



**HAL**  
open science

# Minorations simultanées de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques

Éric Gaudron

► **To cite this version:**

Éric Gaudron. Minorations simultanées de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques. 2010. hal-00474913v2

**HAL Id: hal-00474913**

**<https://hal.science/hal-00474913v2>**

Preprint submitted on 31 Jan 2011 (v2), last revised 3 Jul 2019 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# MINORATIONS SIMULTANÉES DE FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

PAR ÉRIC GAUDRON

---

RÉSUMÉ. — Soit  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ ,  $k$  un corps de nombres et  $v$  une place de  $k$ . Soit  $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{C}_v$  tels que  $e^{u_j} \in k$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $(\beta_{i,j})$ ,  $1 \leq i \leq t$ ,  $1 \leq j \leq n$ , une matrice  $t \times n$  à coefficients dans  $k$ . Soit  $(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0}) \in k^t$ . Posons  $\Lambda_i := \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} u_j \in \mathbf{C}_v$  pour tout  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Les résultats que nous présentons ici sont des minoration de  $\max\{|\Lambda_i|_v; 1 \leq i \leq t\}$ , explicites en tous les paramètres, lorsque ce maximum n'est pas nul. Ces minoration englobent de nombreux résultats antérieurs. La démonstration repose sur la méthode de Baker-Philippon-Waldschmidt, la réduction d'Hirata-Kohno, le procédé de changement de variable de Chudnovsky, repensés avec les outils modernes de la théorie des pentes adéliques. En particulier un nouveau lemme de Siegel approché est énoncé.

ABSTRACT (*Simultaneous lower bounds for linear forms in logarithms of algebraic numbers*)

This work falls within the theory of linear forms in logarithms over a commutative *linear* group defined over a number field. We give lower bounds for simultaneous linear forms in logarithms of algebraic numbers, treating both the archimedean and  $p$ -adic cases. The proof includes Baker's method, Hirata's reduction, Chudnovsky's process of variable change. The novelty is that we integrated into the proof the modern tools of adelic slope theory, using also a new small values Siegel's lemma.

## Table des matières

1. Introduction.....	1
2. Énoncé principal.....	3
3. Éléments de théorie des pentes adéliques.....	4
4. Lemmes de Siegel approchés.....	6
5. Démonstration du théorème principal.....	9
Bibliographie.....	28

## 1. Introduction

Ce texte présente une minoration simultanée de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, valide pour une place quelconque  $v_0$  du corps de nombres ambiant. En d'autres termes il s'agit de minorer  $\max\{|\Lambda_i|_{v_0}; 1 \leq i \leq t\}$  où  $\Lambda_i$  est de la forme  $\beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} u_j$  avec  $\beta_{i,j}$  et  $e^{u_j}$  dans un corps de nombres  $k \hookrightarrow \mathbf{C}_{v_0}$  et  $|\cdot|_{v_0}$  est une valeur absolue  $v_0$ -adique sur le complété  $\mathbf{C}_{v_0}$  d'une clôture algébrique de  $k_{v_0}$ .

---

*Dimanche 30 janvier 2011*

ÉRIC GAUDRON, Université Grenoble I, Institut Fourier., UMR 5582, BP 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France • *E-mail* : [Eric.Gaudron@ujf-grenoble.fr](mailto:Eric.Gaudron@ujf-grenoble.fr) • *Url* : <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~gaudron>

Classification mathématique par sujets (2000). — 11J86 (11J61,14G40).

Mots clefs. — Formes linéaires de logarithmes, approximation simultanée, méthode de Baker, réduction d'Hirata-Kohno, changement de variable de Chudnovsky, théorie des pentes adéliques, fibrés adéliques hermitiens, lemmes de Siegel approchés.

Depuis les travaux de Baker entrepris au milieu des années soixante, de nombreux articles ont été consacrés à l'étude de cas particuliers de ce problème. En très grande majorité les auteurs s'intéressaient à *une* seule forme linéaire ( $t = 1$ ) et, souvent, seulement au cas d'une place  $v_0$  archimédienne. Si la place  $v_0$  était ultramétrique alors ils supposaient  $\beta_{i,j} \in \mathbf{Q}$ . Plus précisément, dès que  $t \geq 2$ , et si l'on écarte les travaux de Philippon & Waldschmidt [PW2] et d'Hirata-Kohno [Hi2] qui traitent le cas très général d'un groupe algébrique commutatif quelconque, seuls Ramachandra [Ra] et Loxton [Lo] ont étudié la question qui nous intéresse ici (cas archimédien). Lorsque  $v_0$  est ultramétrique, ne semble exister que l'étude de Dong [Do], qui traite un cas particulier de la question ( $\beta_{i,j} \in \mathbf{Z}$ ,  $\beta_{i,0} = 0$ ). Ainsi, en dépit de la richesse de la littérature sur le thème des formes linéaires de logarithmes<sup>(\*)</sup>, l'on ne trouve guère de résultats généraux qui prennent en compte plusieurs formes linéaires et aucun qui ne considère à la fois le cas archimédien et le cas  $p$ -adique. Un des objectifs de cet article est de combler cette lacune, tout en donnant une minoration qui soit en phase avec celles présentées dans [Wa3].

Si le résultat le plus général que nous avons ne sera donné qu'au paragraphe suivant, nous en proposons ici un cas particulier. Étant donné un nombre algébrique  $\alpha$ , on désigne par  $h(\alpha)$  la hauteur de Weil logarithmique absolue de  $\alpha$ . Si  $x$  est un nombre réel alors  $[x]$  est la partie entière de  $x$ .

**THÉORÈME 1.1.** — *Soit  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ . Soit  $k$  un sous-corps de nombres de  $\mathbf{C}$ , de degré  $D$  sur  $\mathbf{Q}$ . Soit  $t \in \{1, \dots, n\}$  et*

$$(\beta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{t,n}(k)$$

*une matrice de rang maximal  $t$ . Soit  $(\beta_{i,0})_{1 \leq i \leq t} \in k^t$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $u_j \in \mathbf{C}$  tel que  $\alpha_j := e^{u_j} \in k$ . Soit  $b, a, \epsilon$  des nombres réels positifs tels que  $\epsilon \geq e$ ,*

$$\log a \geq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ h(\alpha_j), \frac{\epsilon |u_j|}{D} \right\}, \quad \log b \geq D \max_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 0 \leq j \leq n}} \{1, h(\beta_{i,j})\}.$$

*Soit  $\mathfrak{a}$  l'entier défini par*

$$\mathfrak{a} := \left\lceil \frac{D}{\log \epsilon} \log \left( e + \frac{D}{\log \epsilon} + \log a \right) \right\rceil + 1.$$

*Si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une famille libre sur  $\mathbf{Q}$  alors les formes linéaires de logarithmes*

$$\Lambda_i := \beta_{i,0} + \beta_{i,1}u_1 + \dots + \beta_{i,n}u_n \quad (1 \leq i \leq t)$$

*ne sont pas toutes nulles et elles vérifient la minoration*

$$(1) \quad \log \max_{1 \leq i \leq t} \{|\Lambda_i|\} \geq -(6n)^{200n^2} \mathfrak{a}^{1/t} (\log b + \mathfrak{a} \log \epsilon) \left( 1 + \frac{D \log a}{\log \epsilon} \right)^{n/t}.$$

Un énoncé similaire sera aussi démontré dans le cas ultramétrique lorsque  $k$  est un sous-corps de  $\mathbf{C}_{v_0}$ . Dans le minorant de (1), on notera la dépendance linéaire (et donc optimale) en  $\log b$  (hauteur des formes linéaires) et la dépendance usuelle  $(\log a)^{n/t} (\log \log a)^{1+1/t}$  en  $\log a$  (hauteur du point  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ). Hormis l'aspect général de cette minoration déjà évoqué ( $t, v_0$  quelconques), il n'y a plus le discriminant du corps de nombres, qui intervenait auparavant dans le cas simultané (comme dans l'article [Hi2] d'Hirata-Kohno).

Cet article de synthèse n'apporte pas d'idée originale qui améliorerait de manière significative les résultats connus pour *une* forme linéaire. En revanche, la démonstration que nous proposons est, elle, plus novatrice dans sa forme car elle combine la trame de la méthode des fonctions auxiliaires classique avec les outils de la théorie des pentes adéliques (sans « méthode des pentes » proprement dite). Il en résulte un cumul des avantages propres à ces techniques : souplesse d'utilisation et simplicité de la démarche pour l'une, conservation de l'aspect intrinsèque des données et obtention aisée des constantes numériques pour l'autre. Nous expliquerons plus en détail notre approche au § 5.1. Si nous avons pris le parti d'écrire ce texte dans le cas d'un groupe linéaire, il est cependant possible de généraliser à un groupe algébrique commutatif quelconque et même d'obtenir des constantes numériques explicites pour une variété abélienne, comme dans [Ga2], *sans hypothèse* de non-torsion du point rationnel considéré (ici  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{G}_m^n(k)$ ).

\*. Nous renvoyons le lecteur au livre très complet de Waldschmidt [Wa3] pour en saisir l'étendue.

**Remerciements.** Je remercie Daniel Bertrand et Michel Waldschmidt de leurs commentaires sur une première version de ce texte. Par ailleurs, ce texte a bénéficié du soutien de l'ANR Dio-phante, 06-JCJC-0028, piloté par Lucia Di Vizio.

## 2. Énoncé principal

Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $D = [k : \mathbf{Q}]$ . À une place ultramétrique  $v$  de  $k$  correspond un idéal premier  $\mathfrak{p}_v$  de l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_k$  et un nombre premier  $p_v$  qui engendre l'idéal  $\mathfrak{p}_v \cap \mathbf{Z}$ . Notons  $k_v$  (*resp.*  $\mathcal{O}_v$ ) le complété  $\mathfrak{p}_v$ -adique de  $k$  à la place  $v$  (*resp.* son anneau de valuation). Munissons  $k_v$  de l'unique valeur absolue  $|\cdot|_v$  qui vérifie  $|p_v|_v = p_v^{-1}$ . Cette valeur absolue s'étend de manière unique à une clôture algébrique  $\overline{k}_v$ . Soit  $\mathbf{C}_v = \mathbf{C}_p$  le complété du corps valué  $(\overline{k}_v, |\cdot|_v)$ . En une place  $v$  archimédienne, l'ensemble  $\mathbf{C}_v = \mathbf{C}$  est muni de la valeur absolue usuelle. Avec ces conventions, la formule du produit s'écrit  $\forall x \in k \setminus \{0\}, \prod_v |x|_v^{n_v} = 1$  où  $v$  parcourt l'ensemble des places de  $k$  et  $n_v := [k_v : \mathbf{Q}_v]$  est le degré local 1, 2 ou  $[k_v : \mathbf{Q}_{p_v}]$  selon le caractère réel, complexe ou ultramétrique de la place  $v$ . La *hauteur de Weil* (logarithmique absolue) d'un élément  $x$  de  $k$  est la somme (finie)

$$h(x) := \frac{1}{D} \sum_v n_v \log \max \{1, |x|_v\}.$$

Soit  $r_v := p_v^{-1/(p_v-1)}$  si  $v$  est ultramétrique et  $r_v := 1$  sinon. Désignons par  $\mathcal{T}_v$  l'ensemble des nombres complexes  $\mathbf{C}$  si  $v$  est archimédienne et le disque ouvert de  $\mathbf{C}_v$ , centré en 0 et de rayon  $r_v$ , si  $v$  est ultramétrique. L'exponentielle du groupe de Lie  $\mathbf{G}_m(\mathbf{C}_v)$  est définie sur  $\mathcal{T}_v$  par la série convergente usuelle

$$\forall z \in \mathcal{T}_v, \quad e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}.$$

Soit  $v_0$  une place de  $k$ , réelle, complexe ou  $p$ -adique. Dans la suite  $k$  sera vu comme un sous-corps du complété  $k_{v_0}$  en la place  $v_0$ , lui-même inclus dans le complété de sa clôture algébrique  $\mathbf{C}_{v_0}$ . Soit  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  et  $u_1, \dots, u_n$  des éléments de  $\mathcal{T}_{v_0}$ , d'exponentielles respectives  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Nous supposons que tous les  $\alpha_i$  appartiennent à  $k$ .

Soit  $t \in \{1, \dots, n\}$  et  $\ell_1, \dots, \ell_t : k^n \rightarrow k$  des formes linéaires que l'on écrit dans la base canonique sous la forme

$$\forall z = (z_1, \dots, z_n) \in k^n, \quad \ell_i(z) = \beta_{i,1}z_1 + \dots + \beta_{i,n}z_n.$$

Soit  $W_0$  le sous-espace vectoriel de  $k^n$  intersection des formes linéaires  $\ell_i$ ,  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Soit  $u_0 := -(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0}) \in k^t$  et  $u := (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{C}_{v_0}^n$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, t\}$ , posons  $\Lambda_i := \beta_{i,0} + \ell_i(u)$ . Soit  $\epsilon_0 := 0$  si  $v_0$  est ultramétrique et  $\epsilon_0 := 1$  sinon.

**THÉORÈME 2.1.** — *Avec les données ci-dessus, notons  $\mathbf{T}_u$  le sous-espace vectoriel de dimension minimale de  $\mathbf{Q}^n$  tel que  $u \in \mathbf{T}_u(\mathbf{C}_{v_0})$ . Considérons une partie  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $(u_i)_{i \in I}$  soit une famille libre sur  $\mathbf{Q}$  et maximale pour cette propriété. Soit  $a_1, \dots, a_n, \mathfrak{e}, \mathfrak{r}$  des nombres réels vérifiant les conditions suivantes :*

$$\mathfrak{e} \in \begin{cases} ]1, \min \{r_{v_0}^2/|u_i|_{v_0}; i \in I\} & \text{si } v_0 \text{ est ultramétrique,} \\ [e, +\infty[ & \text{si } v_0 \text{ est archimédienne,} \end{cases}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \log a_j \geq \max \left\{ h(\alpha_j), \frac{\epsilon_0 \mathfrak{e} |u_j|_{v_0}}{D} \right\}.$$

Soit  $\mathfrak{a}$  l'entier défini par la formule

$$\mathfrak{a} := \left\lceil \frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log \left( e + \frac{D}{\log \mathfrak{e}} + (1 - \epsilon_0) \log p_{v_0} + \log \prod_{j=1}^n a_j \right) \right\rceil + 1.$$

Soit  $b$  un nombre réel vérifiant

$$\log b \geq D \max_{\substack{1 \leq j \leq t \\ 0 \leq \ell \leq n}} \{1, h(\beta_{j,\ell})\}.$$

Soit  $s := \dim \mathbb{T}_u - \dim(W_0 \cap \mathbb{T}_u)$  et

$$U := \mathfrak{a}^{1/s} (\log b + \mathfrak{a} \log \mathfrak{e} + D \log \log \mathfrak{e}) \prod_{i \in I} \left( 1 + \frac{D \log a_i}{\log \mathfrak{e}} \right)^{1/s}.$$

Alors, s'il existe  $j \in \{1, \dots, t\}$  tel que  $\Lambda_j \neq 0$ , on a

$$\log \max_{1 \leq j \leq t} |\Lambda_j|_{v_0} \geq -(6n)^{203n^2} \max \{U, (1 - \epsilon_0) \log p_{v_0}\}.$$

Le théorème de Wüstholz [Wü] affirme que  $\mathbb{T}_u$  est l'espace tangent d'un sous-groupe algébrique  $G_u$  de  $\mathbf{G}_m^n$ . Le paramètre  $s$  est donc identique à celui de [DH], article dans lequel il apparaît pour la première fois. On notera au passage que  $\dim \mathbb{T}_u = \text{card } I$ . Par ailleurs, si  $v_0$  est ultramétrique, l'existence du nombre réel  $\mathfrak{e}$  implique que doit être satisfaite l'hypothèse : *pour tout  $i \in I$ , on a  $|u_i|_{v_0} < r_{v_0}^2$* . Enfin, nous verrons au § 5.2 que si  $s = 1$ , la quantité  $\log b + \mathfrak{a} \log \mathfrak{e} + D \log \log \mathfrak{e}$  peut être remplacée par  $\log(b\mathfrak{e}) + D \log \mathfrak{a} + D \log \log \mathfrak{e}$ .

La différence avec le résultat de Loxton [Lo] est assez modeste. Elle réside surtout dans la dépendance en le degré  $D$  (ici de l'ordre de  $D^{1+\epsilon+(n+1)/s}$  au lieu de  $D^{200n}$ ) et dans le caractère plus général du théorème 2.1 (place  $v_0$  quelconque, pas d'hypothèse d'indépendance multiplicative des  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ). En revanche Loxton a une meilleure constante égale à  $(16n)^{200n}$ . De plus, si notre résultat traite le cas ultramétrique, ce qui n'est pas le cas le plus fréquent de la littérature (sauf dans les articles de Yu), la dépendance en le nombre premier  $p_{v_0}$  associée à la place  $v_0$  n'est pas aussi précise que dans les textes de Yu (dont les énoncés comportent des hypothèses supplémentaires du type  $\beta_{i,j} \in \mathbf{Z}$ ), où  $(6n)^{203n^2}$  est remplacé par un entier plus petit.

La démonstration du théorème 2.1 commence au § 5, avec une réduction au cas  $\mathbb{T}_u = \mathbf{Q}^n$  (la famille  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est libre sur  $\mathbf{Q}$ ). Nous expliquerons son déroulement à cette occasion (§ 5.1) mais, auparavant, nous rappelons quelques notions de théorie des pentes adéliques et nous énonçons un nouveau lemme de Siegel approché qui jouera un rôle clef dans la démonstration.

### 3. Éléments de théorie des pentes adéliques

Issue de la géométrie d'Arakelov et développée dans l'article de Bost [Bo] et les cours qu'il a donnés à l'Institut Henri Poincaré en 1997 et 1999, la théorie des pentes des fibrés vectoriels adéliques sur  $\text{Spec } k$  a fait l'objet d'une présentation systématique dans l'article [Ga4]. Rappelons, mais sans entrer dans les détails, qu'un fibré vectoriel adélique  $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E},v})_v)$  est la donnée d'un  $k$ -espace vectoriel  $E$ , de dimension finie  $\nu \geq 0$ , et d'une collection de normes  $(\|\cdot\|_{\overline{E},v})$  sur chaque espace  $E \otimes_k \mathbf{C}_v$ , indexées par les places  $v$  de  $k$  et soumises à plusieurs contraintes naturelles, que l'on trouvera dans la définition 3.1 de [Ga4]. Le fibré vectoriel adélique est dit *hermitien* lorsque toutes les normes aux places archimédiennes sont hermitiennes et lorsque, pour toute place ultramétrique  $v$  de  $k$  et tout  $x \in E$ , on a  $\|x\|_{\overline{E},v} \in |k_v|_v$  (notion de pureté, voir [Ga5]). Tous les fibrés vectoriels adéliques considérés lors de la démonstration du théorème 2.1 sont hermitiens. Le fibré vectoriel adélique  $(k^\nu, |\cdot|_2)$  est par définition le fibré adélique hermitien d'espace sous-jacent  $k^\nu$  et de normes :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{C}_v^\nu, \quad |x|_{2,v} := \begin{cases} (\sum_{i=1}^\nu |x_i|^2)^{1/2} & \text{si } v \mid \infty, \\ \max\{|x_1|_v, \dots, |x_\nu|_v\} & \text{si } v \nmid \infty. \end{cases}$$

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , il induit un sous-fibré vectoriel adélique  $\overline{F}$ , dont les normes sont les restrictions de celles de  $\overline{E}$  à  $F$ . Soit  $(k_{\mathbf{A}}, +)$  le groupe des adèles de  $k$  et vol une mesure de Haar sur  $k_{\mathbf{A}}^\nu$ . À un fibré adélique  $\overline{E}$  sont associés sa *boule unité*

$$\mathbf{B}_{\overline{E}}(0, 1) := \{x = (x_v)_v \in E \otimes_k k_{\mathbf{A}}; \forall v, \|x_v\|_{\overline{E},v} \leq 1\},$$

son degré d'Arakelov normalisé

$$\widehat{\text{deg}}_{\mathbf{n}} \overline{E} := \frac{1}{[k : \mathbf{Q}]} \log \frac{\text{vol}(\phi(\mathbf{B}_{\overline{E}}(0, 1)))}{\text{vol}(\mathbf{B}_{(k^\nu, |\cdot|_2)}(0, 1))} \quad (\widehat{\text{deg}}_{\mathbf{n}} \overline{\{0\}} := 0)$$

( $\phi : E \rightarrow k^\nu$  est un isomorphisme quelconque de  $k$ -espaces vectoriels), sa *hauteur (logarithmique absolue)*  $h(\overline{E}) := -\widehat{\deg}_n \overline{E}$ , sa *pente d'Arakelov normalisée*

$$\widehat{\mu}_n(\overline{E}) := \frac{\widehat{\deg}_n \overline{E}}{\dim E} \quad (\widehat{\mu}_n(\{0\}) := -\infty),$$

sa *pente maximale* (si  $n \geq 1$ )

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) := \max \{ \widehat{\mu}_n(\overline{F}) ; \{0\} \neq F \subseteq E \},$$

ainsi qu'une notion de *hauteur pour les éléments  $x$  de  $E$*  :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad h_{\overline{E}}(x) := \frac{1}{[k : \mathbf{Q}]} \sum_v n_v \log \|x\|_{\overline{E},v} \quad (h_{\overline{E}}(0) := 0).$$

Lorsque  $\overline{E}$  est hermitien, ces notions de hauteurs normalisées sont invariantes par extension des scalaires (voir § 4.3 de [Ga4]). L'énoncé suivant remplace l'inégalité de Liouville usuelle.

LEMME 3.1. — *Soit  $\overline{E}$  un fibré vectoriel adélique. Alors*

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad h_{\overline{E}}(x) \geq -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}).$$

La démonstration est immédiate à partir des définitions car  $h_{\overline{E}}(x) = h((k.x, (\|\cdot\|_{\overline{E},v}))_v)$ .

DÉFINITION 3.2. — Soit  $v$  une place de  $k$ . Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbf{C}_v$ -espace vectoriel normé. Une base  $e = (e_1, \dots, e_\nu)$  de  $E$  sera dite *orthonormée* si elle satisfait à l'une des deux conditions suivantes : soit  $v$  est archimédienne,  $\|\cdot\|$  définit un produit hermitien sur  $E$  et  $e$  est une base orthonormée au sens usuel ; soit  $v$  est ultramétrique et

$$\forall (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{C}_v^\nu, \quad \left\| \sum_{j=1}^{\nu} x_j e_j \right\|_{\overline{E},v} = \max \{ |x_1|_v, \dots, |x_\nu|_v \}.$$

3.0.1. *Notation.* — Étant donné des multiplats  $x = (x_1, \dots, x_\nu)$  et  $y = (y_1, \dots, y_\nu)$ , on note  $|x|$  la longueur  $\sum_{i=1}^{\nu} x_i$  de  $x$  et on désigne par  $x!$  (resp.  $x^y$ ) le produit  $x_1! \cdots x_\nu!$  (resp.  $x^y := x_1^{y_1} \cdots x_\nu^{y_\nu}$ ).

3.0.2. *Puissances symétriques des fibrés adéliques hermitiens.* — Soit  $\ell \geq 1$  un entier et  $\overline{E}$  un fibré adélique hermitien sur  $\text{Spec } k$ . Soit  $v$  une place de  $k$  et  $e = (e_1, \dots, e_\nu)$  une base orthonormée de  $(E \otimes_k \mathbf{C}_v, \|\cdot\|_{\overline{E},v})$  (dans le cas ultramétrique, la possibilité de choisir une telle base repose sur l'hypothèse de pureté de  $\overline{E}$ , voir [Ga5]). Le fibré adélique hermitien  $\overline{E}^{\otimes \ell}$  a pour espace sous-jacent  $E^{\otimes \ell}$  et, en la place  $v$ , il est muni de la norme hermitienne pour laquelle la base  $e_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes e_\nu^{i_\nu}$ ,  $(i_1, \dots, i_\nu) \in \mathbf{N}^\nu$  de longueur  $\ell$ , est orthonormée. La puissance symétrique  $S^\ell(E)$  est un quotient de  $E^{\otimes \ell}$  (l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}(E)$  est le quotient de l'algèbre tensorielle  $\mathbf{T}(E)$  par l'idéal engendré par les éléments  $x \otimes y - y \otimes x$ ). Cette structure quotient confère à  $S^\ell(E)$  une structure de fibré adélique hermitien  $\overline{S^\ell(E)}$  induite par  $\overline{E}^{\otimes \ell}$ . Concrètement, pour toute place  $v$  de  $k$ , pour tout  $s := \sum_{\substack{i \in \mathbf{N}^\nu \\ |i| = \ell}} p_i e^i \in S^\ell(E) \otimes_k \mathbf{C}_v$ , on a

$$(2) \quad \|s\|_{\overline{S^\ell(E)},v} := \begin{cases} \left( \sum_{|i|=\ell} |p_i|^2 \frac{i!}{\ell!} \right)^{1/2} & \text{si } v \mid \infty, \\ \max \{ |p_i|_v ; |i| = \ell \} & \text{si } v \nmid \infty. \end{cases}$$

Les métriques ainsi définies ne dépendent pas des choix précis des bases  $e$  considérées (voir p. ex. [Ga4, p. 45]). L'énoncé suivant est le théorème 7.1 de [Ga4], dû à Bost.

PROPOSITION 3.3. — *Soit  $\nu \geq 1$ . Pour tout fibré adélique hermitien  $\overline{E}$  sur  $\text{Spec } k$  de dimension  $\nu$ , pour tout entier  $\ell \geq 1$ , on a*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{S^\ell(E)}) \leq \ell(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + 2\nu \log \nu).$$

Dans la suite, la puissance symétrique sera utilisée à la fois pour décrire l'ensemble des polynômes auxiliaires et pour décrire l'espace des dérivations. Si  $E$  est un  $k$ -espace vectoriel, on note  $E^\vee$  l'espace dual  $\text{Hom}_k(E, k)$ .

DÉFINITION 3.4. — Un *polynôme homogène*  $s$  sur  $E$  de degré  $\ell$  est un élément de  $S^\ell(E^\vee)$  et l'*application polynomiale* associée est l'application de  $E$  dans  $k$  qui envoie  $x \in E$  sur  $s(x)$ . Plus généralement, si  $n \in \mathbf{N}$  et si  $E_0, \dots, E_n$  sont des  $k$ -espaces vectoriels, un *polynôme multihomogène*  $s$  de degré  $(\ell_0, \dots, \ell_n) \in \mathbf{N}^{n+1}$  est un élément de  $\mathfrak{E} := S^{\ell_0}(E_0^\vee) \otimes \dots \otimes S^{\ell_n}(E_n^\vee)$  et l'application polynomiale associée est l'application de  $\prod_{j=0}^n E_j$  dans  $k$  qui envoie  $(x_0, \dots, x_n)$  sur  $s(x_0, \dots, x_n)$ .

Lorsque, pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ , l'espace  $E_j$  possède une structure de fibré adélique hermitien  $\overline{E}_j$  (il en est alors de même pour  $E_j^\vee$  avec les métriques duales), la norme de  $s$  en une place  $v$  de  $k$  est calculée dans  $\bigotimes_{j=0}^n \overline{S^{\ell_j}(E_j^\vee)}$ . Dans la pratique, si l'on fixe une base orthonormée  $\mathbf{e}_j = (e_{j,1}, \dots, e_{j,\nu_j})$  de  $E_j \otimes_k \mathbf{C}_v$  (ici  $\nu_j = \dim E_j$ ), de base duale  $\mathbf{e}_j^\vee = (e_{j,1}^\vee, \dots, e_{j,\nu_j}^\vee)$ , et si l'on écrit l'élément  $s$  comme une somme

$$(3) \quad s := \sum_i p_i \prod_{j=0}^n (\mathbf{e}_j^\vee)^{i_j}$$

avec  $i = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^{\nu_0} \times \dots \times \mathbf{N}^{\nu_n}$ ,  $i_j$  de longueur  $\ell_j$ , et  $p_i \in \mathbf{C}_v$ , alors la norme  $\|s\|_{\overline{\mathfrak{E}},v}$  de  $s$  est

$$(4) \quad \|s\|_{\overline{\mathfrak{E}},v} = \begin{cases} \left( \sum_i |p_i|^2 \frac{i!}{\ell_0! \dots \ell_n!} \right)^{1/2} & \text{si } v \mid \infty \\ \max_i \{|p_i|_v\} & \text{si } v \nmid \infty. \end{cases}$$

Ces égalités découlent aisément des formules (2) et de la construction de la norme tensorielle en observant que les produits  $\prod_{j=0}^n \frac{(\mathbf{e}_j^\vee)^{i_j}}{\|(\mathbf{e}_j^\vee)^{i_j}\|_v}$ , lorsque  $i$  varie comme ci-dessus, forment une base orthonormée de  $\mathfrak{E} \otimes_k \mathbf{C}_v$ . Remarquons également que grâce à cette formule (4) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la somme  $\sum_i |p_i|_v$  est plus petite que  $\|s\|_{\overline{\mathfrak{E}},v} \times \prod_{j=0}^n \nu_j^{\ell_j/2}$  (si  $v$  est archimédienne).

#### 4. Lemmes de Siegel approchés

La plupart des démonstrations de transcendance requiert l'utilisation d'une fonction auxiliaire qui doit satisfaire à un nombre fini de conditions linéaires. En général il s'agit de conditions d'annulations en des points particuliers avec des ordres de multiplicités dans certaines directions (on parle parfois de « points épais »). Aux prémices de la théorie (travaux d'Hermite et Lindemann par exemple), on exhibait hardiment une fonction auxiliaire *explicite*. Toutefois sont rapidement apparues les difficultés et les limitations inhérentes à cette approche presque impudique<sup>(†)</sup>. En filigrane dans les articles de Thue [Th1, Th2], l'on doit à Siegel d'avoir conceptualisé en 1929 l'idée qu'il suffisait de connaître une estimation de la « taille » de la fonction auxiliaire  $F$ . Demander l'annulation de  $F$  en un nombre fini de points épais équivaut à réclamer que les coefficients de  $F$  satisfassent à un système linéaire

$$(5) \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \quad \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} x_j = 0$$

d'inconnues  $x_1, \dots, x_\nu$ . Lors de l'étude de la transcendance des valeurs des fonctions de Bessel [Si], Siegel formula l'énoncé précis suivant.

LEMME DE SIEGEL. — *Supposons que  $\mu < \nu$  et que, pour tous  $i, j$ , on a  $a_{i,j} \in \mathbf{Z}$ . Soit  $A = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ . Alors il existe une solution  $(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{Z}^\nu \setminus \{0\}$  au système (5) telle que*

$$\max\{|x_1|, \dots, |x_\nu|\} \leq 1 + (\nu A)^{\frac{\mu}{\nu-\mu}}.$$

Ce résultat découle simplement du *principe des tiroirs de Dirichlet*. Comme l'a remarqué Mignotte, il est possible de l'étendre à un système à coefficients algébriques (voir lemme 1.3.1 de [Wa1]). Cependant l'on s'est aperçu qu'un tel lemme n'était rien d'autre qu'une variante du *premier théorème de Minkowski* sur les corps convexes. Ce point de vue s'est révélé fécond en débouchant sur une version adélique du lemme de Siegel, démontré par Bombieri & Vaaler [BV].

†. Cependant, ce procédé reste encore très actuel au travers par exemple des approximations de Padé et des fonctions hypergéométriques car, comme l'avait noté Chudnovsky, il conduit souvent à de meilleurs résultats.

LEMME DE BOMBIERI & VAALER. — Soit  $k$  un corps de nombres de discriminant absolu  $D_k$ . Notons  $\text{rd}_k := |D_k|^{1/[k:\mathbf{Q}]}$  son discriminant racine. Soit  $\overline{E}$  un fibré adélique hermitien sur  $\text{Spec } k$ , de dimension  $\nu \geq 1$ . Alors il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que

$$h_{\overline{E}}(x) \leq -\widehat{\mu}_n(\overline{E}) + \frac{1}{2}(\log \nu + \log \text{rd}_k).$$

Plusieurs développements de ce lemme existent. On peut demander que l'élément  $x \in E \setminus \{0\}$  évite un nombre fini de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Ceci constitue le fil directeur de notre article [Ga5]. Mais la variante la plus importante est celle qui permet de s'affranchir de la dépendance en le discriminant du corps de nombres. On recherche une solution  $x$  non nulle non pas dans  $E$  mais dans  $E \otimes \overline{\mathbf{Q}}$ . Un tel lemme de Siegel est dit *absolu*. Roy & Thunder ont obtenu un énoncé de ce type dans [RT]. Nous présentons ici un raffinement de leur résultat, signalé par David & Philippon [DP], qui se déduit d'une inégalité de Zhang relative aux minima successifs d'une variété arithmétique [Zh].

LEMME DE SIEGEL ABSOLU. — Soit  $\overline{E}$  un fibré adélique hermitien sur  $\text{Spec } k$ , de dimension  $\nu \geq 1$ . Alors il existe  $x \in (E \otimes \overline{\mathbf{Q}}) \setminus \{0\}$  tel que

$$h_{\overline{E}}(x) \leq -\widehat{\mu}_n(\overline{E}) + \frac{1}{2} \log \nu.$$

L'énoncé de Roy & Thunder donne  $\nu$  au lieu de  $\frac{1}{2} \log \nu$ . Si, autrefois, dans les démonstrations de mesures d'indépendance linéaire de logarithmes, le discriminant du corps de nombres était absorbé par des termes plus gros, aujourd'hui les mesures sont devenues assez fines pour que ce discriminant devienne un facteur limitant. C'est la présence de ce discriminant qui explique pourquoi l'énoncé principal de [Ga1] s'exprime au moyen d'un maximum sur deux quantités. Comme il supprime cette imperfection, le lemme de Siegel absolu a pris une grande importance ces dernières années, ainsi que le prouve son utilisation dans plusieurs articles récents de la théorie des formes linéaires logarithmiques [DH, AG, Ga3]. Le fait que l'on ne maîtrise pas le (degré du) corps de nombres dans lequel vit la solution  $x$  est sans conséquence car, en définitive, l'on est amené à effectuer une somme sur les différentes places de ce corps, somme de laquelle émerge directement  $h_{\overline{E}}(x)$ . Néanmoins quelques soucis techniques peuvent surgir.

Tout d'abord, la hauteur de  $\overline{E}$  peut s'avérer difficile à évaluer avec précision. Si, comme dans le lemme de Siegel original, l'espace vectoriel  $E$  est défini par le système linéaire (5), la hauteur de  $\overline{E}$  se calcule au moyen des mineurs maximaux de la matrice  $A := (a_{i,j})_{i,j}$ . En général, on estime la taille de ces mineurs avec l'inégalité d'Hadamard (le déterminant d'une famille de vecteurs est plus petit que le produit des normes hermitiennes de ces vecteurs), qui, *in fine*, fait ressortir la hauteur des  $a_{i,j}$ . Il arrive que les  $a_{i,j}$  soient petits aux places archimédiennes (ce qui est très bien) mais avec un dénominateur trop grand aux places ultramétriques. L'astuce consiste alors à trouver un système

$$(6) \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \quad \sum_{j=1}^{\nu} b_{i,j} x_j = 0,$$

équivalent à (5) et définissant ainsi le même espace vectoriel  $E$ , mais, où, cette fois-ci, les nombres algébriques  $b_{i,j}$  sont petits aux places ultramétriques et de tailles quelconques aux autres places. Dans ce cas, la partie archimédienne de la hauteur de  $\overline{E}$  est évaluée avec (5) et la partie ultramétrique avec (6). Cette technique fonctionne assez bien même si elle est parfois délicate à mettre en œuvre (voir p. ex. la démonstration de la proposition 4.15 de [Ga3]).

Une autre difficulté est que les coefficients  $a_{i,j}$  qui se présentent naturellement peuvent ne pas être algébriques, même après renormalisation. Le système (5) ne possède alors en général aucune solution algébrique hormis  $(0, \dots, 0)$ . C'est pourquoi il est plus raisonnable de demander au lemme de fournir une solution algébrique  $(x_1, \dots, x_n)$  non nulle au système d'inéquations

$$(7) \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \quad \left| \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} x_j \right| \leq \varepsilon$$

(ici  $\varepsilon$  est un nombre réel strictement positif). Un énoncé qui garantit l'existence d'une solution algébrique non nulle à ce système d'inéquations est appelé *lemme de Siegel approché*. En voici



un exemple<sup>(‡)</sup>, extrait de l'article de Philippon & Waldschmidt [PW1], qui a servi à la construction de la fonction auxiliaire de plusieurs articles marquants de la théorie des formes linéaires de logarithmes [PW1, PW2, Hi1, Hi2] (aussi utilisé dans [Ga1]) :

LEMME DE SIEGEL APPROCHÉ. — Soit  $A = (a_{i,j})$ ,  $1 \leq i \leq \mu$ ,  $1 \leq j \leq \nu$ , une matrice de nombres complexes et  $A$  un nombre réel tel que  $\max_{1 \leq i \leq \mu} \sum_{j=1}^{\nu} |a_{i,j}| \leq A$ . Soit  $\rho$  le rang de  $A$ . Soit  $H \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  et  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  tels que

$$\left( \frac{2\mu HA}{\varepsilon} + 1 \right)^{2\rho} < (H+1)^\nu.$$

Alors il existe  $(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{Z}^\nu \setminus \{0\}$  tel que

$$\max_{1 \leq j \leq \nu} |x_j| \leq H \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq i \leq \mu} \left| \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} x_j \right| \leq \varepsilon.$$

Tout comme pour le lemme de Siegel original, la démonstration repose sur le principe des tiroirs. S'il est facile de généraliser à un corps de nombres au moyen d'une  $\mathbf{Q}$ -base  $(\xi_1, \dots, \xi_D)$  de ce corps, ceci fait intervenir la hauteur de cette base. Le corps considéré est souvent le corps de nombres dans lequel vivent tous les nombres algébriques de la démonstration. En particulier, pour les formes linéaires de logarithmes, la hauteur de  $(\xi_1, \dots, \xi_D)$  est liée aux paramètres  $\log a$  et  $\log b$ . Pour faire disparaître la dépendance en le corps de nombres ambiant, l'on peut imaginer écrire un lemme de Siegel approché et *absolu*. Il s'avère qu'un lemme de Siegel (classique ou absolu) donne automatiquement un lemme de Siegel approché par *déformation des normes*<sup>(§)</sup>, comme nous allons l'expliquer maintenant.

Soit  $k$  un corps de nombres et  $v_0$  une place quelconque de  $k$ . Soit  $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E},v}))$  et  $\overline{F} = (F, (\|\cdot\|_{\overline{F},v}))$  des fibrés vectoriels adéliques sur  $\text{Spec } k$ . Soit  $\alpha \in k_{v_0}$  et  $\mathbf{a} : E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0} \rightarrow F \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$  une application linéaire. Sur  $E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ , on considère la norme tordue par  $\alpha$  :

$$\forall x \in E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}, \quad \|x\|_{\overline{E},v_0} := \begin{cases} \left( \|x\|_{\overline{E},v_0}^2 + \|\alpha \mathbf{a}(x)\|_{\overline{F},v_0}^2 \right)^{1/2} & \text{si } v_0 \mid \infty, \\ \max \{ \|x\|_{\overline{E},v_0}, \|\alpha \mathbf{a}(x)\|_{\overline{F},v_0} \} & \text{si } v_0 \nmid \infty. \end{cases}$$

Si  $v$  est une place de  $k$ , différente de  $v_0$ , on pose  $\|\cdot\|_{\overline{E},v} := \|\cdot\|_{\overline{E},v}$ . Alors le couple  $\overline{E}_\alpha = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E}_\alpha,v}))$  forme un fibré vectoriel adélique. De plus, si  $x \in E$ , on a  $h_{\overline{E}}(x) \leq h_{\overline{E}_\alpha}(x)$  et  $\|\mathbf{a}(x)\|_{\overline{F},v_0} \leq |\alpha|_{v_0}^{-1} \|x\|_{\overline{E}_\alpha,v_0}$ . Dès lors, savoir majorer finement  $h_{\overline{E}_\alpha}(x)$ , pour un vecteur  $x$  particulier, revient à établir un lemme de Siegel approché. L'emploi du lemme de Bombieri & Vaaler ou du lemme de Siegel absolu pour évaluer  $h_{\overline{E}_\alpha}(x)$  pose le problème de l'estimation de la hauteur de  $\overline{E}_\alpha$  en fonction de celles de  $\overline{E}$ ,  $\text{Im}(\mathbf{a})$  et du rang de  $\mathbf{a}$ . Le choix de bases orthonormées sur  $E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$  et  $F \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$  respectivement permet d'identifier l'application linéaire  $\mathbf{a}$  à une matrice  $\mathbf{A} \in M_{\mu,\nu}(\mathbf{C}_{v_0})$ . Pour tout  $x \in E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$  de coordonnées  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_\nu)$ , la norme  $\|x\|_{\overline{E}_\alpha,v_0}$  peut s'écrire

$$\|x\|_{\overline{E}_\alpha,v_0} = |(|\mathbf{x}|_{2,v_0}, |\alpha \mathbf{A} \mathbf{x}|_{2,v_0})|_{2,v_0}.$$

Comme  $\overline{E}$  et  $\overline{E}_\alpha$  ne diffèrent qu'en la place  $v_0$ , la définition de la pente d'un fibré vectoriel adélique conduit à la formule

$$(8) \quad \widehat{\mu}_n(\overline{E}_\alpha) - \widehat{\mu}_n(\overline{E}) = \frac{1}{\nu D} \log \left( \frac{\text{vol}(\{ \mathbf{x} \in k_{v_0}^\nu ; |(|\mathbf{x}|_{2,v_0}, |\alpha \mathbf{A} \mathbf{x}|_{2,v_0})|_{2,v_0} \leq 1 \})}{\text{vol}(\{ \mathbf{x} \in k_{v_0}^\nu ; |\mathbf{x}|_{2,v_0} \leq 1 \})} \right)$$

(vol est une mesure de Haar quelconque sur  $(k_{v_0}^\nu, +)$  et  $D = [k : \mathbf{Q}]$  est le degré de  $k$  sur  $\mathbf{Q}$ ). Étant donné un entier  $l \geq 1$ , notons  $\mathbf{U}(l, k_{v_0})$  le groupe orthogonal réel d'ordre  $l$  si  $v_0$  est une place réelle, le groupe unitaire d'ordre  $l$  si  $v_0$  est complexe et le groupe  $\text{GL}_l(\mathcal{O}_{v_0})$  si  $v_0$  est ultramétrique. En vertu de la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{A}$ , il existe des éléments  $\sigma_1(\mathbf{A}), \dots, \sigma_\rho(\mathbf{A})$  de  $]0, +\infty[$  (resp. de la forme  $\pi_{v_0}^{n_i}$ ,  $n_i \in \mathbf{Z}$ ,  $1 \leq i \leq \rho$ ) si  $v_0$  est archimédienne (resp. si  $v_0$  est ultramétrique et  $\pi_{v_0}$  est une uniformisante de  $\mathcal{O}_{v_0}$ ) et il existe deux matrices  $U \in \mathbf{U}(\mu, k_{v_0})$  et

‡. Cet exemple est dû en partie à Mignotte [Mi], qui s'est intéressé à la question dans les années 70. On pourra aussi consulter le § 1.3 du chapitre 1 de [Wa1].

§. *A posteriori*, nous nous sommes rendu compte que cette idée était déjà en substance dans l'article [Mi] de Mignotte et qu'elle serait due à Mahler (voir [Ma]).

$V \in \mathbf{U}(\nu, k_{v_0})$  tels que  $UAV$  est la matrice diagonale dont le  $i^{\text{ème}}$  élément sur la diagonale est  $\sigma_i(\mathbf{A})$  si  $i \in \{1, \dots, \rho\}$  et 0 si  $i \in \{\rho + 1, \dots, \min\{\mu, \nu\}\}$ . L'entier  $\rho$  est le *rang* de la matrice  $\mathbf{A}$ .

LEMME 4.1. — *Pour tout  $\alpha \in k_{v_0}$ , on a*

$$\widehat{\mu}_n(\overline{E}_\alpha) - \widehat{\mu}_n(\overline{E}) = -\frac{n_{v_0}}{\nu D} \sum_{i=1}^{\rho} \log |(1, \alpha \sigma_i(\mathbf{A}))|_{2, v_0}$$

( $n_{v_0} = [k_{v_0} : \mathbf{Q}_{v_0}]$  est le degré local).

*Démonstration.* — En vertu de la définition des matrices  $U$  et  $V$  associées à la décomposition en valeurs singulières de  $A$ , la condition

$$(|x|_{2, v_0}, |\alpha \mathbf{A}x|_{2, v_0})|_{2, v_0} \leq 1$$

équivalent à

$$(|y|_{2, v_0}, |\alpha UAVy|_{2, v_0})|_{2, v_0} \leq 1 \text{ avec } y = V^{-1}x.$$

En notant  $(y_1, \dots, y_\nu)$  les coordonnées de  $y$  et en posant  $\sigma_i := |(1, \alpha \sigma_i(\mathbf{A}))|_{2, v_0}$ , cette dernière condition devient

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\rho} \sigma_i^2 |y_i|^2 + \sum_{i=\rho+1}^{\nu} |y_i|^2 \leq 1 & \text{si } v_0 \mid \infty, \\ \max\{\sigma_1 |y_1|_{v_0}, \dots, \sigma_\rho |y_\rho|_{v_0}, |y_{\rho+1}|_{v_0}, \dots, |y_\nu|_{v_0}\} \leq 1 & \text{si } v_0 \nmid \infty. \end{cases}$$

Le lemme 4.1 découle de la description (8) de la différence des pentes et d'un changement de variable standard.  $\square$

Soit  $\|\mathbf{a}\|$  la norme d'opérateur de  $\mathbf{a} : \|\mathbf{a}\| := \max\{\|\mathbf{a}(x)\|_{\overline{F}, v_0}; \|x\|_{\overline{E}, v_0} = 1\}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, \rho\}$ , on a  $|\sigma_i(\mathbf{A})|_{v_0} \leq \|\mathbf{a}\|$ . Du lemme 4.1 découle alors l'énoncé suivant.

PROPOSITION 4.2. — *Pour tout  $\alpha \in k_{v_0}$ , la différence des pentes  $\widehat{\mu}_n(\overline{E}_\alpha) - \widehat{\mu}_n(\overline{E})$  est minorée par*

$$-\frac{n_{v_0} \rho}{\nu D} (\log |(1, \alpha)|_{2, v_0} + \log \max\{1, \|\mathbf{a}\|\}).$$

Ces calculs et le lemme de Siegel absolu appliqué à  $\overline{E}_\alpha$  conduisent au résultat suivant.

LEMME DE SIEGEL APPROCHÉ ABSOLU. — *Soit  $k$  un corps de nombres et  $v_0$  une place quelconque de  $k$ . Soit  $\overline{E}$  et  $\overline{F}$  deux fibrés adéliques hermitiens sur  $\text{Spec } k$ . Soit  $\mathbf{a} : E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0} \rightarrow F \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$  une application  $\mathbf{C}$ -linéaire, de rang  $\rho$ , et de norme d'opérateur  $\|\mathbf{a}\|$ . Pour tout  $\alpha \in k_{v_0}$ , il existe  $x \in (E \otimes \overline{\mathbf{Q}}) \setminus \{0\}$  tel que*

$$h_{\overline{E}_\alpha}(x) \leq \frac{n_{v_0} \rho}{\nu D} (\log |(1, \alpha)|_{2, v_0} + \log \max\{1, \|\mathbf{a}\|\}) + \frac{1}{2} \log \nu - \widehat{\mu}_n(\overline{E}).$$

Cet énoncé s'étend sans grande difficulté pour des fibrés adéliques qui ne sont pas nécessairement hermitiens. Bien qu'un peu âpre, il s'avère assez facile d'utilisation. Une caractéristique importante est la présence du quotient  $\rho/\nu$ , qui sera petit dans le contexte des formes linéaires de logarithmes (voir proposition 5.13). Dans un souci d'efficacité, nous n'avons pas séparé les contributions des normes de  $x$  en les différentes places de  $\overline{\mathbf{Q}}$ , en exprimant simplement le résultat en terme de hauteur (globale) de  $x$ .

## 5. Démonstration du théorème principal

**5.1. Canevas de la démonstration.** — Nous utilisons la méthode de Baker non pas avec des fonctions auxiliaires, ni avec des déterminants d'interpolation, ni avec la méthode des pentes. En réalité, nous faisons un mélange entre la première et la dernière de ces méthodes, c.-à-d. que nous passons par la construction d'une section auxiliaire d'un certain fibré adélique hermitien. À chaque étape de la démonstration nous conservons l'aspect intrinsèque des données. De la sorte nous bénéficions de la souplesse de la méthode des fonctions auxiliaires et de la possibilité d'accéder naturellement aux constantes numériques de la méthode des pentes. Concrètement, après avoir modifié les données initiales de manière à être en mesure d'utiliser la réduction d'Hirata-Kohno et le procédé de changement de variables de Chudnovsky, nous construisons un fibré adélique hermitien  $\overline{E}$ . L'espace vectoriel  $E$  sous-jacent est un espace de polynômes en plusieurs variables, auquel est adjoint des normes en toutes les places de  $k$ . Ce fibré adélique  $\overline{E}$  a la particularité

d'avoir une norme « tordue » en la place  $v_0$ , ce qui constitue une des nouveautés de ce texte. Nous construisons alors un élément  $s \neq 0$  de  $E$  de petite hauteur au moyen du lemme de Siegel absolu. Le choix des paramètres et le lemme de multiplicités de Philippon assurent qu'il existe un jet de  $s$  d'ordre  $\ell$  le long de  $W$  (sous-espace construit à partir de  $W_0$ ) en un multiple  $mp$  de  $p$  qui est non nul, avec  $\ell, m$  contrôlés. Ensuite nous évaluons la hauteur de ce jet, en distinguant les normes aux places ultramétriques des normes aux places archimédiennes. Le comportement du jet en la place  $v_0$  est étudié à part. La majoration de sa norme repose sur une extrapolation sur les dérivations (cas périodique) ou sur les multiples de  $p$  (cas non périodique), qui a été préparée par la construction de  $s$ . C'est à cet endroit qu'apparaissent les valeurs absolues des formes linéaires que nous cherchons à évaluer. Pour conclure, nous utilisons une variante de l'inégalité de Liouville pour minorer la hauteur de ce jet, qui fait intervenir la pente maximale arakelovienne de l'espace naturel dans lequel vit le jet considéré.

**5.2. Réductions.** — Pour démontrer le théorème 2.1, l'on peut supposer que

- (i)  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une famille libre sur  $\mathbf{Q}$ ,
- (ii)  $\{\ell_1, \dots, \ell_t\}$  est une famille libre du dual  $(k^n)^\vee$ ,
- (iii)  $|(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0})_{2,v_0}| \leq 1$  lorsque  $v_0$  est archimédienne (¶).

En effet, considérons un ensemble  $I$  tel que  $(u_i)_{i \in I}$  soit une base du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel engendré par  $u_1, \dots, u_n$ . Posons  $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$ . Pour  $j \in J$ , la famille  $\{u_i\}_{i \in I} \cup \{u_j\}$  est liée sur  $\mathbf{Q}$ . Le lemme 7.19. de [Wa3] (p. 222) assure l'existence de nombres rationnels  $\theta_{j,i}$  tels que  $u_j = \sum_{i \in I} \theta_{j,i} u_i$  et

$$\begin{aligned} h(\theta_{j,i}) &\leq (n-1) \log(11(n-1)D^3) + \log \prod_{l=1}^n \log a_l \\ &\leq 7n^2 \left( \frac{\mathbf{a} \log \epsilon}{D} + \log \log \epsilon \right) \end{aligned}$$

pour tous  $j, i$ . Par ailleurs, chaque  $\ell_j(u)$ ,  $1 \leq j \leq t$ , est la valeur d'une forme linéaire  $L_j$  en les  $u_i$ ,  $i \in I$ , avec des coefficients de la forme

$$\beta_{j,i} + \sum_{m \notin I} \beta_{j,m} \theta_{m,i}.$$

Chacun de ces coefficients est de hauteur bornée par  $nt \max_{m,\ell} \{h(\beta_{m,\ell})\} + n^2 \max_{j,i} \{h(\theta_{j,i})\} + \log n$ , et donc par

$$\frac{7n^4}{D} (\log b + \mathbf{a} \log \epsilon + D \log \log \epsilon).$$

De cette famille  $\{L_1, \dots, L_t\}$  de formes linéaires sur  $k^I$ , l'on peut extraire une famille libre maximale, qui comporte exactement  $s = \dim \mathbb{T}_u - \dim(W_0 \cap \mathbb{T}_u)$  éléments. Notons  $\mathbf{S}$  le sous-ensemble de  $\{1, \dots, t\}$  qui indexe la famille libre choisie. Pour tout  $j \in \{1, \dots, t\}$ , on a  $\Lambda_j = \beta_{j,0} + L_j((u_i)_{i \in I})$  et le maximum des  $|\Lambda_j|$  que l'on cherche à minorer est plus grand que  $\max_{s \in \mathbf{S}} \{|\beta_{s,0} + L_s((u_i)_{i \in I})|\}$ . De la sorte l'on s'est donc bien ramené aux conditions (i) et (ii) ci-dessus. Pour la condition (iii), il suffit de diviser tous les nombres  $\beta_{i,j}$  par le premier entier supérieur à  $|(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0})_{2,v_0}|$ . Cet entier est plus petit que  $nb$ . De plus les estimations faites des hauteurs des coefficients des  $L_s$  montrent que le théorème 2.1 découle de l'énoncé suivant (les notations sont celles du théorème 2.1).

**THÉORÈME 5.1.** — *Supposons que  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et  $\{\ell_1, \dots, \ell_t\}$  sont des familles libres sur  $\mathbf{Q}$ . Posons*

$$V := \mathbf{a}^{1/t} (\log b + \mathbf{a} \log \epsilon) \prod_{j=1}^n \left( 1 + \frac{D \log a_j}{\log \epsilon} \right)^{1/t}.$$

*Alors, pour tout  $j \in \{1, \dots, t\}$ , on a  $\Lambda_j \neq 0$  et*

$$\log \max_{1 \leq j \leq t} |\Lambda_j|_{v_0} \geq -(6n)^{200n^2} \max \{V, (1 - \epsilon_0) \log p_{v_0}\}.$$

*De plus, si  $t = 1$  et  $\beta_{1,0} \neq 0$ , la quantité  $\log b + \mathbf{a} \log \epsilon$  qui est dans  $V$  peut être remplacée par  $\log b + \log \epsilon + D \log \mathbf{a}$ .*

¶. Cette hypothèse sera utile à la fin du cas périodique, § 5.12.2.

Le théorème 1.1 donné dans l'introduction est une conséquence immédiate de cet énoncé en choisissant  $a_j = a$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ . De plus, le fait qu'aucun des  $\Lambda_j$  n'est nul est une conséquence du théorème de Baker qui affirme que la famille  $\{1, u_1, \dots, u_n\}$  est libre sur  $\overline{\mathbf{Q}}$  lorsque  $\{u_1, \dots, u_n\}$  l'est sur  $\mathbf{Q}$ .

La suite de l'article concerne la démonstration du théorème 5.1. En particulier, dans toute la suite, nous supposons que les familles  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et  $\{\ell_1, \dots, \ell_t\}$  sont des familles libres sur  $\mathbf{Q}$ .

**5.3. Préparatifs.** — Avant de commencer la démonstration du théorème 5.1, il nous est utile de modifier les données brutes du paragraphe 2.

Rappelons que  $W_0$  désigne le sous-espace vectoriel de  $k^n$  intersection des formes linéaires  $\ell_i$ ,  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Soit  $G_0$  le spectre de l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}((k^n/W_0)^\vee)$ . C'est un schéma en groupes affine sur  $\text{Spec } k$ , dont l'espace tangent à l'origine s'identifie canoniquement au quotient  $k^n/W_0$ . Notons  $G$  le  $k$ -groupe algébrique linéaire  $G_0 \times \mathbf{G}_m^n$ . Soit  $\lambda : k^n \rightarrow k^n/W_0$  la projection canonique et  $W$  le sous-espace de l'espace tangent à l'origine  $t_G = (k^n/W_0) \oplus k^n$  défini comme l'ensemble des vecteurs de la forme  $(\lambda(y), y)$  avec  $y \in k^n$ . Le fibré adélique hermitien  $(k^n, |\cdot|_2)$  confère à  $k^n/W_0$  et à  $t_G$  des structures adéliques hermitiennes, respectivement par quotient et par somme directe orthogonale. Nous noterons  $\overline{k^n/W_0}$  et  $\overline{t_G}$  les fibrés adéliques hermitiens ainsi obtenus. Comme sous-espace vectoriel de  $(k^n, |\cdot|_2)$ , l'espace  $W_0$  hérite d'une structure de fibré adélique hermitien  $\overline{W_0}$  et l'on note  $h(\overline{W_0})$  sa hauteur d'Arakelov au sens du § 3. Par hermitianité, cette quantité est aussi le degré d'Arakelov de  $\overline{k^n/W_0}$ . À une constante qui ne dépend que de  $n$  près, elle est comparable à la quantité  $\max_{i,j} \{1, h(\beta_{i,j})\}$  qui apparaît dans la définition de  $\log b$  du théorème 2.1. Plus précisément on a la

PROPOSITION 5.2. — *La hauteur d'Arakelov de  $\overline{W_0}$  vérifie l'inégalité*

$$D \max \{1, h(\overline{W_0})\} \leq 2n^3 \log b.$$

*Démonstration.* — L'application  $k^n \rightarrow k^t$  qui à  $z = (z_1, \dots, z_n)$  associe  $(\ell_1(z), \dots, \ell_t(z))$  se factorise en un isomorphisme  $\varphi : k^n/W_0 \rightarrow k^t$  de  $k$ -espaces vectoriels. Pour tout  $i \in \{1, \dots, t\}$  et pour toute place  $v$  de  $k$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit la majoration

$$|\ell_i(z_1, \dots, z_n)|_v \leq \|\ell_i\|_{(k^n, |\cdot|_2)^\vee, v} \|\overline{z}\|_{\overline{k^n/W_0}, v}$$

avec

$$\|\ell_i\|_{(k^n, |\cdot|_2)^\vee, v} = \begin{cases} (\sum_{j=1}^n |\beta_{i,j}|_v^2)^{1/2} & \text{si } v \mid \infty, \\ \max \{|\beta_{i,j}|_v; 1 \leq j \leq n\} & \text{si } v \nmid \infty. \end{cases}$$

Par conséquent, la norme d'opérateur  $\|\varphi\|_v$  de  $\varphi$  entre  $\overline{k^n/W_0}$  et  $(k^t, |\cdot|_2)$  en la place  $v$  est plus petite que  $\|(\beta_{i,j})_{i,j}\|_{2,v}$ . Ainsi on a

$$\begin{aligned} h(\overline{W_0}) &= \widehat{\deg}_n(\overline{k^n/W_0}) \leq \widehat{\deg}_n(k^t, |\cdot|_2) + \frac{t}{D} \sum_v n_v \log \|\varphi\|_v \\ &\leq 0 + t h_{(k^{nt}, |\cdot|_2)}((\beta_{i,j})_{i,j}) \\ &\leq \frac{t}{2} \log(nt) + nt^2 \frac{\log b}{D} \end{aligned}$$

(la première inégalité est une inégalité de pentes classique, voir p. ex. le lemme 6.3. de [Ga4]). On conclut en majorant  $(1/2) \log(nt)$  par  $nt$ , puis  $t$  par  $n$ .  $\square$

L'isomorphisme  $\varphi$  défini ci-dessus permet de définir  $u'_0 := \varphi^{-1}(u_0) \in k^n/W_0$ . **Dans la suite, nous confondrons  $u'_0$  avec  $u_0$ .** Nous ne garderons que la notation  $u_0$ , le contexte permettant de distinguer s'il s'agit de  $u'_0 \in k^n/W_0$  ou bien de  $u_0 \in k^t$ .

Par ailleurs, plutt que minorer  $\max \{|\Lambda_i|_{v_0}; 1 \leq i \leq t\}$ , nous allons minorer la norme de  $u_0 - \lambda(u)$ , norme relative à  $k^n/W_0$  en la place  $v_0$ . Ceci est rendu possible par le résultat suivant :

PROPOSITION 5.3. — *On a*

$$\|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{k^n/W_0}, v_0} \leq (bn)^{3n^3} \max_{1 \leq i \leq t} \{|\Lambda_i|\}.$$

*Démonstration.* — Commençons par définir le supplémentaire orthogonal  $W_0^\perp$  de  $W_0$  dans  $\mathbf{C}_{v_0}^n$ . Si  $v_0$  est archimédienne, c'est le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}^n$  engendré par les vecteurs  $\mathbf{e}_i := (\overline{\beta_{i,1}}, \dots, \overline{\beta_{i,n}})$ ,  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Si  $v_0$  est ultramétrique, on choisit une famille  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_t\}$  de  $t$  vecteurs (distincts) de la base canonique de  $\mathbf{C}_{v_0}^n$  qui n'appartiennent pas à  $W_0$ . Dans ce cas, l'espace  $W_0^\perp$  est le  $\mathbf{C}_{v_0}$ -espace vectoriel engendré par  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_t$ . Soit  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t\}$  la base orthonormée de  $W_0^\perp$  obtenue à partir de ces vecteurs par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (si  $v_0$  est ultramétrique, on choisit simplement  $\mathbf{f}_l := \mathbf{e}_l$  pour tout  $l \in \{1, \dots, t\}$ ). Soit  $z = \sum_{i=1}^t \lambda_i \mathbf{f}_i \in W_0^\perp$  tel que  $|z|_{2,v_0} = \|u_0 - \lambda(u)\|_{k^n/W_0, v_0}$  et tel que  $z \bmod W_0 = u_0 - \lambda(u)$ . Le contrôle des  $\lambda_i$  — et donc de la norme de  $z$  — se fait au moyen de l'observation suivante : pour tout  $i \in \{1, \dots, t\}$ , on a  $\ell_i(z) = -\Lambda_i$  et donc

$$(9) \quad - \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(\mathbf{f}_1) \cdots \ell_1(\mathbf{f}_t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_t(\mathbf{f}_1) \cdots \ell_t(\mathbf{f}_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_t \end{pmatrix}.$$

Notons  $L_f$  la matrice carrée (inversible) qui apparaît ci-dessus. Son coefficient générique  $\ell_i(\mathbf{f}_j)$  est de valeur absolue majorée par la norme d'opérateur  $\|\ell_i\|_{v_0}$  et l'on a donc  $|\ell_i(\mathbf{f}_j)|_{v_0} \leq b\sqrt{n}$ . De (9) l'on déduit

$$(10) \quad |z|_{v_0} = |(\lambda_1, \dots, \lambda_t)|_{2,v_0} \leq \|L_f^{-1}\|_{v_0} \sqrt{t} \max_{1 \leq i \leq t} \{|\Lambda_i|_{v_0}\}$$

(la norme  $\|L_f^{-1}\|_{v_0}$  est la norme d'opérateur de  $L_f^{-1} : (\mathbf{C}_{v_0}^t, |\cdot|_{2,v_0}) \rightarrow (\mathbf{C}_{v_0}^t, |\cdot|_{2,v_0})$ ). On a  $\|L_f^{-1}\|_{v_0} \leq \|L_f\|_{v_0}^{t-1} |\det L_f|_{v_0}^{-1}$  (voir le lemme 7.2 de [Ga4] p. ex.). De plus  $\|L_f\|_{v_0}$  est plus petit que la norme de Hilbert-Schmidt de  $L_f$ , qui n'est rien d'autre que la norme  $|\ell|_{2,v_0}$  du vecteur ligne  $\ell = (\ell_i(\mathbf{f}_j))_{i,j} \in \mathbf{C}_{v_0}^{t^2}$  des coefficients de  $L_f$ . En particulier on a  $\|L_f\|_{v_0} \leq bt\sqrt{n}$ . Par ailleurs, en ce qui concerne l'estimation de  $|\det L_f|_{v_0}^{-1}$ , le choix de la base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t)$  montre que  $\mathbf{e}_l = \epsilon_{1,l}\mathbf{f}_1 + \dots + \epsilon_{l,l}\mathbf{f}_l$  pour tout  $l \in \{1, \dots, t\}$  avec  $\epsilon_{h,l} \in \mathbf{C}_{v_0}$ . Il s'ensuit l'égalité  $\det L_f = (\prod_{l=1}^t \epsilon_{l,l})^{-1} \det L_e$  où  $L_e$  désigne la matrice  $t \times t$  de coefficients  $\ell_i(\mathbf{e}_j)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, t\}$ . On note que  $|\epsilon_{l,l}|_{v_0} \leq |\mathbf{e}_l|_{2,v_0}$  et que, de plus, on a

$$|\mathbf{e}_l|_{2,v_0} = \begin{cases} |(\beta_{l,1}, \dots, \beta_{l,n})|_{2,v_0} & \text{si } v_0 \mid \infty \\ 1 & \text{si } v_0 \nmid \infty \end{cases} \leq b\sqrt{n}.$$

Pour conclure, il suffit de minorer la valeur absolue de  $\det L_e$ . On procède au moyen de la formule du produit  $\prod_v |\det L_e|_v^{n_v} = 1$  qui peut s'appliquer car  $L_e$  est à coefficients algébriques. On a la majoration triviale  $|\det L_e|_v \leq t! \prod_{m=1}^t \max_{1 \leq l \leq t} |\ell_m(\mathbf{e}_l)|_v$  (le  $t!$  doit être supprimé si  $v$  est ultramétrique) et l'égalité

$$\ell_m(\mathbf{e}_l) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \beta_{m,j} \overline{\beta_{l,j}} & \text{si } v_0 \mid \infty, \\ \beta_{m,i_l} & \text{si } v_0 \nmid \infty \end{cases}$$

où  $i_l$  est l'indice du vecteur de la base canonique correspondant à  $\mathbf{e}_l$  lorsque  $v_0$  est ultramétrique. Dans les deux cas, on a

$$|\ell_m(\mathbf{e}_l)|_v \leq n \max_{1 \leq j \leq n} \{1, |\beta_{m,j}|_v\} \max_{1 \leq j \leq n} \{1, |\overline{\beta_{l,j}}|_v\}$$

( $n$  devant être remplacé par 1 si  $v$  est ultramétrique). On en déduit les majorations

$$|\det L_e|_{v_0}^{-n_{v_0}} = \prod_{v \neq v_0} |\det L_e|_v^{n_v} \leq (t!n^t)^D b^{2nt^2} \leq b^{3nt^2}.$$

De cette estimation découle la majoration  $\|L_f^{-1}\| \leq (bt\sqrt{n})^{t-1} (b\sqrt{n})^t b^{3nt^2} \leq (bn)^{3n^3} n^{-1/2}$  puis le résultat voulu grâce à (10).  $\square$

**5.4. Choix des paramètres.** — Soit  $C_0 := (6n)^{22n}$ . Posons  $y := 0$  si  $t = 1$  et  $\beta_{1,0} \neq 0$  et  $y := 1$  sinon. Soit  $S_0 := C_0 \mathbf{a}$  et  $S := C_0^3 \mathbf{a}$ . Soit  $U_{-1} > 0$  un nombre réel défini un peu plus loin. En se rappelant que  $p_{v_0}$  désigne le nombre premier associé à la place  $v_0$  lorsque celle-ci est ultramétrique, posons

$$(11) \quad U_0 := \begin{cases} U_{-1} & \text{si } v_0 \text{ est archimédienne,} \\ \max\{U_{-1}, \log p_{v_0}\} & \text{si } v_0 \text{ est ultramétrique.} \end{cases}$$

Soit  $\tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n, \tilde{T}, \tilde{T}_0$  les nombres réels donnés par les formules suivantes :

$$\tilde{T}_0 := \frac{C_0 U_0}{S \log \mathfrak{e}}, \quad \tilde{T} := C_0^2 \tilde{T}_0,$$

$$\tilde{D}_0 := \frac{U_0}{\log b + D \log S + S^y \log \mathfrak{e}}$$

(la présence du paramètre  $y$  au dénominateur explique le raffinement donné dans le théorème 5.1 lorsqu'il n'y a qu'une seule forme linéaire, non homogène) et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \tilde{D}_i := \frac{U_0}{S \log \mathfrak{e} + DS \log a_i}.$$

Un sous-groupe algébrique connexe  $G'$  de  $G$  se décompose sur  $\bar{k}$  en un produit  $G'_0 \times \mathbf{G}'_m$  avec  $G'_0$  (resp.  $\mathbf{G}'_m$ ) un sous-groupe algébrique connexe de  $G_0$  (resp.  $\mathbf{G}_m^n$ ). Posons

$$(12) \quad t' := \dim G'_0, \quad n' := \dim \mathbf{G}'_m, \quad r' := \text{codim}_G G', \quad \lambda' := \text{codim}_W (W \cap t_{G'}).$$

De simples considérations d'algèbres linéaires montrent que

$$(13) \quad r' - \lambda' = t - \dim(t_{G'_0} + \lambda(t_{\mathbf{G}'_m})) \leq \min\{t - t', n - n'\}.$$

Par ailleurs, les groupes algébriques  $G_0$  et  $G$  admettent des compactifications naturelles  $X_0 := \mathbf{P}(k \oplus (k^n/W_0)^\vee)$  et  $X := X_0 \times (\mathbf{P}_k^1)^n$ . À une sous-variété  $V$  de  $X_{\bar{k}}$  est associé un polynôme dit de Hilbert-Samuel  $H_V$  à  $n+1$  variables. Soit  $\mathcal{H}(V; X_0, \dots, X_n)$  la partie homogène de plus haut degré de  $H_V$  multipliée par  $(\dim V)!$ . Les coefficients de  $\mathcal{H}$  sont des entiers positifs de somme égale au degré de  $V$  (voir p. ex. [Rél]). Posons

$$p := (u_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{et} \quad \Sigma_p(S) := \{0_G, p, 2p, \dots, Sp\}.$$

Lorsque  $W + t_{G'} \neq t_G$  (et en particulier  $t' \neq t$ ), on pose

$$x(G') := \left( \frac{\tilde{T}^{\lambda'} \text{card} \left( \frac{\Sigma_p(S) + G'(\mathbf{C}_{v_0})}{G'(\mathbf{C}_{v_0})} \right) \mathcal{H}(G'; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)}{C_0 \mathcal{H}(G; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)} \right)^{\frac{1}{t-t'}}.$$

Soit  $x$  le minimum des nombres réels  $x(G')$  lorsque  $G'$  parcourt les sous-groupes algébriques connexes de  $G$  tels que  $W + t_{G'} \neq t_G$  (l'existence de  $x$  découle d'un argument standard, expliqué par exemple à la page 734 de [Ga2]). Soit  $\tilde{G} = \tilde{G}_0 \times \tilde{\mathbf{G}}_m$  un sous-groupe algébrique vérifiant ces conditions et tel que  $x = x(\tilde{G})$ , auquel on adjoint les entiers  $\tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{r}, \tilde{\lambda}$  définis par (12). Nécessairement on a  $\tilde{n} < n$  car sinon  $t_{\tilde{G}} + W = t_G$ . Notons  $T := [\tilde{T}]$ ,  $D_0 := [x\tilde{D}_0]$  et, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $D_i := [\tilde{D}_i]$ . L'homogénéité de la fonction  $\mathcal{H}$  permet de voir que la quantité  $U_0^{(r'-\lambda')/(t-t')} x(G')$  ne dépend pas de  $U_0$ , lorsque  $G'$  varie parmi les sous-groupes autorisés. En observant que  $\{0\}$  fait partie de ces sous-groupes, nous pouvons choisir  $U_0$  de sorte que  $x(\{0\}) \leq 1$  (et, en particulier, on a  $x \in ]0, 1]$ ). Concrètement, la condition  $x(\{0\}) \leq 1$  est satisfaite si l'on choisit  $U_{-1}$  égal à

$$(14) \quad C_0^{(3n-1)/t} \left\{ \frac{t! \text{card}(\Sigma_p(S))}{(n+t)!} \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{D \log a_i}{\log \mathfrak{e}} \right) \right\}^{1/t} \times (\log b + D \log S + S^y \log \mathfrak{e}).$$

On notera que  $\text{card}(\Sigma_p(S)) = S$  sauf, éventuellement, si  $n = 1$ ,  $\beta_{1,0} = 0$  et si  $u_1 = 2i\pi$ , cas où le théorème 5.1 est trivial. On peut donc supposer dans la suite que  $\text{card}(\Sigma_p(S)) = S$ . L'expression (14) de  $U_{-1}$  permet de justifier les estimations suivantes.

PROPOSITION 5.4. — *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (i)  $C_0 \max\{1, \tilde{D}_0/S^{1-y}, \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n\} \leq \tilde{T}_0$ ,
- (ii)  $D_0 \neq 0$  et  $C_0 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{\tilde{D}_j\}$  (en particulier l'un au moins des  $D_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , n'est pas nul),
- (iii)  $D \log \mathfrak{a} \leq 2\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}$ ,
- (iv)  $T \log(4\tilde{D}_0) \leq (10n \log C_0) U_0/D$ .

*Démonstration.* — Si les inégalités (i) et (ii) se vérifient aisément à partir des valeurs des paramètres, il n'est pas entièrement évident que  $D_0$  est non nul, en raison du  $x$  devant  $\tilde{D}_0$ . Pour voir cela, on reprend l'argumentation du lemme 5.1, (iii), de [Ga2] qui repose sur une propriété de décroissance d'un quotient de fonctions  $\mathcal{H}$  et sur l'inégalité  $\tilde{\lambda} \geq n - \tilde{n} \geq 1$ . On a

$$\begin{aligned} (x\tilde{D}_0)^{t-\tilde{t}} &\geq \frac{\tilde{T}^{\tilde{\lambda}} \mathcal{H}(\tilde{G}; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n) \tilde{D}_0^{t-\tilde{t}}}{C_0 \mathcal{H}(G; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)} \\ &\geq \frac{\tilde{T}^{\tilde{\lambda}}}{C_0 \binom{n+t}{t} \max_{1 \leq i \leq n} \{\tilde{D}_i\}^{n-\tilde{n}}} \\ &\geq \frac{C_0^{3\tilde{\lambda}-1}}{(n+t)!} \quad (\text{grâce à (i)}). \end{aligned}$$

La valeur de  $C_0$  entraîne alors  $(x\tilde{D}_0)^{t-\tilde{t}} \geq 1$  puis  $D_0 \geq 1$ . Venons-en maintenant à (iii) et (iv) qui requièrent aussi quelques détails. Tout d'abord, on a

$$\log \mathbf{a} = \log \left( \frac{\mathbf{a} \log \mathfrak{e}}{D} \frac{D}{\log \mathfrak{e}} \right) \leq \frac{2\mathbf{a} \log \mathfrak{e}}{D}$$

(car  $\log x \leq x$  si  $x \geq 1$ ), ce qui donne (iii). Par ailleurs, si  $U_0 = U_{-1}$ , les définitions de  $T$  et  $\tilde{D}_0$  combinées avec la valeur (14) de  $U_{-1}$  donnée ci-dessus impliquent

$$T \log(4\tilde{D}_0) \leq \frac{U_0}{\mathbf{a} \log \mathfrak{e}} \log \left( C_0^{3n+3} \mathbf{a} \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{D \log a_i}{\log \mathfrak{e}} \right) \right).$$

En majorant le produit qui est dans le logarithme du majorant par

$$\left( 1 + \frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log \prod_{i=1}^n a_i \right)^n \leq \left( 1 + \exp \left\{ \frac{2\mathbf{a} \log \mathfrak{e}}{D} \right\} \right)^n$$

on a

$$T \log(4\tilde{D}_0) \leq \frac{U_0}{\mathbf{a} \log \mathfrak{e}} \left( (3n+3) \log C_0 + \log \mathbf{a} + 3n \frac{\mathbf{a} \log \mathfrak{e}}{D} \right).$$

On utilise alors (iii) pour majorer  $\log \mathbf{a}$  et conclure. Si  $U_0 = \log p_{v_0}$  ( $v_0$  ultramétrique), il s'agit simplement de remarquer que  $(\log \log p_{v_0}) / (\mathbf{a} \log \mathfrak{e}) \leq 3/D \leq (10n \log C_0) / D$  en utilisant la définition de  $\mathbf{a}$ .  $\square$

Désignons par  $\Omega_{v_0}$  l'ensemble  $\{0\} \times (2i\pi\mathbf{Z})^n$  si  $v_0$  est archimédienne et l'ensemble  $\{0\}$  sinon.

**DÉFINITION 5.5.** — Nous dirons que nous sommes dans le *cas périodique* s'il existe un entier  $m \in \{1, \dots, (n+t)S\}$  tel que  $m(u_0, u) \in t_{\tilde{G}}(\mathbf{C}_{v_0}) + \Omega_{v_0}$ , et que nous sommes dans le *cas non périodique* dans le cas contraire.

Dans le cas périodique, la lettre  $\Upsilon$  désigne l'ensemble des couples  $(m, \tau)$  avec  $m \in \{0, 1, \dots, (n+t)S\}$  et  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$  qui vérifie  $\sum_{i=1}^n \tau_i \leq 2(n+t)T$  et  $\tau_n \leq T_0$ . Dans le cas non périodique,  $\Upsilon$  est l'ensemble des couples  $(m, \tau)$  avec  $m \in \{0, 1, \dots, S_0 - 1\}$  et  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$  qui vérifie  $\sum_{i=1}^n \tau_i \leq 2(n+t)T$ . Dans les deux cas, nous notons  $\mu$  le cardinal de  $\Upsilon$ .

**REMARQUE.** — Comme la famille  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est libre sur  $\mathbf{Q}$ , être dans le cas périodique implique que la place  $v_0$  est archimédienne et que la famille  $\{2i\pi, u_1, \dots, u_n\}$  est liée sur  $\mathbf{Q}$  (c.-à-d.  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  multiplicativement dépendants). Comme il ne peut exister qu'une seule relation, à multiplication par un scalaire non nul près, entre  $2i\pi$  et les  $u_j$  (sinon existerait une relation non triviale entre les  $u_j$ ), le groupe  $\tilde{\mathbf{G}}_m$  est de dimension  $n-1$  et son espace tangent contient  $W_0$ .

**5.5. Charnière de la démonstration et compléments au cas périodique.** — Comme nous l'avons vu ci-dessus, le groupe algébrique  $\tilde{\mathbf{G}}_m$  est de dimension  $\leq n-1$ . En particulier, comme  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est libre sur  $\mathbf{Q}$  on a  $u \notin t_{\tilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}_{v_0})$ . Par conséquent les vecteurs  $(u_0, u)$  et  $(\lambda(u), u)$  n'appartiennent pas à l'espace tangent du groupe algébrique  $\tilde{G}(\mathbf{C}_{v_0})$ . L'intersection  $W \cap t_{\tilde{G}}$  est donc un sous-espace strict de  $W$  (car ce dernier contient  $(\lambda(u), u)$ ). Fixons alors une base *orthonormée*  $w := (w_1, \dots, w_n)$  de  $W \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$  qui possède en outre les deux propriétés suivantes :

(i)  $(w_1, \dots, w_n)$  est une base de  $(W \cap t_{\tilde{G}}) \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$  (le  $\mathfrak{n}$  gothique est la dimension de  $W \cap t_{\tilde{G}}$ ),

(ii) si  $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \in \mathbf{C}_{v_0}^n$  désigne le vecteur des coordonnées de  $(\lambda(u), u)$  dans la base  $(w_1, \dots, w_n)$  alors  $|\mathbf{u}_n|_{v_0} = \max \{|\mathbf{u}_j|_{v_0}; \mathfrak{n} + 1 \leq j \leq n\}$ .

Dans le cas périodique (et cette hypothèse implique maintenant que nécessairement  $v_0$  est archimédienne puisque  $(u_0, u) \notin t_{\tilde{G}}(\mathbf{C}_{v_0})$ ), l'on sait minorer  $|\mathbf{u}_n|_{v_0}$  de la manière suivante. Il existe un entier  $m \in \{1, \dots, (n+t)S\}$ ,  $x \in t_{\tilde{G}}(\mathbf{C})$  et  $\omega \in (2i\pi\mathbf{Z})^n \setminus \{0\}$  tels que  $m(u_0, u) = x + (0, \omega)$ . Soit  $d_{v_0}$  la distance sur  $t_G(\mathbf{C}_{v_0})$  induite par la norme  $\|\cdot\|_{\tilde{G}, v_0}$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que  $|\mathbf{u}_n|_{v_0}$  est minoré par

$$\begin{aligned} \frac{d_{v_0}(m(\lambda(u), u), t_{\tilde{G}}(\mathbf{C}))}{m\sqrt{n}} &= \frac{d_{v_0}((m(\lambda(u) - u_0), \omega), t_{\tilde{G}}(\mathbf{C}))}{m\sqrt{n}} \\ &\geq \frac{d_{v_0}(\omega, t_{\tilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}))}{(n+t)S\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

À ce stade, nous aurons besoin d'un résultat que l'on trouve en substance dans [BP] et de manière plus explicite dans la démonstration de la proposition 6.1 de [Ré2]. Pour  $x \in \mathbf{R}^n$ , on note  $|x|_1$  la somme des valeurs absolues des composantes de  $x$ .

LEMME 5.6. — *Soit  $H$  un sous-groupe algébrique connexe de  $\mathbf{G}_m^n$ , de dimension  $h \in \{1, \dots, n-1\}$ . Alors il existe une famille libre  $\{\mathbf{h}_i := (h_{i,1}, \dots, h_{i,n}); 1 \leq i \leq n-h\}$  de  $\mathbf{Z}^n$  telle que*

- (i)  $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{G}_m^n; \forall i \in \{1, \dots, n-h\}, \prod_{j=1}^n x_j^{h_{i,j}} = 1\}$
- (ii)  $\prod_{i=1}^{n-h} |\mathbf{h}_i|_1 \leq \frac{(n-h)!}{h!} \deg H$  (le degré est relatif au plongement usuel  $\mathbf{G}_m^n \hookrightarrow (\mathbf{P}^1)^n$ ).

En utilisant ce lemme, nous allons minorer  $d_{v_0}(\omega, t_{\tilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}))$  de la manière suivante. On choisit  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-h}$  comme dans le lemme, appliqué à  $H = \tilde{\mathbf{G}}_m$ . Les conjugués de ces vecteurs forment une  $\mathbf{C}$ -base de l'orthogonal de  $t_{\tilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C})$  dans  $(\mathbf{C}^n, |\cdot|_{2, v_0})$ . Ainsi la projection  $\omega'$  de  $\omega$  sur cet orthogonal est de norme égale à  $d_{v_0}(\omega, t_{\tilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}))$ . Par Cauchy-Schwarz, le produit scalaire  $\omega \cdot \mathbf{h}_l$  de  $\omega$  et de  $\mathbf{h}_l$  est donc de valeur absolue inférieure à  $|\mathbf{h}_l|_2 |\omega'|_2$ . Or ce produit scalaire appartient à  $2i\pi\mathbf{Z}$  et il existe  $l \in \{1, \dots, n-h\}$  tel que  $\omega \cdot \mathbf{h}_l \neq 0$ . En observant que  $|\mathbf{h}_l|_2 \leq |\mathbf{h}_l|_1 \leq \prod_{i=1}^{n-h} |\mathbf{h}_i|_1$ , on en déduit l'inégalité

$$d_{v_0}(\omega, t_{\tilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C})) \geq \frac{2\pi}{n! \deg \tilde{\mathbf{G}}_m}$$

puis l'énoncé suivant.

PROPOSITION 5.7. — *Dans le cas périodique, on a  $|\mathbf{u}_n|_{v_0}^{-1} \leq (2n)^{3n} (\deg \tilde{\mathbf{G}}_m) S$ .*

Pour être utile, cette proposition devra être couplée avec le résultat suivant.

PROPOSITION 5.8. — *On a  $(2n)^{3n} \deg \tilde{\mathbf{G}}_m \leq \tilde{D}_0^n$ .*

*Démonstration.* — Par définition de  $\tilde{G}$ , on a  $x(\tilde{G}) \leq x(\{0\}) = 1$  et la définition de  $x(\tilde{G})$  entraîne alors la majoration

$$(15) \quad \frac{\tilde{T}^{\tilde{\lambda}} \mathcal{H}(\tilde{G}; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)}{C_0 \mathcal{H}(G; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)} \leq 1.$$

En décomposant la fonction  $\mathcal{H}$  sur les parties  $G_0$  et  $\mathbf{G}_m^n$  et en utilisant la décroissance des fonctions partielles

$$x_i \mapsto \frac{\mathcal{H}(\tilde{G}; \tilde{D}_0, \dots, x_i, \dots, \tilde{D}_n)}{\mathcal{H}(G; \tilde{D}_0, \dots, x_i, \dots, \tilde{D}_n)},$$

l'inégalité (15) devient

$$\tilde{T}^{\tilde{\lambda}} n! t! \deg \tilde{\mathbf{G}}_m \leq C_0 (n+t)! (\tilde{D}_0)^{t-\tilde{t}} \max_{1 \leq i \leq n} \{\tilde{D}_i\}^{n-\tilde{n}}.$$

Comme  $\tilde{\lambda} \geq n - \tilde{n}$  (voir (13)) et comme  $\tilde{T} \geq C_0^3 \max_{1 \leq i \leq n} \{\tilde{D}_i\}$  (propriété 5.4, (i)), on a  $C_0^2 \deg \tilde{\mathbf{G}}_m \leq 2^{n+t} (\tilde{D}_0)^t$  et la proposition s'en déduit.  $\square$



**5.6. Lemme de multiplicités.** — Au § 3.0.2, nous avons introduit la notion de polynôme multihomogène. Elle va nous permettre de définir un espace vectoriel dans lequel sera la section auxiliaire que nous allons construire au § 5.16. Soit  $E_0 := k \oplus (k^n/W_0)$  et, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $E_i := k \oplus k$ . Posons

$$E := S^{D_0}(E_0^\vee) \otimes_k \bigotimes_{i=1}^n S^{D_i}(E_i^\vee).$$

En une place  $v$  de  $k$ , soit  $s \in E \otimes_k \mathbf{C}_v$  et considérons  $F_{s,v} : (k^n/W_0) \otimes \mathbf{C}_v \times \prod_{i=1}^n \mathcal{T}_v \rightarrow \mathbf{C}_v$  l'application qui à  $(z_0, z_1, \dots, z_n)$  associe

$$(16) \quad F_{s,v}(z_0, z_1, \dots, z_n) = s((1, z_0), (1, e^{z_1}), \dots, (1, e^{z_n}))$$

(dans cette écriture nous avons identifié  $k$  et son dual *via* la base canonique).

**DÉFINITION 5.9.** — Soit  $\ell \in \mathbf{N}$  et  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in G(\mathbf{C}_v)$ . On dit qu'un polynôme  $s \in E \otimes_k \mathbf{C}_v$  s'annule au point  $x$  à l'ordre  $\ell$  le long de  $W$  (en la place  $v$  de  $k$ ) si l'application

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto s((1, x_0 + \lambda(z_1, \dots, z_n)), (1, x_1 e^{z_1}), \dots, (1, x_n e^{z_n}))$$

s'annule à l'ordre  $\ell$  en  $(0, \dots, 0)$ , *i.e.* que la série formelle en les variables  $z_1, \dots, z_n$  définie par cette application est un élément de l'idéal  $(z_1, \dots, z_n)^\ell$  de  $\mathbf{C}_v[[z_1, \dots, z_n]]$ .

Si le point  $x$  est l'image du vecteur  $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in (k^n/W_0) \otimes_k \mathbf{C}_v \times \prod_{i=1}^n \mathcal{T}_v$  par l'application exponentielle de  $G(\mathbf{C}_v)$  alors dire que  $s$  s'annule au point  $x$  à l'ordre  $\ell$  le long de  $W$  équivaut à dire que l'application

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto F_{s,v}(z_0 + \lambda(z_1, \dots, z_n), z_1 + z_1, \dots, z_n + z_n)$$

s'annule à l'ordre  $\ell$  au point  $(0, \dots, 0)$ .

Passons maintenant au résultat principal de ce paragraphe.

**PROPOSITION 5.10.** — Soit  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ . Aucun élément non nul de  $E \otimes \bar{k}$  ne s'annule le long de  $W$  à l'ordre  $(n+t)T$  en tous les points de l'ensemble  $\{0_G, p, \dots, (n+t)Sp\}$ .

La démonstration est presque la même que celle de la proposition 5.3 de [Ga2], où le rôle joué par  $\mathbf{G}_m^n$  était dévolu à une variété abélienne. Ici, il y a quelques simplifications qui augmentent la clarté de la preuve. C'est la raison pour laquelle nous la reproduisons ci-après, sous une forme un peu abrégée.

*Démonstration.* — Supposons cet énoncé faux et qu'un tel polynôme existe. D'après le lemme de multiplicités [Ph], il existe un sous-groupe algébrique connexe  $G_0^*$  (*resp.*  $\mathbf{G}_m^*$ ) de  $G_{0,\bar{k}}$  (*resp.* de  $\mathbf{G}_{m,\bar{k}}^n$ ) tel que  $G^* := G_0^* \times \mathbf{G}_m^* \neq G_{\bar{k}}$  et

$$(17) \quad T^{\lambda^*} \text{card} \left( \frac{\Sigma_p(S) + G^*(\bar{k})}{G^*(\bar{k})} \right) \mathcal{H}(G^*; D'_0, \dots, D'_n) \leq \mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n)$$

où  $D'_i := \max\{1, D_i\}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Nous allons montrer que cette inégalité ne peut pas être satisfaite en distinguant deux cas. Quitte à permuter les facteurs dans  $\mathbf{G}_m^n$ , l'on peut supposer  $D_1 \leq \dots \leq D_n$  sans perte de généralité.

**Premier cas :**  $t_{G^*} + W_{\bar{k}} = t_{G_{\bar{k}}}$ , *c.-à-d.*  $\lambda^* = r^*$ . De l'inégalité (17) l'on déduit l'existence la majoration

$$\text{card} \left( \frac{\Sigma_p(S) + G^*(\bar{k})}{G^*(\bar{k})} \right) \leq \frac{(n+t)!}{t!} \left( \frac{D_0}{T} \right)^{t-t^*} \left( \frac{D_n}{T} \right)^{n-n^*}.$$

En observant que le cardinal à gauche vaut  $S+1$  lorsque  $t=1$  et  $t^*=0$ , la première propriété de la proposition 5.4 contredit cette inégalité.

**Second cas :**  $t_{G^*} + W_{\bar{k}} \neq t_{G_{\bar{k}}}$ . En particulier on a  $t^* \neq t$ . Soit  $\kappa$  le plus petit entier de  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $D_\kappa \geq 1$ . Soit  $\pi_\kappa : \mathbf{G}_m^n \rightarrow \mathbf{G}_m^{n-\kappa+1}$  la projection sur les  $n-\kappa+1$  derniers facteurs. Posons  $G_\kappa^* := G_0^* \times \mathbf{G}_m^{\kappa-1} \times \pi_\kappa(\mathbf{G}_m^*)$ . Une propriété de la fonction  $\mathcal{H}$  assure que

$$\mathcal{H}(\pi_\kappa(\mathbf{G}_m^*); D_\kappa, \dots, D_n) \leq \mathcal{H}(\mathbf{G}_m^*; D_1, \dots, D_n),$$

ce qui entraîne

$$\frac{\mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n)}{\mathcal{H}(G^*; D'_0, \dots, D'_n)} \leq n! \frac{\mathcal{H}(G; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)}{\mathcal{H}(G_\kappa^*; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)} x^{t-t^*}.$$

De plus, comme  $G^* \subseteq G_\kappa^*$  on a  $\lambda_\kappa^* := \text{codim}_{W_\kappa}(W_\kappa \cap t_{G_\kappa^*}) \leq \lambda^*$  et

$$\text{card} \left( \frac{\Sigma_p(S) + G_\kappa^*(\bar{k})}{G_\kappa^*(\bar{k})} \right) \leq \text{card} \left( \frac{\Sigma_p(S) + G^*(\bar{k})}{G^*(\bar{k})} \right).$$

De la sorte l'on obtient une inégalité analogue à (17) avec le sous-groupe algébrique  $G_\kappa^*$  :

$$(18) \quad T^{\lambda_\kappa^*} \text{card} \left( \frac{\Sigma_p(S) + G_\kappa^*(\bar{k})}{G_\kappa^*(\bar{k})} \right) \mathcal{H}(G_\kappa^*; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n) \leq n! \mathcal{H}(G; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n) x^{t-t^*}.$$

En reprenant l'étude du premier cas (on a bien  $G_\kappa^* \neq G_{\bar{k}}^*$  car  $t^* \neq t$ ) et compte tenu du fait que  $x \leq 1$ , on montre que  $\lambda_\kappa^* \neq r_\kappa^*$ . Ceci signifie que  $t_{G_\kappa^*} + W_\kappa \neq t_{G_{\bar{k}}^*}$  et la majoration (18) entre alors en contradiction avec la définition de  $x$ .  $\square$

**5.7. Fibré vectoriel adélique des sections auxiliaires.** — Reprenons l'espace vectoriel  $E$  défini au début du § 5.6 et notons  $\nu := \dim E$  sa dimension. L'objectif de ce paragraphe est de munir  $E$  d'une structure de fibré adélique hermitien assez particulière de manière à permettre d'extrapoler plus tard sur les dérivations. Tout d'abord, les espaces  $E_i$  qui entrent dans la définition de  $E$  sont naturellement munis d'une structure adélique hermitienne : pour  $E_0 = k \oplus k^n/W_0$  on choisit la structure quotient du fibré  $(k^n, |\cdot|_2)$  sur  $k^n/W_0$  et l'on fait une somme directe hermitienne avec  $k$  (muni de sa collection de valeur absolue) ; pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $E_i = k \oplus k$  et l'on prend simplement la norme  $|\cdot|_2$  de  $k^2$ . Comme nous l'avons décrit au § 3.0.2, ces structures hermitiennes confèrent à  $E$  une première structure de fibré adélique hermitien  $\bar{E} := (E, (\|\cdot\|_v))$ . Mais ce n'est pas tout à fait cette structure que l'on va mettre sur  $E$ . En la place  $v_0$ , nous allons ajouter une quantité supplémentaire à  $\|\cdot\|_{v_0}$ , comme nous l'avons fait au § 4 pour établir le lemme de Siegel approché absolu.

*Norme particulière en la place  $v_0$ .* — Soit  $(w_1, \dots, w_n)$  la base orthonormée de  $W \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$  introduite au § 5.5. Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $e_i$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de  $k^n$ . La famille  $\{(\lambda(e_i), e_i); 1 \leq i \leq n\}$  est une base de  $W$ , dans laquelle les vecteurs  $w_i$  peuvent s'exprimer. Ainsi il existe des formes linéaires  $\{l_i(z_1, \dots, z_n); 1 \leq i \leq n\} \subseteq (\mathbf{C}_{v_0}^n)^\vee$  telles que

$$(19) \quad \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}_{v_0}^n, \quad \sum_{i=1}^n z_i w_i = \sum_{i=1}^n l_i(z_1, \dots, z_n) (\lambda(e_i), e_i).$$

Pour  $s \in E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ ,  $m \in \mathbf{N}$  et  $\tau \in \mathbf{N}^n$ , notons  $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u))$  le  $\tau^{\text{ème}}$  coefficient de Taylor à l'origine de l'application

$$z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto F_{s, v_0}(mu_0 + \lambda(l_1(z), \dots, l_n(z)), mu_1 + l_1(z), \dots, mu_n + l_n(z))$$

(voir (16) pour la définition de  $F_{s, v_0}$ ). Soit  $(s_1, \dots, s_\nu)$  une base orthonormée de  $(E_{v_0}, \|\cdot\|_{v_0})$ . Considérons la matrice  $\mathbf{A}$ , de taille  $\mu \times \nu$ , dont les coefficients sont les éléments de  $\mathbf{C}_{v_0}$  suivants : pour tout  $(m, \tau) \in \Upsilon$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, \nu\}$ ,

$$(20) \quad \mathbf{A}[(m, \tau), i] := \left( \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s_i, v_0}(m(u_0, u)) \right) \times \alpha'_{v_0}(m(u_0, u))$$

où, par définition, pour  $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in t_{G_0}(\mathbf{C}_{v_0}) \oplus \mathcal{T}_{v_0}^n$ , le terme  $\alpha'_{v_0}(z)$  est un élément (quelconque) de  $\mathbf{C}_{v_0}$  de valeur absolue égale à

$$(21) \quad |\alpha'_{v_0}(z)|_{v_0} = \alpha_{v_0}(z) := \prod_{j=1}^n |(1, e^{z_j})|_{2, v_0}^{-D_j} \times \begin{cases} \max\{1, \|z_0\|_{t_{G, v_0}}\}^{-D_0} & \text{si } v_0 \nmid \infty, \\ (1 + \|z_0\|_{t_{G, v_0}}^2)^{-D_0/2} & \text{si } v_0 \mid \infty. \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir la norme voulue sur  $E_{v_0}$  : soit  $\alpha \in k_{v_0}$ . Pour tout  $s = \sum_{i=1}^\nu x_i s_i \in E_{v_0}$ ,

$$(22) \quad \|s\|_{\bar{E}_\alpha, v_0} := \begin{cases} (|x|_{2, v_0}^2 + |\alpha \mathbf{A} x|_{2, v_0}^2)^{1/2} & \text{si } v_0 \mid \infty, \\ \max\{|x|_{2, v_0}, |\alpha \mathbf{A} x|_{2, v_0}\} & \text{si } v_0 \nmid \infty. \end{cases}$$

Dans ces expressions,  $x$  désigne le vecteur colonne de coordonnées  $x_1, \dots, x_\nu$ . Par définition, le fibré adélique hermitien  $\bar{E}_\alpha$  est le fibré égal à  $\bar{E}$  sauf en la place  $v_0$  où la norme est donnée par la formule (22) (on retrouve  $\bar{E}$  si l'on prend  $\alpha = 0$ ).

LEMME 5.11. — *La pente d'Arakelov normalisée  $\widehat{\mu}_n(\overline{E})$  du fibré adélique hermitien  $\overline{E}$  est minorée par  $-D_0 h(\overline{W}_0)/(t+1)$ .*

En réalité, on connaît une formule exacte pour cette pente, formule qui entraîne immédiatement le lemme. Pour cela, l'on peut se référer au lemme 7.3. de [Ga4] en tenant compte du fait que la pente d'Arakelov est additive vis à vis du produit tensoriel de fibrés adéliques hermitiens (voir proposition 5.2 de [Ga4]).

### 5.8. Estimation du rang d'un système linéaire. —

LEMME 5.12. — *Soit  $a, x, y$  des entiers naturels. Alors on a*

$$\binom{x+y+a}{a} - \binom{x+a}{a} \leq ay(x+y+1)^{a-1}.$$

*Démonstration.* — À  $x, a$  fixés, la fonction  $H : y \mapsto \binom{x+y+a}{a} - \binom{x+a}{a}$  est une fonction polynomiale à coefficients positifs. Cette fonction est convexe sur  $\mathbf{R}^+$  car de dérivée seconde positive. On a donc  $H(y) = H(y) - H(0) \leq yH'(y)$ . Le calcul explicite de  $H'(y)$  comme une somme sur  $a$  produits de  $a-1$  termes conduit à la majoration  $H'(y) \leq \sum_{i=1}^a (x+y+1)^{a-1} = a(x+y+1)^{a-1}$ .  $\square$

PROPOSITION 5.13. — *Soit  $\rho$  le rang de la matrice  $A$  de coefficients (20). Alors  $\rho \leq (6n)^{4n\nu}/C_0$ .*

*Démonstration.* — Consubstantielle à la distinction entre le cas périodique et le cas non périodique et à l'introduction du groupe  $\widetilde{G}$ , l'argumentation n'a pas changé depuis l'article fondateur de Philippon & Waldschmidt [PW1]. En suivant l'approche plus effective de [Da] (§ 6.3) et en posant

$$(T_1, S_1) := \begin{cases} (T, S_0) & \text{dans le cas non périodique,} \\ (T_0, S) & \text{dans le cas périodique,} \end{cases}$$

on montre que

$$(23) \quad \rho \leq X \operatorname{card} \left( \frac{\Sigma_p(S_1) + \widetilde{G}(\overline{k})}{\widetilde{G}(\overline{k})} \right) (\dim \widetilde{G} + 1 + \mathcal{H}(\widetilde{G}; D'_0, \dots, D'_n))$$

avec

$$X = \begin{cases} \binom{2(n+t)T+\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\lambda}} & \text{dans le cas non périodique,} \\ \binom{2(n+t)T+\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\lambda}} - \binom{2(n+t)T-T_0+\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\lambda}} & \text{dans le cas périodique.} \end{cases}$$

Le lemme 5.12 entraîne la majoration  $X \leq (3(n+t))^{n+t} T^{\widetilde{\lambda}-1} T_1$ . Par ailleurs, rappelons que, pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , la fonction partielle  $x_i \mapsto \frac{\mathcal{H}(\widetilde{G}; x_0, \dots, x_n)}{\mathcal{H}(G; x_0, \dots, x_n)}$  décroît sur  $]0, +\infty[$ . Cette observation et les majorations  $\widetilde{D}_i/2 \leq D'_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $x\widetilde{D}_0/2 \leq D_0$  impliquent

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}(\widetilde{G}; D'_0, \dots, D'_n)}{\mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n)} &\leq 2^{n+t} \frac{\mathcal{H}(\widetilde{G}; x\widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n)}{\mathcal{H}(G; x\widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)} \\ &= \frac{2^{n+t} C_0}{\widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}} \operatorname{card} \left( \frac{\Sigma_p(S) + \widetilde{G}(\overline{k})}{\widetilde{G}(\overline{k})} \right)} \end{aligned}$$

(l'égalité repose sur la définition de  $x = x(\widetilde{G})$ ). En injectant cette estimation dans (23), nous avons

$$\rho \leq (6(n+t))^{2n} C_0 \max \left\{ \frac{T_0}{\widetilde{T}}, \frac{S_0}{S} \right\} \mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n).$$

La dimension  $\nu$  de  $E$  vaut  $\binom{D_0+t}{t} (D_1+1) \cdots (D_n+1)$  et, en particulier, on a

$$\mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n) = \frac{(n+t)!}{t!} D'_0{}^t D'_1 \cdots D'_n \leq (n+t)! \nu.$$

Par conséquent

$$\rho \leq (6(n+t))^{2n} (n+t)! C_0 \max \left\{ \frac{T_0}{\widetilde{T}}, \frac{S_0}{S} \right\} \nu.$$

Le choix des paramètres et l'inégalité  $t \leq n$  permettent alors de conclure.  $\square$

**5.9. Estimation d'une dérivée.** — Soit  $v$  une place de  $k$ . Soit  $s \in E \otimes_k \mathbf{C}_v$  que l'on écrit dans une base orthonormée comme dans (3) avec des coefficients  $p_i$ . On notera  $L(s) := \sum_i |p_i|_v$  si  $v$  est archimédienne et  $L(s) := \max_i \{|p_i|_v\}$  si  $v$  est ultramétrique. Soit  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$  une base de  $W \otimes_k \mathbf{C}_v$ . En procédant de la même manière qu'au paragraphe 5.7 (en remplaçant la base  $w$  d'alors par, ici,  $\mathbf{w}$ ), on dispose de la dérivée divisée  $\frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^{\tau} F_{s,v}(z)$  en un point  $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbf{C}_v^t \times \mathcal{T}_v^n$  à l'ordre  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$ . Voici une première estimation, très élémentaire mais d'un usage fréquent dans la suite.

PROPOSITION 5.14. — *Dans les conditions ci-dessus ( $v, s, \mathbf{w}, z, \tau$  quelconques), on a*

$$\left| \frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^{\tau} F_{s,v}(z) \right|_v \cdot \alpha_v(z) \leq e^{2n \max_{0 \leq i \leq n} \{D_i\} + |\tau|} \left\{ \prod_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\|_{\overline{tG},v}^{\tau_i} \right\} L(s)$$

où, rappelons-le,

$$\alpha_v(z) := \prod_{j=1}^n |(1, e^{z_j})|_{2,v}^{-D_j} \times \begin{cases} (1 + \|z_0\|_{\overline{tG},v}^2)^{-D_0/2} & \text{si } v \mid \infty, \\ \max\{1, \|z_0\|_{\overline{tG},v}\}^{-D_0} & \text{si } v \nmid \infty. \end{cases}$$

*Démonstration.* — Tout d'abord, observons que si l'on multiplie le vecteur  $\mathbf{w}_i$  par un nombre  $\theta_i$  alors  $\frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^{\tau} F_{s,v}(z)$  est multiplié par  $\prod_{i=1}^n \theta_i^{\tau_i}$ . On peut donc supposer que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\|\mathbf{w}_i\|_{\overline{tG},v} = 1$ . Considérons maintenant des formes linéaires  $l_1, \dots, l_n \in (\mathbf{C}_v^n)^{\vee}$  telles que, pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}_v^n$ , on a  $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^n l_i(x) (\lambda(e_i), e_i)$  (rappelons que  $e_i$  désigne le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathbf{C}_v^n$ ). La somme  $\alpha_j := \sum_{i=1}^n l_i(e_j) \lambda(e_i)$  est la composante de  $\mathbf{w}_j$  sur  $k^n/W_0 \otimes_k \mathbf{C}_v$ . Elle est donc de norme plus petite que 1.

Soit  $(e_{0,1}, \dots, e_{0,t})$  la base orthonormée de  $k^n/W_0$  choisie pour écrire les coefficients de  $s$  (cf. (3)). La quantité  $\left| \frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^{\tau} F_{s,v}(z) \right|_v$  que l'on cherche à évaluer est le coefficient devant  $x^{\tau}$  de l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto s((1, z_0 + \lambda(l_1(x), \dots, l_n(x))), (1, e^{z_1 + l_1(x)}), \dots, (1, e^{z_n + l_n(x)})).$$

Celle-ci est une somme de termes de la forme

$$(24) \quad p_{\mathbf{h}} \left\{ \prod_{a=1}^t \left( e_{0,a}^{\vee}(z_0) + \sum_{i=1}^n l_i(x) e_{0,a}^{\vee}(\lambda(e_i)) \right)^{h_{0,a}} \right\} \prod_{i=1}^n e^{h_i z_i + h_i l_i(x)}$$

où  $\mathbf{h}_0 = (h_{0,1}, \dots, h_{0,t}) \in \mathbf{N}^t$ ,  $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{N}^t \times \mathbf{N}^n$  avec, pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $|h_i| \leq D_i$ , et  $p_{\mathbf{h}} \in \mathbf{C}_v$  est l'un des coefficients de  $s$ . Comme seul le coefficient devant  $x^{\tau}$  nous intéresse, on peut remplacer l'exponentielle  $\exp\{\sum_{i=1}^n h_i l_i(x)\}$  qui est dans (24) par son développement de Taylor à l'ordre  $|\tau|$  :

$$(25) \quad Q_{\mathbf{h},\tau}(x) := \sum_{j=0}^{|\tau|} \frac{1}{j!} (h_1 l_1(x) + \dots + h_n l_n(x))^j.$$

De la sorte la quantité (24) peut être échangée par l'expression polynomiale

$$(26) \quad p_{\mathbf{h}} \left\{ \prod_{a=1}^t \left( e_{0,a}^{\vee}(z_0) + \sum_{j=1}^n x_j e_{0,a}^{\vee}(\alpha_j) \right)^{h_{0,a}} \right\} \left( \prod_{i=1}^n e^{h_i z_i} \right) Q_{\mathbf{h},\tau}(x).$$

La fonction longueur  $P \mapsto L(P)$  est sous-multiplicative :  $L(PQ) \leq L(P)L(Q)$  (voir [Wa3], p. 76). Cette propriété appliquée à la somme sur  $\mathbf{h}$  des expressions (26) permet de majorer  $\left| \frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^{\tau} F_{s,v}(z) \right|_v$  par

$$L(s) (\|z_0\|_{\overline{tG},v} + n)^{D_0} \left\{ \prod_{i=1}^n \max(1, |e^{z_i}|_v)^{D_i} \right\} \max_{\mathbf{h}} \{L(Q_{\mathbf{h},\tau})\}$$

(on notera que le vecteur  $e_{0,a}^{\vee}$  est de norme 1 et donc  $|e_{0,a}^{\vee}(z)|_v \leq \|z\|_{\overline{tG},v}$  pour tout  $z \in k^n/W_0 \otimes_k \mathbf{C}_v$ ). Pour conclure, il suffit d'estimer le maximum qui apparaît à la fin de cette expression. Lorsque la place  $v$  est archimédienne, la longueur de  $Q_{\mathbf{h},\tau}$  est majorée par

$$(27) \quad \sum_{j=0}^{|\tau|} \frac{1}{j!} (n \max\{D_1, \dots, D_n\})^j \leq e^{n \max\{D_1, \dots, D_n\}}.$$

Lorsque  $v$  est ultramétrique, si  $p_v$  désigne le nombre premier au-dessous de  $v$ , alors, pour tout  $j \in \mathbf{N}$ , on a  $|j|_v^{-1} \leq p_v^{j/(p_v-1)} \leq e^j$ . Dans ce cas la longueur de  $Q_{h,\tau}$  est plus petite que  $e^{|\tau|}$  et la proposition 5.14 est démontrée.  $\square$

**COROLLAIRE 5.15.** — *La norme d'opérateur de la matrice  $A$ , matrice définie au § 5.7, est inférieure à  $e^{10nU_0}$ .*

*Démonstration.* — On applique la proposition 5.14 à chacune des fonctions  $F_{s_i, v_0}$  qui intervient dans la définition (20) des coefficients de  $A$  avec  $v = v_0$ ,  $w = w$  et  $z = m(u_0, u)$ . D'après la fin du paragraphe 3.0.2, la longueur de  $s_i$  est plus petite que  $\sqrt{t}^{D_0} \sqrt{2}^{D_1 + \dots + D_n}$ . Ainsi les coefficients de  $A$  sont inférieurs à

$$e^{2n \max_{0 \leq i \leq n} \{D_i\} + 2(n+t)T} \sqrt{t}^{D_0} \sqrt{2}^{D_1 + \dots + D_n},$$

quantité elle-même plus petite que  $e^{7nU_0}$  d'après le choix des paramètres (début du § 5.4). En la comparant à la norme de Hilbert-Schmidt, on constate que la norme d'opérateur de  $A$  est plus petite que  $(\nu\mu)^{1/2} e^{7nU_0}$ . La dimension  $\nu$  de  $E$  vaut  $\binom{D_0+t}{t} (D_1+1) \cdots (D_n+1)$  et donc

$$(28) \quad \nu \leq \left(1 + \frac{U_0}{D}\right)^{t+n} \leq \exp\left(\frac{2nU_0}{D}\right) \leq e^{2nU_0}.$$

De même,  $\mu$  est le cardinal de  $\Upsilon$  (introduit à la suite de la définition 5.5). Il est inférieur à

$$\binom{2(n+t)T+n}{n} S(n+t) \leq (5nU_0)^{n+1} \leq (2n)^{2n} e^{2nU_0}$$

(on notera que  $S \leq U_0$  car  $S \leq \max\{\tilde{D}_i; 1 \leq i \leq n\} S \leq U_0$  (voir proposition 5.4, (ii)), et on utilise  $U_0 \leq e^{U_0-1}$ ). Ainsi on trouve  $\|A\| \leq (2n)^n e^{9nU_0}$  et le corollaire s'ensuit en majorant  $2n$  par  $e^{C_0} \leq e^{U_0}$  (voir formule (14)).  $\square$

### 5.10. Construction d'une section auxiliaire. —

**PROPOSITION 5.16.** — *Soit  $\alpha \in k_{v_0}$  tel que  $C_0^{5/4} U_0 \leq \log |\alpha|_{v_0} \leq C_0^{7/4} U_0$ . Il existe une section  $s \in E \otimes_k \bar{k}$ , non nulle, telle que*

$$(29) \quad h_{\bar{E}_\alpha}(s) \leq \frac{(6n)^{5n} C_0^{3/4} n_{v_0} U_0}{D}.$$

*REMARQUE.* — *L'existence d'un  $\alpha$  vérifiant la condition de cette proposition est évidente si  $v_0$  est archimédienne. Dans le cas ultramétrique, il n'est pas clair que l'intervalle*

$$[C_0^{5/4} U_{-1} / \log p_{v_0}, C_0^{7/4} U_{-1} / \log p_{v_0}]$$

*contienne un nombre entier. C'est la raison pour laquelle nous avons remplacé  $U_{-1}$  par  $U_0 = \max\{U_{-1}, \log p_{v_0}\}$ .*

*Démonstration.* — D'après le lemme de Siegel approché absolu du § 4, il existe un vecteur  $s \in E \otimes_k \bar{k}$ , non nul, tel que

$$(30) \quad h_{\bar{E}_\alpha}(s) \leq \frac{n_{v_0} \rho}{\nu D} (\log |(1, \alpha)|_{2, v_0} + \log \max\{1, \|A\|\}) + \frac{1}{2} \log \nu - \hat{\mu}_n(\bar{E}).$$

Dans le membre de droite, on majore  $\rho/\nu$  avec la proposition 5.13 et  $\|A\|$  est évalué au moyen du corollaire 5.15. De plus, grâce au lemme 5.11, à la proposition 5.2 et au choix des paramètres  $D_0$  et  $x \leq 1$ , on a

$$-\hat{\mu}_n(\bar{E}) \leq \frac{D_0 h(\bar{W}_0)}{t+1} \leq \frac{n^3 U_0}{D}.$$

Enfin, on a  $\frac{1}{2} \log \nu \leq nU_0/D$  d'après (28). En remplaçant ces estimations dans (30), on trouve

$$h_{\bar{E}_\alpha}(s) \leq \frac{n_{v_0} (6n)^{5n}}{2D} \left( \frac{1}{C_0} \log |(1, \alpha)|_{2, v_0} + U_0 \right).$$

La proposition 5.16 s'obtient alors en utilisant l'hypothèse sur  $\alpha$ .  $\square$

La démonstration du théorème 5.1 s'effectue avec la section  $s$  que l'on vient de construire dans cette proposition, qui vérifie (29). *A priori* cette section n'est pas définie sur  $k$  mais sur une extension finie  $K$  de  $k$ . Cette complication technique n'a pas de conséquence. En effet, le degré relatif  $[K : k]$  n'intervient pas car les estimations des jets de  $s$  en les places  $v'$  de  $K$  au-dessus d'une place  $v$  de  $k$  sont de la forme  $\mathfrak{c}_v \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v'}$ , où  $\mathfrak{c}_v$  ne dépend que de  $v$  (et des autres données) et pas de  $v'$ . C'est la raison pour laquelle nous *supposons* — et ceci sans perte de généralité — que  $s$  est définie sur  $k$ .

**5.11. Estimations générales.** — Soit  $(m, \ell) \in \mathbf{N}^2$ . Considérons la section  $s$  construite dans la proposition 5.16. Soit  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  une  $k$ -base de  $W$ . Il existe des formes linéaires  $l_1, \dots, l_n$  sur  $k^n$  telles que, si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un  $n$ -uplet de variables, on ait  $\sum_{i=1}^n x_i w_i = (\lambda(l_1(x), \dots, l_n(x)), l_1(x), \dots, l_n(x))$ . Tous les coefficients de Taylor à l'origine —  $a(s, \mathbf{w}, m, \tau)$ ,  $\tau \in \mathbf{N}^n$  — de la série formelle

$$(31) \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto s \left( (1, mu_0 + \lambda(l_1(x), \dots, l_n(x))), (1, \alpha_1^m e^{l_1(x)}), \dots, (1, \alpha_n^m e^{l_n(x)}) \right)$$

sont des éléments de  $k$ . En une place  $v$  de  $k$  pour laquelle  $mp$  possède un logarithme  $z \in t_G(\mathbf{C}_v)$ , l'image du coefficient  $a(s, \mathbf{w}, m, \tau)$  dans  $k_v$  est égale à  $\frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^\tau F_{s,v}(z)$  définie au § 5.7.

**DÉFINITION 5.17.** — Soit  $(w_1^\vee, \dots, w_n^\vee)$  la base duale de  $\mathbf{w}$ . Le *jet de  $s$  d'ordre  $\ell$  le long de  $W$  au point  $mp$* , noté  $\text{jet}_W^\ell s(mp)$ , est le vecteur

$$(32) \quad \text{jet}_W^\ell s(mp) := \sum_{\substack{\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n \\ |\tau| = \ell}} a(s, \mathbf{w}, m, \tau) \cdot \prod_{i=1}^n (w_i^\vee)^{\tau_i}$$

de  $S^\ell(W^\vee)$ .

Tel que nous venons de le définir, le terme  $\text{jet}_W^\ell s(mp)$  dépend du choix de la base  $\mathbf{w}$ . Toutefois, lorsque  $\text{jet}_W^h s(mp) = 0$  pour tout entier  $h \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ , ce n'est plus le cas. Considérons le couple  $(m, \ell) \in \mathbf{N}^2$  tel que  $m \in \{0, \dots, (n+t)S\}$ ,  $\ell \in \{0, \dots, (n+t)T\}$  et  $(m, \ell)$  *minimal* pour la propriété  $\text{jet}_W^\ell s(mp) \neq 0$ . L'adjectif *minimal* s'entend par rapport à l'ordre lexicographique sur  $\mathbf{N}^2$ .

*Seconde torsion de norme.* — Il serait naturel (et possible) de travailler dans la suite avec  $S^\ell(W^\vee)$  muni de la structure de puissance symétrique définie au § 3.0.2. Toutefois il s'avère plus pratique de modifier légèrement les normes sur  $S^\ell(\overline{W}^\vee)$  de la manière suivante : en une place  $v$  quelconque de  $k$ , considérons le coefficient  $\alpha_v(m(u_0, u))$  introduit lors de la définition de  $A$  (voir (21), p. 17).

**DÉFINITION 5.18.** — Le fibré adélique hermitien  $\overline{\mathfrak{J}et}$  est le fibré sur  $k$  d'espace sous-jacent  $S^\ell(W^\vee)$  et sa norme en une place  $v$  de  $k$  est donnée par : pour tout  $x \in S^\ell(W^\vee) \otimes_k \mathbf{C}_v$ , on a

$$\|x\|_{\overline{\mathfrak{J}et}, v} := \alpha_v(m(u_0, u)) \|x\|_{S^\ell(\overline{W}^\vee), v}.$$

**PROPOSITION 5.19.** — *La pente maximale de  $\overline{\mathfrak{J}et}$  est plus petite que  $10n^3U_0/D$ .*

Pour établir cette majoration, nous nous appuyerons sur deux résultats auxiliaires.

**LEMME 5.20.** — *La pente maximale de  $\overline{S^\ell(W^\vee)}$  est inférieure à  $5n^3U_0/D$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition 3.3 et le fait que  $\ell \leq (n+t)U_0/D$ , il suffit de montrer que  $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{W}^\vee)$  est majoré par une constante assez petite, disons  $(\log 2)/2$ . L'application  $k$ -linéaire  $\iota : k^n \rightarrow W$ ,  $\iota(y) := (\lambda(y), y)$ , est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Les normes  $v$ -adiques de l'application duale  $\iota^\vee : W^\vee \rightarrow (k^n)^\vee$  sont plus petites que  $(\sqrt{2})^{\epsilon_v}$  avec  $\epsilon_v := 1$  si  $v$  est archimédienne et 0 sinon. L'inégalité de pentes

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{W}^\vee) \leq \widehat{\mu}_{\max}((k^n, |\cdot|_2)^\vee) + h(\iota^\vee)$$

(voir lemme 6.4 de [Ga4]) permet de conclure car la première quantité du majorant est nulle et l'autre inférieure à  $(\log 2)/2$  (on notera que  $2(2 + (\log 2)/2) \leq 5$ ).  $\square$

**LEMME 5.21.** — *Pour tout entier  $m$ , la hauteur  $h_{\overline{E}_0}(1, mu_0)$  de  $(1, mu_0)$  relative au fibré hermitien  $\overline{E}_0 = \overline{k} \oplus (k^n/W_0)$  est inférieure à  $\log m + (2n^2 \log b)/D$ .*

*Démonstration.* — Dans cet énoncé,  $u_0$  désigne la préimage de  $-(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0})$  par l'application  $\varphi : k^n/W_0 \rightarrow k^t$ , qui, à la classe d'équivalence de  $z = (z_1, \dots, z_n)$  modulo  $W_0$ , associe  $(\ell_1(z), \dots, \ell_t(z))$  (voir § 5.3, après la démonstration de la proposition 5.2). Ainsi, pour tout  $z \in k^n$  tel que  $\ell_i(z) = -\beta_{i,0}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, t\}$ , la norme de  $u_0$  relative à  $k^n/W_0$  est inférieure à la norme de  $z$  dans  $(k^n, |\cdot|_2)$ . En particulier, on a  $h_{\overline{E_0}}(1, mu_0) \leq h_{(k^{n+1}, |\cdot|_2)}(1, mz)$ . Au moyen d'une matrice extraite, il existe un ensemble  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  à  $t$  éléments, des déterminants  $(\Delta_i)_{i \in I}$ ,  $\Delta$  de matrices à coefficients dans  $\{\pm\beta_{u,v}; 0 \leq u \leq t, 1 \leq v \leq n\}$  et une solution  $z$  du système  $\ell_i(z) = -\beta_{i,0}$ ,  $1 \leq i \leq t$ , telle que  $z_i = \Delta_i/\Delta$  pour  $i \in I$  et  $z_i = 0$  sinon. On a alors

$$h_{(k^{n+1}, |\cdot|_2)}(1, mz) = h_{(k^{t+1}, |\cdot|_2)}(\Delta, m(\Delta_i)_{i \in I}).$$

Des majorations grossières des déterminants qui apparaissent ici conduisent à

$$|(\Delta, m(\Delta_i)_{i \in I})|_{2,v} \leq \prod_{u,v} \max\{1, |\beta_{u,v}|_v\} \times \begin{cases} (1 + m^2 t)^{1/2} t! & \text{si } v \mid \infty, \\ 1 & \text{si } v \nmid \infty. \end{cases}$$

Par conséquent, et puisque  $t \leq n - 1$ , on a

$$h_{(k^{t+1}, |\cdot|_2)}(\Delta, m(\Delta_i)_{i \in I}) \leq (t + 1)n \max_{u,v} \{h(\beta_{u,v})\} + \log m + \log n!$$

et la définition de  $\log b$  permet de conclure.  $\square$

*Démonstration de la proposition 5.19.* — Comme la pente maximale est un maximum, il existe un sous-espace  $J \subseteq S^\ell(W^\vee)$  tel que  $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathfrak{J}et}) = \widehat{\mu}_n(J, (\|\cdot\|_{\overline{\mathfrak{J}et}, v})_v)$ , pente qui est elle-même égale à  $\widehat{\mu}_n(J, (\|\cdot\|_{\overline{S^\ell(W^\vee)}, v})_v) - \frac{1}{D} \sum_v \log \alpha_v(m(u_0, u))$ . Dans cette différence, la première quantité est inférieure à  $\widehat{\mu}_{\max}(S^\ell(W^\vee))$ , qui a été estimée dans le lemme 5.20 ci-dessus. L'autre, avec le signe moins, est exactement égale à

$$D_0 h_{\overline{k \oplus (k^n/W_0)}}(1, mu_0) + \sum_{j=1}^n D_j h_{(k^2, |\cdot|_2)}(1, \alpha_j^m).$$

En vertu du lemme 5.21, le premier terme dans cette expression est majoré par  $D_0(\log((n+t)S) + (2n^2 \log b)/D) \leq 3n^2 U_0/D$ . Par ailleurs, comme  $(1 + x^2)^{1/2} \leq \sqrt{2} \max\{1, |x|\}$ , on a

$$\begin{aligned} h_{(k^2, |\cdot|_2)}(1, \alpha_j^m) &\leq \log \sqrt{2} + h(\alpha_j^m) = \log \sqrt{2} + mh(\alpha_j) \\ &\leq \log \sqrt{2} + (n+t)S \log a_j \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n D_j h_{(k^2, |\cdot|_2)}(1, \alpha_j^m) &\leq \left( \sum_{j=1}^n D_j \right) \log \sqrt{2} + (n+t) \sum_{j=1}^n D_j S \log a_j \\ &\leq \frac{U_0 n}{D} \log \sqrt{2} + n(2n-1) \frac{U_0}{D} \\ &\leq \frac{2n^2 U_0}{D}. \end{aligned}$$

En regroupant ces différentes majorations, on trouve

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathfrak{J}et}) \leq \frac{5n^3 U_0}{D} + \frac{3n^2 U_0}{D} + \frac{2n^2 U_0}{D}$$

et la proposition 5.19 s'ensuit.  $\square$

Dorénavant, la majeure partie de la démonstration du théorème 5.1 va consister à évaluer chacune des normes  $v$ -adiques de  $\text{jet}_W^\ell s(mp)$  dans le but d'estimer sa hauteur, relative au fibré adélique hermitien  $\overline{\mathfrak{J}et}$ .

5.11.1. *Estimations archimédiennes.* —

PROPOSITION 5.22. — *Pour toute place  $v$  archimédienne de  $k$ , pour tout entier  $\ell \in \{0, \dots, 2(n+t)T\}$ , on a*

$$\|\mathrm{jet}_W^\ell s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{F}ct}, v} \leq \exp\{10nU_0/D\} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v}.$$

*Démonstration.* — Soit  $v$  une place archimédienne de  $k$ . Dans l'expression (32) du jet, choisissons pour  $w$  une base orthonormée de  $W \otimes_v \mathbf{C}$  et fixons un logarithme  $mu$  de  $mp \in G(k_v)$ . La norme  $\|\mathrm{jet}_W^\ell s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{F}ct}, v}$  est majorée par

$$(33) \quad \binom{n+\ell-1}{\ell}^{1/2} \max_{|\tau|=\ell} \left\{ \left| \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,v}(mu) \right|_v \alpha_v(m(u_0, u)) \right\}.$$

Le facteur binomial est inférieur à  $\sqrt{2}^{n+2(n+t)T-1} \leq e^{3nU_0/D}$  car  $T \leq U_0/D$ . La proposition 5.14 majore la dérivée de  $F_{s,v}$  et l'on obtient alors

$$\|\mathrm{jet}_W^\ell s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{F}ct}, v} \leq e^{3nU_0/D} e^{2n \max_{0 \leq i \leq n} \{D_i\} + 2(n+t)T} L(s) \leq e^{9nU_0/D} L(s).$$

La longueur de  $s$  qui apparaît ici peut être estimée comme à la fin du § 3.0.2 et l'on a  $L(s) \leq \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v} \exp\{nU_0/D\}$ . Ce qui permet de conclure.  $\square$

5.11.2. *Estimations ultramétriques.* — Étant donné des entiers  $\ell$  et  $h$  strictement positifs, on définit l'entier  $\delta_\ell(h)$  comme le ppcm des produits  $i_1 \cdots i_{h'}$  où  $h' \in \{1, \dots, h\}$ ,  $i_j \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  et  $i_1 + \cdots + i_{h'} \leq \ell$ . Le théorème des nombres premiers assure l'existence d'une constante absolue  $c > 0$  telle que  $\log \delta_\ell(h) \leq \ell \log(ch)$ . Au § 5.13, nous utiliserons la valeur  $c = 4$  démontrée par Bruiliet dans [Br].

PROPOSITION 5.23. — *Pour toute place ultramétrique  $v$  de  $k$ , pour tous entiers  $m, \ell \geq 0$ , pour toute section globale  $s$  de  $M$ , le jet de  $s$ , d'ordre  $\ell$  le long de  $W$  au point  $mp$ , est de norme  $v$ -adique inférieure à  $\|s\|_{\overline{E}, v} / |\delta_\ell(D_0)|_v$ .*

La démonstration est une variante plus simple de l'énoncé équivalent montré dans le cadre des variétés abéliennes au § 5.8 de [Ga2], au moyen du procédé de changement de variables de Chudnovsky. Nous renvoyons le lecteur à cet article pour plus de précisions.

**5.12. Extrapolation sur les dérivations.** — L'objectif de ce paragraphe est d'évaluer la  $v_0$ -norme de  $\mathrm{jet}_W^\ell s(mp)$  en tenant compte de la construction de  $s$ , où la place  $v_0$  a été singularisée au moyen de l'ensemble  $\Upsilon$ . Comme de coutume, nous allons devoir distinguer les cas périodique et non périodique, distinction à laquelle se superposera la distinction entre  $v_0$  archimédienne et  $v_0$  ultramétrique.

Soit  $w$  la base particulière de  $W \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$  introduite au § 5.7, utilisée dans la définition de la matrice  $A$ . D'après la majoration (33) appliquée avec  $v = v_0$ ,  $w = w$  et  $z = m(u_0, u)$ , le problème consiste à estimer  $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u))$ . Si  $(m, \tau) \in \Upsilon$  alors la définition (20) des coefficients de la matrice  $A$  implique

$$(34) \quad \left| \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u)) \right|_{v_0} \alpha_{v_0}(m(u_0, u)) \leq |\alpha|_{v_0}^{-1} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}$$

et l'on obtient directement une estimation de  $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u))$ , qui est meilleure que celle que l'on aura pour  $(m, \tau) \notin \Upsilon$ . C'est la raison pour laquelle nous supposons maintenant que  $(m, \tau) \notin \Upsilon$ . On ramène alors le problème à  $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(\lambda(u), u))$  grâce au lemme de comparaison suivant :

LEMME 5.24. — *Soit  $w = (w_1, \dots, w_n)$  une base de  $W \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ . Pour tout  $m \in \mathbf{N}$  tel que  $\|m(u_0 - \lambda(u))\|_{\overline{t}_G, v_0} \leq 1$  et pour tout  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$ , de longueur  $\leq 2(n+t)T$ , la valeur absolue  $v_0$ -adique de la différence  $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u)) - \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(\lambda(u), u))$  est majorée par*

$$e^{4nU_0} \left\{ \prod_{i=1}^n \|w_i\|_{\overline{t}_G, v_0}^{\tau_i} \right\} \|m(u_0 - \lambda(u))\|_{\overline{t}_G, v_0} \alpha_{v_0}(m(u_0, u))^{-1} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}.$$



*Démonstration.* — Reprenons le début de la démonstration de la proposition 5.14 (avec  $v = v_0$ ) et les formes linéaires  $l_1, \dots, l_n$  associées à la base  $w$  :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}_{v_0}^n, \quad \sum_{i=1}^n x_i w_i = (\lambda(l_1(x), \dots, l_n(x)), l_1(x), \dots, l_n(x)).$$

On peut supposer  $\|w_i\|_{\overline{t_G}, v_0} = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Désignons par  $(p_h)_{h \in \mathbf{N}^t \times \mathbf{N}^n}$  les coefficients de  $s$  dans une écriture du type (3). La différence  $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u)) - \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(\lambda(u), u))$  est la somme sur  $h$  des coefficients devant  $x^\tau$  des fonctions

$$(35) \quad p_h \times \left( \prod_{i=1}^n \alpha_i^{mh_i} \right) \times e^{h_1 l_1(x) + \dots + h_n l_n(x)} \\ \times \left\{ \prod_{a=1}^t \left( m e_{0,a}^v(u_0) + \sum_{i=1}^n l_i(x) e_{0,a}^v(\lambda(e_i)) \right)^{h_{0,a}} \right. \\ \left. - \prod_{a=1}^t \left( m e_{0,a}^v(\lambda(u)) + \sum_{i=1}^n l_i(x) e_{0,a}^v(\lambda(e_i)) \right)^{h_{0,a}} \right\}.$$

Dans cette expression,  $h_0 = (h_{0,1}, \dots, h_{0,t}) \in \mathbf{N}^t$ ,  $h_1, \dots, h_n \in \mathbf{N}$  sont les coordonnées de  $h$ . Comme  $h_0$  est de longueur  $D_0$ , la différence des quantités entre accolades est une expression du type

$$(36) \quad \prod_{i=1}^{D_0} (a_i + b_i) - \prod_{i=1}^{D_0} (a'_i + b_i)$$

où  $a_i, a'_i$  sont les composantes de  $m u_0, m \lambda(u)$  respectivement dans la base orthonormée  $e_0 := (e_{0,1}, \dots, e_{0,t})$  et où  $b_i$  est l'une des composantes de  $l(x) := \lambda(l_1(x), \dots, l_n(x))$  dans la base  $e_0$  (répétée le bon nombre de fois pour avoir la puissance  $h_{0,a}$  dans (35)). Or il s'avère que la différence (36) est égale à

$$\sum_{j=1}^{D_0} (a_j - a'_j) \left( \prod_{i=1}^{j-1} (a'_i + b_i) \right) \left( \prod_{i=j+1}^{D_0} (a_i + b_i) \right)$$

(l'on écrit  $a_j - a'_j = (a_j + b_j) - (a'_j + b_j)$  et l'on développe; les produits se simplifient deux à deux). Ainsi la différence des produits entre accolades dans (35), que l'on peut écrire symboliquement sous la forme

$$(m e_0^v(u_0) + e_0^v(l(x)))^{h_0} - (m e_0^v(\lambda(u)) + e_0^v(l(x)))^{h_0},$$

est une somme sur  $D_0$  termes d'éléments de la forme

$$\delta(a, h_0)(x) := e_{0,a}^v(m(u_0 - \lambda(u))) \times (m e_0^v(u_0) + e_0^v(l(x)))^{h'_0} (m e_0^v(\lambda(u)) + e_0^v(l(x)))^{h''_0}$$

où  $h'_0, h''_0$  sont des vecteurs entiers (qui dépendent de  $a$ ) dont la somme des longueurs vaut  $D_0 - 1$ . On notera que ce coefficient  $\delta(a, h_0)$  est une fonction polynomiale de la variable  $x$ . La suite de la démonstration repose alors sur les mêmes considérations que celle de la proposition 5.14. Plus précisément, soit  $Q_{h,\tau}$  le polynôme de Taylor défini par (25). Le coefficient de  $x^\tau$  de (35) est égal à celui du polynôme

$$(37) \quad \sum_{D_0 \text{ termes}} p_h \delta(a, h_0)(x) \left( \prod_{i=1}^n \alpha_i^{mh_i} \right) Q_{h,\tau}(x).$$

Ce coefficient est en valeur absolue plus petit que la longueur du polynôme. Ainsi la quantité  $\left| \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u)) - \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(\lambda(u), u)) \right|_{v_0}$  est inférieure à

$$(38) \quad \|m u_0 - m \lambda(u)\|_{\overline{t_G}, v_0} \times L(s) \max_h \{L(Q_{h,\tau})\} \times \prod_{i=1}^n \max\{1, |\alpha_i|_{v_0}\}^{m D_i} \\ \times \begin{cases} D_0 (m \|u_0\|_{\overline{t_G}, v_0} + 1 + n)^{D_0 - 1} & \text{si } v_0 \mid \infty \\ \max\{1, \|m u_0\|_{\overline{t_G}, v_0}\}^{D_0 - 1} & \text{si } v_0 \nmid \infty \end{cases}$$

(l'hypothèse  $\|m(u_0 - \lambda(u))\|_{\overline{t_G}, v_0} \leq 1$  a permis ici de majorer la norme de  $m\lambda(u)$  et l'estimation de la longueur de  $l$  repose sur les estimations des coefficients  $\alpha_j$  introduits lors de la démonstration de la proposition 5.14). Pour conclure, on majore  $L(s)$  par  $e^{nU_0} \|s\|_{\overline{E_\alpha}, v_0}$  (fin du § 3.0.2), on majore  $\max_h \{L(Q_{h,\tau})\}$  par  $e^{nU_0}$  grâce à (27) et l'on majore  $D_0(m\|u_0\|_{\overline{t_G}, v_0} + 1 + n)^{D_0-1}$  par

$$D_0(n+2)^{D_0-1} \max\{1, \|mu_0\|_{\overline{t_G}, v_0}\}^{D_0} \leq e^{2nU_0} |(1, \|mu_0\|_{\overline{t_G}, v_0})|_{2, v_0}^{D_0}.$$

□

L'estimation de  $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(\lambda(u), u))$  repose sur une version légèrement affaiblie des lemmes d'interpolation de Waldschmidt [Wa2] (cas archimédien) et de Roy [Ro] (cas ultramétrique, voir aussi [Ga3] pour les simplifications faites ici). Si  $x$  est un nombre réel positif et  $f$  une fonction définie sur le disque fermé  $\overline{D}(0, x) = \{z \in \mathbf{C}_{v_0}; |z|_{v_0} \leq x\}$ , on note  $|f|_x$  la borne supérieure des  $|f(z)|$ ,  $z \in \overline{D}(0, x)$ . Rappelons que  $\epsilon_0 = 0$  si  $v_0$  est ultramétrique et 1 sinon.

LEMME 5.25. — Soit  $S_1, T_1$  des entiers naturels  $\geq 2$  et  $R, r$  des nombres réels vérifiant  $R \geq r \geq (2S_1)^{\epsilon_0}$ . Soit  $f$  une fonction analytique dans le disque  $\overline{D}(0, R)$ . On a alors

$$|f|_r \leq S_1^{T_1} \max \left\{ \left( \frac{(2r_{v_0})^{\epsilon_0} r}{r_{v_0} R} \right)^{T_1 S_1} |f|_R, \left( \left( \frac{10r_{v_0}}{S_1} \right)^{\epsilon_0} \frac{r}{r_{v_0}} \right)^{T_1 S_1} \max_{\substack{0 \leq h < T_1 \\ 0 \leq m < S_1}} \left\{ \left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(m) \right|_{v_0} \right\} \right\}.$$

La suite de la démonstration repose sur un raisonnement par l'absurde, au moyen de l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE 5.26. —  $\|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{t_G}, v_0} \leq e^{-C_0^3 U_0}$

Notons  $\mathbf{D}$  le disque ouvert  $\{z \in \mathbf{C}_{v_0}; |z|_{v_0} < \min\{r_{v_0}/|u_i|_{v_0}; 1 \leq i \leq n\}\}$  si  $v_0$  est ultramétrique et l'ensemble  $\mathbf{C}$  des nombres complexes sinon. On notera que les disques fermés, centrés en 0 et de rayons 1 et  $\epsilon/r_{v_0}$  respectivement, sont tous les deux inclus dans  $\mathbf{D}$ .

5.12.1. Cas non périodique. — Soit  $\tau \in \mathbf{N}^n$  de longueur  $\ell$ . Soit  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}_{v_0}$  l'application analytique définie par :

$$\forall z \in \mathbf{D}, \quad f(z) = \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(z(\lambda(u), u)).$$

Observons que, pour tout  $h \in \mathbf{N}$  et tout  $z \in \mathbf{D}$ , on a

$$(39) \quad \begin{aligned} \frac{f^{(h)}(z)}{h!} &= \frac{1}{\tau! h!} D_w^\tau D_{(\lambda(u), u)}^h F_{s, v_0}(z(\lambda(u), u)) \\ &= \sum_{\substack{j \in \mathbf{N}^n \\ |j|=h}} \binom{\tau + j}{\tau} u^j \frac{D_w^{\tau+j}}{(\tau+j)!} F_{s, v_0}(z(\lambda(u), u)) \end{aligned}$$

( $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{C}_{v_0}^n$  est le vecteur des coordonnées de  $(\lambda(u), u)$  dans la base  $(w_1, \dots, w_n)$ ). Pour estimer  $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u))$ , nous allons utiliser le lemme d'interpolation 5.25 afin de majorer  $|f(m)|_{v_0}$ , avec les paramètres suivants :

(i) Si  $v_0$  est une place *archimédienne* alors  $S_1 := S_0$ ,  $r := 2m$  (notons que  $m \geq S_0$  car nous sommes dans le cas non périodique avec  $(m, \tau) \notin \Upsilon$ ),  $R := 2re$ ,  $T_1 := (n+t)T$  et  $f := f$ .

(ii) Si  $v_0$  est une place *ultramétrique* alors  $S_1 := S_0$ ,  $r := 1$ ,  $R := \epsilon/r_{v_0}$ ,  $T_1 := (n+t)T$  et  $f := f$ .

Avec ces choix, la proposition 5.14 fournit l'estimation suivante :

PROPOSITION 5.27. — On a  $\alpha_{v_0}(m(u_0, u)) |f|_R \leq \exp\{23n^2 U_0\} \|s\|_{\overline{E_\alpha}, v_0}$ .

*Démonstration.* — En remarque liminaire, mentionnons que les majorations qui suivent sont volontairement très larges, afin de rester valide dans le cas périodique, qui sera étudié au prochain paragraphe.

D'après la proposition 5.14, on a

$$|f(z)|_{v_0} \cdot \alpha_{v_0}(z(\lambda(u), u)) \leq e^{2n \max_{0 \leq i \leq n} \{D_i\} + \ell} L(s).$$

Comme nous l'avons vu au cours de la démonstration de la proposition 5.22, la longueur de  $s$  est plus petite que  $e^{nU_0} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}$  et le choix des paramètres donne alors

$$|f(z)|_{v_0} \cdot \alpha_{v_0}(z(\lambda(u), u)) \leq e^{7nU_0} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}.$$

En utilisant la définition (21) de  $\alpha_{v_0}$ , la quantité  $\alpha_{v_0}(z(\lambda(u), u))^{-1}$  est, pour  $|z|_{v_0} \leq 8nS\epsilon$ , majorée par

$$\begin{cases} (1 + 64(nS\epsilon \|\lambda(u)\|_{\overline{t}_G, v_0})^2)^{D_0/2} \prod_{j=1}^n (1 + e^{16nS\epsilon |u_j|_{v_0}})^{D_j/2} & \text{si } v_0 \mid \infty, \\ \max\{1, 8nS\epsilon \|\lambda(u)\|_{\overline{t}_G, v_0}\}^{D_0} & \text{si } v_0 \nmid \infty \end{cases}$$

(dans le deuxième cas, nous avons majoré  $r_{v_0}^{-1} = p_{v_0}^{\frac{1}{p_{v_0}-1}}$  par 2). De plus on a  $64nS\epsilon \leq e^{C_0^3 U_0}$ , ce qui permet au moyen de l'hypothèse 5.26 de substituer  $u_0$  à  $\lambda(u)$  dans cette majoration modulo un petit terme d'erreur. Comme  $\alpha_{v_0}(m(u_0, u)) \leq 1$ , la quantité

$$\frac{\alpha_{v_0}(z(\lambda(u), u))^{-1}}{\alpha_{v_0}(m(u_0, u))^{-1}}$$

est majorée par

$$(40) \quad (9nS\epsilon)^{D_0} e^{nU_0} \times \begin{cases} (1 + \|u_0\|_{\frac{2}{k^n/W_0, v_0}}^2)^{D_0/2} \exp\left\{8nS\epsilon \left(\sum_{j=1}^n D_j |u_j|_{v_0}\right)\right\} & \text{si } v_0 \mid \infty, \\ \max\{1, \|u_0\|_{\frac{2}{k^n/W_0, v_0}}\}^{D_0} & \text{si } v_0 \nmid \infty. \end{cases}$$

Le choix des paramètres entraîne  $8nS\epsilon \left(\sum_{j=1}^n D_j |u_j|_{v_0}\right) \leq 8n^2 U_0$  et  $(9nS\epsilon)^{D_0} \leq e^{5nU_0}$ . Enfin le terme qui dépend de  $u_0$  est naturellement majoré par  $\exp\{D_0 Dh_{\overline{E}_0}(1, u_0)\}$ , puis par  $e^{2n^2 U_0}$  grâce au lemme 5.21. On trouve ainsi

$$(41) \quad \frac{\alpha_{v_0}(z(\lambda(u), u))^{-1}}{\alpha_{v_0}(m(u_0, u))^{-1}} \leq e^{16n^2 U_0}.$$

Ceci permet de conclure.  $\square$

Par ailleurs, au moyen de la formule (39), du lemme 5.24 et de la construction de la section  $s$ , on a

$$(42) \quad \max_{\substack{0 \leq h < T_1 \\ 0 \leq m < S_1}} \left\{ \left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(m) \right|_{v_0} \right\} \leq \theta_0 (e^{4nU_0} \|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{t}_G, v_0} + |\alpha|_{v_0}^{-1}) \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}$$

où

$$\theta_0 := \max_{0 \leq m < S_1} \{\alpha_{v_0}(m(u_0, u))^{-1}\} \times \begin{cases} (n + \sum_{j=1}^n |u_j|_{v_0})^{2(n+t)T} & \text{si } v_0 \mid \infty, \\ 1 & \text{si } v_0 \nmid \infty. \end{cases}$$

La somme des  $|u_j|_{v_0}$  est majorée par  $\sqrt{n} \|(\lambda(u), u)\|_{\overline{t}_G, v_0}$ , lui-même plus petit que  $\sqrt{2n} \|u\|_{2, v_0}$ . On a  $\|u\|_{2, v_0} \leq \sum_{j=1}^n |u_j|_{v_0}$  et avec la définition de  $\log a_j$  on trouve

$$\begin{aligned} n + \sum_{j=1}^n |u_j|_{v_0} &\leq n + \sqrt{2n} \left(\frac{D}{\epsilon}\right) \log \prod_{j=1}^n a_j \\ &\leq n + \sqrt{2n} \exp\{2\mathbf{a} \log \epsilon\} \leq \exp\{6n\mathbf{a} \log \epsilon\}. \end{aligned}$$

La majoration  $T \leq U_0/(\mathbf{a} \log \epsilon)$  entraîne alors

$$\theta_0 \leq \max_{0 \leq m < S_0} \{\alpha_{v_0}(m(u_0, u))^{-1}\} \exp\{24n^2 U_0\}.$$

L'inégalité (41) fournit l'estimation

$$\alpha_{v_0}(m(u_0, u)) \cdot \max_{0 \leq m < S_0} \{\alpha_{v_0}(m(u_0, u))^{-1}\} \leq e^{16n^2 U_0}.$$

Comme  $\log |\alpha|_{v_0}$  a été choisi supérieur à  $C_0^{5/4}$  (proposition 5.16) et comme  $\|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{t}_G, v_0}$  est plus petit que  $e^{-C_0^3 U_0}$  d'après l'hypothèse 5.26, les calculs ci-dessus montrent que

$$(43) \quad \alpha_{v_0}(m(u_0, u)) \max_{\substack{0 \leq h < T_1 \\ 0 \leq m < S_1}} \left\{ \left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(m) \right|_{v_0} \right\} \leq e^{(50n^2 - C_0^{5/4})U_0} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le lemme d'interpolation 5.25, qui, *via* la majoration  $|f(m)|_{v_0} \leq |f|_r$ , permet de majorer  $\alpha_{v_0}(m(u_0, u))|f(m)|_{v_0}$  par

$$e^{(4n \log C_0)U_0} \max \left\{ e^{(23n^2 - (n+t)C_0)U_0}, (40nC_0^2)^{2nC_0U_0} e^{(50n^2 - C_0^{5/4})U_0} \right\} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, v_0}},$$

quantité plus petite que  $e^{-(3/2)C_0U_0} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, v_0}}$  puisque  $C_0 = (6n)^{22n}$ . En utilisant une nouvelle fois le lemme 5.24 pour passer de  $f(m)$  à  $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u))$ , on trouve

$$\alpha_{v_0}(m(u_0, u)) \left| \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u)) \right|_{v_0} \leq 2e^{-(3/2)C_0U_0} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, v_0}}.$$

Cette estimation est valide pour tout  $\tau \in \mathbf{N}^n$  de longueur  $\ell$  et, *a priori*, pour  $(m, \tau) \notin \Upsilon$ . Mais l'inégalité (34) montre qu'elle reste vraie pour  $(m, \tau) \in \Upsilon$  puisque  $|\alpha|_{v_0}^{-1} \leq \exp\{-C_0^{5/4}U_0\}$ . La définition 5.17 du jet de  $s$  (voir aussi (33)) conduit alors au résultat suivant.

PROPOSITION 5.28. — *On a  $\|\text{jet}_W^\ell s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{J}\epsilon t}, v_0} \leq \exp\{-C_0U_0\} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, v_0}}$ .*

5.12.2. *Cas périodique.* — Rappelons tout d'abord qu'il a été vu au § 5.5 que le cas périodique n'est possible que lorsque  $v_0$  est archimédienne. Soit  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$  de longueur  $\ell$  et  $\tau' := (\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, 0)$ . Soit  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  l'application analytique définie par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = \frac{1}{\tau'!} D_w^{\tau'} F_{s, v_0}(z(\lambda(u), u)).$$

Afin d'évaluer  $\text{jet}_W^\ell s(mp)$ , nous allons donner une majoration fine de la dérivée  $f^{(\tau_n)}(m)/\tau_n!$  au moyen du lemme d'interpolation 5.25. Observons tout d'abord que

$$(44) \quad \left| \frac{1}{\tau_n!} f^{(\tau_n)}(m) \right|_{v_0} \leq |f|_{1+m}.$$

En effet, il s'agit de l'inégalité de Cauchy usuelle pour les fonctions holomorphes complexes. Le terme  $|f|_{1+m}$  peut être majoré au moyen du lemme d'interpolation 5.25 avec les paramètres suivants :  $S_1 := (n+t)S$ ,  $r := 2(n+t)S$ ,  $R := 2re$ ,  $T_1 := T_0$  et  $f := f$ . Dans ce lemme d'interpolation intervient  $|f|_R$  que l'on peut estimer en suivant la démonstration de la proposition 5.27, dont les calculs étaient suffisamment imprécis pour convenir également à ce cas. Par ailleurs, grâce à la formule (39), au lemme de comparaison 5.24, et par construction de  $s$ , les dérivées de  $f$  jusqu'à l'ordre  $T_0$  en les nombres  $z \in \{0, \dots, (n+t)S\}$  sont petites comme dans l'estimation (43). En réalité une fois que l'on a observé qu'avec les choix de paramètres ci-dessus le produit  $T_1 S_1$  était presque le même que dans le cas précédent, tout se passe à l'identique, si ce n'est que l'on doit se servir de (44). Un dernier passage par le lemme de comparaison 5.24 permet alors d'obtenir *in fine* :

$$(45) \quad \alpha_{v_0}(m(u_0, u)) \left| \frac{1}{\tau!} D_w^{\tau'} D_{(\lambda(u), u)}^{\tau_n} F_{s, v_0}(m(u_0, u)) \right|_{v_0} \leq 2 \exp\{-(3/2)C_0U_0\} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, v_0}}$$

(majoration valide pour tout  $\tau = (\tau', \tau_n)$  de longueur  $\ell$ ). Même si nous n'obtenons pas une estimation de  $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, v_0}(m(u_0, u))$ , ceci n'a pas d'importance car ce qui nous intéresse est le jet d'ordre  $\ell$  de  $s$ , qui lui ne dépend pas du choix de la base considérée pour le définir (voir le commentaire qui suit la définition 5.17). Choisissons la base  $w := (w_1, \dots, w_{n-1}, (\lambda(u), u))$  dans la définition 5.17. Si  $x \in W \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$  a pour coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $w$  alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad w_i^\vee(x) = x_i - x_n \frac{u_i}{u_n} \quad \text{et} \quad (\lambda(u), u)^\vee(x) = \frac{x_n}{u_n}.$$

Par conséquent on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \|w_i^\vee\|_{\overline{t}_G, v_0} = \left( 1 + \left( \frac{|u_i|}{|u_n|} \right)^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|(\lambda(u), u)^\vee\|_{\overline{t}_G, v_0} = \frac{1}{|u_n|}.$$

De ce fait et de la majoration (45), l'on déduit

$$(46) \quad \|\text{jet}_W^\ell s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{J}\epsilon t}, v_0} \leq \left( \frac{\max\{1, \|(\lambda(u), u)\|_{\overline{t}_G, v_0}\}}{|u_n|} \right)^\ell \exp\{-(5/4)C_0U_0\} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, v_0}}.$$

L'hypothèse 5.26 et l'inégalité triangulaire donnent la majoration

$$\|(\lambda(u), u)\|_{\overline{t}_G, v_0} \leq Dn \exp\{(a \log \epsilon)/D\}.$$

De plus, en vertu des propositions 5.7 et 5.8, on a  $|\mathbf{u}_n|^{-1} \leq (64n^3\tilde{D}_0)^n S$ . La proposition 5.4, (iv), permet de majorer  $T \log \tilde{D}_0$  par  $(10n \log C_0)U_0$ . On trouve alors

$$\left( \frac{\max\{1, \|(\lambda(u), u)\|_{\overline{\mathcal{E}}_{G, v_0}}\}}{|\mathbf{u}_n|} \right)^\ell \leq \exp\{(C_0/4)U_0\}.$$

Conjugué à l'inégalité (46), ce résultat montre que la proposition 5.28 reste vraie dans le cas périodique.

**5.13. Conclusion.** — La fin de la démonstration du théorème 5.1 repose sur le lemme 3.1 qui, compte tenu de la proposition 5.10, s'écrit ici sous la forme

$$(47) \quad h(\text{jet}_W^\ell s(mp)) \geq -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathfrak{J}\text{et}}).$$

Nous allons montrer que cette minoration n'est pas compatible avec la majoration de la hauteur du jet que l'on peut trouver par le biais de l'hypothèse 5.26. En effet les propositions 5.22, 5.23 et 5.28 entraînent

$$h(\text{jet}_W^\ell s(mp)) \leq 10n \frac{U_0}{D} + T \log(4D_0) - C_0 n_{v_0} \frac{U_0}{D} + h_{\overline{\mathcal{E}}_\alpha}(s).$$

La proposition 5.4, (iv), qui permet de majorer  $T \log(4D_0)$  (en se rappelant que  $D_0 \leq \tilde{D}_0$  car  $x \leq 1$ ) et la construction de  $s$  (proposition 5.16) conduisent à

$$(48) \quad h(\text{jet}_W^\ell s(mp)) \leq \left(10n + 10n \log C_0 - C_0 + (6n)^{5n} C_0^{3/4}\right) \frac{n_{v_0} U_0}{D}.$$

Par ailleurs la pente maximale de  $\overline{\mathfrak{J}\text{et}}$  a été majorée par  $10n^3 U_0/D$  (proposition 5.19). L'on s'aperçoit alors que le choix de  $C_0$  met en contradiction (47) et (48). L'hypothèse 5.26 est donc fautive et  $\log \|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{\mathcal{E}}_{G, v_0}} \geq -C_0^3 U_0$ . La proposition 5.3 entraîne

$$\log \max_{1 \leq i \leq t} \{|\Lambda_i|\} \geq -3n^3 \log(bn) - C_0^3 U_0.$$

Pour conclure et obtenir le théorème 5.1, il ne reste plus qu'à observer que  $U_0$  est inférieur au maximum de  $\log p_{v_0}$  et de

$$C_0^{8n} \mathbf{a}^{1/t} (\log b + \mathbf{a} \log \mathfrak{e}) \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{D \log a_j}{\log \mathfrak{e}}\right)^{1/t},$$

en utilisant (14).

## BIBLIOGRAPHIE

- [AG] M. ABLY et É. GAUDRON. Approximation diophantienne sur les courbes elliptiques à multiplication complexe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 337 (Sér. I) : 629–634, 2003.
- [BP] D. BERTRAND et P. PHILIPPON. Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2) :263–280, 1988.
- [BV] E. BOMBIERI et J. VAALER. On Siegel's lemma. *Invent. math.*, 73(1) :11–32, 1983. Avec un addendum : *ibid.* 75(2) :377, 1984.
- [Bo] J.-B. BOST. Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). *Séminaire Bourbaki*. Volume 237 d'*Astérisque*, 115–161. Société Mathématique de France, 1996.
- [Br] S. BRULTET. D'une mesure d'approximation simultanée à une mesure d'irrationalité : le cas de  $\Gamma(1/4)$  et  $\Gamma(1/3)$ . *Acta Arith.*, 104(3) :243–281, 2002.
- [Da] S. DAVID. *Minorsations de formes linéaires de logarithmes elliptiques*, volume 62 de *Mémoire de la Société Mathématique de France*. S. M. F., 1995.
- [DH] S. DAVID et N. HIRATA-KOHNO. Linear forms in elliptic logarithms. *J. reine angew. Math.*, 628 :37–89, 2009.
- [DP] S. DAVID et P. PHILIPPON. Minorsations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, XXVIII(4) :489–543, 1999.

- [Do] P. DONG. Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes  $p$ -adiques de nombres algébriques. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 343, 97p., 1995. Publié par l'Institut de Mathématiques, Académie des Sciences de Pologne.
- [Ga1] É. GAUDRON. Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif. *Invent. Math.*, 162(1) :137–188, 2005.
- [Ga2] É. GAUDRON. Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 39(5) :699–773, 2006.
- [Ga3] É. GAUDRON. Étude du cas rationnel de la théorie des formes linéaires de logarithmes. *J. Number Theory*, 127(2) :220–261, 2007.
- [Ga4] É. GAUDRON. Pentas des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 119 :21–95, 2008.
- [Ga5] É. GAUDRON. Géométrie des nombres adéliques et lemmes de Siegel généralisés. *Manuscripta math.*, 130(2) :159–182, 2009.
- [Hi1] N. HIRATA-KOHNO. Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques. *Invent. Math.*, 104 :401–433, 1991.
- [Hi2] N. HIRATA-KOHNO. Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *Compos. Math.*, 86 :69–96, 1993.
- [Lo] J.H. LOXTON. Some problems involving powers of integers. *Acta Arith.*, 46(2) :113–123, 1986.
- [Ma] K. MAHLER. *Lectures on transcendental numbers*, volume 546 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Mi] M. MIGNOTTE. Sur la résolution de systèmes linéaires en nombres entiers. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou* 15e année (1973/74), Théorie des nombres, Fasc. 2, Exp. n° 16. 5 pages, Paris 1975. Disponible sur [www.numdam.org](http://www.numdam.org).
- [Ph] P. PHILIPPON. Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Rocky Mt. J. Math.*, 26(3) :1069–1088, 1996.
- [PN] Yu. V. NESTERENKO et P. PHILIPPON, éditeurs. *Introduction to Algebraic Independence*, volume 1752 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 2001.
- [PW1] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT. Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2) :281–314, 1988.
- [PW2] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT. Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *Séminaire de Théorie des Nombres Paris 1986 – 87*, volume 75 de *Progress in Mathematics*, pp. 313–347. Birkhäuser Boston, Inc., 1989. Édité par Catherine Goldstein.
- [Ra] K. RAMACHANDRA. A note on Baker's method. *J. Austral. Math. Soc.*, 10 :197–203, 1969.
- [Ré1] G. RÉMOND. *Élimination multihomogène*. Chapitre 5 de [PN].
- [Ré2] G. RÉMOND. Sur les sous-variétés des tores. *Compositio Math.*, 134(3) :337–366, 2002.
- [RT] D. ROY et J.L. THUNDER. An absolute Siegel's lemma. *J. Reine angew. Math.*, 476 :1–26, 1996.
- [Ro] D. ROY. Interpolation sur des perturbations d'ensembles produits. *Bull. Soc. Math. France*, 130(2) :387–408, 2002.
- [Si] C.L. SIEGEL. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. *Abhandlungen der Preußischen Akad. der Wissenschaften*, Nr. 1, 70 S, 1929.
- [Th1] A. THUE. Om en generel i store hele tal uløslig ligning. *Kra. Videnskabens Selskabs Skrifter, Mat. Nat. Kl.*, 7 :1–15, 1908.
- [Th2] A. THUE. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 135 :284–305, 1909.
- [Wa1] M. WALDSCHMIDT. *Nombres transcendants*, volume 402 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1974.

- [Wa2] M. WALDSCHMIDT. A lower bound for linear forms in logarithms. *Acta Arith.*, 37 :257–283, 1980.
- [Wa3] M. WALDSCHMIDT. *Diophantine Approximation On Linear Algebraic Groups*, volume 326 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 2000.
- [Wü] G. WÜSTHOLZ. Algebraische punkte auf analytischen untergruppen algebraischer gruppen. *Ann. of Math.*, 129(3) :501–517, 1989.
- [Zh] S. ZHANG. Positive line bundles on arithmetic varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(1) :187–221, 1995.