname{Diff}^{(2)}$, formé des difféomorphismes "pairs" du cercle, c'est à dire des difféomorphismes vérifiant⁵²

$$q(\varphi + \pi) = q(\varphi) + \pi.$$

Son action sur L^2_- est donnée par la formule

$$T_s(q)f(\varphi) = f(q(\varphi)) q'(\varphi)^{(1+is)/2}.$$

4.2.19. Théorème. $T_s(q) \in USp(H)$.

⁵¹L'auteur utilise la notation SpU , OU , USp pour ces groupes, afin d'alléger la notation d'Olshanskii $[G(\infty), K(\infty)] = [Sp(2\infty, \mathbb{R}), U(\infty)]$, $[O(2\infty, U(\infty))]$, $[U(2\infty), Sp(\infty)]$. Dans tous les cas, on considère des sous-groupes de $G(\infty)$, formés d'opérateurs qui diffèrent d'un opérateur de $K(\infty)$ par un opérateur de Hilbert-Schmidt.

⁵²c'est un revêtement à deux feuillets du groupe Diff .

Pour le démontrer, il suffit de calculer le noyau du commutateur $[T_s(q), J_s]$ et de voir qu'il se trouve dans l'espace des fonctions L^2 sur le cercle.

Fixons ensuite un quaternion arbitraire $R := \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, tel que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$; on a donc $R^2 = -1$. Considérons ensuite L^2_- comme espace vectoriel réel et munissons-le de la structure complexe donnée par l'opérateur R . Nous obtenons finalement un nouvel espace de Hilbert complexe et le groupe $\text{Diff}^{(2)}$ s'injecte dans le groupe OU de cet espace.

Nous pouvons maintenant restreindre la représentation spinorielle de OU à $\text{Diff}^{(2)}$ et obtenir finalement une représentation unitaire projective du groupe Diff .

4.3. Exemple : représentation de plus haut poids du groupe des lacets. Considérons maintenant le groupe $C^\infty(S^1, O(n, \mathbb{C}))$, formé des fonctions différentiables sur le cercle à valeurs dans le groupe $O(n, \mathbb{C})$. Il est facile de le réaliser comme groupe de fonctions $\gamma : S^1 \rightarrow O(n, \mathbb{C})$, vérifiant

$$\gamma(\varphi + \pi) = \gamma(\varphi).$$

Considérons ensuite l'espace vectoriel formé des fonctions $F : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^n$, vérifiant la condition :

$$F(\varphi + \pi) = F(\varphi),$$

avec $F := (f_1, \dots, f_n)$ un vecteur dont les composantes sont des fonctions. Définissons sur cet espace la forme hermitienne L^2 bien connue

$$\langle F, G \rangle = \sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) g_j(\bar{\varphi}) d\varphi.$$

Notons par H l'espace de Hilbert ainsi obtenu. Définissons ensuite sur H une forme bilinéaire suivant la formule :

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) g_j(\varphi) d\varphi.$$

Considérons enfin le sous-espace H_+ , formé des fonctions qui admettent un prolongement holomorphe au disque $|z| < 1$ et son supplémentaire orthogonal H_- . Nous avons ainsi obtenu toutes les structures décrites dans le paragraphe 3.

4.3.20. Théorème. *Le groupe $C^\infty(S^1, O(n, \mathbb{C}))$ s'injecte dans le groupe OGL de l'espace H .*

Nous pouvons maintenant restreindre la représentation spinorielle au groupe des lacets. Pour une bibliographie sur le sujet, voir [38], [96].

4.4. L'objectif de l'analyse harmonique en dimension finie : les paires duales de Howe.

4.4.21. Observation. *Il existe une application naturelle*

$$Sp(2k, \mathbb{R}) \times O(p, q) \rightarrow Sp(2k(p+q), \mathbb{R}).$$

Rappelons ici que $Sp(2k, \mathbb{R})$ est le groupe des transformations linéaires de l'espace \mathbb{R}^{2k} , laissant invariante une forme bilinéaire antisymétrique. Nous désignons ensuite par $\mathbb{R}^{p,q}$ l'espace pseudo-euclidien de signature (p, q) , et par $O(p, q)$ le groupe des opérateurs qui laissent cette forme invariante. Le produit tensoriel $\mathbb{R}^{2k} \otimes \mathbb{R}^{p,q}$ est muni d'une forme bilinéaire antisymétrique. Nous allons énoncer de façon quelque peu informelle le théorème suivant sur les paires de Howe.

4.4.22. Théorème. *Restreignons la représentation de Weil de $Sp(2k(p+q), \mathbb{R})$ au sous-groupe $Sp(2k, \mathbb{R}) \times O(p, q)$; le spectre de la représentation obtenue se trouve être de multiplicité un, et de plus si les représentations $\rho_1 \otimes \pi_1$ et $\rho_2 \otimes \pi_2$ sont dans le spectre, alors ou bien elles coïncident, ou bien $\rho_1 \neq \rho_2$, $\pi_1 \neq \pi_2$.*

En particulier les spectres contiennent les représentations de $Sp(2k, \mathbb{R})$ et $O(p, q)$, qu'il est très pénible de voir par n'importe quel autre moyen.

Pour une liste de références, voir [59], [72], [5].

4.5. Représentation spinorielle “super-hybride” et représentation de Weil. En ce qui concerne la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(2p|2q)$ on le trouverait dans les œuvres posthumes de Berezin dans [20], et au niveau du groupe $OSp(2p|2q)$ la construction se trouve dans [98]. Nous décrivons un exemple de cette construction : prenons une fonction dépendant de variables bosoniques z_1, \dots, z_p , de variables fermioniques ξ_1, \dots, ξ_q et d'éléments d'une algèbre supercommutative \mathcal{A} . On peut décrire la représentation du supergroupe $OSp(2p|2q)$ par des opérateurs intégraux du type

$$\mathfrak{B}f(z, \xi) = \int \int \exp \left\{ (z \quad \bar{u} \quad \xi \quad \bar{\eta}) S \begin{pmatrix} z^t \\ \bar{u}^t \\ \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix} \right\} f(u, \eta) e^{-z\bar{z} - \xi\bar{\xi}} du d\bar{u} d\eta d\bar{\eta},$$

où S est une matrice composée d'éléments de l'algèbre \mathcal{A} ; il est à peu près évident de voir que ces opérateurs sont bien dans le groupe $OSp(2p|2q)$.

4.6. Passage à la globalisation. Pour tous ces trois cas, représentation de Weil, représentation spinorielle et superspineurs, il est naturel de considérer le semigroupe de tous les opérateurs gaussiens bornés. Les structures algébriques correspondantes sont décrites dans [96], [98]. Parmi elles, on voit arriver par exemple la théorie des champs conformes.

Références

NB. *Il n'est pas toujours simple de trouver à l'heure actuelle des articles ou des livres anciens (surtout russes), c'est pourquoi j'ai essayé de lister les rééditions. la traduction anglaise “automatique”, depuis le milieu des années '60, des articles publiés dans Uspekhi, Sbornik, Izvestiya, Functional Analysis, Doklady, Zametki, les séminaires de l'Institut Steklov... ne sont pas référencés. Certains des travaux mentionnés dans cette bibliographie n'ont pas été publiés, pour diverses raisons.*

- [1] Arnol'd V.I. *Les mathématiques vont-elles survivre?* Gaz. Math. No. 65 (1995), 3–10.

- [2] Arnol'd V.I. *The anti-science revolution and mathematics*. Vestnik Ross. Akad. Nauk 69 no. 6 (1999), 553–558. <http://www.mccme.ru/edu/index.php?ikey=articles>
- [3] Arnol'd V.I. *Sur la courbure de Riemann des groupes de difféomorphismes*, C.R.A.S. 260(22) (1965), 5668–5671.
- [4] Arnol'd V.I. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications l'hydrodynamique des fluides parfaits*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16 (1) (1966), 319–361.
- [5] Adams J.D. *Discrete spectrum of reductive dual pair $(O(p, q), Sp(2m))$* , Inv. Math. 74 (1983), 449–475.
- [6] Araki H. *Factorizable representations of current algebra*. Publ. RIMS A5 (1970), 361–422.
- [7] Bargmann V. *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*. Ann. of Math. (2) 48 (1947), 568–640.
- [8] Bargmann V. *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform*. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 187–214.
- [9] Berezin F.A. *Laplace operators on semisimple Lie groups*. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 107 (1956), 9–12.
- [10] Berezin F.A. *Representation of complex semisimple Lie groups in Banach space*. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 110 (1956), 897–900.
- [11] Berezin F.A. *Laplace operators on semi-simple Lie groups*. Trudy Moskov. Math. Obchtch. 6 (1957), 371–463.
- [12] Berezin F.A. *The Laplacian operators on semisimple Lie groups and on some symmetric spaces*. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 16, (1960), 364–369.
- [13] Berezin F.A. *Letter to the editor*. Trudy Moskov. Mat. Obchtch. 12 (1963), 453–466.
- [14] Berezin F.A. *Canonical transformations in the second quantization representation*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 150 (1963) 959–962.
- [15] Berezin F.A. *Operators in the representation of secondary quantization*. (en russe) Nauk SSSR 154 1063–1065 ; trad. Soviet Physics Dokl. 9 (1964), 142–144.
- [16] Berezin F.A. Метод вторичного квантования. Éd. Nauka, Moscou 1965, 235 pp. Éd. anglaise : *The method of second quantization* Academic Press, 1966. Deuxième édition russe complétée⁵³, éditeur M.K.Polivanov, Éd. Nauka, Moscou 1986.

⁵³contient les articles de Berezin sur les symboles d'opérateurs et la conception générale de la quantification : *Non-Wiener path integrals* (Teoret. Mat. Fiz., 1971), *Wick and anti-Wick symbols of operators* (Math. Sbornik, 1971), *Covariant and contravariant symbols of operators* (Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 1972), *Convex functions of operators* (Math. Sbornik, 1972), *General concept of quantization*, (Comm. Math. Phys., 1975), *Models of Gross-Neveu type are quantization of a classical mechanics with nonlinear phase space* (Comm. Math. Phys., 1978).

- [17] Berezin F.A. *Automorphisms of a Grassmann algebra*. Mat. Zametki 1 (1967), 269–276.
- [18] Berezin, F.A. *Quantization in complex symmetric spaces*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 39 no. 2 (1975), 363–402.
- [19] Berezin F.A. *The connection between covariant and contravariant symbols of operators on classical complex symmetric spaces*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 241 no. 1 (1978), 15–17.
- [20] Berezin F.A. *Introduction to superanalysis*, D. Leites éd, préfacé par A. A. Kirillov (éd. de la version russe), appendice de V. I. Ogievetsky, traduit par J. Niderle et R. Kotecky, D. Reidel Publishing Co., Dordericht, 1987.
- [21] Berezin F.A. ; Gel'fand I.M. *Some remarks on the theory of spherical functions on symmetric Riemannian manifolds*. Trudy Moskov. Mat. Obchtch. 5 (1956), 311–351. Amer. Math. Soc. Transl., 21(1962), 193–238. réédité in Gel'fand I.M. *Collected papers*, v.2, Springer, 1988.
- [22] Berezin F.A. ; Kac G.I. *Lie groups with commuting and anticommuting parameters*. Mat. Sb. (N.S.) 82 (124) (1970), 343–359.
- [23] Berezin F.A. ; Karpelevitch F.I. *Zonal spherical functions and Laplace operators on some symmetric spaces*. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 118 (1958), 9–12.
- [24] Berezin F.A. ; Leites D.A. *Supermanifolds*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 224 (1975), no. 3, 505–508.
- [25] Berezin F.A., Minlos R.A., Faddeev L.D. *Quelques questions mathématiques à propos de systèmes de mécanique quantique à grand nombre de degrés de liberté(en russe)*. Actes du 4-ième congrès mathématique de toute l'union (1961), Tome 2, Moscou (1964), 532–541.
- [26] Bergman S. *Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1947.
- [27] Bogoliubov N.N. ; Shirkov D.V. *Introduction à la théorie quantique des champs*. Dunod, 1960.
- [28] Borodin A. ; Olshanskii G. *Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes*. Ann. of Math. (2) 161 no. 3 (2005), 1319–1422.
- [29] Bott R. *On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms*, Enseign. Math. (2) 23 (1977), 209–220. réédité in Raoul Bott, *Collected papers*, v.3, Birkhäuser, 1995.
- [30] Cartan E. *Les groupes de transformation continués, infinis, simples*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 26 (1909), 93–161.
- [31] Cartan E. *Leçons sur la théorie des spineurs*, Hermann, Paris, 1938.
- [32] Cherednik I. *Double affine Hecke algebras*. Cambridge University Press, 2005.
- [33] Chevalley C.C. *The algebraic theory of spinors*. Columbia University Press, New York, 1954. réédité in Claude Chevalley, *Collected works*, v.2.

- [34] Drinfeld V. *Quantum groups*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [35] Enright Th.; Howe R.; Wallach N. *A classification of unitary highest weight modules. Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982)*, 97–143, 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [36] Fock V.A. *Konfigurationsraum und Zweite Quantelung*. Z. Physics, 75 (1932), 622–47.
- [37] Fock V.A. *Zur Quantenelectrodynamik*. Soviet Phys., 6 (1934).
- [38] Frenkel I.B. *Two constructions of affine Lie algebra representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory*. J. Funct. Anal. 44 no.3 (1981), 259–327.
- [39] Friedrichs K.O. *Mathematical aspects of the quantum theory of fields*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1953.
- [40] Fuks D.B. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли [*Cohomologie des algèbres de Lie de dimension infinie.*] Éd. Nauka, Moscou 1984. 272 pp.
- [41] Gel'fand I.M. *Spherical functions in symmetric Riemann spaces*. Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 70 (1950), 5–8.
- [42] Gel'fand, I.M.; Fuks, D.B. *Cohomologies of the Lie algebra of vector fields on the circle*. Funct. Anal. Appl. 2 no. 4 (1968), 92–93.
- [43] Gel'fand I.M.; Kazhdan D.A. *Certain questions of differential geometry and the computation of the cohomologies of the Lie algebras of vector fields*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 200 (1971) 269–272.
- [44] Gel'fand I.M.; Naïmark M.A. Унитарные представления группы Лоренца [*Représentations unitaires du groupe de Lorentz.*] J. Phys. Acad. Sci USSR, 10 (1946), 93–94.
- [45] Gel'fand I.M.; Naïmark M.A. Унитарные представления классических групп [*Représentations unitaires des groupes classiques.*] Trudy Mat. Inst. Steklov., vol. 36, Izdat. Nauk SSSR, Moscou-Leningrad, 1950. 288 pp.
- [46] Golfand I.A.; Likhtman E.P. *Extension de l'algèbre des générateurs du groupe de Poincaré et violation de la P-invariance(en russe)*. Pis'ma Zh. Eksper. Teoret. Fiz. 13 (1971), 452. cf. Shifman M.(ed.) *The many faces of the superworld. Yuri Golfand memorial volume*. World Scientific.
- [47] Gontcharova L.V. *Cohomology of Lie algebras of formal vector fields on the line*. Funct. Anal. Appl. 7 no. 2 (1973), 6–14.
- [48] Graev M.I. *Unitary representations of real simple Lie groups*. Trudy Moskov. Mat. Obchtch. 7 (1958), 335–389.

- [49] Guichardet A. ; Wigner D. *Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 11 no. 2 (1978), 277–292.
- [50] Gutkin E.A. *Overfilled systems of subspaces and symbols of operators.* Funct. Anal. Appl. 9 no. 3 (1975), 89–90.
- [51] Gutkin E.A. *Coefficients of Clebsch-Gordan for holomorphic discrete series.* Lett.Math.Phys. 3 (1979), 185–192.
- [52] Khalatnikov I.M. *Représentations de la fonction de Green en électrodynamique quantique avec intégrale de chemins.* (en russe), Zh. éksper. Teoret. Fiz. 28 (1954), 635-638.
- [53] Harish-Chandra *Representations of semi-simple Lie groups, II,* Transactions of Amer. Math. Soc. 76 (1953), 26–65.
- [54] Harish-Chandra *Representations of semisimple Lie groups IV,* Amer. J. Math. 77 (1955), 743–777 .
- [55] Harish-Chandra *The characters of semisimple Lie groups,* Trans. Amer.Math. Soc. 83 (1956), 98–163.
- [56] Helmke U. ; Rosenthal J. *Eigenvalue inequalities and Schubert calculus,* Math. Nachr. 171 (1995), 207–225.
- [57] Hoogenboom B. *Spherical functions and invariant differential operators on complex Grassmann manifolds.* Ark. Math. 20 (1982), 69–58.
- [58] Horn A. *Eigenvalues of sums of Hermitian matrices.* Pacif. J. Math. 12 (1962), 225–241.
- [59] Howe R. *Transcending classical invariant theory.* J. Amer. Math. Soc. 2 no. 3 (1989), 535–552.
- [60] Howe R. *The oscillator semigroup.* The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987), 61–132, Proc. Sympos. Pure Math., 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [61] Ismagilov R.S. *Elementary spherical functions on the $SL(2, P)$ -group over a field P , which is not locally compact, with respect to the subgroup of matrices with integral elements.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 31 (1967) 361–390.
- [62] Ismagilov R.S. *Unitary representations of the group $C_0^\infty(X, G)$, $G = SU_2$.* Mat. Sb. (N.S.) 100 (142) no. 1 (1976), 117–131.
- [63] Ismagilov R.S. *Représentations du groupe des difféomorphismes du cercle.* Non publié, 1980.
- [64] Ismagilov R.S. *Representations of infinite-dimensional groups.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [65] Kac V.G. *Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 32 (1968) 1323–1367.

- [66] Kac V.G. *Infinite-dimensional Lie algebras. An introduction*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1983.
- [67] Kanevski Z.M. *Enigmes et tragédies de l'Arctique (en russe)*. Znanie, 1991. ⁵⁴
- [68] Kantor I.L. *Infinite dimensional simple graded Lie algebras*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 179 (1968), 534–537.
- [69] Kantor I.L. *Graded Lie algebras*. Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. 15 (1970), 227–266.
- [70] Karasev M.; Kozlov M. *Quantum and semiclassical representations over Lagrangian submanifolds in $\mathfrak{su}(2)^*$, $\mathfrak{so}(4)^*$, and $\mathfrak{su}(1,1)^*$* J.Math.Phys. 34, 11 (1993) 4986–5006.
- [71] Karpel, E. *The last journey. Remembering F.A. Berezin*. in Shifman, M. (ed.), *Felix Berezin, The Life and Death of the Mastermind of Supermathematics*. 2007. en français dans cet ouvrage.
- [72] Kashiwara M.; Vergne M. *On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials*. Invent. Math. 44 no. 1 (1978), 1–47.
- [73] Kirillov A. *Eléments de la théorie des représentations*. Traduit du russe par A. Sosinsky, Éditions Mir, Moskva, 1974. 347 pp.
- [74] Klauder I.M.; Sudarashan E.C.G. *Fundamentals of quantum optics*. W. A. Benjamin, 1968.
- [75] Klyachko A.A. *Stable bundles, representation theory and hermitian operators*, Preprint, Mittag-Leffler Institute, 1996
- [76] Klyachko A.A. *Vector bundles, linear representations, and spectral problems*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol.2 (Beijing), 599-613. Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [77] Kostrikin A.I.; Shafarevich I.R. *Graded Lie algebras of finite characteristic*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 33 (1969), 251–322.
- [78] Krein M.G. *Hermitian positive kernels on homogeneous spaces*. I : Ukrain. Mat. JI 1 no. 4 (1949), 64–98 ; II : Ukrain. Mat. JI 2 no. 1 (1950), 10-59.
- [79] Leites D.A. *Spectra of graded-commutative rings*. Uspehi Mat. Nauk 29 no. 3 (177) (1974), 209–210.
- [80] Lidskii V.B. *On the characteristic numbers of the sum and product of symmetric matrices*. Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 75, (1950). 769–772.
- [81] Lipschitz R. *Correspondence*. Ann. Math. (2) 69 (1959), 247-251.

⁵⁴La question est ainsi débattue dans beaucoup d'ouvrages, en particulier ceux de A.I.Arikainen *Le centre de la prétention-Le pôle Nord* . Éd. Nauka, Moscou 1988, et R. M. Bryce Cook and Peary. *The polar controversy, Resolved*, 1996, dans lesquels on trouve les éléments eux mêmes de la controverse.

- [82] Lobatchevskii N.I. Полное собрание сочинений. Том 1-5 [*Œuvres complètes.*] Gosudarstvennoe Izdatelstvo Tehniko-Teoreticheskoe Literatury, Moscou-Leningrad, 1946-51. 472 pp.
- [83] Lorenz K. *Das sogenannte Böse*. Wien : Borotha-Schoeler (1963). ⁵⁵
- [84] Losev A. *From Berezin integral to Batalin-Vilkovisky formalism : A mathematical physicist's point of view*. in Shifman, M. (ed.), *Felix Berezin The Life and Death of the Mastermind of Supermathematics*. 2007.
- [85] Losik M.V. *The cohomology of infinite-dimensional Lie algebras of vector fields*. *Funct. Anal. Appl.* 4 no. 2 (1970), 43–53.
- [86] Ludlam H. *Captain Scott. The full story*. W.Foulsham : New York, Toronto, Cape Town, Sydney, 1965.
- [87] Malyshev V.A. ; Minlos R.A. *Linear infinite-particle operators*. Translated from the 1994 Russian original by Alan Mason. *Translations of Mathematical Monographs*, 143. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995. viii+298 pp.
- [88] Marinov M. *Revealing the path to the Superworld*, in Shifman, M. (ed.) *The many faces of the superworld. Yuri Golfand memorial volume*, World Scientific.
- [89] Maslov V.P. *Remembering Alik Berezin* in Shifman, M. (ed.), *Felix Berezin The Life and Death of the Mastermind of Supermathematics*. 149-150, 2007.
- [90] Menger K. *Einige Überdeckungssätze der Punctmengenlehre*, Akademie de Wissenschaften zu Wien, Sitzungsberichte 133 (1924), 421–444 ; réédité dans : Karl Menger *Selecta Mathematica*, v.1. Springer, 2003
- [91] Minlos R.A. *Felix Alexandrovich Berezin (a brief scientific biography)*. *Lett. Math. Phys.* 74, No. 1, 5-19 (2005), traduction française par C. Roger in *Gaz. Math.* 110 (2006), 30–45.
- [92] Molin F.E.(ou Molien Th.) ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ [*Systèmes de nombres.*] traduit de l'allemand par L.A. Bokut', N.N. Krulikovskiy and I.V. L'vov. Edited by A.I. Kostrikin. avec des appendices de Krulikovskiy, Bokut' et L'vov. Nauka Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1985. 126 pp. ⁵⁶
- [93] Moltchanov V.F. *An analog of Plancherel's formula for hyperboloids*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 183 (1968), 288–291.
- [94] Neretin Yu.A. *Complementary series of representations of a group of diffeomorphisms of the circle*. *Uspekhi Mat. Nauk* 37 (1982), no. 2(224), 213–214.

⁵⁵ J'ai déjà compilé une bibliographie dans laquelle se trouve le travail de K. Lorenz. *The Natural Science of Human Species. An introduction to comparative behavior Research* qui m'est inaccessible. Il est possible que Konrad Lorenz ait fait beaucoup de ses découvertes en Russie (comme par exemple Jean-Victor Poncelet dans les années 1812–1814). Cette hypothèse s'applique à mon avis à d'autres travaux, largement connus, de Lorenz.

⁵⁶ Il y a aussi le livre de V. F. Kapunov *Fiodor Eduardovich Molin.* , Éd. Nauka, Moscou 1986, qui m'est inaccessible.

- [95] Neretin Yu.A. *Almost invariant structures and constructions of unitary representations of the group of diffeomorphisms of the circle*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 294 (1987), no. 1, 37–41. <http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/almost.pdf>
- [96] Neretin Yu.A. *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*. Oxford University Press, 1996
- [97] Neretin Yu.A. *Plancherel formula for Berezin deformation of L^2 on Riemannian symmetric space*. J. Funct. Anal. 189 No.2 (2002), 336–408. <http://arxiv.org/abs/math/9911020>
- [98] Neretin Yu.A. *Gauss–Berezin integral operators, spinors over supergroup $OSp(2p|2q)$, and Lagrangian super-Grassmannians*, Preprint ESI-1986 (2007).
- [99] Neretin Yu.A.; Olshanskii G.I. *Boundary values of holomorphic functions, singular unitary representations of the groups $O(p, q)$ and their limits as $q \rightarrow \infty$* . Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 223 (1995), 9–91. <http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/NO.ps>
- [100] Novikov S.P. *The second half of the 20th century and its conclusion : crisis in the physics and mathematics community in Russia and in the West*. Buchstaber, V. M. (ed.) et al., Geometry, topology, and mathematical physics. Providence, 1-24 (2004).
- [101] Ogievetskii V.I.; Fainberg V.Ya.; Fradkin E.S.; Markov M.A.; Novikov S.P.; Manin Yu.I. *Feliks Aleksandrovich Berezin*. Soviet Phys. Uspekhi 134 (1981), no. 2, 357–358. <http://www.ufn.ru/ufn81/ufn816/Russian/r816g.pdf>
- [102] Onsager L. *Crystal statistics. I. One-dimensional model with an order-disorder transitions*. Phys. Rev. 65 (1944), 117–149.
- [103] Olshanetsky M.A.; Perelomov A.M. *Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras*. Inv. Math., 37 (1976), 93–108.
- [104] Olshanskii G.I. *Description of unitary representations with highest weight for the groups $U(p, q) \sim$* . Funct. Anal. Appl. 14 no. 3 (1980), 32–44.
- [105] Olshanskii G.I. *Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 269 no. 1 (1983), 33–36.
- [106] Olshanskii G.I. *Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe*. in D. P. Zhelobenko, A. M. Vershik (eds) *Representation of Lie groups and related topics*, 269–463, Gordon and Breach, New York, 1990.
- [107] Olshanskii G.I. *The Weyl representation and the norms of Gaussian operators*. Funct. Anal. Appl. 28 no. 1 (1994), 51–67.
- [108] Perelomov A. *Generalized coherent states and their applications*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1986. xii+320 pp.
- [109] Pressley A.; Segal G. *Loop groups*. Oxford University Press, New York, 1986.

- [110] Saint-Exupéry *Terre des hommes*. 1939. trad. russe
<http://lib.ru/koi/Ekzupery/planeta.txt>
- [111] Schoenberg I.J. *On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their embedding to Hilbert space*. Ann. Math. 38 (1937), 787–793.
- [112] Schoenberg I.J. *Metric spaces and positive definite functions*. Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 522–536.
- [113] Schwarz, A. *Supermathématique et physique (en russe)*. in *Souvenirs de Felix Alexandrovitch Berezin, fondateur des supermathématiques*, Éd. russe, 2008.
- [114] Segal Gr. *Unitary representations of some infinite-dimensional groups*. Comm. Math. Phys. 80 no. 3 (1981), 301–342.
- [115] Segal I.E. *Tensor algebras over Hilbert spaces*. I. Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 106–134.
- [116] Segal I.E. *Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom*. I. Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 31 no. 12 (1959), 39 pp.
- [117] Shale D. *Linear symmetries of free boson fields*. Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962) 149–167.
- [118] Shale D.; Stinespring W. F. *Spinor representations of infinite orthogonal groups*. J. Math. Mech. 14 (1965), 315–322.
- [119] Shifman M. *Introduction*, in Shifman M.(ed.) *The many faces of the superworld. Yuri Gelfand memorial volume*. World Scientific. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9909016>
- [120] Shifman, M. (ed.), *Felix Berezin. The Life and Death of the Mastermind of Supermathematics*. World Scientific, 2007.
- [121] Shilov, G.E. ; Fan Dyk Tin' Интеграл, мера и производная на линейных пространствах [*Intégrale, mesure et dérivation dans les espaces vectoriels*]. Éd. Nauka Moscou 1967, 192 pp.
- [122] Thoma E. *Der Unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der unendlichen symmetrischen Gruppe*. Math. Z. 85, 40–61.
- [123] Tvardovski, A.T. Тёркин на том свете [*Tiorkin dans l'autre monde*] Moscou, 1963.
<http://lib.ru/koi/POEZIQ/TWARDOWSKIJ/terkin2.txt>
- [124] Unterberger A. ; Upmeyer H. *The Berezin transform and invariant differential operators*. Comm.Math.Phys. 164 (1994), 563–597.
- [125] Vergne M. ; Rossi H. *Analytic continuations of holomorphic discrete series of semisimple Lie groups*. Acta Math. 136, N1-2 (1976), 1-59.
- [126] Vershik A. M. ; Gel'fand I. M. ; Graev M. I. *Representations of the group $SL(2, R)$, where R is a ring of functions*. Uspehi Mat. Nauk 28 no. 5(173) (1973), 83–128. réédité in Gelfand I.M. *Collected papers*, v.2, Springer, 1988.

- [127] Vershik A. M.; Gel'fand I. M.; Graev M. I. *Representations of the group of diffeomorphisms*. Uspehi Mat. Nauk 30 no. 6(186) (1975), 1–50. réédité in Gelfand I.M. *Collected papers*, v.2, Springer, 1988.
- [128] Vershik A. M.; Kerov S. V. *Asymptotic theory of the characters of a symmetric group*. Funct. Anal. Appl. 15 no. 4 (1981), 15–27, 96.
- [129] Vershik A. M.; Kerov S. V. *Characters and factor-representations of the infinite unitary group*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 267 no. 2 (1982), 272–276.
- [130] Virasoro M. A. *Subsidiary conditions and ghosts in dual-resonance models*. Phys. Rev. D1 (1970), 2933–2936.
- [131] Voiculescu D. *Représentations factorielles de type II_2* . J. Math. Pure Appl. 55 (1976), 1–20.
- [132] Volkov D. V.; Akulov V. P. *Is the neutrino a Goldstone particle ?* Phys. Lett. - V. B46 (1973), 109–112.
- [133] Volkov D. V.; Soroka V. A. *Effet de Higgs pour les particules de Goldstone de spin 1/2 (en russe)*. Pis'ma Zh. éksper. Teoret. Fiz. 18 (1973), 529–532.
- [134] Voltaire F. *Micromegas*. 1752. <http://lib.ru/INOOLD/WOLTER/mikromegas.txt>
- [135] Vissotsky V. *Œuvres complètes en deux volumes*. Moscou, éditions artistiques, 1991.
- [136] Wallach N. R., *Analytic continuation of discrete series*. Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 19–37.
- [137] Weil A. *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*. Acta Math. 111 (1964) 143–211. réédité in André Weil *Œuvres scientifiques. Collected papers*. v.3, Springer, 1979.
- [138] Wielandt H. *On extremum property of sums of eigenvalues*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 106–110. réédité in Helmut Wielandt, *Mathematische werke. Mathematical works*. v.2, Walter de Gruyter, 1996.
- [139] Wess J.; Zumino B. *A Lagrangian model invariant under supergauge transformations*. Phys. Lett. B 49B, 52 (1974).
- [140] Zhelobenko D. P. Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли [*Analuse harmonique sur les groupes de Lie semi-simples complexes*.] (Современные Проблемы Математики Current P^{bs} Maths,) Éd. Nauka, Moscou 1974.
- [141] Zhelobenko D. P.; Naïmark M. A. *Description of completely irreducible representations of a semi-simple complex Lie group*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 171 (1966), 25–28.
- [142] Zinoviev A. *Les Hauteurs béantes*. Robert Laffont, 1990.

University of Vienna,
 neretin(at)mccme.ru,
 URL : wwwth.itep.ru/~neretin