



HAL
open science

Minorations simultanées de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques

Éric Gaudron

► **To cite this version:**

Éric Gaudron. Minorations simultanées de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques. 2010. hal-00474913v1

HAL Id: hal-00474913

<https://hal.science/hal-00474913v1>

Preprint submitted on 21 Apr 2010 (v1), last revised 3 Jul 2019 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MINORATIONS SIMULTANÉES DE FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

ÉRIC GAUDRON

RÉSUMÉ. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, k un corps de nombres et v une place de k . Soit $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{C}_v$ tels que $e^{u_j} \in k$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Soit $(\beta_{i,j})$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq n$, une matrice $t \times n$ à coefficients dans k et de rang t . Soit $(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0}) \in k^t$. Posons $\Lambda_i := \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} u_j \in \mathbf{C}_v$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$. Le résultat principal que nous présentons ici est une minoration de $\max\{|\Lambda_i|_v; 1 \leq i \leq t\}$, explicite en tous les paramètres sauf n , lorsque ce maximum n'est pas nul. Cette minoration englobent de nombreux résultats antérieurs. La démonstration repose sur la méthode de Baker-Philippon-Waldschmidt, la réduction d'Hirata-Kohno, le procédé de changement de variable de Chudnovsky, repensés avec les outils modernes de la théorie des pentes adéliques.

ABSTRACT. This work falls within the theory of linear forms in logarithms over a commutative *linear* group defined over a number field. We give a lower bound for simultaneous linear forms in logarithms of algebraic numbers, treating both the archimedean and p -adic cases. The proof includes Baker's method, Hirata's reduction, Chudnovsky's process of variable change. The novelty is that we integrated into the proof the modern tools of adelic slope theory, building an auxiliary section of a metrized line bundle over a projective space.

Coordonnées de l'auteur :

Éric GAUDRON

✉ Université Grenoble I, Institut Fourier.

UMR 5582, BP 74

38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.

Courriel : Eric.Gaudron@ujf-grenoble.fr

☎ (33) 04 76 51 45 72

Page internet : <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~gaudron>

MSC 2010 : 11J86 (11J61,14G40).

Mots clefs : Formes linéaires de logarithmes, approximation simultanée, méthode de Baker, réduction d'Hirata-Kohno, changement de variable de Chudnovsky, théorie des pentes adéliques, fibrés adéliques hermitiens.

Ce texte a bénéficié du soutien de l'ANR Diophante, 06-JCJC-0028.

Date: Mercredi 21 avril 2010.

1. INTRODUCTION

Ce texte présente une minoration simultanée de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, valide pour une place quelconque v_0 du corps de nombres ambiant. En d'autres termes il s'agit de minorer $\max\{|\Lambda_i|_{v_0}; 1 \leq i \leq t\}$ où Λ_i est de la forme $\beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j}u_j$ avec $\beta_{i,j}$ et e^{u_j} dans un corps de nombres $k \hookrightarrow \mathbf{C}_{v_0}$ et $|\cdot|_{v_0}$ est une valeur absolue v_0 -adique sur le complété \mathbf{C}_{v_0} d'une clôture algébrique de k_{v_0} .

Depuis les travaux de Baker entrepris au milieu des années soixante, de nombreux articles ont été consacrés à l'étude de cas particuliers de ce problème. En très grande majorité les auteurs s'intéressaient à *une* seule forme linéaire ($t = 1$) et, souvent, seulement au cas d'une place v_0 archimédienne. Et si la place v_0 était ultramétrique alors ils supposaient $\beta_{i,j} \in \mathbf{Q}$. Plus précisément, dès que $t \geq 2$, et si l'on écarte les travaux de Philippon & Waldschmidt [20] et d'Hirata-Kohno [14] qui traitent le cas très général d'un groupe algébrique commutatif quelconque, seuls Ramachandra [21] et Loxton [15] ont étudié la question qui nous intéresse ici (cas archimédien). Lorsque v_0 est ultramétrique, ne semble exister que l'étude de Dong [7], qui traite un cas particulier de la question ($\beta_{i,j} \in \mathbf{Z}$, $\beta_{i,0} = 0$). Ainsi, en dépit de la richesse de la littérature sur le thème des formes linéaires de logarithmes (*), l'on ne trouve guère de résultats généraux qui prennent en compte plusieurs formes linéaires et aucun qui ne prenne en compte à la fois le cas archimédien et le cas p -adique. Un des objectifs de cet article est de combler cette lacune, tout en donnant une minoration qui soit en phase avec celles présentées dans [30].

Si le résultat le plus général que nous avons ne sera donné qu'au paragraphe suivant, nous en proposons ici un cas particulier. Étant donné un nombre algébrique α , on désigne par $h(\alpha)$ la hauteur de Weil logarithmique absolue de α . Si x est un nombre réel alors $[x]$ est la partie entière de x .

Théorème 1.0.1. *Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Il existe une constante $c_1 > 0$, qui ne dépend que de n , ayant la propriété suivante. Soit k un sous-corps de nombres de \mathbf{C} , de degré D sur \mathbf{Q} . Soit $t \in \{1, \dots, n\}$ et*

$$(\beta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{t,n}(k)$$

une matrice de rang maximal t . Soit $(\beta_{i,0})_{1 \leq i \leq t} \in k^t$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, soit $u_j \in \mathbf{C}$ tel que $\alpha_j := e^{u_j} \in k$. Soit b, a, ϵ des nombres réels positifs tels que $\epsilon \geq e$,

$$\log a \geq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ h(\alpha_j), \frac{\epsilon |u_j|}{D} \right\}, \quad \log b \geq D \max_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 0 \leq j \leq n}} \{1, h(\beta_{i,j})\}.$$

Soit \mathfrak{a} l'entier défini par

$$\mathfrak{a} := \left\lceil \frac{D}{\log \epsilon} \log \left(e + \frac{D}{\log \epsilon} + \log a \right) \right\rceil + 1.$$

Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille libre sur \mathbf{Q} alors les formes linéaires de logarithmes

$$\Lambda_i := \beta_{i,0} + \beta_{i,1}u_1 + \dots + \beta_{i,n}u_n \quad (1 \leq i \leq t)$$

ne sont pas toutes nulles et elles vérifient la minoration

$$(1) \quad \log \max_{1 \leq i \leq t} \{|\Lambda_i|\} \geq -c_1 \mathfrak{a}^{1/t} (\log b + \mathfrak{a} \log \epsilon) \left(1 + \frac{D \log a}{\log \epsilon} \right)^{n/t}.$$

Dans le cas d'une place ultramétrique v_0 , lorsque k est un sous-corps de \mathbf{C}_{v_0} , nous avons un résultat similaire mais où la condition sur le paramètre ϵ est plus restrictive :

$$(2) \quad \epsilon \in \left] 1, \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{r_{v_0}^2}{|u_j|_{v_0}} \right\} \right]$$

($r_{v_0} := p_{v_0}^{-1/(p_{v_0}-1)}$ et p_{v_0} est le nombre premier que divise v_0), et la condition sur $\log a$ plus relâchée : $\log a \geq \max_{1 \leq j \leq n} \{h(\alpha_j)\}$. C'est uniquement à travers la condition (2) que se manifeste la présence du nombre premier p_{v_0} qui divise v_0 .

En ce qui concerne le minorant (1), on notera la dépendance linéaire (et donc optimale) en $\log b$ (hauteur des formes linéaires) et la dépendance usuelle $(\log a)^{n/t} (\log \log a)^{1+1/t}$ en $\log a$ (hauteur

*Nous renvoyons le lecteur au livre très complet de Waldschmidt [30] pour en saisir l'étendue.

du point $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Hormis l'aspect général de cette minoration déjà évoqué (t, v_0 quelconques), il n'y a plus le discriminant du corps de nombres, qui intervenait auparavant dans le cas simultané (comme dans l'article [14] d'Hirata-Kohno).

Cet article de synthèse n'apporte pas d'idée originale qui améliorerait les résultats connus pour une forme linéaire, de manière significative. En revanche, la démonstration que nous proposons est, elle, plus novatrice dans sa forme car elle combine la trame de la méthode des fonctions auxiliaires classique avec les outils de la théorie des pentes adéliques (sans « méthode des pentes » proprement dite). Il en résulte un cumul des avantages propres à ces techniques : souplesse d'utilisation et simplicité de la démarche pour l'une, conservation de l'aspect intrinsèque des données et obtention aisée des constantes numériques pour l'autre. Nous expliquerons plus en détail notre approche au § 5.1. Si nous avons pris le parti d'écrire ce texte dans le cas d'un groupe linéaire, il est cependant possible de généraliser à un groupe algébrique commutatif quelconque et même d'obtenir des constantes numériques explicites pour une variété abélienne, comme dans [9], *sans hypothèse* de non-torsion du point rationnel considéré (ici $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{G}_m^n(k)$).

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Résultats	3
2.1. Données	3
3. Éléments de théorie des pentes adéliques	4
4. Lemmes de petites valeurs	6
5. Démonstration du théorème principal	10
5.1. Canevas de la démonstration	10
5.2. Réductions	10
5.3. Préparatifs	11
5.4. Choix des paramètres	11
5.5. Charnière de la démonstration et compléments au cas périodique	12
5.6. Lemme de multiplicités	13
5.7. Fibré vectoriel adélique des sections globales	14
5.8. Estimation du rang d'un système linéaire	15
5.9. Estimation d'une dérivée	15
5.10. Construction d'une section auxiliaire	16
5.11. Estimations générales	17
5.12. Extrapolation sur les dérivations	18
5.13. Conclusion	20
Références	21

2. RÉSULTATS

2.1. Données. Soit k un corps de nombres de degré $D = [k : \mathbf{Q}]$. À une place ultramétrique v de k correspond un idéal premier \mathfrak{p}_v de l'anneau des entiers \mathcal{O}_k et un nombre premier p_v qui engendre l'idéal $\mathfrak{p}_v \cap \mathbf{Z}$. Notons k_v (*resp.* \mathcal{O}_v) le complété \mathfrak{p}_v -adique de k à la place v (*resp.* son anneau de valuation). Munissons k_v de l'unique valeur absolue $|\cdot|_v$ qui vérifie $|p_v|_v = p_v^{-1}$. Cette valeur absolue s'étend de manière unique à une clôture algébrique \bar{k}_v . Soit $\mathbf{C}_v = \mathbf{C}_p$ le complété du corps valué $(\bar{k}_v, |\cdot|_v)$. En une place v archimédienne, l'ensemble $\mathbf{C}_v = \mathbf{C}$ est muni de la valeur absolue usuelle. Avec ces conventions, la formule du produit s'écrit $\forall x \in k \setminus \{0\}, \prod_v |x|_v^{n_v} = 1$ où v parcourt l'ensemble des places de k et $n_v := [k_v : \mathbf{Q}_v]$ est le degré local 1, 2 ou $[k_v : \mathbf{Q}_{p_v}]$ selon le caractère réel, complexe ou ultramétrique de la place v . La *hauteur de Weil* (logarithmique absolue) d'un élément x de k est la somme (finie)

$$h(x) := \frac{1}{D} \sum n_v \log \max \{1, |x|_v\}.$$

Soit $r_v := p_v^{-1/(p_v-1)}$. Désignons par \mathcal{T}_v l'ensemble des nombres complexes \mathbf{C} si v est archimédienne et le disque ouvert de \mathbf{C}_v , centré en 0 et de rayon r_v , si v est ultramétrique. L'exponentielle du

groupe de Lie $\mathbf{G}_m(\mathbf{C}_v)$ est définie sur \mathcal{T}_v par la série convergente usuelle

$$\forall z \in \mathcal{T}_v, \quad e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}.$$

Soit v_0 une place de k , réelle, complexe ou p -adique. Dans la suite k sera vu comme un sous-corps du complété k_{v_0} en la place v_0 , lui-même inclus dans le complété de sa clôture algébrique \mathbf{C}_{v_0} . Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et u_1, \dots, u_n des éléments de \mathcal{T}_{v_0} , d'exponentielles respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Nous supposons que tous les α_i appartiennent à k .

Soit $t \in \{1, \dots, n\}$ et $\ell_1, \dots, \ell_t : k^n \rightarrow k$ des formes linéaires que l'on écrit dans la base canonique sous la forme

$$\forall z = (z_1, \dots, z_n) \in k^n, \quad \ell_i(z) = \beta_{i,1}z_1 + \dots + \beta_{i,n}z_n.$$

Soit W_0 le sous-espace vectoriel de k^n intersection des formes linéaires ℓ_i , $i \in \{1, \dots, t\}$. Soit $u_0 := -(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0}) \in k^t$ et $u := (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{C}_{v_0}^n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, posons $\Lambda_i := \beta_{i,0} + \ell_i(u)$. Soit $\epsilon_0 := 0$ si v_0 est ultramétrique et $\epsilon_0 := 1$ sinon.

Théorème 2.1.1. *Il existe une constante $c_2 > 0$, qui ne dépend que de n , ayant la propriété suivante. Avec les données ci-dessus, notons \mathbf{T}_u le sous-espace vectoriel de dimension minimale de \mathbf{Q}^n tel que $u \in \mathbf{T}_u(\mathbf{C}_{v_0})$. Considérons une partie I de $\{1, \dots, n\}$ telle que $(u_i)_{i \in I}$ soit une famille libre sur \mathbf{Q} et maximale pour cette propriété. Soit $a_1, \dots, a_n, \epsilon, \mathfrak{r}$ des nombres réels vérifiant les conditions suivantes :*

$$\epsilon \in \begin{cases}]1, \min \{r_{v_0}^2 / |u_i|_{v_0}; i \in I\} & \text{si } v_0 \text{ est ultramétrique,} \\ [e, +\infty[& \text{si } v_0 \text{ est archimédienne,} \end{cases}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \log a_j \geq \max \left\{ h(\alpha_j), \frac{\epsilon_0 \epsilon |u_j|_{v_0}}{D} \right\}.$$

Soit \mathfrak{a} l'entier défini par la formule

$$\mathfrak{a} := \left\lceil \frac{D}{\log \epsilon} \log \left(e + \frac{D}{\log \epsilon} + \log \prod_{j=1}^n a_j \right) \right\rceil + 1.$$

Soit b un nombre réel vérifiant

$$\log b \geq D \max_{\substack{1 \leq j \leq t \\ 0 \leq \ell \leq n}} \{1, h(\beta_{j,\ell})\}.$$

Soit $s := \dim \mathbf{T}_u - \dim(W_0 \cap \mathbf{T}_u)$. Alors, s'il existe $j \in \{1, \dots, t\}$ tel que $\Lambda_j \neq 0$, on a

$$\log \max_{1 \leq j \leq t} |\Lambda_j|_{v_0} \geq -c_2 \mathfrak{a}^{1/s} (\log b + \mathfrak{a} \log \epsilon + D \log \log \epsilon) \prod_{i \in I} \left(1 + \frac{D \log a_i}{\log \epsilon} \right)^{1/s}.$$

Le théorème de Wüstholz [31] affirme que \mathbf{T}_u est l'espace tangent d'un sous-groupe algébrique G_u de \mathbf{G}_m^n . Le paramètre s est donc identique à celui de [5], article dans lequel il apparaît pour la première fois. On notera au passage que $\dim \mathbf{T}_u = \text{card } I$. Par ailleurs, si v_0 est ultramétrique, l'existence du nombre réel ϵ implique que doit être satisfaite l'hypothèse : *pour tout $i \in I$, on a $|u_i|_{v_0} < r_{v_0}^2$* . Enfin, nous verrons au § 5.2 que si $s = 1$, la quantité $\log b + \mathfrak{a} \log \epsilon + D \log \log \epsilon$ peut être remplacée par $\log(b\epsilon) + D \log \mathfrak{a} + D \log \log \epsilon$.

La démonstration du théorème 2.1.1 commence au § 5, avec une réduction au cas $\mathbf{T}_u = \mathbf{Q}^n$ (la famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre sur \mathbf{Q}). Nous expliquerons son déroulement à cette occasion (§ 5.1) mais, auparavant, rappelons quelques notions de théorie des pentes adéliques et énonçons un nouveau lemme de petites valeurs qui jouera un rôle clef dans la démonstration.

3. ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES PENTES ADÉLIQUES

Issue de la géométrie d'Arakelov et développée dans l'article de Bost [3] et les cours qu'il a donnés à l'Institut Henri Poincaré en 1997 et 1999, la théorie des pentes des fibrés vectoriels adéliques sur $\text{Spec } k$ a fait l'objet d'une présentation systématique dans l'article [11]. Rappelons, mais sans entrer dans les détails, qu'un fibré vectoriel adélique $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E},v})_v)$ est la donnée d'un k -espace vectoriel E , de dimension finie $\nu \geq 0$, et d'une collection de normes $(\|\cdot\|_{\overline{E},v})$ sur chaque espace $E \otimes_k \mathbf{C}_v$, indexées par les places v de k et soumises à plusieurs contraintes naturelles, que l'on

trouvera dans la définition 3.1 de [11]. Le fibré vectoriel adélique est dit *hermitien* lorsque toutes les normes aux places archimédiennes sont hermitiennes *et* lorsque, pour toute place ultramétrique v de k et tout $x \in E$, on a $\|x\|_{\overline{E},v} \in |k_v|_v$ (notion de pureté, voir [12]). Tous les fibrés vectoriels adéliques considérés lors de la démonstration du théorème 2.1.1 sont hermitiens. Le fibré vectoriel adélique $(k^n, |\cdot|_2)$ est par définition le fibré adélique hermitien d'espace sous-jacent k^ν et de normes :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{C}_v^\nu, \quad |x|_{2,v} := \begin{cases} (\sum_{i=1}^\nu |x_i|^2)^{1/2} & \text{si } v \mid \infty, \\ \max\{|x_1|_v, \dots, |x_\nu|_v\} & \text{si } v \nmid \infty. \end{cases}$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E , il induit un sous-fibré vectoriel adélique \overline{F} , dont les normes sont les restrictions de celles de \overline{E} à F . Soit $(k_{\mathbf{A}}, +)$ le groupe des adèles de k et vol une mesure de Haar sur $k_{\mathbf{A}}^\nu$. À un tel fibré adélique \overline{E} sont associés sa *boule unité*

$$\mathbf{B}_{\overline{E}}(0, 1) := \{x = (x_v)_v \in E \otimes_k k_{\mathbf{A}}; \forall v, \|x_v\|_{\overline{E},v} \leq 1\},$$

son *degré d'Arakelov normalisé*

$$\widehat{\deg}_n \overline{E} := \frac{1}{[k : \mathbf{Q}]} \log \frac{\text{vol}(\phi(\mathbf{B}_{\overline{E}}(0, 1)))}{\text{vol}(\mathbf{B}_{(k^\nu, |\cdot|_2)}(0, 1))} \quad (\widehat{\deg}_n \{0\} := 0)$$

($\phi : E \rightarrow k^\nu$ est un isomorphisme quelconque de k -espaces vectoriels), sa *hauteur (logarithmique absolue)* $h(\overline{E}) := -\widehat{\deg}_n \overline{E}$, sa *pente d'Arakelov normalisée*

$$\widehat{\mu}_n(\overline{E}) := \frac{\widehat{\deg}_n \overline{E}}{\dim E} \quad (\widehat{\mu}_n(\{0\}) := -\infty),$$

sa *pente maximale* (si $n \geq 1$)

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) := \max\{\widehat{\mu}_n(\overline{F}); \{0\} \neq F \subseteq E\},$$

ainsi qu'une notion de *hauteur pour les éléments x de E* :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad h_{\overline{E}}(x) := \frac{1}{[k : \mathbf{Q}]} \sum_v n_v \log \|x\|_{\overline{E},v} \quad (h_{\overline{E}}(0) := 0).$$

Lorsque \overline{E} est hermitien, ces notions de hauteurs normalisées sont invariantes par extension des scalaires (voir § 4.3 de [11]). L'énoncé suivant remplace l'inégalité de Liouville usuelle.

Lemme 3.0.2. *Soit \overline{E} un fibré vectoriel adélique. Alors*

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad h_{\overline{E}}(x) \geq -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}).$$

La démonstration est immédiate à partir des définitions car $h_{\overline{E}}(x) = h((k.x, (\|\cdot\|_{\overline{E},v}))_v)$.

Définition 3.0.3. Soit v une place de k . Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{C}_v -espace vectoriel normé. Une base $e = (e_1, \dots, e_\nu)$ de E sera dite *admissible* si elle satisfait à l'une des deux conditions suivantes : soit v est archimédienne, $\|\cdot\|$ définit un produit hermitien sur E et e est une base orthonormée ; soit v est ultramétrique et

$$\forall (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{C}_v^\nu, \quad \left\| \sum_{j=1}^\nu x_j e_j \right\|_{\overline{E},v} = \max\{|x_1|_v, \dots, |x_\nu|_v\}.$$

3.0.1. *Notation.* Étant donné des multiplats $x = (x_1, \dots, x_\nu)$ et $y = (y_1, \dots, y_\nu)$, on note $|x|$ la *longueur* $\sum_{i=1}^\nu x_i$ de x et on désigne par $x!$ (*resp.* x^y) le produit $x_1! \cdots x_\nu!$ (*resp.* $x^y := x_1^{y_1} \cdots x_\nu^{y_\nu}$).

3.0.2. *Puissances symétriques des fibrés adéliques hermitiens.* Soit $\ell \geq 1$ un entier et \overline{E} un fibré adélique hermitien sur $\text{Spec } k$. Soit v une place de k et $e = (e_1, \dots, e_\nu)$ une base admissible de $(E \otimes_k \mathbf{C}_v, \|\cdot\|_{\overline{E},v})$ (dans le cas ultramétrique, la possibilité de choisir une telle base repose sur l'hypothèse de pureté de \overline{E} , voir [12]). Le fibré vectoriel adélique $\overline{S^\ell(E)}$ est par définition le fibré adélique hermitien d'espace sous-jacent la puissance symétrique $\ell^{\text{ème}}$ de E et tel que, pour toute place v de k , pour tout $s := \sum_{\substack{i \in \mathbf{N}^\nu \\ |i| = \ell}} p_i e^i \in S^\ell(E) \otimes_k \mathbf{C}_v$, on ait

$$(3) \quad \|s\|_{\overline{S^\ell(E)},v} := \begin{cases} \left(\sum_{|i| = \ell} |p_i|^2 \frac{i!}{\ell!} \right)^{1/2} & \text{si } v \mid \infty, \\ \max\{|p_i|_v; |i| = \ell\} & \text{si } v \nmid \infty. \end{cases}$$

Les métriques ainsi définies ne dépendent pas des choix précis des bases e considérées.

Proposition 3.0.4. *Soit $\nu \geq 1$. Il existe une constante c_3 , qui ne dépend que de ν , telle que, pour tout fibré adélique hermitien \overline{E} sur $\text{Spec } k$ de dimension ν , pour tout entier $\ell \geq 1$, on ait*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{S^\ell(E)}) \leq \ell(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + c_3).$$

S'il était connu depuis [3] que $c_3 = 2\nu \log \nu$ convenait, l'on peut montrer au moyen du lemme de Siegel absolu de Zhang [32] que $c_3 = (\log \nu)/2$ convient aussi (voir également Chen [4] pour une démonstration directe avec $c_3 = \log \nu$).

3.0.3. *Structure adélique sur $\mathbf{H}^0(\mathbf{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbf{P}(E)}(\ell))$.* Soit $\ell \geq 1$ un entier et \overline{E} un fibré adélique hermitien sur $\text{Spec } k$, de dimension $\nu \geq 1$. Soit $\mathbf{P}(E) := \text{Proj } \mathbf{S}(E)$ le fibré projectif sur $\text{Spec } k$ associé à E et $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(E)}(\ell) := \mathcal{O}_{\mathbf{P}(E)}(1)^{\otimes \ell}$ la puissance $\ell^{\text{ème}}$ du faisceau tautologique. Nous allons munir le k -espace vectoriel des sections globales $\mathfrak{E}_\ell := \mathbf{H}^0(\mathbf{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbf{P}(E)}(\ell))$ d'une structure de fibré adélique hermitien de la manière suivante. Soit v une place de k . Un point x de $\mathbf{P}(E)(\mathbf{C}_v)$ est la donnée d'une forme linéaire non nulle $\varphi_x : E \otimes_k \mathbf{C}_v \rightarrow \mathbf{C}_v$, unique à multiplication par un scalaire non nul près. De plus, si $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_\nu)$ est une \mathbf{C}_v -base de $E \otimes_k \mathbf{C}_v$, un vecteur s de $\mathfrak{E}_\ell \otimes_k \mathbf{C}_v$ s'écrit

$$(4) \quad s = \sum_{|i|=\ell} p_i e_1^{i_1} \cdots e_\nu^{i_\nu}$$

(dans cette somme, $i = (i_1, \dots, i_\nu) \in \mathbf{N}^\nu$ est de longueur ℓ), via l'isomorphisme

$$\iota_\ell : \mathbf{H}^0(\mathbf{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbf{P}(E)}(\ell)) \otimes_k \mathbf{C}_v \xrightarrow{\sim} S^\ell(E \otimes_k \mathbf{C}_v).$$

Posons

$$(5) \quad \|s(x)\|_v := \frac{\left| \sum_{|i|=\ell} p_i \varphi_x(e_1)^{i_1} \cdots \varphi_x(e_\nu)^{i_\nu} \right|_v}{\|\varphi_x\|_{\overline{E}, v}}.$$

Ce quotient ne dépend ni du choix de la base \mathbf{e} ni du choix du morphisme φ_x . Il induit une norme sur \mathfrak{E}_ℓ :

- si v est ultramétrique, $\|s\|_{\overline{\mathfrak{E}_\ell}, v} := \sup \{ \|s(x)\|_v ; x \in \mathbf{P}(E)(\mathbf{C}_v) \}$,
- si v est archimédienne,

$$\|s\|_{\overline{\mathfrak{E}_\ell}, v} := \left(\int_{\mathbf{P}(E)(\mathbf{C}_v)} \|s(x)\|_v^2 d\mu_v(x) \right)^{1/2}$$

où μ_v est la mesure de probabilité sur $\mathbf{P}(E)(\mathbf{C}_v)$, invariante sous l'action du groupe unitaire.

Il est possible de calculer explicitement $\|s\|_{\overline{\mathfrak{E}_\ell}, v}$ au moyen d'une base \mathbf{e} *admissible*. De ce calcul découle alors l'énoncé suivant (voir le § 4.3.1 de [9] pour plus de détails). On pose $\epsilon_v := 0$ si v est ultramétrique et 1 sinon.

Proposition 3.0.5. *Le couple $\overline{\mathfrak{E}_\ell} := (\mathfrak{E}_\ell, (\|\cdot\|_{\overline{\mathfrak{E}_\ell}, v}))$ forme un fibré adélique hermitien. De plus, pour toute place v de k , pour tout $s \in \mathfrak{E}_\ell \otimes_k \mathbf{C}_v$, on a $\|s\|_{\overline{\mathfrak{E}_\ell}, v} = \binom{\nu-1+\ell}{\ell}^{-\epsilon_v/2} \|\iota_\ell(s)\|_{\overline{S^\ell(E)}, v}$.*

4. LEMMES DE PETITES VALEURS

La plupart des démonstrations de transcendance requiert l'utilisation d'une fonction auxiliaire qui doit satisfaire à un nombre fini de conditions linéaires. En général il s'agit de conditions d'annulations en des points particuliers avec des ordres de multiplicités dans certaines directions (on parle parfois de « points épaissis »). Aux prémices de la théorie (travaux d'Hermite et Lindemann par exemple), on exhibait hardiment une fonction auxiliaire *explicite*. Toutefois sont rapidement apparues les difficultés et les limitations inhérentes à cette approche presque impudique*. En filigrane dans les articles de Thue [26, 27], l'on doit à Siegel d'avoir conceptualisé en 1929 l'idée qu'il suffisait de connaître une estimation de la « taille » de la fonction auxiliaire F . Demander

*Cependant, ce procédé reste encore très actuel au travers par exemple des approximants de Padé et des fonctions hypergéométriques car, comme l'avait noté Chudnovsky, elle conduit souvent à de meilleurs résultats.

l'annulation de F en un nombre fini de points épaissis équivaut à réclamer que les coefficients de F satisfassent à un système linéaire

$$(6) \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \quad \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} x_j = 0$$

d'inconnues x_1, \dots, x_{ν} . Lors de l'étude de la transcendance des valeurs des fonctions de Bessel [25], Siegel formula l'énoncé précis suivant.

Lemme de Siegel . *Supposons que $\mu < \nu$ et que, pour tous i, j , on a $a_{i,j} \in \mathbf{Z}$. Soit $A = \max_{i,j} \{|a_{i,j}|\}$. Alors il existe une solution $(x_1, \dots, x_{\nu}) \in \mathbf{Z}^{\nu} \setminus \{0\}$ au système (6) telle que*

$$\max\{|x_1|, \dots, |x_{\nu}|\} \leq 1 + (\nu A)^{\frac{\mu}{\nu-\mu}}.$$

Ce résultat découle simplement du *principe des tiroirs de Dirichlet*. Comme l'a remarqué Mignotte, il est possible de l'étendre à un système à coefficients algébriques (voir lemme 1.3.1 de [28]). Cependant l'on s'est aperçu qu'un tel lemme n'était rien d'autre qu'une variante du *premier théorème de Minkowski* sur les corps convexes. Ce point de vue s'est révélé fécond en débouchant sur une version adélique du lemme de Siegel, démontré par Bombieri & Vaaler [2].

Lemme de Bombieri & Vaaler . *Soit k un corps de nombres de discriminant absolu D_k . Notons $\text{rd}_k := |D_k|^{1/[k:\mathbf{Q}]}$ son discriminant racine. Soit \overline{E} un fibré adélique hermitien sur $\text{Spec } k$, de dimension $\nu \geq 1$. Alors il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que*

$$h_{\overline{E}}(x) \leq -\widehat{\mu}_n(\overline{E}) + \frac{1}{2}(\log \nu + \log \text{rd}_k).$$

Plusieurs développements de ce lemme existent. On peut demander que l'élément $x \in E \setminus \{0\}$ évite un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E . Ceci constitue le fil directeur de notre article [12]. Mais la variante la plus importante est celle qui permet de s'affranchir de la dépendance en le discriminant du corps de nombres. On recherche une solution x non nulle non pas dans E mais dans $E \otimes \overline{\mathbf{Q}}$. Un tel lemme de Siegel est dit *absolu*. Roy & Thunder ont obtenu un énoncé de ce type dans [23]. Nous présentons ici un raffinement de leur résultat, signalé par David & Philippon [6], qui se déduit d'une inégalité de Zhang relative aux minima successifs d'une variété arithmétique [32].

Lemme de Siegel absolu . *Soit \overline{E} un fibré adélique hermitien sur $\text{Spec } k$, de dimension $\nu \geq 1$. Alors il existe $x \in (E \otimes \overline{\mathbf{Q}}) \setminus \{0\}$ tel que*

$$h_{\overline{E}}(x) \leq -\widehat{\mu}_n(\overline{E}) + \frac{1}{2} \log \nu.$$

L'énoncé de Roy & Thunder donne ν au lieu de $\frac{1}{2} \log \nu$. Si, autrefois, dans les démonstrations de mesures d'indépendance linéaire de logarithmes, le discriminant du corps de nombres était absorbé par des termes plus gros, aujourd'hui les mesures sont devenues assez fines pour que ce discriminant devienne un facteur limitant. C'est la présence de ce discriminant qui explique pourquoi l'énoncé principal de [8] s'exprime au moyen d'un maximum sur deux quantités. Comme il supprime cette imperfection, le lemme de Siegel absolu a pris une grande importance ces dernières années, ainsi que le prouve son utilisation dans plusieurs articles récents de la théorie des formes linéaires logarithmes [1, 5, 10]. Le fait que l'on ne maîtrise pas le (degré du) corps de nombres dans lequel vit la solution x est sans conséquence car, en définitive, l'on est amené à effectuer un produit sur les différentes places de ce corps, produit duquel émerge directement $H_{\overline{E}}(x)$. Néanmoins quelques soucis techniques peuvent surgir.

Tout d'abord, la hauteur de \overline{E} peut s'avérer difficile à évaluer avec précision. Si, comme dans le lemme de Siegel original, l'espace vectoriel E est défini par le système linéaire (6), la hauteur de \overline{E} se calcule au moyen des mineurs maximaux de la matrice $A := (a_{i,j})_{i,j}$. En général, on estime la taille de ces mineurs avec l'inégalité d'Hadamard (le déterminant d'une famille de vecteurs est plus petit que le produit des normes hermitiennes de ces vecteurs), qui, *in fine*, fait ressortir la hauteur des $a_{i,j}$. Il arrive souvent que les $a_{i,j}$ soient petits aux places archimédiennes (ce qui est très bien) mais avec un dénominateur trop grand aux places ultramétriques. L'astuce consiste alors à trouver

un système

$$(7) \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \quad \sum_{j=1}^{\nu} b_{i,j} x_j = 0,$$

équivalent à (6) et définissant ainsi le même espace vectoriel E , mais, où, cette fois-ci, les nombres algébriques $b_{i,j}$ sont petits aux places ultramétriques et de tailles quelconques aux autres places. Dans ce cas, la partie archimédienne de la hauteur de \overline{E} est évaluée avec (6) et la partie ultramétrique avec (7). Cette technique fonctionne assez bien même si elle est parfois délicate à mettre en œuvre (voir p. ex. la démonstration de la proposition 4.15 de [10]).

Une autre difficulté est que les coefficients $a_{i,j}$ qui se présentent naturellement peuvent ne pas être algébriques, même après renormalisation. Le système (6) ne possède alors en général aucune solution algébrique hormis $(0, \dots, 0)$. C'est pourquoi il est plus raisonnable de demander au lemme de fournir une solution algébrique (x_1, \dots, x_n) non nulle au système d'inéquations

$$(8) \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \quad \left| \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} x_j \right| \leq \varepsilon$$

(ici ε est un nombre réel strictement positif). Un énoncé qui garantit l'existence d'une solution algébrique à ce système d'inéquations est appelé *lemme de petites valeurs*. En voici un exemple, extrait de l'article de Philippon & Waldschmidt [19], qui a servi à la construction de la fonction auxiliaire de plusieurs articles marquants de la théorie des formes linéaires de logarithmes [13, 14, 19, 20] (aussi utilisé dans [8]) :

Lemme de petites valeurs . *Soit $A = (a_{i,j})$, $1 \leq i \leq \mu$, $1 \leq j \leq \nu$, une matrice de nombres complexes et A un nombre réel tel que $\max_{1 \leq i \leq \mu} \sum_{j=1}^{\nu} |a_{i,j}| \leq A$. Soit ρ le rang de A . Soit $H \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon \in]0, +\infty[$ tels que*

$$\left(\frac{2\mu H A}{\varepsilon} + 1 \right)^{2\rho} < (H + 1)^\nu.$$

Alors il existe $(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\max_{1 \leq j \leq \nu} \{|x_j|\} \leq H \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq i \leq \mu} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} x_j \right| \right\} \leq \varepsilon.$$

Tout comme pour le lemme de Siegel original, la démonstration repose sur le principe des tiroirs. S'il est facile de généraliser à un corps de nombres au moyen d'une \mathbf{Q} -base (ξ_1, \dots, ξ_D) de ce corps, ceci fait intervenir la hauteur de cette base. Et souvent, dans la pratique, le corps considéré est le corps de nombres dans lequel vivent tous les nombres algébriques de la démonstration. En particulier, pour les formes linéaires de logarithmes, la hauteur de (ξ_1, \dots, ξ_D) est liée aux paramètres $\log a$ et $\log b$. Pour faire disparaître la dépendance en le corps de nombres ambiant, l'on peut imaginer écrire un lemme de petites valeurs *absolu*. Il s'avère qu'un lemme de Siegel (classique ou absolu) donne automatiquement un lemme de petites valeurs par *déformation des normes*, comme nous allons l'expliquer maintenant.

Soit k un corps de nombres et v_0 une place quelconque de k . Soit $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E},v})_v)$ et $\overline{F} = (F, (\|\cdot\|_{\overline{F},v})_v)$ des fibrés vectoriels adéliques sur $\text{Spec } k$. Soit $\alpha \in k_{v_0}$ et $\mathbf{a} : E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0} \rightarrow F \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ une application linéaire. Sur $E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$, on considère la norme tordue par α :

$$\forall x \in E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}, \quad \|x\|_{\overline{E}_\alpha, v_0} := \begin{cases} \left(\|x\|_{\overline{E}, v_0}^2 + \|\alpha \mathbf{a}(x)\|_{\overline{F}, v_0}^2 \right)^{1/2} & \text{si } v_0 \mid \infty, \\ \max \{ \|x\|_{\overline{E}, v_0}, \|\alpha \mathbf{a}(x)\|_{\overline{F}, v_0} \} & \text{si } v_0 \nmid \infty. \end{cases}$$

Si v est une place de k , différente de v_0 , on pose $\|\cdot\|_{\overline{E}_\alpha, v} := \|\cdot\|_{\overline{E}, v}$. Alors le couple $\overline{E}_\alpha = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E}_\alpha, v})_v)$ forme un fibré vectoriel adélique. De plus, si $x \in E$, on a $h_{\overline{E}}(x) \leq h_{\overline{E}_\alpha}(x)$ et $\|\mathbf{a}(x)\|_{\overline{F}, v_0} \leq |\alpha|_{v_0}^{-1} \|x\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}$. Dès lors, savoir majorer finement $h_{\overline{E}_\alpha}(x)$, pour un vecteur x particulier, revient à établir un lemme de petites valeurs. L'emploi du lemme de Bombieri & Vaaler ou du lemme de Siegel absolu pour évaluer $h_{\overline{E}_\alpha}(x)$ pose le problème de l'estimation de la hauteur de \overline{E}_α en fonction de celles de \overline{E} , $\overline{\text{Im}(\mathbf{a})}$ et du rang de \mathbf{a} . Le choix de bases admissibles sur $E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ et

$F \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ respectivement permet d'identifier l'application linéaire \mathbf{a} à une matrice $\mathbf{A} \in M_{\mu, \nu}(\mathbf{C}_{v_0})$. Pour tout $x \in E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ de coordonnées $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_\nu)$, la norme $\|x\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}$ peut s'écrire

$$\|x\|_{\overline{E}_\alpha, v_0} = |(|x|_{2, v_0}, |\alpha \mathbf{A} \mathbf{x}|_{2, v_0})|_{2, v_0}.$$

Comme \overline{E} et \overline{E}_α ne diffèrent qu'en la place v_0 , la définition de la pente d'un fibré vectoriel adélique conduit à la formule

$$(9) \quad \widehat{\mu}_n(\overline{E}_\alpha) - \widehat{\mu}_n(\overline{E}) = \frac{n_{v_0}}{\nu D} \log \left(\frac{\text{vol}(\{x \in k_{v_0}^\nu; |(|x|_{2, v_0}, |\alpha \mathbf{A} \mathbf{x}|_{2, v_0})|_{2, v_0} \leq 1\})}{\text{vol}(\{x \in k_{v_0}^\nu; |x|_{2, v_0} \leq 1\})} \right)$$

(vol est une mesure de Haar quelconque sur $(k_{v_0}^\nu, +)$, $n_{v_0} = [k_{v_0} : \mathbf{Q}_{v_0}]$ est le degré local et $D = [k : \mathbf{Q}]$ le degré de k sur \mathbf{Q}). Étant donné un entier $l \geq 1$, notons $\mathbf{U}(l, k_{v_0})$ le groupe orthogonal réel d'ordre l si v_0 est une place réelle, le groupe unitaire d'ordre l si v_0 est complexe et le groupe $\text{GL}_l(\mathcal{O}_{v_0})$ si v_0 est ultramétrique. En vertu de la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{A} , il existe des éléments $\sigma_1(\mathbf{A}), \dots, \sigma_\rho(\mathbf{A})$ de $]0, +\infty[$ (resp. de la forme $\pi_{v_0}^{n_i}$, $n_i \in \mathbf{Z}$, $1 \leq i \leq \rho$) si v_0 est archimédienne (resp. si v_0 est ultramétrique et π_{v_0} est une uniformisante de \mathcal{O}_{v_0}) et il existe deux matrices $U \in \mathbf{U}(\mu, k_{v_0})$ et $V \in \mathbf{U}(\nu, k_{v_0})$ tels que UAV est la matrice diagonale dont le $i^{\text{ème}}$ élément sur la diagonale est $\sigma_i(\mathbf{A})$ si $i \in \{1, \dots, \rho\}$ et 0 si $i \in \{\rho + 1, \dots, \min\{\mu, \nu\}\}$. L'entier ρ est le rang de la matrice \mathbf{A} .

Lemme 4.0.6. *Pour tout $\alpha \in k_{v_0}$, on a*

$$\widehat{\mu}_n(\overline{E}_\alpha) - \widehat{\mu}_n(\overline{E}) = -\frac{n_{v_0}}{\nu D} \sum_{i=1}^{\rho} \log |(1, \alpha \sigma_i(\mathbf{A}))|_{2, v_0}.$$

Démonstration. En vertu de la définition des matrices U et V associées à la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{A} , la condition

$$(|x|_{2, v_0}, |\alpha \mathbf{A} \mathbf{x}|_{2, v_0})|_{2, v_0} \leq 1$$

équivaut à

$$(|y|_{2, v_0}, |\alpha U A V y|_{2, v_0})|_{2, v_0} \leq 1 \text{ avec } y = V^{-1}x.$$

En notant (y_1, \dots, y_ν) les coordonnées de y et en posant $\sigma_i := |(1, \alpha \sigma_i(\mathbf{A}))|_{2, v_0}$, cette dernière condition devient

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\rho} \sigma_i^2 |y_i|^2 + \sum_{i=\rho+1}^{\nu} |y_i|^2 \leq 1 & \text{si } v_0 \mid \infty, \\ \max\{\sigma_1 |y_1|_{v_0}, \dots, \sigma_\rho |y_\rho|_{v_0}, |y_{\rho+1}|_{v_0}, \dots, |y_\nu|_{v_0}\} \leq 1 & \text{si } v_0 \nmid \infty. \end{cases}$$

Le lemme 4.0.6 découle de la description (9) de la différence des pentes et d'un changement de variable standard. \square

Soit $\|\mathbf{a}\|$ la norme d'opérateur de $\mathbf{a} : \|\mathbf{a}\| := \max\{\|\mathbf{a}(x)\|_{\overline{F}, v_0}; \|x\|_{\overline{E}, v_0} = 1\}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, \rho\}$, on a $|\sigma_i(\mathbf{A})|_{v_0} \leq \|\mathbf{a}\|$. Du lemme 4.0.6 découle alors l'énoncé suivant.

Proposition 4.0.7. *Pour tout $\alpha \in k_{v_0}$, la différence des pentes $\widehat{\mu}_n(\overline{E}_\alpha) - \widehat{\mu}_n(\overline{E})$ est minorée par*

$$-\frac{n_{v_0} \rho}{\nu D} (\log \max\{1, |\alpha|_{v_0}\} + \log \max\{1, \|\mathbf{a}\|\}).$$

Ces calculs et le lemme de Siegel absolu appliqué à \overline{E}_α conduisent au résultat suivant.

Lemme de petites valeurs absolu. *Soit k un corps de nombres et v_0 une place quelconque de k . Soit \overline{E} et \overline{F} deux fibrés adéliques hermitiens sur $\text{Spec } k$. Soit $\mathbf{a} : E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0} \rightarrow F \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ une application \mathbf{C} -linéaire, de rang ρ , et de norme d'opérateur $\|\mathbf{a}\|$. Pour tout $\alpha \in k_{v_0}$, il existe $x \in (E \otimes \overline{\mathbf{Q}}) \setminus \{0\}$ tel que*

$$h_{\overline{E}_\alpha}(x) \leq \frac{n_{v_0} \rho}{\nu D} (\log \max\{1, |\alpha|_{v_0}\} + \log \max\{1, \|\mathbf{a}\|\}) + \frac{1}{2} \log \nu - \widehat{\mu}_n(\overline{E}).$$

Cet énoncé s'étend sans grande difficulté pour des fibrés adéliques qui ne sont pas nécessairement hermitiens. Bien qu'un peu âpre, il s'avère assez facile d'utilisation. Une caractéristique importante est la présence du quotient ρ/ν , qui sera petit dans le contexte des formes linéaires de logarithmes (voir proposition 5.8.1). Dans un souci d'efficacité, nous n'avons pas séparé les contributions des normes de x en les différentes places de $\overline{\mathbf{Q}}$, en exprimant simplement le résultat en terme de

hauteur (globale) de x . La possibilité de majorer chacune des normes de x sera détaillée dans un futur article, travail en commun avec Gaël Rémond.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL

5.1. Canevas de la démonstration. Nous utilisons la méthode de Baker non pas avec des fonctions auxiliaires, ni avec des déterminants d'interpolation, ni avec la méthode des pentes. En réalité, nous faisons un mélange entre la première et la dernière de ces méthodes, c.-à-d. que nous passons par la construction d'une section auxiliaire d'un certain fibré en droites. À chaque étape de la démonstration nous conservons l'aspect intrinsèque des données. De la sorte nous bénéficions de la souplesse de la méthode des fonctions auxiliaires et de la possibilité d'accéder naturellement aux constantes numériques de la méthode des pentes. Concrètement, après avoir modifié les données initiales de manière à être en mesure d'utiliser la réduction d'Hirata-Kohno et le procédé de changement de variables de Chudnovsky, nous construisons un fibré adélique hermitien \overline{E} . L'espace vectoriel E sous-jacent est un espace de polynômes en plusieurs variables, auquel est adjoint des normes en toutes les places de k . Ce fibré adélique \overline{E} a la particularité d'avoir une norme « tordue » en la place v_0 , ce qui constitue une des nouveautés de ce texte. Nous construisons alors un élément $s \neq 0$ de E de petite hauteur au moyen du lemme de Siegel absolu. Le choix des paramètres et le lemme de multiplicités de Philippon assurent qu'il existe un jet de s d'ordre ℓ le long de W (sous-espace construit à partir de W_0) en un multiple mp de p qui est non nul, avec ℓ, m contrôlés. Ensuite nous évaluons la hauteur de ce jet, en distinguant les normes aux places ultramétriques des normes aux places archimédiennes. Le comportement du jet en la place v_0 est étudié à part. La majoration de sa norme repose sur une extrapolation sur les dérivations (cas périodique) ou sur les multiples de p (cas non périodique), qui a été préparée par la construction de s . C'est à cet endroit qu'apparaissent les valeurs absolues des formes linéaires que nous cherchons à évaluer. Pour conclure, nous utilisons une variante de l'inégalité de Liouville pour minorer la hauteur de ce jet, qui fait intervenir la pente maximale arakelovienne de l'espace naturel dans lequel vit le jet considéré.

5.2. Réductions. Pour démontrer le théorème 2.1.1, l'on peut supposer que

- (i) $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille libre sur \mathbf{Q} ,
- (ii) $\{\ell_1, \dots, \ell_t\}$ est une famille libre du dual $(k^n)^\vee$.

En effet, considérons un ensemble I tel que $(u_i)_{i \in I}$ soit une base du \mathbf{Q} -espace vectoriel engendré par u_1, \dots, u_n . Posons $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$. Pour $j \in J$, la famille $\{u_i\}_{i \in I} \cup \{u_j\}$ est liée sur \mathbf{Q} . Le lemme 7.19. de [30] (p. 222) assure l'existence d'une constante $c_4 = c_4(n) > 0$ et de nombres rationnels $\theta_{j,i}$ tels que $u_j = \sum_{i \in I} \theta_{j,i} u_i$ et

$$h(\theta_{j,i}) \leq c_4 \log(D + \log(a_1 \cdots a_n)) \leq c_4 \left(\frac{\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}}{D} + \log \log \mathfrak{e} \right)$$

pour tous j, i . Par ailleurs, chaque $\ell_j(u)$, $1 \leq j \leq t$, est la valeur d'une forme linéaire L_j en les u_i , $i \in I$, avec des coefficients de hauteur bornée par $\max_{m,\ell} \{h(\beta_{m,\ell})\} + \max_{j,i} \{h(\theta_{j,i})\}$, et donc par

$$\frac{c_5}{D} (\log b + \mathfrak{a} \log \mathfrak{e} + D \log \log \mathfrak{e}) .$$

De cette famille $\{L_1, \dots, L_t\}$ de formes linéaires sur k^I , l'on peut extraire une famille libre maximale, qui comporte exactement $s = \dim \mathbb{T}_u - \dim(W_0 \cap \mathbb{T}_u)$ éléments. Notons \mathbf{S} le sous-ensemble de $\{1, \dots, t\}$ qui indexe la famille libre choisie. Pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$, on a $\Lambda_j = \beta_{j,0} + L_j((u_i)_{i \in I})$ et le maximum des $|\Lambda_j|$ que l'on cherche à minorer est plus grand que $\max_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}} \{|\beta_{\mathbf{s},0} + L_{\mathbf{s}}((u_i)_{i \in I})|\}$. De la sorte l'on s'est donc bien ramené aux conditions (i) et (ii) ci-dessus. De plus les estimations faites des hauteurs des coefficients des $L_{\mathbf{s}}$ montrent que le théorème 2.1.1 découle de l'énoncé suivant (les notations sont celles du théorème 2.1.1).

Théorème 5.2.1. *Il existe une constante $c_6 > 0$, qui ne dépend que de n , ayant la propriété suivante. Supposons que $\{u_1, \dots, u_n\}$ et $\{\ell_1, \dots, \ell_t\}$ sont des familles libres sur \mathbf{Q} . Alors pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$, $\Lambda_j \neq 0$ et l'on a*

$$\log \max_{1 \leq j \leq t} |\Lambda_j|_{v_0} \geq -c_6 \mathfrak{a}^{1/t} (\log b + \mathfrak{a} \log \mathfrak{e}) \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{D \log a_j}{\log \mathfrak{e}} \right)^{1/t} .$$

De plus, si $t = 1$ et $\beta_{1,0} \neq 0$, la quantité $\log b + \mathbf{a} \log \mathbf{e}$ qui est dans le minorant peut être remplacée par $\log b + \log \mathbf{e} + D \log \mathbf{a}$.

Le théorème 1.0.1 donné dans l'introduction est une conséquence immédiate de cet énoncé en choisissant $a_j = a$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. De plus, le fait qu'aucun des Λ_j n'est nul est une conséquence du théorème de Baker qui affirme que la famille $\{1, u_1, \dots, u_n\}$ est libre sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

La différence avec le résultat de Loxton [15] est assez modeste. Elle réside surtout dans la dépendance en le degré D (ici de l'ordre de $D^{1+\varepsilon+(n+1)/t}$ au lieu de D^{200n}) et dans le caractère plus général du théorème 5.2.1 (place v_0 quelconque, pas d'hypothèse d'indépendance multiplicative des α_j , $1 \leq j \leq n$). En revanche Loxton a précisé une valeur possible de la constante c_6 (de l'ordre de $(16n)^{200n}$), que nous n'avons pas calculé ici, bien que ce soit possible, avec probablement le même ordre de grandeur en n .

La suite de l'article concerne la démonstration du théorème 5.2.1. En particulier, dans toute la suite, nous supposons que les familles $\{u_1, \dots, u_n\}$ et $\{\ell_1, \dots, \ell_t\}$ sont des familles libres sur \mathbf{Q} .

5.3. Préparatifs. Avant de commencer la démonstration du théorème 5.2.1, nous avons besoin de modifier les données brutes du paragraphe 2.1.

Rappelons que W_0 désigne le sous-espace vectoriel de k^n intersection des formes linéaires ℓ_i , $i \in \{1, \dots, t\}$. Soit G_0 le spectre de l'algèbre symétrique $\mathbf{S}((k^n/W_0)^\vee)$. C'est un schéma en groupes affine sur $\text{Spec } k$, dont l'espace tangent à l'origine s'identifie canoniquement au quotient k^n/W_0 . Notons G le k -groupe algébrique linéaire $G_0 \times \mathbf{G}_m^n$. Les groupes algébriques G_0 et G admettent des compactifications naturelles $X_0 := \mathbf{P}(k \oplus (k^n/W_0)^\vee)$ et $X := X_0 \times (\mathbf{P}_k^1)^n$. Soit $\lambda : k^n \rightarrow k^n/W_0$ la projection canonique et W le sous-espace de l'espace tangent à l'origine $t_G = (k^n/W_0) \oplus k^n$ défini comme l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda(y) \oplus y$ avec $y \in k^n$. Le fibré adélique hermitien $(k^n, |\cdot|_2)$ confère à k^n/W_0 et à t_G des structures adéliques hermitiennes, respectivement par quotient et par somme directe orthogonale. Nous noterons $\overline{k^n/W_0}$ et $\overline{t_G}$ les fibrés adéliques hermitiens ainsi obtenus. Comme sous-espace vectoriel de $(k^n, |\cdot|_2)$, l'espace W_0 hérite d'une structure de fibré adélique hermitien $\overline{W_0}$ et l'on note $h(W_0)$ sa hauteur d'Arakelov au sens du § 3. Par hermitianité, cette quantité est aussi le degré d'Arakelov de $\overline{k^n/W_0}$. À une constante qui ne dépend que de n près, elle est comparable à la quantité $\max_{i,j} \{1, h(\beta_{i,j})\}$ qui apparaît dans la définition de $\log b$ du théorème 2.1.1. Par ailleurs, fixons une k -base quelconque de k^n/W_0 , ce qui permet de voir u_0 indifféremment comme un vecteur de $t_{G_0}(k)$ ou bien un point k -rationnel de G_0 (que l'on notera toujours u_0).

5.4. Choix des paramètres. Soit C_0 un nombre réel strictement positif. Posons $y := 0$ si $t = 1$ et $\beta_{1,0} \neq 0$ et $y := 1$ sinon. Soit $S_0 := C_0 \mathbf{a}$ et $S := C_0^3 \mathbf{a}$. Soit $U_0 > 0$ un nombre réel défini un peu plus loin et soit $\tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n, \tilde{T}, \tilde{T}_0$ les nombres réels donnés par les formules suivantes :

$$\tilde{T}_0 := \frac{C_0 U_0}{S \log \mathbf{e}}, \quad \tilde{T} := C_0^2 \tilde{T}_0,$$

$$\tilde{D}_0 := \frac{U_0}{D \max\{1, h(W_0)\} + D \max\{h(mu_0); 1 \leq m \leq (n+t)S\} + S^y \log \mathbf{e}}$$

(la présence du paramètre y au dénominateur explique le raffinement donné dans le théorème 5.2.1 lorsqu'il n'y a qu'une seule forme linéaire, non homogène) et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \tilde{D}_i := \frac{U_0}{S \log \mathbf{e} + DS \log a_i}.$$

Un sous-groupe algébrique connexe G' de G se décompose en un produit $G'_0 \times \mathbf{G}'_m$ avec G'_0 (resp. \mathbf{G}'_m) un sous-groupe algébrique connexe de G_0 (resp. \mathbf{G}_m^n). Posons

$$(10) \quad t' := \dim G'_0, \quad n' := \dim \mathbf{G}'_m, \quad r' := \text{codim}_G G', \quad \lambda' := \text{codim}_W (W \cap t_{G'}).$$

De simples considérations d'algèbres linéaires montrent que

$$r' - \lambda' = t - \dim(t_{G'_0} + \lambda(t_{\mathbf{G}'_m})) \leq \min\{t - t', n - n'\}.$$

À une sous-variété V de $X_{\overline{k}}$ est associé un polynôme dit de Hilbert-Samuel H_V à $n+1$ variables. Soit $\mathcal{H}(V; X_0, \dots, X_n)$ la partie homogène de plus haut degré de H_V multipliée par $(\dim V)!$. Les coefficients de \mathcal{H} sont des entiers positifs de somme égale au degré de V (voir p. ex. [22]). Posons

$$p := (u_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{et} \quad \Sigma_p(S) := \{0_G, p, 2p, \dots, Sp\}.$$

Lorsque $W + t_{G'} \neq t_G$ (et en particulier $t' \neq t$), on pose

$$x(G') := \frac{1}{\tilde{D}_0} \left(\frac{\tilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + G'(\mathbf{C}_{v_0})}{G'(\mathbf{C}_{v_0})} \right) \mathcal{H}(\mathbf{G}'_m; \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n)}{C_0 \tilde{D}_1 \cdots \tilde{D}_n} \right)^{\frac{1}{t-t'}}.$$

Soit x le minimum des nombres réels $x(G')$ lorsque G' parcourt les sous-groupes algébriques connexes de G tels que $W + t_{G'} \neq t_G$ (l'existence de x découle d'un argument standard, expliqué par exemple à la page 734 de [9]). Soit $\tilde{G} = \tilde{G}_0 \times \tilde{\mathbf{G}}_m$ un sous-groupe algébrique vérifiant ces conditions et tel que $x = x(\tilde{G})$, auquel on adjoint les entiers $\tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{r}, \tilde{\lambda}$ définis par (10). Nécessairement on a $\tilde{n} < n$ car sinon $t_{\tilde{G}} + W = t_G$. Notons $T := [\tilde{T}]$, $D_0 := [x\tilde{D}_0]$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $D_i := [\tilde{D}_i]$. L'homogénéité de la fonction \mathcal{H} permet de voir que la quantité $U_0^{(r'-\lambda')/(t-t')} x(G')$ ne dépend pas de U_0 , lorsque G' varie parmi les sous-groupes autorisés. En observant que $\{0\}$ fait partie de ces sous-groupes, nous pouvons choisir U_0 de sorte que $x(\{0\}) = 1$ (et, en particulier, on a $x \leq 1$). Concrètement, U_0 est égal à

$$(11) \quad C_0^{(3n-1)/t} \left\{ \operatorname{card}(\Sigma_p(S)) \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{D \log a_i}{\log \mathfrak{e}} \right) \right\}^{1/t} \\ \times (D \max\{1, h(W_0)\} + D \max\{h(mu_0); 1 \leq m \leq (n+t)S\} + S^y \log \mathfrak{e}).$$

Cette expression permet de justifier les estimations suivantes.

Proposition 5.4.1. *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (i) $C_0 \max\{1, \tilde{D}_0/S^{1-y}, \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n\} \leq \tilde{T}_0$,
- (ii) $C_0^2 \leq \tilde{D}_0$ et $C_0^2 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{\tilde{D}_j\}$ (en particulier D_0 et au moins un des D_j , $1 \leq j \leq n$, ne sont pas nuls),
- (iii) $T \log(D_0) \leq C_0^{1/4} U_0/D$.

Désignons par Ω_{v_0} l'ensemble $\{0\} \times (2i\pi\mathbf{Z})^n$ si v_0 est archimédienne et l'ensemble $\{0\}$ sinon.

Définition 5.4.2. Nous dirons que nous sommes dans le *cas périodique* s'il existe un entier $m \in \{1, \dots, (n+t)S\}$ tel que $m(u_0, u) \in t_{\tilde{G}}(\mathbf{C}_{v_0}) + \Omega_{v_0}$, et que nous sommes dans le *cas non périodique* dans le cas contraire.

Dans le cas périodique, la lettre Υ désigne l'ensemble des couples (m, τ) avec $m \in \{0, 1, \dots, (n+t)S\}$ et $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$ qui vérifie $\sum_{i=1}^n \tau_i \leq 2(n+t)T$ et $\tau_n \leq T_0$. Dans le cas non périodique, Υ est l'ensemble des couples (m, τ) avec $m \in \{0, 1, \dots, S_0 - 1\}$ et $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$ qui vérifie $\sum_{i=1}^n \tau_i \leq 2(n+t)T$. Dans les deux cas, nous notons μ le cardinal de Υ .

Remarque . Comme la famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre sur \mathbf{Q} , être dans le cas périodique implique que la place v_0 est archimédienne et que la famille $\{2i\pi, u_1, \dots, u_n\}$ est liée sur \mathbf{Q} (c.-à-d. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ multiplicativement dépendants). Comme il ne peut exister qu'une seule relation, à multiplication par un scalaire non nul près, entre $2i\pi$ et les u_j (sinon existerait une relation non triviale entre les u_j), le groupe $\tilde{\mathbf{G}}_m$ est de dimension $n - 1$ et son espace tangent contient W_0 .

5.5. Charnière de la démonstration et compléments au cas périodique. Comme nous l'avons ci-dessus, le groupe algébrique $\tilde{\mathbf{G}}_m$ est de dimension $\leq n - 1$. En particulier, comme $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre sur \mathbf{Q} on a $u \notin t_{\tilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}_{v_0})$. Par conséquent les vecteurs $u_0 \oplus u$ et $\lambda(u) \oplus u$ n'appartiennent pas à l'espace tangent du groupe algébrique $\tilde{G}(\mathbf{C}_{v_0})$. L'intersection $W \cap t_{\tilde{G}}$ est donc un sous-espace strict de W (car ce dernier contient $\lambda(u) \oplus u$). Fixons alors une base *admissible* $w := (w_1, \dots, w_n)$ de $W \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ qui possède en outre les deux propriétés suivantes :

- (i) (w_1, \dots, w_n) est une base de $(W \cap t_{\tilde{G}}) \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$,
- (ii) si $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \in \mathbf{C}_{v_0}^n$ désigne le vecteur des coordonnées de $\lambda(u) \oplus u$ dans la base (w_1, \dots, w_n) alors $|\mathbf{u}_n|_{v_0} = \max\{|\mathbf{u}_j|_{v_0}; n+1 \leq j \leq n\}$.

Dans le cas périodique (et cette hypothèse implique maintenant que nécessairement v_0 est archimédienne puisque $(u_0, u) \notin t_{\tilde{G}}(\mathbf{C}_{v_0})$), l'on sait minorer $|\mathbf{u}_n|_{v_0}$ de la manière suivante. Il existe un entier $m \in \{1, \dots, (n+t)S\}$, $x \in t_{\tilde{G}}(\mathbf{C})$ et $\omega \in (2i\pi\mathbf{Z})^n \setminus \{0\}$ tels que $m(u_0, u) = x + (0, \omega)$. Soit

d_{v_0} la distance sur $t_G(\mathbf{C}_{v_0})$ induite par la norme $\|\cdot\|_{\overline{t}_G, v_0}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $|\mathbf{u}_n|_{v_0}$ est minoré par

$$\begin{aligned} \frac{d_{v_0}(m(\lambda(u) \oplus u), t_{\tilde{G}}(\mathbf{C}))}{m\sqrt{n}} &= \frac{d_{v_0}((m(\lambda(u) - u_0), \omega), t_{\tilde{G}}(\mathbf{C}))}{m\sqrt{n}} \\ &\geq \frac{d_{v_0}(\omega, t_{\tilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}))}{(n+t)S\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

L'espace tangent au sous-groupe $\tilde{\mathbf{G}}_m$ est défini par le lieu d'annulation de formes linéaires à coefficients dans \mathbf{Z} . Aussi les valeurs prises en ω sont des multiples entiers de π qui ne sont pas tous nuls. La distance $d_{v_0}(\omega, t_{\tilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}))$ est donc minorée par une constante qui ne dépend que de n . L'énoncé suivant découle de cette observation.

Proposition 5.5.1. *Il existe une constante c_7 , qui ne dépend que de n , telle que, dans le cas périodique, on ait $|\mathbf{u}_n|_{v_0}^{-1} \leq c_7 S$.*

5.6. Lemme de multiplicités. Soit M le fibré en droites $\mathcal{O}_{X_0}(1)^{\otimes D_0} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(1)^{\otimes D_1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(1)^{\otimes D_n}$ sur X .

Proposition 5.6.1. *Soit \bar{k} une clôture algébrique de k . Aucune section globale non nulle de $M \otimes \bar{k}$ ne s'annule le long de W à l'ordre $(n+t)T$ en tous les points de l'ensemble $\{0_G, p, \dots, (n+t)Sp\}$.*

La démonstration est presque la même que celle de la proposition 5.3 de [9], où le rôle joué par \mathbf{G}_m^n était dévolu à une variété abélienne. Comme ici nous n'allons pas suivre les constantes, il y a quelques simplifications qui augmentent la clarté de la preuve. C'est la raison pour laquelle nous la reproduisons ci-après, sous une forme un peu abrégée.

Démonstration. Supposons cet énoncé faux et qu'une telle section existe. D'après le lemme de multiplicités [17], il existe un sous-groupe algébrique connexe G_0^* (resp. \mathbf{G}_m^*) de $G_{0, \bar{k}}$ (resp. de $\mathbf{G}_{m, \bar{k}}^n$) tel que $G^* := G_0^* \times \mathbf{G}_m^* \neq G_{\bar{k}}$ et

$$(12) \quad T^{\lambda^*} \text{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + G^*(\bar{k})}{G^*(\bar{k})} \right) \mathcal{H}(G^*; D'_0, \dots, D'_n) \leq \mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n)$$

où $D'_i := \max\{1, D_i\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous allons montrer que cette inégalité ne peut pas être satisfaite en distinguant deux cas. Quitte à permuter les facteurs dans \mathbf{G}_m^n , l'on peut supposer $D_1 \leq \dots \leq D_n$ sans perte de généralité.

Premier cas : $t_{G^*} + W_{\bar{k}} = t_{G_{\bar{k}}}$, c.-à-d. $\lambda^* = r^*$. De l'inégalité (12) l'on déduit l'existence d'une constante c_8 telle que

$$\text{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + G^*(\bar{k})}{G^*(\bar{k})} \right) \leq c_8 \left(\frac{D'_0}{T} \right)^{t-t^*} \left(\frac{D_n}{T} \right)^{n-n^*}.$$

En observant que le cardinal à gauche vaut $S+1$ lorsque $t=1$ et $t^*=0$, la première propriété de la proposition 5.4.1 contredit cette inégalité.

Second cas : $t_{G^*} + W_{\bar{k}} \neq t_{G_{\bar{k}}}$. En particulier on a $t^* \neq t$. Soit κ le plus petit entier de $\{1, \dots, n\}$ tel que $D_\kappa \geq 1$. Soit $\pi_\kappa : \mathbf{G}_m^n \rightarrow \mathbf{G}_m^{n-\kappa}$ la projection sur les $n-\kappa$ derniers facteurs. Posons $G_\kappa^* := G_0^* \times \mathbf{G}_m^\kappa \times \pi_\kappa(\mathbf{G}_m^*)$. Une propriété de la fonction \mathcal{H} assure que

$$\mathcal{H}(\pi_\kappa(\mathbf{G}_m^*); D_\kappa, \dots, D_n) \leq \mathcal{H}(\mathbf{G}_m^*; D_1, \dots, D_n),$$

ce qui entraîne l'existence d'une constante c_9 telle que

$$\frac{\mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n)}{\mathcal{H}(G^*; D'_0, \dots, D'_n)} \leq c_9 \frac{\mathcal{H}(G; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)}{\mathcal{H}(G_\kappa^*; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)} x^{t-t^*}.$$

De plus, comme $G^* \subseteq G_\kappa^*$ on a $\lambda_\kappa^* := \text{codim}_{W_{\bar{k}}}(W_{\bar{k}} \cap t_{G_\kappa^*}) \leq \lambda^*$ et

$$\text{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + G_\kappa^*(\bar{k})}{G_\kappa^*(\bar{k})} \right) \leq \text{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + G^*(\bar{k})}{G^*(\bar{k})} \right).$$

De la sorte l'on obtient une inégalité analogue à (12) avec le sous-groupe algébrique G_κ^* :

$$(13) \quad T^{\lambda_\kappa^*} \text{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + G_\kappa^*(\bar{k})}{G_\kappa^*(\bar{k})} \right) \mathcal{H}(G_\kappa^*; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n) \leq c_9 \mathcal{H}(G; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n) x^{t-t^*}.$$

En reprenant l'étude du premier cas (on a bien $G_\kappa^* \neq G_{\bar{k}}$ car $t^* \neq t$) et compte tenu du fait que $x \leq 1$, on a $\lambda_\kappa^* \neq \tau_\kappa^*$. Ceci signifie que $t_{G_\kappa^*} + W_{\bar{k}} \neq t_{G_{\bar{k}}}$ et la majoration (13) entre alors en contradiction avec la définition de x . \square

5.7. Fibré vectoriel adélique des sections globales. Soit $E := H^0(X, M)$ l'espace vectoriel sur k des sections globales de M et soit $\nu := \dim E$. L'objectif de ce paragraphe est de munir E d'une structure de fibré adélique hermitien assez particulière de manière à permettre d'extrapoler plus tard sur les dérivations. Tout d'abord, l'espace E est le produit tensoriel

$$H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(D_0)) \otimes_k \bigotimes_{j=1}^n H^0(\mathbf{P}_k^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(D_j)).$$

Chacun des morceaux de ce produit a une structure de fibré adélique hermitien décrite au § 3.0.3, ce qui confère à E une première structure de fibré adélique hermitien $\overline{E} := (E, (\|\cdot\|_v))$ (par produit tensoriel hermitien, voir p. 43 – 45 de [11]). Mais ce n'est pas tout à fait cette structure que l'on va mettre sur E . À la place v_0 , nous allons ajouter une quantité supplémentaire à $\|\cdot\|_{v_0}$, comme nous l'avons fait au § 4 pour établir le lemme de petites valeurs absolu.

Norme particulière en la place v_0 . Considérons la base admissible (w_1, \dots, w_n) de $W \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ introduite au § 5.5. Au moyen d'une base admissible de $(k^n/W_0)^\vee \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$, l'on peut identifier un vecteur $s \in E_{v_0} := E \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ à un polynôme multihomogène P en les variables $X_0 = (X_{0,0}, \dots, X_{0,t})$ et $X_j = (X_{j,0}, X_{j,1}), j \in \{1, \dots, n\}$, de multidegré (D_0, \dots, D_n) , à coefficients dans \mathbf{C}_{v_0} . Soit $s_0 \in E_{v_0}$ la section qui correspond au polynôme $\prod_{j=0}^n X_{j,0}^{D_j}$. Soit $F_{s,v_0} : \mathbf{C}_{v_0}^t \oplus \mathcal{T}_{v_0}^n \rightarrow \mathbf{C}_{v_0}$ l'application

$$(14) \quad \forall z = (z_0, (z_1, \dots, z_n)) \in \mathbf{C}_{v_0}^t \times \mathcal{T}_{v_0}^n, \quad F_{s,v_0}(z) = P(z_0, e^{z_1}, \dots, e^{z_n})$$

(nous avons commis un abus de notation, z_0 (*resp.* e^{z_i}) devrait être $(1, z_0)$ (*resp.* $(1, e^{z_i})$) pour $i \in \{1, \dots, n\}$). Pour $m \in \mathbf{N}$ et pour $\tau \in \mathbf{N}^n$, notons $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,v_0}(m(u_0, u))$ le $\tau^{\text{ème}}$ coefficient de Taylor à l'origine de l'application

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto F_{s,v_0}(m(u_0, u) + z_1 w_1 + \dots + z_n w_n).$$

Soit (s_1, \dots, s_ν) une base admissible de $(E_{v_0}, \|\cdot\|_{v_0})$. Considérons alors la matrice A , de taille $\mu \times \nu$, dont les coefficients sont les éléments de \mathbf{C}_{v_0} suivants : pour tout $(m, \tau) \in \Upsilon$, pour tout $i \in \{1, \dots, \nu\}$,

$$(15) \quad A[(m, \tau), i] := \left| \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s_i, v_0}(m(u_0, u)) \right|_{v_0} \|s_0(mp)\|_{v_0}.$$

Dans cette expression, la norme de $s_0(mp)$ se calcule au moyen la formule (5) et l'on a

$$(16) \quad \|s_0(mp)\|_{v_0} = \prod_{j=1}^n |(1, \alpha_j^m)|_{2, v_0}^{-D_j/2} \times \begin{cases} \max\{1, \|mu_0\|_{\overline{t_G}, v_0}^{-D_0}\} & \text{si } v \nmid \infty, \\ (1 + \|mu_0\|_{\overline{t_G}, v_0}^2)^{-D_0/2} & \text{si } v \mid \infty. \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir la norme voulue sur E_{v_0} : soit $\alpha \in k_{v_0}$. Pour tout $s = \sum_{i=1}^\nu x_i s_i \in E_{v_0}$,

$$(17) \quad \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0} := \begin{cases} (|x|_{2, v_0}^2 + |\alpha Ax|_{2, v_0}^2)^{1/2} & \text{si } v_0 \mid \infty, \\ \max\{|x|_{2, v_0}, |\alpha Ax|_{2, v_0}\} & \text{si } v_0 \nmid \infty. \end{cases}$$

Dans ces expressions, x désigne le vecteur colonne de coordonnées x_1, \dots, x_ν . Par définition, le fibré adélique hermitien \overline{E}_α est le fibré égal à \overline{E} sauf en la place v_0 où la norme est donnée par la formule (17) (on retrouve \overline{E} si l'on prend $\alpha = 0$).

Lemme 5.7.1. *La pente d'Arakelov normalisée $\hat{\mu}_n(\overline{E})$ du fibré adélique hermitien \overline{E} est minorée par $-D_0 h(W_0)/(t+1)$.*

En réalité, on connaît une formule exacte pour cette pente, formule qui entraîne immédiatement le lemme. Pour cela, l'on peut se référer à la proposition 4.2 de [9] en tenant compte du fait que la pente d'Arakelov est additive vis à vis du produit tensoriel de fibrés adéliques hermitiens (voir proposition 5.2 de [11]).

5.8. Estimation du rang d'un système linéaire.

Proposition 5.8.1. *Soit ρ le rang de la matrice A de coefficients (15). Alors $\rho \leq c_{10}\nu/C_0$ pour une constante c_{10} qui ne dépend que de n .*

Démonstration. Consubstantielle à la distinction entre le cas périodique et le cas non périodique et à l'introduction du groupe \tilde{G} , l'argumentation n'a pas changé depuis l'article fondateur de Philippon & Waldschmidt [19]. En posant

$$(T_1, S_1) := \begin{cases} (T, S_0) & \text{dans le cas non périodique,} \\ (T_0, S) & \text{dans le cas périodique,} \end{cases}$$

ils montrent l'existence d'une constante $c_{11} > 0$ telle que

$$(18) \quad \rho \leq c_{11} T^{\tilde{\lambda}-1} T_1 \operatorname{card} \left(\frac{\Sigma_p(S_1) + \tilde{G}(\bar{k})}{\tilde{G}(\bar{k})} \right) \mathcal{H}(\tilde{G}; D'_0, \dots, D'_n).$$

Comme dans la démonstration de la proposition 5.6.1, nous pouvons supposer que $D_1 \leq \dots \leq D_n$ et considérer le plus petit entier κ de $\{1, \dots, n\}$ tel que $D_\kappa \neq 0$. Il existe alors une constante c_{12} telle que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}(\tilde{G}; D'_0, \dots, D'_n)}{\mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n)} &\leq \frac{c_{12}}{(x\tilde{D}_0)^{t-\tilde{t}}} \frac{\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{G}}_m; 1, \dots, 1, D_\kappa, \dots, D_n)}{\mathcal{H}(\mathbf{G}_m^n; 1, \dots, 1, D_\kappa, \dots, D_n)} \\ &\leq \frac{2^{n-\kappa} c_{12}}{(x\tilde{D}_0)^{t-\tilde{t}}} \frac{\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{G}}_m; \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n)}{\mathcal{H}(\mathbf{G}_m^n; \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n)} \\ &= \frac{2^{n-\kappa} c_{12} C_0}{\tilde{T}^{\tilde{\lambda}} \operatorname{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + \tilde{G}(\bar{k})}{\tilde{G}(\bar{k})} \right)} \end{aligned}$$

(la dernière égalité repose sur la définition de $x = x(\tilde{G})$). En injectant cette estimation dans (18), nous avons l'existence d'une constante c_{13} telle que

$$\rho \leq c_{13} C_0 \max \left\{ \frac{T_0}{T}, \frac{S_0}{S} \right\} \mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n).$$

La dimension ν de E vaut $\binom{D_0+t}{t} (D_1+1) \cdots (D_n+1)$ et par conséquent

$$\rho \leq c_{13} C_0 \frac{(n+t)!}{t!} \max \left\{ \frac{T_0}{T}, \frac{S_0}{S} \right\} \nu.$$

Le choix des paramètres permet alors de conclure. \square

5.9. Estimation d'une dérivée. Soit v une place quelconque de k . Soit $X_0 = (X_{0,0}, \dots, X_{0,t})$ et $X_j = (X_{j,0}, X_{j,1})$, $1 \leq j \leq n$, des multiplats de variables. Soit P un polynôme multihomogène de $\mathbf{C}_v[X_0, \dots, X_n]$, de multidegré (D_0, \dots, D_n) . Soit $F_{P,v} : \mathbf{C}_v^t \oplus \mathcal{T}_v^n \rightarrow \mathbf{C}_v$ l'application

$$\forall z = (z_0, (z_1, \dots, z_n)) \in \mathbf{C}_v^t \times \mathcal{T}_v^n, \quad F_{P,v}(z) = P(z_0, e^{z_1}, \dots, e^{z_n})$$

(comme pour la formule (14)). Voici une première estimation, très élémentaire mais d'un usage fréquent dans la suite.

Proposition 5.9.1. *Il existe une constante c_{14} , qui ne dépend que n , ayant la propriété suivante. Soit $P = \sum_{\mathbf{h}} p_{\mathbf{h}} X_0^{\mathbf{h}_0} \cdots X_n^{\mathbf{h}_n}$ un polynôme comme ci-dessus et $F_{P,v}$ la fonction associée. Soit $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ une base de $W \otimes_k \mathbf{C}_v$ telle que $\|w_i\|_{\overline{\mathcal{T}}_{G,v}} \leq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $\tau \in \mathbf{N}^n$ et pour tout $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbf{C}_v^t \times \mathcal{T}_v^n$, la quantité $|\frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^{\tau} F_{P,v}(z)|_v$ est majorée par*

$$c_{14}^{D_0+|\tau|} \max \{1, \|z_0\|_{\overline{\mathcal{T}}_{G,v}}\}^{D_0} \left(\prod_{i=1}^n \max \{1, |e^{z_i}|_v\}^{D_i} \right) \nu \max_{\mathbf{h}} \{ |p_{\mathbf{h}}|_v \}.$$

La restriction sur la norme des vecteurs de la base w disparaît facilement en multipliant le membre de droite par $\prod_{i=1}^n (\|w_i\|_{tG,v}^{\tau_i})^{\tau_i}$ où les τ_i sont les coordonnées de τ (considérer $w_i/\|w_i\|_{tG,v}$ et observer que $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{P,v}(z)$ est « homogène » par rapport aux vecteurs de w).

Démonstration. Soit $l_{0,1}, \dots, l_{0,t}, l_1, \dots, l_n$ des formes linéaires sur $(\mathbf{C}_v)^n$, telles que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}_v^n$, on ait $\sum_{i=1}^n x_i w_i = (l_{0,1}(x), \dots, l_n(x))$. Comme les normes de chacun des vecteurs w_i sont plus petites que 1, les coefficients des formes linéaires ont leurs valeurs absolues majorées par une constante qui ne dépend que de n . Par ailleurs, l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto P(z_0 + (l_{0,1}(x), \dots, l_{0,t}(x)), e^{z_1+l_1(x)}, \dots, e^{z_n+l_n(x)})$$

est une somme de termes de la forme

$$(19) \quad p_{\mathbf{h}}(z_0 + (l_{0,1}(x), \dots, l_{0,t}(x)))^{h_0} \left(\prod_{i=1}^n e^{h_i z_i} e^{h_i l_i(x)} \right)$$

où $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{N}^t \times \mathbf{N}^n$ avec, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $|h_i| \leq D_i$, et $p_{\mathbf{h}} \in \mathbf{C}_v$ est l'un des coefficients de P . Le deuxième facteur de ce produit avec la puissance h_0 doit être compris comme un produit sur t termes. Il s'agit d'évaluer le coefficient devant $x^{\mathbf{t}}$ dans le développement en série de (19). En développant la puissance de h_0 , on se ramène à des termes de la forme

$$(20) \quad c(\mathbf{h}, \mathbf{h}'_0) \left(p_{\mathbf{h}} z_0^{h'_0} \prod_{i=1}^n e^{h_i z_i} \right) \cdot x^{h''_0} \prod_{i=1}^n e^{h_i l_i(x)}$$

avec $c(\mathbf{h}, \mathbf{h}'_0) \in \mathbf{C}_v$ de valeur absolue $\leq c_{15}^{D_0}$ (c_{15} ne dépend que de n), et $\mathbf{h}'_0, \mathbf{h}''_0 \in \mathbf{N}^t$ de somme h_0 . Pour conclure, il suffit alors d'observer que la valeur absolue v -adique du quotient $\mathbf{h}^{\mathbf{t}'} / \mathbf{t}'!$, où $\mathbf{t}' \in \mathbf{N}^n$, est majorée par $c_{16}^{|\mathbf{t}'|+|\mathbf{h}|}$ (dans le cas ultramétrique $|\mathbf{t}'!|_v^{-1} \leq p_v^{|\mathbf{t}'|/(p_v-1)} \leq c_{16}^{|\mathbf{t}'|}$, c_{16} ne dépend que de n et pas de p_v). \square

Corollaire 5.9.2. *Il existe une constante c_{17} , qui ne dépend que de n , ayant la propriété suivante. Tous les coefficients de la matrice \mathbf{A} , définie au § 5.7, sont inférieurs à $c_{17}^{U_0}$.*

Démonstration. Chacune des fonctions F_{s_i, v_0} qui intervient dans la définition (15) des coefficients de \mathbf{A} est de la forme F_{P_i, v_0} . La proposition 5.9.1 peut donc s'appliquer avec $v = v_0$, $w = w$ et $z = m(u_0, u)$. Comme la passage de s_i à P_i se fait au moyen d'une base admissible de $(k^n/W_0)^v \otimes_k \mathbf{C}_v$, les coefficients de P_i sont plus petits que $c_{18}^{\max_j \{D_j\}} \leq c_{18}^{U_0}$ (la norme de s_i vaut 1). Ce qui permet de conclure. \square

5.10. Construction d'une section auxiliaire.

Proposition 5.10.1. *Il existe une constante c_{19} , qui ne dépend que de n , ayant la propriété suivante. Soit $\alpha \in k_{v_0}$. Il existe une section $s \in E \otimes_k \bar{k}$, non nulle, telle que*

$$h_{\overline{E}_\alpha}(s) \leq \frac{c_{19}}{D} \left(\frac{1}{C_0} \log \max \{1, |\alpha|_{v_0}\} + U_0 \right).$$

En particulier, si l'on choisit α de sorte que $C_0^{5/4} U_0 \leq \log |\alpha|_{v_0} \leq C_0^{7/4} U_0$ on a

$$(21) \quad h_{\overline{E}_\alpha}(s) \leq \frac{c_{19} C_0^{5/4} U_0}{D}.$$

Démonstration. D'après le lemme de petites valeurs absolu du § 4, il existe un vecteur $s \in E \otimes_k \bar{k}$, non nul, tel que

$$h_{\overline{E}_\alpha}(s) \leq \frac{n_{v_0} \rho}{\nu D} (\log \max \{1, |\alpha|_{v_0}\} + \log \max \{1, \|\mathbf{A}\|\}) + \frac{1}{2} \log \nu - \widehat{\mu}_n(\overline{E}).$$

Dans le membre de droite, on majore ρ/ν avec la proposition 5.8.1 et $\|\mathbf{A}\|$ est évalué au moyen du corollaire 5.9.2. Enfin le lemme 5.7.1 permet de majorer $-\widehat{\mu}_n(\overline{E})$. La proposition 5.10.1 s'obtient en utilisant ces résultats et en substituant les paramètres par leurs valeurs, suivi de quelques majorations simples. \square

La démonstration du théorème 5.2.1 s'effectue avec la section s que l'on vient de construire dans cette proposition, qui vérifie (21). *A priori* cette section n'est pas définie sur k mais sur une extension finie K de k . Cette complication technique n'a finalement pas de conséquence. En effet, le degré relatif $[K : k]$ n'intervient pas car les estimations des jets de s en les places v' de K au-dessus d'une place v de k sont de la forme $\mathbf{c}_v \|s\|_{\overline{E}_{\alpha,v}}$, où \mathbf{c}_v ne dépend que de v (et des autres données) et pas de v' . C'est la raison pour laquelle nous *supposons* — et ceci sans perte de généralité — que s est définie sur k .

5.11. Estimations générales. Soit $(m, \ell) \in \mathbf{N}^2$. Considérons la section s construite dans la proposition 5.10.1. Au moyen de la base de k^n/W_0 fixée à la fin du § 5.3, considérons le polynôme multihomogène P à coefficients dans k associé à s . Soit $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ une k -base de W . Il existe des formes linéaires $l_{0,1}, \dots, l_{0,t}, l_1, \dots, l_n$ sur k^n telles que, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un n -uplet de variables, on ait $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i = (l_{0,1}(x), \dots, l_n(x))$. Tous les coefficients de Taylor à l'origine — $a(s, \mathbf{w}, m, \tau)$, $\tau \in \mathbf{N}^n$ — de la série formelle

$$(22) \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto P \left(m u_0 + (l_{0,1}(x), \dots, l_{0,t}(x)), \alpha_1^m e^{l_1(x)}, \dots, \alpha_n^m e^{l_n(x)} \right)$$

sont des éléments de k . En une place v de k pour laquelle mp possède un logarithme $z \in t_G(\mathbf{C}_v)$, l'image du coefficient $a(s, \mathbf{w}, m, \tau)$ dans k_v est égale à $\frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^{\tau} F_{s,v}(z)$ définie au § 5.7.

Définition 5.11.1. Soit $(\mathbf{w}_1^{\vee}, \dots, \mathbf{w}_n^{\vee})$ la base duale de \mathbf{w} . Le jet de s d'ordre ℓ le long de W au point mp , noté $\text{jet}_W^{\ell} s(mp)$, est le vecteur

$$(23) \quad \left(\sum_{\substack{\tau=(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n \\ |\tau|=\ell}} a(s, \mathbf{w}, m, \tau) \cdot \prod_{i=1}^n (\mathbf{w}_i^{\vee})^{\tau_i} \right) \cdot s_0(mp)$$

de $S^{\ell}(W^{\vee}) \otimes_k (mp)^* M$.

Tel que nous venons de le définir, le terme $\text{jet}_W^{\ell} s(mp)$ dépend du choix de la base \mathbf{w} . Toutefois, lorsque $\text{jet}_W^h s(mp) = 0$ pour tout entier $h \in \{0, \dots, \ell - 1\}$, ce n'est plus le cas. Considérons le couple $(m, \ell) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m \in \{0, \dots, (n+t)S\}$, $\ell \in \{0, \dots, (n+t)T\}$ et (m, ℓ) *minimal* pour la propriété $\text{jet}_W^{\ell} s(mp) \neq 0$. L'adjectif minimal s'entend par rapport à l'ordre lexicographique sur \mathbf{N}^2 . Dorénavant, la majeure partie de la démonstration du théorème 5.2.1 va consister à évaluer chacune des normes v -adiques de $\text{jet}_W^{\ell} s(mp)$ dans le but d'estimer sa hauteur, relative au fibré adélique hermitien $\overline{\mathfrak{Jct}} := S^{\ell}(\overline{W}^{\vee}) \otimes_k \overline{(mp)^* M}$. Ici l'écriture $\overline{(mp)^* M}$ représente la fibre M_{mp} de M au point mp munie des métriques obtenues par produit tensoriel à partir des normes (5) (voir aussi (16)).

5.11.1. Estimations archimédiennes. Soit v une place archimédienne de k . Dans l'expression (23) du jet, choisissons pour \mathbf{w} une base *orthonormée* de $W \otimes_v \mathbf{C}$ et fixons un logarithme z de $mp \in G(k_v)$. La norme $\|\text{jet}_W^{\ell} s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{Jct}},v}$ est majorée par

$$(24) \quad \binom{n+\ell-1}{\ell} \max_{|\tau|=\ell} \left\{ \left| \frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^{\tau} F_{s,v}(z) \right|_v \|s_0(mp)\|_v \right\}.$$

La proposition 5.9.1 fournit alors l'estimation suivante.

Proposition 5.11.2. *Il existe une constante c_{20} , qui ne dépend que de n , ayant la propriété suivante. Pour toute place v archimédienne de k , on a*

$$\|\text{jet}_W^{\ell} s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{Jct}},v} \leq \exp \{c_{20} U_0 / D\} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha,v}}.$$

5.11.2. Estimations ultramétriques. Étant donné des entiers ℓ et h strictement positifs, on définit l'entier $\delta_{\ell}(h)$ comme le ppcm des produits $i_1 \cdots i_{h'}$ où $h' \in \{1, \dots, h\}$, $i_j \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $i_1 + \cdots + i_{h'} \leq \ell$. Le théorème des nombres premiers assure l'existence d'une constante absolue $c_{21} > 0$ telle que $\log \delta_{\ell}(h) \leq \ell \log(c_{21} h)$.

Proposition 5.11.3. *Pour toute place ultramétrique v de k , pour tous entiers $m, \ell \geq 0$, pour toute section globale s de M , le jet de s , d'ordre ℓ le long de W au point mp , vu comme élément de $S^{\ell}(W^{\vee}) \otimes (mp)^* M$, est de norme v -adique inférieure à $\|s\|_{\overline{E},v} / |\delta_{\ell}(D_0)|_v$.*

La démonstration est une variante plus simple de l'énoncé équivalent montré dans le cadre des variétés abéliennes au § 5.8 de [9], au moyen du procédé de changement de variables de Chudnovsky. Nous renvoyons le lecteur à cet article pour plus de précisions.

5.12. Extrapolation sur les dérivations. L'objectif de ce paragraphe est d'évaluer la v_0 -norme de $\text{jet}_W^\ell s(mp)$ en tenant compte de la construction de s , où la place v_0 a été singularisée au moyen de l'ensemble Υ . Comme de coutume, nous allons devoir distinguer les cas périodique et non périodique, distinction à laquelle se superposera la distinction entre v_0 archimédienne et v_0 ultramétrique.

Soit w la base particulière de $W \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ introduite au § 5.7, utilisée dans la définition de la matrice A . D'après la majoration (24) appliquée avec $v = v_0$, $\mathbf{w} = w$ et $z = m(u_0, u)$, le problème consiste à estimer $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,v_0}(m(u_0, u))$. Pour cela on ramène le problème à $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,v_0}(m(\lambda(u), u))$ grâce au lemme de comparaison suivant :

Lemme 5.12.1. *Il existe une constante $c_{22} > 0$, qui ne dépend que de n , ayant la propriété suivante. Soit $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ une base de $W \otimes_k \mathbf{C}_v$ telle que $\|w_i\|_{\overline{\mathbf{t}}_G, v} \leq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $\mathbf{m} \in \mathbf{N}$ tel que $\|\mathbf{m}(u_0 - \lambda(u))\|_{\overline{\mathbf{t}}_G, v_0} \leq 1$ et pour tout $\mathbf{t} \in \mathbf{N}^n$, la valeur absolue v_0 -adique de la différence $\frac{1}{\mathbf{t}!} D_w^{\mathbf{t}} F_{s,v_0}(m(u_0, u)) - \frac{1}{\mathbf{t}!} D_w^{\mathbf{t}} F_{s,v_0}(m(\lambda(u), u))$ est majorée par*

$$c_{22}^{|\mathbf{t}|+U_0} \|\mathbf{m}(u_0 - \lambda(u))\|_{\overline{\mathbf{t}}_G, v_0} \|s\|_{v_0} \times \max\{1, \|\mathbf{m}u_0\|_{\overline{\mathbf{t}}_G, v_0}\}^{D_0} \left(\prod_{i=1}^n \max\{1, |\alpha_i|_{v_0}\}^{m D_i} \right).$$

Démonstration. En reprenant le début de la démonstration de la proposition 5.9.1 avec $v = v_0$, l'on est amené à devoir comparer les coefficients devant $x^{\mathbf{t}}$ dans (20) lorsque $z_0 = \mathbf{m}u_0$ et $z_0 = \mathbf{m}\lambda(u)$ respectivement, et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $z_i = \mathbf{m}u_i$. Et il suffit alors d'observer que la différence $(\mathbf{m}u_0)^{h_0} - (\mathbf{m}\lambda(u))^{h_0}$ est de valeur absolue inférieure $c_{23}^{D_0} \|\mathbf{m}(u_0 - \lambda(u))\|_{\overline{\mathbf{t}}_G, v_0} \max\{1, \|\mathbf{m}u_0\|_{\overline{\mathbf{t}}_G, v_0}\}^{D_0}$ grâce à l'hypothèse $\|\mathbf{m}(u_0 - \lambda(u))\|_{\overline{\mathbf{t}}_G, v_0} \leq 1$. La suite de la démonstration repose sur les considérations (i) et (ii) qui concluent la preuve de la proposition 5.9.1. \square

L'estimation de $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,v_0}(m(\lambda(u), u))$ repose sur une version légèrement affaiblie des lemmes d'interpolation de Waldschmidt [29] (cas archimédien) et de Roy [24] (cas ultramétrique, voir aussi [10] pour les simplifications faites ici). Si x est un nombre réel positif et f une fonction définie sur le disque fermé $\overline{D}(0, x) = \{z \in \mathbf{C}_{v_0}; |z|_{v_0} \leq x\}$, on note $|f|_x$ la borne supérieure des $|f(z)|$, $z \in \overline{D}(0, x)$. Rappelons que $\epsilon_0 = 0$ si v_0 est ultramétrique et 1 sinon.

Lemme 5.12.2. *Il existe une constante absolue c_{24} ayant la propriété suivante. Soit S_1, T_1 des entiers naturels strictement positifs et $R \geq r \geq (2S_1)^{\epsilon_0}$ des nombres réels. Soit f une fonction analytique dans le disque $\overline{D}(0, R)$. On a alors*

$$|f|_r \leq S_1^{T_1} \max \left\{ \left(\frac{(c_{24} r v_0)^{\epsilon_0} r}{r v_0 R} \right)^{T_1 S_1} |f|_R, \left(\left(\frac{c_{24} r v_0}{S_1} \right)^{\epsilon_0} \frac{r}{r v_0} \right)^{T_1 S_1} \max_{\substack{0 \leq h < T_1 \\ 0 \leq m < S_1}} \left\{ \left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(\mathbf{m}) \right|_{v_0} \right\} \right\}.$$

La suite de la démonstration repose sur un raisonnement par l'absurde, au moyen de l'hypothèse suivante.

Hypothèse 5.12.3. $\|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{\mathbf{t}}_G, v_0} \leq e^{-C_0^3 U_0}$

Notons \mathbf{D} le disque ouvert $\{z \in \mathbf{C}_{v_0}; |z|_{v_0} < \min\{r_{v_0}/|u_i|_{v_0}; 1 \leq i \leq n\}\}$ si v_0 est ultramétrique et l'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes sinon. On notera que les disques fermés, centrés en 0 et de rayons 1 et ϵ/r_{v_0} respectivement, sont tous les deux inclus dans \mathbf{D} .

5.12.1. Cas non périodique. Soit $\tau \in \mathbf{N}^n$ de longueur ℓ . Soit $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}_{v_0}$ l'application analytique définie par :

$$\forall z \in \mathbf{D}, \quad f(z) = \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,v_0}(z(\lambda(u), u)).$$

Observons que, pour tout $h \in \mathbf{N}$ et tout $z \in \mathbf{D}$, on a

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{f^{(h)}(z)}{h!} &= \frac{1}{\tau!h!} D_w^\tau D_{\lambda(u) \oplus u}^h F_{s,v_0}(z(\lambda(u) \oplus u)) \\ &= \sum_{\substack{j \in \mathbf{N}^n \\ |j|=h}} \binom{\tau+j}{\tau} u^j \frac{D_w^{\tau+j}}{(\tau+j)!} F_{s,v_0}(z(\lambda(u) \oplus u)) \end{aligned}$$

($u \in \mathbf{C}_{v_0}^n$ est le vecteur des coordonnées de $\lambda(u) \oplus u$ dans la base (w_1, \dots, w_n)).

- Si $(m, \tau) \in \Upsilon$ alors la définition (15) des coefficients de la matrice A implique

$$(26) \quad |f(m)|_{v_0} \|s_0(mp)\|_{v_0} \leq |\alpha|_{v_0}^{-1} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}.$$

- Si $(m, \tau) \notin \Upsilon$, nous allons utiliser le lemme d'interpolation 5.12.2 afin de majorer $|f(m)|_{v_0}$, avec les paramètres suivants :

- Si v_0 est une place *archimédienne* alors $S_1 := S_0$, $r := 2m$ (notons que $m \geq S_0$ car nous sommes dans le cas non périodique avec $(m, \tau) \notin \Upsilon$), $R := c_{24}r\epsilon$, $T_1 := (n+t)T$ et $f := f$.
- Si v_0 est une place *ultramétrique* alors $S_1 := S_0$, $r := 1$, $R := \epsilon/r_{v_0}$, $T_1 := (n+t)T$ et $f := f$.

Avec ces choix, la proposition 5.9.1 entraîne l'existence d'une constante c_{25} telle que

$$(27) \quad |f|_R \leq c_{25}^{U_0} \max\{1, S^{\epsilon_0} \epsilon \|\lambda(u)\|_{\overline{t}_G, v_0}\}^{D_0} \exp\left\{c_{25} \epsilon_0 S \epsilon \left(\sum_{i=1}^n D_i |u_i|_{v_0}\right)\right\} \|s\|_{v_0}.$$

Compte tenu de la valeur des paramètres et de l'hypothèse 5.12.3 qui permet de substituer u_0 à $\lambda(u)$ dans le deuxième terme, on a $|f|_R \leq c_{26}^{U_0} \|s\|_{v_0}$. Par ailleurs, au moyen du lemme 5.12.1 et de la construction de la section s , on a

$$(28) \quad \max_{\substack{0 \leq h < T_1 \\ 0 \leq m < S_1}} \left\{ \left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(m) \right|_{v_0} \right\} \leq c_{27}^{U_0} (\|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{t}_G, v_0} + |\alpha|_{v_0}^{-1}) \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}.$$

Dans le terme $c_{27}^{U_0}$ se cache la quantité $(1 + \|\lambda(u) \oplus u\|_{\overline{t}_G, v_0})^{(n+t)T}$ provenant de la formule (25). Grâce au lemme 5.12.2, on a

$$|f(m)|_{v_0} \leq |f|_r \leq \exp\{-c_{28} C_0 U_0\} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}.$$

Utilisons à nouveau le lemme 5.12.1 pour passer de $f(m)$ à $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,v_0}(m(u_0, u))$. La définition 5.11.1 du jet de s conduit alors au résultat suivant.

Proposition 5.12.4. *On a $\|\text{jet}_W^\ell s(mp)\|_{\overline{3\epsilon t}, v_0} \leq \exp\{-c_{29} C_0 U_0\} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, v_0}$.*

5.12.2. *Cas périodique.* Rappelons tout d'abord qu'il a été vu au § 5.5 que le cas périodique n'est possible que lorsque v_0 est archimédienne. Soit $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$ de longueur ℓ et $\tau' := (\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, 0)$. Soit $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ l'application analytique définie par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = \frac{1}{\tau'!} D_w^{\tau'} F_{s,v_0}(z(\lambda(u), u)).$$

Afin d'évaluer $\text{jet}_W^\ell s(mp)$, nous allons donner une majoration fine de la dérivée $f^{(\tau_n)}(m)/\tau_n!$ au moyen du lemme d'interpolation 5.12.2. Observons tout d'abord que

$$(29) \quad \left| \frac{1}{\tau_n!} f^{(\tau_n)}(m) \right|_{v_0} \leq |f|_{1+m}.$$

En effet, il s'agit de l'inégalité de Cauchy usuelle pour les fonctions holomorphes complexes. Comme dans le cas non périodique, si $(m, \tau) \in \Upsilon$, la même estimée que (26), avec $f(m)$ remplacé par $f^{(\tau_n)}(m)/\tau_n!$, s'obtient et le problème est clos. Si $(m, \tau) \notin \Upsilon$, utilisons l'inégalité (29) et le lemme d'interpolation 5.12.2 avec les paramètres suivants : $S_1 := (n+t)S$, $r := 2(n+t)S$, $R := c_{24}r\epsilon$, $T_1 := T_0$ et $f := f$. Avec ces choix, grâce à la formule (25), au lemme de comparaison 5.12.1, et par construction de s , les dérivées de f jusqu'à l'ordre T_0 en les nombres $z \in \{0, \dots, (n+t)S\}$ sont petites comme dans l'estimation (28). Quant à $|f|_R$, la majoration (27) reste valide. En réalité une fois que l'on a observé qu'avec les choix de paramètres ci-dessus le produit $T_1 S_1$ était presque

le même que dans le cas précédent, tout se passe à l'identique, si ce n'est que l'on doit se servir de (29). Un dernier passage par le lemme de comparaison 5.12.1 permet alors d'obtenir *in fine* :

$$\left| \frac{1}{\tau!} D_w^{\tau'} D_{\lambda(u) \oplus u}^{\tau_n} F_{s, v_0}(m(u_0 \oplus u)) \right|_{v_0} \leq \exp \{-c_{30} C_0 U_0\} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, v_0}}$$

(majoration valide pour tout $\tau = (\tau', \tau_n)$ de longueur ℓ). Même si nous n'obtenons pas une estimation de $\frac{1}{\tau!} D_w^{\tau} F_{s, v_0}(m(u_0 \oplus u))$, ceci n'a pas d'importance car ce qui nous intéresse est le jet d'ordre ℓ de s , qui lui ne dépend pas du choix de la base considérée pour le définir (voir le commentaire qui suit la définition 5.11.1). Ainsi, en prenant la base $\mathbf{w} := (w_1, \dots, w_{n-1}, \lambda(u) \oplus u)$ dans la définition 5.11.1, on a

$$(30) \quad \|\text{jet}_W^{\ell} s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{Jct}}, v_0} \leq \max \{1, \|(\lambda(u) \oplus u)^{\vee}\|_{\overline{E}_{\alpha, v_0}}\}^{\ell} \exp \{-c_{31} C_0 U_0\} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, v_0}} .$$

Si $x \in W \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ a pour coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans la base w alors $(\lambda(u) \oplus u)^{\vee}(x) = x_n / \mathbf{u}_n$ et donc

$$\|(\lambda(u) \oplus u)^{\vee}\|_{\overline{E}_{\alpha, v_0}} = \frac{1}{|\mathbf{u}_n|_{v_0}} \leq c_7 S$$

(voir proposition 5.5.1). Ainsi le premier terme du membre de droite de (30) est négligeable devant l'exponentielle et la proposition 5.12.4 reste vraie.

5.13. Conclusion. La fin de la démonstration du théorème 5.2.1 repose sur le lemme 3.0.2 qui, compte tenu de la proposition 5.6.1, s'écrit ici sous la forme

$$(31) \quad h(\text{jet}_W^{\ell} s(mp)) \geq -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathfrak{Jct}}) .$$

Nous allons montrer que cette minoration n'est pas compatible avec la majoration de la hauteur du jet que l'on peut trouver par le biais de l'hypothèse 5.12.3. En effet les propositions 5.11.2, 5.11.3 et 5.12.4 entraînent

$$h(\text{jet}_W^{\ell} s(mp)) \leq c_{20} \frac{U_0}{D} + T \log(c_{21} D_0) - c_{29} C_0 \frac{U_0}{D} + h_{\overline{E}_{\alpha}}(s) .$$

Le choix des paramètres (proposition 5.4.1) et la construction de s (proposition 5.10.1 avec α choisi de sorte que $C_0^{5/4} U_0 \leq \log |\alpha|_{v_0} \leq C_0^{7/4} U_0$) conduisent à

$$(32) \quad h(\text{jet}_W^{\ell} s(mp)) \leq -C_0^{1/2} \frac{U_0}{D} .$$

Par ailleurs la pente maximale de $\overline{\mathfrak{Jct}}$ se scinde en la somme de la pente maximale de $\overline{S^{\ell}(W^{\vee})}$ et du degré d'Arakelov de $\overline{(mp)^* M}$ (voir p. ex. [11], p. 65).

Proposition 5.13.1. *Il existe une constante c_{32} , qui ne dépend que de n , telle que :*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{S^{\ell}(W^{\vee})}) \leq \frac{c_{32} U_0}{D} .$$

Démonstration. D'après la proposition 3.0.4 et le fait que $\ell \leq (n+t)U_0/D$, il suffit de montrer que $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{W^{\vee}})$ est majoré par une constante. L'application k -linéaire $\iota : k^n \rightarrow W$, $\iota(y) := \lambda(y) \oplus y$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Les normes v -adiques de l'application duale $\iota^{\vee} : W^{\vee} \rightarrow (k^n)^{\vee}$ sont plus petites que $(\sqrt{2})^{\epsilon_v}$ avec $\epsilon_v := 1$ si v est archimédienne et 0 sinon. L'inégalité de pentes

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{W^{\vee}}) \leq \widehat{\mu}_{\max}((k^n, |\cdot|_2)^{\vee}) + h(\iota^{\vee})$$

(voir lemme 6.4 de [11]) permet de conclure car la première quantité du majorant est nulle et l'autre inférieure à $(\log 2)/2$. \square

Proposition 5.13.2. *Il existe une constante c_{33} , qui ne dépend que de n , telle que :*

$$\widehat{\deg}_n \overline{(mp)^* M} \leq \frac{c_{33} U_0}{D} .$$

Démonstration. On a $\widehat{\deg}_n \overline{(mp)^* M} = D_0 h_{\overline{\mathcal{O}_{X_0}(1)}}(mu_0) + \sum_{i=1}^n D_i m h_{(k^2, |\cdot|_2)}(1, \alpha_i)$. Chacune des hauteurs qui intervient ici a des métriques hermitiennes aux places archimédiennes. Mais l'on peut revenir à la hauteur de Weil quitte à ajouter une constante qui ne dépend que de n et la proposition résulte alors du choix des paramètres. \square

Comme le prouvent ces deux derniers résultats, les deux quantités qui composent la pente maximale de $S^\ell(W^\vee) \otimes (mp)^*M$ sont plus petites que U_0/D , à une constante près, ce qui, moyennant (32), contredit (31) pour C_0 assez grand. L'hypothèse 5.12.3 est donc fautive et le théorème 5.2.1 est démontré.

RÉFÉRENCES

- [1] M. ABLY et É. GAUDRON. Approximation diophantienne sur les courbes elliptiques à multiplication complexe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 337 (Sér. I) : 629–634, 2003.
- [2] E. BOMBIERI et J. VAALER. On Siegel's lemma. *Invent. math.*, 73(1) :11–32, 1983. Avec un addendum : *ibid.* 75(2) :377, 1984.
- [3] J.-B. BOST. Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). *Séminaire Bourbaki*. Volume 237 d'*Astérisque*, 115–161. Société Mathématique de France, 1996.
- [4] H. CHEN. Maximal slope of tensor product of Hermitian vector bundles. *J. Algebraic Geom.*, 18 :575–603, 2009.
- [5] S. DAVID et N. HIRATA-KOHNO. Linear forms in elliptic logarithms. *J. reine angew. Math.*, 628 :37–89, 2009.
- [6] S. DAVID et P. PHILIPPON. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, XXVIII(4) :489–543, 1999.
- [7] P. DONG. Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes p -adiques de nombres algébriques. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 343, 97p., 1995. Publié par l'Institut de Mathématiques, Académie des Sciences de Pologne.
- [8] É. GAUDRON. Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif. *Invent. Math.*, 162(1) :137–188, 2005.
- [9] É. GAUDRON. Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 39(5) :699–773, 2006.
- [10] É. GAUDRON. Étude du cas rationnel de la théorie des formes linéaires de logarithmes. *J. Number Theory*, 127(2) :220–261, 2007.
- [11] É. GAUDRON. Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 119 :21–95, 2008.
- [12] É. GAUDRON. Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés. *Manuscripta math.*, 130(2) :159–182, 2009.
- [13] N. HIRATA-KOHNO. Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques. *Invent. Math.*, 104 :401–433, 1991.
- [14] N. HIRATA-KOHNO. Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *Compos. Math.*, 86 :69–96, 1993.
- [15] J.H. LOXTON. Some problems involving powers of integers. *Acta Arith.*, 46(2) :113–123, 1986.
- [16] M. MIGNOTTE et M. WALDSCHMIDT. Approximation des valeurs de fonctions transcendentes. *Indag. Math.*, 37 :213–223, 1975.
- [17] P. PHILIPPON. Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Rocky Mt. J. Math.*, 26(3) :1069–1088, 1996.
- [18] Yu. V. NESTERENKO et P. PHILIPPON, éditeurs. *Introduction to Algebraic Independence*, volume 1752 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 2001.
- [19] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT. Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2) :281–314, 1988.
- [20] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT. Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *Séminaire de Théorie des Nombres Paris 1986 – 87*, volume 75 de *Progress in Mathematics*, pp. 313–347. Birkhäuser Boston, Inc., 1989. Édité par Catherine Goldstein.
- [21] K. RAMACHANDRA. A note on Baker's method. *J. Austral. Math. Soc.*, 10 :197–203, 1969.
- [22] G. RÉMOND. *Élimination multihomogène*. Chapitre 5 de [18].
- [23] D. ROY et J.L. THUNDER. An absolute Siegel's lemma. *J. Reine angew. Math.*, 476 :1–26, 1996.
- [24] D. ROY. Interpolation sur des perturbations d'ensembles produits. *Bull. Soc. Math. France*, 130(2) :387–408, 2002.
- [25] C.L. SIEGEL. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. *Abhandlungen der Preußischen Akad. der Wissenschaften*, Nr. 1, 70 S, 1929.
- [26] A. THUE. Om en generel i store hele tal uløslig ligning. *Kra. Videnskabens Selskabs Skrifter, Mat. Nat. Kl.*, 7 :1–15, 1908.
- [27] A. THUE. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 135 :284–305, 1909.
- [28] M. WALDSCHMIDT. *Nombres transcendants*, volume 402 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1974.
- [29] M. WALDSCHMIDT. A lower bound for linear forms in logarithms. *Acta Arith.*, 37 :257–283, 1980.
- [30] M. WALDSCHMIDT. *Diophantine Approximation On Linear Algebraic Groups*, volume 326 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 2000.
- [31] G. WÜSTHOLZ. Algebraische punkte auf analytischen untergruppen algebraischer gruppen. *Ann. of Math.*, 129(3) :501–517, 1989.
- [32] S. ZHANG. Positive line bundles on arithmetic varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(1) :187–221, 1995.