



**HAL**  
open science

# Sous-algèbre commutative définie dans l'ensemble des matrices bisymétriques d'ordre $n$

Richard Riedel

► **To cite this version:**

Richard Riedel. Sous-algèbre commutative définie dans l'ensemble des matrices bisymétriques d'ordre  $n$ . 2013. hal-00473768v2

**HAL Id: hal-00473768**

**<https://hal.science/hal-00473768v2>**

Preprint submitted on 5 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**SOUS-ALGÈBRE COMMUTATIVE DÉFINIE DANS  
L'ENSEMBLE DES MATRICES BISYMÉTRIQUES  
D'ORDRE  $n$**

Richard Riedel  
RR 7567/01-2



## Introduction

$\mathbb{R}$  désigne le corps des réels.  $\mathbb{C}$  désigne le corps des nombres complexes.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est le corps fini constitué des 2 seuls éléments notés 0 et 1. Pour alléger les notations à venir, nous poserons systématiquement :  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{B}$ .

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  désignent respectivement l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes et l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$ , à éléments dans  $\mathbb{B}$ .  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  désigne le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  renfermant les matrices carrées bisymétriques d'ordre  $n$ .

L'objectif de cette étude est d'établir l'existence d'un  $\mathbb{B}$ -sous-espace vectoriel de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , dénommé  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , de dimension égale à  $n$  et dans lequel le produit matriciel est commutatif. Nous démontrerons ainsi que  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  est une  $\mathbb{B}$ -algèbre commutative, la 2<sup>ème</sup> loi interne étant la multiplication matricielle.

Nous définirons la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

L'étude mettra en lumière de nombreuses propriétés spécifiques aux matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

La conclusion de cette étude démontrera l'existence d'autres sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  dont le produit matriciel est commutatif, de dimension inférieure ou égale à  $n$ .

Elle fournira aussi la définition de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  et de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ , et donnera des indications relatives à la transposition de certaines propriétés de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  vers  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ .

## Abstract

$\mathbb{R}$  is the field of the reals.  $\mathbb{C}$  is the field of the complex numbers.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  is the finite field, consisting of 2 elements denoted by 0 and 1. In order to simplify forthcoming notations, we will systematically write :  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{B}$ .

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  are respectively the set of the  $n \times p$  matrices ( $n$  rows,  $p$  columns) and the set of the  $n \times n$  square matrices with elements belonging to  $\mathbb{B}$ .  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  designates the subspace of  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  consisting of  $n \times n$  bisymmetrical matrices.

The purpose of this paper is to demonstrate the existence of an  $n$ -dimensional  $\mathbb{B}$ -vector subspace of  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , called  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , where the product of matrices is commutative. We will consequently prove that  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  is a commutative  $\mathbb{B}$ -algebra, the 2<sup>nd</sup> internal law being the product of matrices.

We will define the canonical basis of  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

This paper will also highlight numerous properties specific to the matrices belonging to  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

The conclusion of this document will prove the existence of other  $\mathbb{B}$ -vector sub-spaces of  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , where the product of matrices is commutative, with a dimension less than or equal to  $n$ . It will also provide the definition of the  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  and  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$  vector-spaces, as well as indications about the transposition of certain properties of  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  to  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  and  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ .

## TABLE DES MATIÈRES

### PARTIE 1 : CHAPITRES 1 – 2

#### INTRODUCTION

#### ABSTRACT

#### PRINCIPAUX APPORTS DE LA VERSION 2 7

#### CHAPITRE 1 9

#### MATRICES SYMETRIQUES – MATRICES 2-SYMETRIQUES – MATRICES BISYMETRIQUES 9

##### 1.1. Matrices symétriques 9

##### 1.2. Matrices 2-symétriques 10

##### 1.3. Matrices bisymétriques 13

#### CHAPITRE 2 25

#### MATRICES BISYMETRIQUES COMMUTATIVES – ESPACE VECTORIEL $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ – SOUS-ALGEBRE COMMUTATIVE $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ 25

##### 2.1. Introduction 25

##### 2.2. Matrices $B_{ni}$ , $1 \leq i \leq n$ 26

##### 2.3. Définition de l'ensemble $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ 31

##### 2.4. Schéma représentant les inclusions : $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \subseteq \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{B})$ 65



## PRINCIPAUX APPORTS DE LA VERSION 2

La démarche adoptée pour introduire l'ensemble  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , qui constitue la partie centrale de cette étude, a été légèrement modifiée dans la présente Version 2, par rapport à la Version 1 d'origine. Cette approche nouvelle a pour objectif de fluidifier l'ensemble de l'exposé.

A cet égard, dans le Chapitre 2, les matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  ont été définies d'emblée, avant toute définition de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Dans le Chapitre 3 ont été introduites trois nouvelles définitions de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  et une nouvelle définition des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Ces définitions apportent un éclairage nouveau sur certaines propriétés caractéristiques des matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Dans le Chapitre 4 apparaît maintenant la démonstration des Théorèmes 4-1 et 4-4. Dans la Version 1, cette démonstration avait été renvoyée à une publication ultérieure.

Enfin, diverses erreurs typographiques (ne modifiant en rien le fond de l'exposé) ont été corrigées.

Par ailleurs, pour une meilleure gestion de taille des fichiers, l'ensemble de cette étude a été subdivisé en 4 Parties (et non plus en 2 Parties, comme précédemment). Le découpage réalisé est le suivant :

- 1<sup>ère</sup> Partie : Chapitres 1-2
- 2<sup>ème</sup> Partie : Chapitres 3-4
- 3<sup>ème</sup> Partie : Chapitres 5-6
- 4<sup>ème</sup> Partie : Chapitres 7-Conclusion.

\*  
\* \*





## CHAPITRE 1

### Matrices symétriques – Matrices 2-symétriques – Matrices bisymétriques

#### 1.1. Matrices symétriques (Rappels de notions classiques).

Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \dots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Définition 1-1.** On appelle matrice transposée de la matrice  $A$ , la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  obtenue à partir de  $A$  par symétrie par rapport à sa 1<sup>ère</sup> diagonale  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n-1\ n-1}, a_{nn})$ . Elle est notée  ${}^tA$ .

${}^tA$  s'écrit donc :

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n-1\ 1} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n-1\ 2} & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1\ n-1} & a_{2\ n-1} & \dots & a_{n-1\ n-1} & a_{n\ n-1} \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1\ n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Définition 1-2.** Une matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  est dite symétrique si et seulement si :  ${}^tA = A$ .

**Définition 1-3.** On note  $S_n(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre  $n$  à éléments dans  $\mathbb{B}$ .

**Théorème 1-4.**  $S_n(\mathbb{B})$  est un s.e.v. de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Remarque :

Le produit de 2 matrices symétriques d'ordre supérieur à  $n \geq 2$  peut ne pas être symétrique.

Exemple :  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Théorème 1-5.**  $\forall (A, B) \in (S_n(\mathbb{B}))^2 : AB \in S_n(\mathbb{B}) \Leftrightarrow AB = BA$ .

Autrement dit : le produit de 2 matrices symétriques est symétrique si et seulement si ce produit est commutatif.

**Théorème 1-6.**  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ .

**Théorème 1-7.**  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow {}^t A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$  et  $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

### Terminologie et notations

En raison des notions introduites dans la suite de cette étude, nous substituerons désormais à la terminologie classique la terminologie suivante.

Nous dénommerons 1-transposée de la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  la matrice dite transposée en terminologie classique. Nous la noterons classiquement :  ${}^t A$ .

Nous dirons qu'une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  est 1-symétrique si elle est symétrique en terminologie classique. (autrement dit si  ${}^t A = A$ ).

Nous noterons désormais 1- $\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$  l'ensemble classiquement noté  $\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$  des matrices symétriques d'ordre  $n$  à éléments dans  $\mathbb{B}$ .

## 1.2. Matrices 2-symétriques

Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Définition 1-8.** On appelle matrice 2-transposée de la matrice  $A$ , la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  obtenue à partir de  $A$  par symétrie par rapport à sa 2<sup>ème</sup> diagonale  $(a_{1n}, a_{2\ n-1}, \dots, a_{n-1\ 2}, a_{n1})$ . Elle est notée  $A^t$ .

$A^t$  s'écrit donc :

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{nn} & a_{n-1\ n} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ a_{n\ n-1} & a_{n-1\ n-1} & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{1\ n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{22} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n-1\ 1} & \cdots & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

**Définition 1-9.** Une matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  est dite 2-symétrique si et seulement si :  $A^t = A$ .

**Définition 1-10.** On note 2- $\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices 2-symétriques d'ordre  $n$  à éléments dans  $\mathbb{B}$ .

**Théorème 1-11.**  $2-S_n(\mathbb{B})$  est un sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

**Théorème 1-12.**  $\forall (A,B) \in (2-S_n(\mathbb{B}))^2 : AB \in 2-S_n(\mathbb{B}) \Leftrightarrow AB = BA$ .

*Autrement dit : le produit de 2 matrices 2-symétriques est 2-symétrique si et seulement si ce produit est commutatif.*

**Théorème 1-13.**  $A \in 2-S_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A^{-1} \in 2-S_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ .

### Axes médians d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$

Considérons une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ . Elle possède un axe médian horizontal et un axe médian vertical.

Si  $n$  est pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), l'axe médian vertical (resp. horizontal) passe entre les colonnes (resp. lignes)  $\nu$  et  $\nu + 1$ .

Si  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), l'axe médian vertical (resp. horizontal) passe par le milieu de la colonne (resp. ligne)  $\nu + 1$ . Nous dénommerons colonne centrale (resp. ligne centrale) cette colonne (resp. ligne)  $\nu + 1$ .

Les notions de colonne centrale (resp. ligne centrale) n'ont de sens que si  $n$  est impair.

Nous dénommerons « centre » d'une matrice le point situé à l'intersection de ses deux axes médians. Ce « centre » ne coïncide avec un élément de la dite matrice que si  $n$  est impair. Cet élément d'indices  $(\nu + 1, \nu + 1)$ , sera alors dénommé élément central de la matrice.

### Matrices $I_n$ et $J_n$

$I_n$  désigne la matrice-unité d'ordre  $n$ , élément neutre de la multiplication matricielle.

$I_n$  est à la fois 1-symétrique et 2-symétrique :  $I_n = {}^t I_n = I_n^t$ .

Soit  $J_n$  la matrice dont les seuls éléments non nuls sont ceux de la 2<sup>ème</sup> diagonale :

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_n.$$

$J_n$  représente ainsi la matrice symétrique de la matrice  $I_n$  par rapport aux axes médians (vertical ou horizontal) ainsi définis. Énumérons quelques propriétés de  $J_n$  :

1) On a :  $J_n^2 = I_n$  et donc :  $J_n^{-1} = J_n$ .

2)  $J_n$  est à la fois 1-symétrique et 2-symétrique :  $J_n = {}^t J_n = J_n^t$ .

3) Soit  $A = [a_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ) une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

On vérifie aisément que :

$$A \cdot J_n = \begin{bmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{bmatrix}, \quad J_n \cdot A = \begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}, \quad J_n \cdot A \cdot J_n = \begin{bmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{bmatrix}.$$

En conclusion :

$A \cdot J_n$  est la matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian vertical.

$J_n \cdot A$  est la matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian horizontal.

$J_n \cdot A \cdot J_n$  est la matrice symétrique de  $A$  par rapport à son centre.

**Théorème 1-14.**  $A^t = J_n \cdot {}^t A \cdot J_n = {}^t (J_n \cdot A \cdot J_n)$ .

*Remarque :*

Les égalités ci-dessus permettent de se passer de la notation  $A^t$  en lui substituant la notation  $J_n \cdot {}^t A \cdot J_n$  ou  ${}^t (J_n \cdot A \cdot J_n)$ .

**Théorème 1-15.** Une matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  est dite 2-symétrique si et seulement si :

$${}^t A = J_n \cdot A \cdot J_n.$$

*Preuve :* Les preuves des Théorèmes 1-14 et 1-15 sont immédiates.

*Remarque :*

D'une manière générale, tous les résultats applicables aux matrices 1-symétriques s'appliquent de la même façon aux matrices 2-symétriques.

Citons-en deux, faisant l'objet des Théorèmes 1-16 et 1-17.

**Théorème 1-16.**  $(AB)^t = B^t \cdot A^t$ .

*Remarque :*

Ce théorème est l'équivalent du théorème classique relatif aux matrices 1-symétriques :

$${}^t (AB) = {}^t B \cdot {}^t A.$$

*Preuve :*

Démontrons ce théorème en utilisant les égalités énoncées par le Théorème 1-14.

$$\begin{aligned} (AB)^t &= J_n \cdot {}^t (AB) \cdot J_n = J_n \cdot {}^t B \cdot {}^t A \cdot J_n = (J_n \cdot {}^t B \cdot J_n) \cdot (J_n \cdot {}^t A \cdot J_n) \text{ puisque : } J_n^2 = I_n \\ &= B^t \cdot A^t. \end{aligned}$$

**Théorème 1-17.**  $A \in 2\text{-}\mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A^t \in 2\text{-}\mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$  et  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

*Preuve :*

Démontrons ce théorème en utilisant l'égalité suivante énoncée par le Théorème 1-14.

$$A^t = J_n \cdot {}^t A \cdot J_n.$$

Comme  ${}^t A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$  et que  $J_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ , il en est de même de  $J_n \cdot {}^t A \cdot J_n$  et donc de  $A^t$ . Donc  $(A^t)^{-1}$  existe.

D'autre part, en appliquant l'équivalence ci-dessus à la matrice  $A^{-1}$  :

$$(A^{-1})^t = J_n \cdot {}^t(A^{-1}) \cdot J_n = J_n \cdot ({}^t A)^{-1} \cdot J_n = (J_n \cdot {}^t A \cdot J_n)^{-1} = (A^t)^{-1}.$$

Finalement :  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

**Théorème 1-18.**  $({}^t A)^t = {}^t(A^t) = J_n \cdot A \cdot J_n$

*Remarque :*

$({}^t A)^t$  est la matrice 2-transposée de la matrice 1-transposée de  $A$ .

${}^t(A^t)$  est la matrice 1-transposée de la matrice 2-transposée de  $A$ .

Le Théorème 1-18 affirme que ces 2 matrices sont égales.

*Preuve :*

Partons de l'égalité établie au Théorème 1-14 :  $A^t = J_n \cdot {}^t A \cdot J_n$ .

Appliquons cette égalité à la matrice  ${}^t A$ . Il vient :  $({}^t A)^t = J_n \cdot {}^t({}^t A) \cdot J_n = J_n \cdot A \cdot J_n$ .

Par ailleurs :  ${}^t(A^t) = {}^t(J_n \cdot {}^t A \cdot J_n) = {}^t J_n \cdot {}^t({}^t A) \cdot {}^t J_n = J_n \cdot A \cdot J_n$ .

Finalement :  $({}^t A)^t = {}^t(A^t) = J_n \cdot A \cdot J_n$ .

**Notation et Définition 1-19.** Nous noterons sous la forme  ${}^t A^t$  les matrices  $({}^t A)^t$  et  ${}^t(A^t)$  qui sont égales. On a donc :  ${}^t A^t = ({}^t A)^t = {}^t(A^t) = J_n \cdot A \cdot J_n$ .

## 1.3. Matrices bisymétriques

### 1.3.1. Définitions

**Définition et Théorème 1-20.** Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  est dite bisymétrique si elle est à la fois 1-symétrique et 2-symétrique. On a donc par définition :  ${}^t A = A^t = A$ . Il s'ensuit que :  ${}^t A^t = A$ .

*Preuve :*  ${}^t A^t = ({}^t A)^t = A^t = A$ .

**Définition 1-21.** On note  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices bisymétriques d'ordre  $n$  à éléments dans  $\mathbb{B}$ .

**Définition 1-22.** Nous dénommerons paramètres d'une matrice bisymétrique d'ordre  $n$  les éléments de cette matrice dont les indices  $(i, j)$  vérifient les inégalités suivantes :

(1)  $1 \leq i \leq E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ , *inégalité qui se dédouble en 2 cas, selon que  $n$  est pair ou impair :*

▫ si  $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ ):  $1 \leq i \leq \nu$     ▫ si  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ):  $1 \leq i \leq \nu + 1$ ,

(2) *pour  $i$  fixé :  $i \leq j \leq n - i + 1$ .*

*Nous dénommerons zone principale d'une matrice bisymétrique l'ensemble de ses paramètres.*

*(Cette zone correspond graphiquement au domaine grisé des Figures 1-a et 1-b ci-après).*

*Nous dénommerons zone secondaire d'une matrice bisymétrique l'ensemble de ses autres éléments. (Cette zone correspond graphiquement au domaine non grisé des Figures 1-a et 1-b ci-après).*

*Note : Par commodité, les matrices bisymétriques concernées seront représentées ci-dessous sous la forme d'un tableau carré constitué de  $n \times n$  cases).*

Figure 1-a :  $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ )

1 2 . . . .  $\nu$   $\nu+1$  . . .  $n-1$   $n$

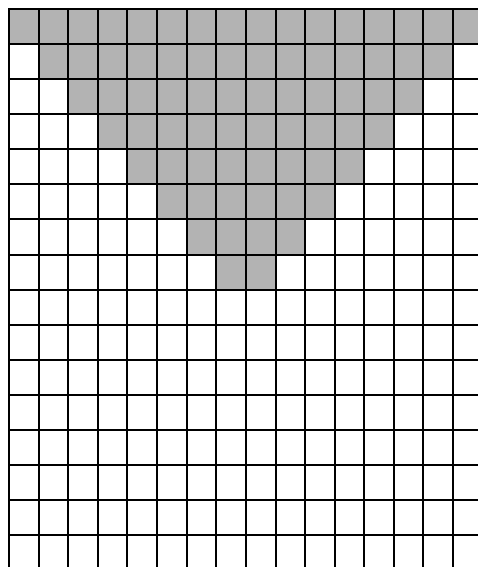
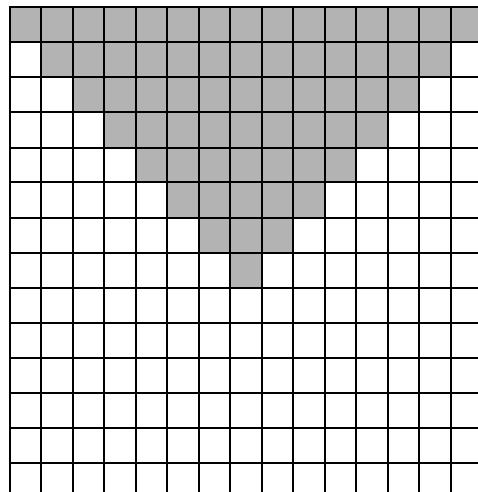


Figure 1-b :  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ )

1 2 . . . .  $\nu+1$  . . .  $n-1$   $n$



*Remarque :*

Il est clair qu'une 1-transposition de la zone principale fournit la moitié supérieure gauche de la matrice bisymétrique concernée et que la 2-transposition de cette dernière fournit l'intégralité de la matrice bisymétrique concernée.

L'ensemble des paramètres d'une matrice bisymétrique définit donc parfaitement la dite matrice.

**Théorème 1-23.**  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  est un sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , un sev de  $1-S_n(\mathbb{B})$  et un sev de  $2-S_n(\mathbb{B})$ .

- si  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ):  $\dim(\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})) = (\nu + 1)^2$ ,

- si  $n$  est pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ):  $\dim(\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})) = \nu(\nu + 1)$ .

*Preuve :*

Le calcul de la dimension de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  se fait par simple dénombrement des paramètres.

On observera qu'il y a (avec  $n \geq 2$  et  $1 \leq i \leq \nu$ ):  $(n - 2i + 2)$  paramètres dans la ligne  $i$ .

De plus : - si  $n$  est pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ): il y a 2 paramètres dans la ligne  $\nu$ ,

- si  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ): il y a 1 paramètre dans la ligne  $\nu + 1$ .

Partant de là, les résultats ci-dessus sont immédiats.

### 1.3.2. Exemples de matrices bisymétriques

Nous avons introduit précédemment (page 11) les matrices  $I_n$  et  $J_n$ , définies à tout ordre  $n$ , et nous avons alors indiqué que ces matrices étaient à la fois 1-symétriques et 2-symétriques.  $I_n$  et  $J_n$  sont donc des matrices bisymétriques.

Nous donnons ci-après la forme générale des matrices bisymétriques pour  $1 \leq n \leq 6$ .

$$\underline{n=1} : A = [a], \quad a \in \mathbb{B} ; \dim(\mathcal{BS}_1(\mathbb{B})) = 1.$$

$$\underline{n=2} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{B}^2 ; \dim(\mathcal{BS}_2(\mathbb{B})) = 2.$$

$$\underline{n=3} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{bmatrix}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{B}^4 ; \dim(\mathcal{BS}_3(\mathbb{B})) = 4.$$

$$\underline{n=4} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \quad (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{B}^6 ; \dim(\mathcal{BS}_4(\mathbb{B})) = 6.$$



$$\underline{n=5} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & f & g & h & d \\ c & g & i & g & c \\ d & h & g & f & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, \quad (a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{B}^9; \quad \dim(\mathcal{BS}_5(\mathbb{B})) = 9.$$

$$\underline{n=6} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & g & h & i & j & e \\ c & h & k & l & i & d \\ d & i & l & k & h & c \\ e & j & i & h & g & b \\ f & e & d & c & b & a \end{bmatrix}, \quad (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l) \in \mathbb{B}^{12}; \quad \dim(\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})) = 12.$$

### 1.3.3. Propriétés des matrices bisymétriques

*Remarque 1 :*

Le produit de 2 matrices non-bisymétriques peut être bisymétrique. Tel est le cas si le produit obtenu est la matrice nulle, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le cas suivant aboutit, lui, à une matrice-produit bisymétrique non nulle.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est non-bisymétrique, tandis que } A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est bisymétrique.}$$

*Remarque 2 :*

A l'inverse, pour  $n \geq 3$ , le produit de 2 matrices bisymétriques peut ne pas être bisymétrique.

$$\text{Exemple : } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Toutefois, comme pour les matrices 1-symétriques et 2-symétriques, on a la condition nécessaire et suffisante suivante.

**Théorème 1-24.**  $\forall (A, B) \in (\mathcal{BS}_n(\mathbb{B}))^2 : AB \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \Leftrightarrow AB = BA$ . Autrement dit : le produit de 2 matrices bisymétriques est bisymétrique si et seulement si ce produit est commutatif.

Comme pour les matrices 1-symétriques et 2-symétriques inversibles, on a le théorème qui suit, relatif aux matrices bisymétriques inversibles.

**Théorème 1-25.**  $A \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ .

### 1.3.4. Structure générale d'une matrice bisymétrique

#### 1.3.4.1. Sous-matrices centrales et cadres d'une matrice carrée

**Définition 1-26.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  et soit  $k$  un entier tel que :

- $0 \leq k \leq \nu - 1$ , si  $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ )
- $0 \leq k \leq \nu$ , si  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ).

On appelle sous-matrice centrale de niveau  $k$  de  $A$  (en abrégé : smc de niveau  $k$ , ou plus simplement : smc- $k$ ) la sous-matrice obtenue en supprimant de  $A$  ses  $k$  premières lignes, ses  $k$  dernières lignes, ses  $k$  premières colonnes et ses  $k$  dernières colonnes. La smc de niveau  $k$  de  $A$  est donc une matrice d'ordre  $(n - 2k)$ .

Note : La smc de niveau 0 (smc-0) de  $A$  est donc la matrice  $A$  elle-même.

Pour  $k > \nu - 1$ , si  $n = 2\nu$ , et, pour  $k > \nu$ , si  $n = 2\nu + 1$  : smc- $k$  de  $A = \emptyset$ .

On appelle cadre de niveau  $(k+1)$  de  $A$  (ou plus simplement : cadre- $(k+1)$  de  $A$ ) l'ensemble obtenu en privant la smc de niveau  $k$  de  $A$  de la smc de niveau  $(k+1)$  de  $A$ .

Remarques :

- 1) Si  $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), la matrice  $A$  compte  $\nu$  smc (en comptant la smc 0 qui se confond avec  $A$ ) et  $\nu$  cadres.

A noter que le cadre de niveau  $\nu$  de  $A$  se confond avec sa smc de niveau  $(\nu - 1)$ . Il s'agit d'une matrice d'ordre 2.

- 2) Si  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ), la matrice  $A$  compte  $(\nu + 1)$  smc (en comptant la smc 0 qui se confond avec  $A$ ) et  $(\nu + 1)$  cadres.

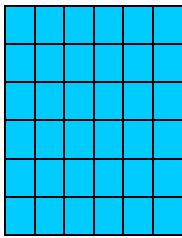
A noter que le cadre de niveau  $(\nu + 1)$  de  $A$  se confond avec sa smc de niveau  $\nu$ . Il s'agit d'une matrice d'ordre 1 qui se confond avec la case centrale de la matrice, d'indices  $(\nu + 1, \nu + 1)$ .

- 3) Le cadre de niveau  $(k + 1)$  de  $A$  peut aussi se définir comme le cadre de niveau 1 de la smc de niveau  $k$  de  $A$ .

*Exemples :*

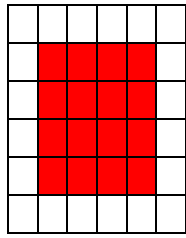
Les exemples ci-dessous illustrent toutes les notions précédentes pour les ordres  $n = 6$  et  $n = 7$ .

$n = 6$



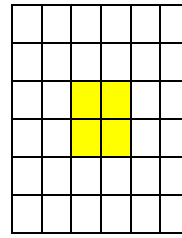
smc-0

$n = 6$

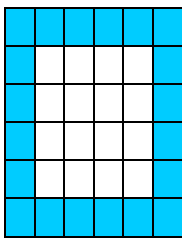


smc-1

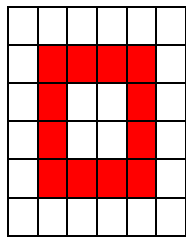
$n = 6$



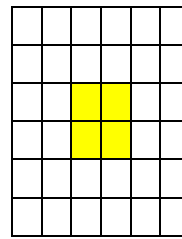
smc-2



cadre-1

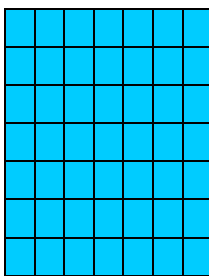


cadre-2



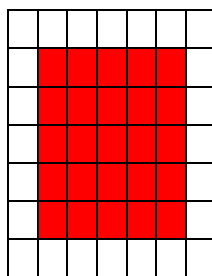
cadre-3

$n = 7$



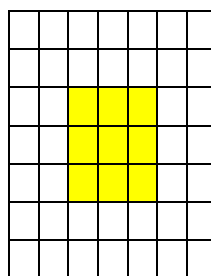
smc-0

$n = 7$



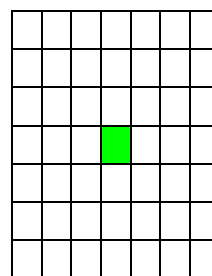
smc-1

$n = 7$

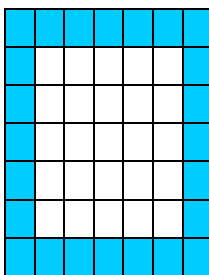


smc-2

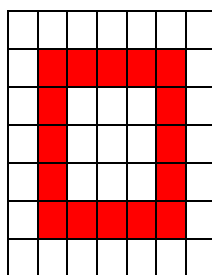
$n = 7$



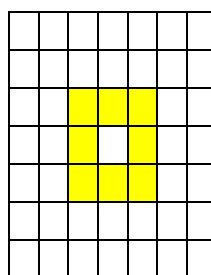
smc-3



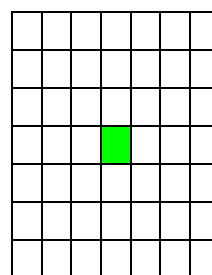
cadre-1



cadre-2



cadre-3



cadre-4

### 1.3.4.2. Positionnement des paramètres dans une matrice bisymétrique

#### Notation et Définition 1-27.

L'élément d'indices  $(i, j)$  de la zone principale d'une matrice de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  constitue un paramètre de cette matrice (cf. Définition 1-22). Nous noterons ce paramètre sous la forme abrégée:  $[i, j]$ .

Le 1<sup>er</sup> indice  $i$  est dénommé niveau du paramètre.

Le 2<sup>ème</sup> indice  $j$  est dénommé numéro d'ordre du paramètre à l'intérieur du niveau  $i$ .

Rappelons que les indices de la zone principale vérifient la double inégalité :

$$1 \leq i \leq E\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad \text{et} \quad i \leq j \leq n - i + 1$$

ou encore :

- $1 \leq i \leq \nu$ , si  $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ ),
- $1 \leq i \leq \nu + 1$ , si  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ).

*Remarque :*

Il convient de noter que tous les paramètres de niveau  $i$  d'une matrice bisymétrique sont positionnés dans le cadre de niveau  $i$  de cette matrice.

*Exemples :*

Les exemples  $n = 6$  et  $n = 7$  ci-dessous illustrent la disposition des paramètres des matrices bisymétriques d'ordre  $n = 6$  et  $n = 7$  dans la zone principale (en grisé) et dans la zone secondaire de ces matrices.

La disposition des paramètres dans la zone secondaire est obtenue par 1-transposition de la zone principale. Cette opération fournit la moitié supérieure gauche de la matrice bisymétrique concernée. La 2-transposition de cette dernière fournit ensuite l'intégralité de la matrice bisymétrique concernée.

*Note :*

Par commodité, les matrices bisymétriques concernées seront représentées ci-dessous sous la forme d'un tableau carré constitué de  $n \times n$  cases).

$n = 6$ 

[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]
[1,2]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]	[1,5]
[1,3]	[2,3]	[3,3]	[3,4]	[2,4]	[1,4]
[1,4]	[2,4]	[3,4]	[3,3]	[2,3]	[1,3]
[1,5]	[2,5]	[2,4]	[2,3]	[2,2]	[1,2]
[1,6]	[1,4]	[1,5]	[1,3]	[1,2]	[1,1]

 $n = 7$ 

[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]
[1,2]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]	[2,6]	[1,6]
[1,3]	[2,3]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[2,5]	[1,5]
[1,4]	[2,4]	[3,4]	[4,4]	[2,4]	[2,4]	[1,4]
[1,5]	[2,5]	[3,5]	[3,4]	[3,3]	[2,3]	[1,3]
[1,6]	[2,6]	[2,5]	[2,4]	[2,3]	[2,2]	[1,2]
[1,7]	[1,6]	[1,5]	[1,4]	[1,3]	[1,2]	[1,1]

### 1.3.4.3. Structure générale d'une matrice bisymétrique d'ordre $n$

Soit  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Nous allons définir la structure générale de  $A$  en procédant à l'étude de ses cadres successifs de niveau 1 à  $\nu$  si  $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), et de niveau 1 à  $\nu + 1$  si  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ).

On suppose dans les schémas qui suivent  $n$  assez grand ( $n \geq 6$  pour fixer les idées) de manière qu'il existe un cadre de niveau 2 ainsi qu'un cadre de niveau  $i > 2$ . On suppose aussi  $i < \nu$  de manière que  $n - i + 1 > i$ . L'adaptation de ces schémas aux matrices d'ordre  $n < 6$  ne pose aucune difficulté particulière.

Cadre 1 : Par définition :  $[1,1] = a_{11}$ ,  $[1,2] = a_{12}$ , ...,  $[1,i] = a_{1i}$ , ..., ,  
 $[1, n - i + 1] = a_{1, n - i + 1}$ , ...,  $[1, n - 1] = a_{1, n - 1}$ ,  $[1, n] = a_{1n}$  .

$[1,1]$	$[1,2]$	...	$[1,i]$	...	$[1, n - i + 1]$	...	$[1, n - 1]$	$[1, n]$
$[1,2]$								$[1, n - 1]$
...								...
$[1,i]$								$[1, n - i + 1]$
...								...
$[1, n - i + 1]$								$[1,i]$
...								...
$[1, n - 1]$								$[1,2]$
$[1, n]$	$[1, n - 1]$	...	$[1, n - i + 1]$	...	$[1,i]$	...	$[1,2]$	$[1,1]$

Cadre 2 : Par définition :  $[2,2] = a_{22} , \dots , [2,i] = a_{2i} , \dots ,$   
 $[2, n-i+1] = a_{2, n-i+1} , \dots , [2,n-1] = a_{2, n-1} .$

$[2,2]$	...	$[2,i]$	...	$[2, n-i+1]$	...	$[2, n-1]$
...						...
$[2,i]$						$[2, n-i+1]$
...						...
$[2, n-i+1]$						$[2,i]$
...						...
$[2, n-1]$	...	$[2, n-i+1]$	...	$[2,i]$	...	$[2,2]$

Cadre i : Par définition :  $[i,i] = a_{ii} , \dots , [i, n-i+1] = a_{i, n-i+1} .$

$[i,i]$	...	$[i, n-i+1]$
...		...
$[i, n-i+1]$		$[i,i]$

Enfin, concernant les cases centrales de la matrice, 2 cas sont à distinguer, selon que  $n$  est pair ou impair.

$n$  pair :  $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ )

Cadre  $\nu$  : Par définition :  $[\nu, \nu] = a_{\nu, \nu}$ ,  $[\nu, \nu+1] = a_{\nu, \nu+1}$ .

$[\nu, \nu]$	$[\nu, \nu+1]$
$[\nu, \nu+1]$	$[\nu, \nu]$

$n$  impair :  $n = 2\nu+1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ )

Cadre  $\nu+1$  : Par définition :  $[\nu+1, \nu+1] = a_{\nu+1, \nu+1}$ .

$[\nu+1, \nu+1]$
------------------

La structure générale d'une matrice bisymétrique s'obtient en imbriquant les cadres de niveaux successifs précédemment définis.

La Figure suivante donne un aperçu de cette structure, sachant que la partie centrale de la matrice a été sciemment laissée en blanc : il faut y insérer le cadre de niveau  $\nu$  ci-dessus si  $n$  est pair et la cadre de niveau  $(\nu+1)$  ci-dessus si  $n$  est impair.



$[1, 1]$	$[1, 2]$		$[1, i]$	$\dots$	$[1, n-i+1]$	$\dots$	$[1, n-1]$	$[1, n]$
$[1, 2]$	$[2, 2]$		$[2, i]$	$\dots$	$[2, n-i+1]$	$\dots$	$[2, n-1]$	$[1, n-1]$
$\dots$	$\dots$						$\dots$	
$[1, i]$	$[2, i]$		$[i, i]$	$\dots$	$[i, n-i+1]$		$[2, n-i+1]$	$[1, n-i+1]$
$\dots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$		$\dots$	$\dots$
$[1, n-i+1]$	$[2, n-i+1]$		$[i, n-i+1]$	$\dots$	$[i, i]$		$[2, i]$	$[1, i]$
$\dots$	$\dots$						$\dots$	$\dots$
$[1, n-1]$	$[2, n-1]$		$[2, n-i+1]$	$\dots$	$[2, i]$	$\dots$	$[2, 2]$	$[1, 2]$
$[1, n]$	$[1, n-1]$		$[1, n-i+1]$		$[1, i]$	$\dots$	$[1, 2]$	$[1, 1]$

Terminons en explicitant ci-dessous la structure de la ligne  $i$  :

$$[1, i][2, i] \dots [i-1, i][i, i][i, i+1] \dots [i, n-i][i, n-i+1][i-1, n-i+1] \dots [2, n-i+1][1, n-i+1]$$

qui compte bien  $n$  éléments.

Structure identique pour la colonne  $i$  (mêmes éléments dans le même ordre, mais dans le sens vertical).

## CHAPITRE 2

### Matrices bisymétriques commutatives – Espace vectoriel $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ – Sous-algèbre commutative $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

#### 2.1. Introduction

$\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  désigne l'ensemble des matrices bisymétriques d'ordre  $n$  à éléments dans  $\mathbb{B}$ .  $O_n$  désigne la matrice nulle d'ordre  $n$ .  $I_n$  désigne la matrice-unité d'ordre  $n$ .

Nous avons établi que le produit de 2 matrices bisymétriques n'est pas nécessairement bisymétrique mais que ce produit est bisymétrique si et seulement s'il est commutatif. (Cf. Théorème 1-24 du Chapitre 1).

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'existence de sous-espaces vectoriels (sev) de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  stables par la multiplication, c.-à-d. tels que le produit de 2 quelconques de leurs matrices leur appartiennent (autrement dit encore : tels que la matrice-produit résultante soit bisymétrique).

Compte tenu de la condition nécessaire et suffisante rappelée ci-dessus, il revient au même de rechercher les sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  stables par la multiplication ou les sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  tels que le produit de 2 quelconques de leurs matrices soit commutatif.

Nous donnerons à de tels sev un nom générique de la forme  $\mathcal{BSC}$  ( $\mathcal{BS}$  = bisymétrique,  $\mathcal{C}$  = commutatif), et nous verrons ci-après qu'il en existe pour tout ordre de matrice  $n$ . Nous dirons que  $\mathcal{BSC}$  est commutatif (\*) et que les matrices éléments de  $\mathcal{BSC}$  commutent entre elles ou encore qu'elles sont commutantes (\*).

(\*) Nous sous-entendons systématiquement que la propriété de commutativité dont il s'agit concerne la multiplication matricielle.

Pour  $n = 1$ ,  $\mathcal{BSC} = \mathcal{BS}_1(\mathbb{B})$  convient. De même, pour  $n = 2$ ,  $\mathcal{BSC} = \mathcal{BS}_2(\mathbb{B})$  convient.

Par contre, pour  $n = 3$ , nécessairement :  $\mathcal{BSC} \neq \mathcal{BS}_3(\mathbb{B})$  (cf. exemple de la Remarque 2 de la Section 1.3.3. du Chapitre 1). Par suite, pour  $n \geq 3$ , on a nécessairement l'inclusion stricte :  $\mathcal{BSC} \subset \mathcal{BS}_3(\mathbb{B})$ .

En fait, l'existence d'au moins un sev  $\mathcal{BSC}$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  (à un ordre de matrice  $n$  quelconque), stable par la multiplication (ou commutatif - ce qui revient au même) est facile à établir. Le sev  $\mathcal{BSC} = \{O_n, I_n\}$ , de dimension 1, répond aux critères fixés, comme on le vérifie sans peine.

Bien entendu,  $\mathcal{BSC}$  contiendra toujours les matrices  $O_n$  et  $I_n$ . En effet, le produit de  $O_n$  ou de  $I_n$  par toute matrice  $A$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  est commutatif. De plus,  $\mathcal{BSC}$  étant un sev, si  $\mathcal{BSC}$  contient les matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , alors  $\mathcal{BSC}$  contiendra aussi toute matrice issue d'une combinaison linéaire de  $A$  et de  $B$ , de la forme  $\alpha A + \beta B$ ,  $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{B})^2$ .

## 2.2. Matrices $B_{ni}, 1 \leq i \leq n$

Nous allons introduire, pour tout ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ , un ensemble de  $n$  matrices de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , noté  $\{B_{ni}\}, 1 \leq i \leq n$ .

### 2.2.1. Définition des matrices $B_{ni}, 1 \leq i \leq n$

Nous commencerons par donner la structure de ces matrices pour  $n = 1$  à 6, avant de généraliser cette dernière à un ordre  $n$  quelconque.

$n = 1$  :

$$B_{11} = I_1, \text{ soit : } B_{11} = [1].$$

$n = 2$  :

$$B_{21} = I_2 \text{ et } B_{22} = J_2.$$

Donc :

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$n = 3$  :

$$B_{31} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B_{33} = J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$n = 4$  :

$$B_{41} = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$B_{44} = J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$n = 5$

$$\mathbf{B}_{51} = \mathbf{I}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{52} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{54} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{55} = \mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$n = 6$

$$\mathbf{B}_{61} = \mathbf{I}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{62} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{63} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{64} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{65} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{66} = \mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$n$  quelconque

Nous poserons, en généralisant ce qui précède :

$$\mathbf{B}_{n1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{n2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{n3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \dots\dots\dots$$

.....

$$\dots\dots\dots B_{n-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$B_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; B_{nn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

**Définition 2-1 – 1<sup>ère</sup> Définition des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .**

Soit  $(n, i, j, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^5$ .  
 Les  $n$  matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ont leurs éléments tous nuls ( $0 \in \mathbb{B}$ ), à l'exception de ceux d'indices  $(p, q)$  vérifiant les relations ci-dessous, et qui prennent alors la valeur 1 ( $1 \in \mathbb{B}$ ).

Pour tout  $i$  fixé,  $1 \leq i \leq n$  :  
 $\forall j$  tel que  $1 \leq j \leq n-i+1$  et  $\forall p$  tel que  $j \leq p \leq i+j-1 : p+q = i+2j-1$ .

*Remarque 1 :*  
 Notons que l'on a toujours les identités suivantes :  $B_{n1} = I_n ; B_{nn} = J_n$ .

*Remarque 2 :*  
 Les éléments non nuls dessinent une configuration en forme de rectangle dont les sommets sont les éléments d'indices  $(1, i) ; (i, 1) ; (n-i+1, n) ; (n, n-i+1)$ .  
 Lorsque  $i = 1$  et lorsque  $i = n$ , le rectangle est dégénéré et se confond respectivement avec la 1<sup>ère</sup> diagonale et la 2<sup>ème</sup> diagonale de la matrice.

*Remarque 3 :*

Il faut bien reconnaître que les relations figurant dans la Définition 2-1 ci-dessus sont moins « parlantes » que la représentation graphique des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , donnée plus haut.

Pour rendre plus « parlante » encore la représentation graphique de ces matrices, nous aurons parfois recours à un autre mode de représentation dans laquelle :

- la matrice à représenter prend la forme d'un tableau de  $n \times n$  cases,
- les cases correspondant à un élément égal à 1 contiennent une croix : x,
- les cases correspondant à un élément égal à 0 sont laissées à blanc.

*Exemples :*

Dans ce mode de représentation, on a à titre d'exemples, pour  $n = 4$  :

$B_1 = I_4$	$B_2$	$B_3$	$B_4 = J_4$																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>x</td></tr> </table>	x					x					x					x	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr> </table>		x			x		x			x		x			x		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr> </table>			x			x		x	x		x			x			<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> </table>	x			x		x	x			x	x		x			x
x																																																																			
	x																																																																		
		x																																																																	
			x																																																																
	x																																																																		
x		x																																																																	
	x		x																																																																
		x																																																																	
		x																																																																	
	x		x																																																																
x		x																																																																	
	x																																																																		
x			x																																																																
	x	x																																																																	
	x	x																																																																	
x			x																																																																

Nous dénommerons ce mode de représentation : représentation simplifiée des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**2.2.2. Indépendance du système de matrices  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$** 

**Théorème 2-2.** *Le système  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$  est libre.*

*Preuve :*

Soient :  $(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{B}^n$ .

La combinaison linéaire :

$$C = \lambda_1 B_{n1} + \lambda_2 B_{n2} + \dots + \lambda_i B_{ni} + \dots + \lambda_{n-1} B_{n(n-1)} + \lambda_n B_{nn}$$

est une matrice  $C = [c_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

Par suite :

$$C = O_n \Leftrightarrow c_{ij} = 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n.$$

Or :  $c_{11} = \lambda_1$ ,  $c_{12} = \lambda_2$ ,  $\dots$ ,  $c_{1i} = \lambda_i$ ,  $\dots$ ,  $c_{1(n-1)} = \lambda_{n-1}$ ,  $c_{1n} = \lambda_n$ , donc :

$$C = O_n \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_i = 0, \dots, \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = 0.$$

Le système  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est donc libre.

### 2.3. Définition de l'ensemble $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Nous allons maintenant nous attacher à définir (pour tout ordre de matrice  $n$  entier positif) un sev particulier de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , de dimension  $n$ , que nous noterons  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , et dont les matrices possèdent les propriétés de bisymétrie et de commutativité dont il a été fait mention dans l'introduction de ce chapitre.

Nous allons nous donner pour ce faire une *matrice de référence* et nous choisirons à cet égard, pour  $n \geq 2$ , la matrice  $B_{n2}$ . Nous poserons alors :  $N_n = B_{n2}$ .

**Définition 2-3.**  $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} : N_n = B_{n2}$ .

Pour  $n = 1$ , nous conviendrons que :  $N_1 = O_1 = [0]$ .

**Définition 2-4.** Nous désignerons par  $\text{Com}(N_n)$  le commutant de la matrice  $N_n$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

*Note :* Dans tout le présent Chapitre 2,  $\text{Com}(N_n)$  désignera le commutant de  $N_n$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , et non pas dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ . Nous étudierons le commutant de  $N_n$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  dans le Chapitre 3.

$\text{Com}(N_n)$  est bien un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  (propriété classique du commutant d'une matrice) et il est clair que les matrices  $O_n$ ,  $I_n$  et  $N_n$  figurent dans  $\text{Com}(N_n)$ , puisque les produits  $N_n \cdot O_n$ ,  $N_n \cdot I_n$  et  $N_n \cdot N_n$  sont commutatifs.

Nous démontrerons que  $\text{Com}(N_n)$  est globalement stable pour la multiplication, autrement dit que le produit de 2 matrices quelconques  $A$  et  $A'$  de  $\text{Com}(N_n)$  (et non plus seulement le produit  $A \cdot N_n$ ) est bisymétrique.

Nous démontrerons également que la dimension de  $\text{Com}(N_n)$  est égale à  $n$ .

Nous commencerons par étudier les cas  $n = 1$  à 5, où nous poserons, par définition, que :  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n)$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ . Pour  $n = 6$ , nous adopterons une approche légèrement différente qui préfigurera le traitement du cas général  $n \in \mathbb{N}^*$  quelconque.

#### 2.3.1. Étude des cas $n = 1$ à 6

$n = 1$

$\mathcal{M}_1(\mathbb{B}) = \mathcal{BS}_1(\mathbb{B})$  ne contient que 2 matrices  $I_1 = [1]$  et  $O_1 = [0]$ .

Par ailleurs  $N_1 = O_1$  (cf. Définition 2-3) et on vérifie sans peine que les produits :  $I_1 \cdot O_1 = O_1$ ,  $O_1 \cdot I_1 = O_1$ ,  $O_1 \cdot O_1 = O_1$  et  $I_1 \cdot I_1 = I_1$  sont commutatifs.

Donc :  $\text{Com}(N_1) = \mathcal{BS}_1(\mathbb{B}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{B})$ .



Nous posons, par définition :  $\mathcal{BSC}_1(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_1)$  dans  $\mathcal{BS}_1(\mathbb{B})$ , et donc :

$$\mathcal{BSC}_1(\mathbb{B}) = \mathcal{BS}_1(\mathbb{B}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{B}) \text{ et } \dim(\mathcal{BSC}_1(\mathbb{B})) = 1.$$

Or :  $B_{11} = I_1$  (cf. Définition 2-1).

Toute matrice A de  $\mathcal{BSC}_1(\mathbb{B})$  s'écrit sous la forme  $A = a B_{11}$ , avec  $a \in \mathbb{B}$ .

Nous dirons que  $\{B_{11}\}$  constitue la « base canonique » de  $\mathcal{BSC}_1(\mathbb{B})$ .

On a donc :  $\mathcal{BSC}_1(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{11})$ .

$n = 2$

$$\mathcal{BS}_2(\mathbb{B}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{B}) \text{ et } N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = J_2.$$

Soit  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{B}^2$ , une matrice quelconque de  $\mathcal{BS}_2(\mathbb{B})$ .

$A \cdot N_2 = \begin{bmatrix} b & a \\ a & b \end{bmatrix}$  est bisymétrique, sans conditions particulières sur  $a$  et  $b$ .

On peut d'ailleurs vérifier directement que si l'on se donne 2 matrices A et A' quelconques de  $\mathcal{BS}_2(\mathbb{B})$  :

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$  et  $A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{bmatrix}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{B}^2$ ,  $(a', b') \in \mathbb{B}^2$ , alors le produit :

$A \cdot A' = \begin{bmatrix} aa' + bb' & ab' + b'a \\ ab' + ba' & aa' + bb' \end{bmatrix}$  est bisymétrique, sans conditions particulières sur  $a, b, a', b'$ .

Donc :  $\text{Com}(N_2) = \mathcal{BS}_2(\mathbb{B}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{B})$ .

Nous posons, par définition :  $\mathcal{BSC}_2(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_2)$  dans  $\mathcal{BS}_2(\mathbb{B})$ , et donc :

$$\mathcal{BSC}_2(\mathbb{B}) = \mathcal{BS}_2(\mathbb{B}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{B}) \text{ et } \dim(\mathcal{BSC}_2(\mathbb{B})) = 2.$$

Considérons maintenant les 2 matrices  $B_{21} = I_2$  et  $B_{22} = J_2 = N_2$  faisant l'objet de la Définition 2-1.

Toute matrice A de  $\mathcal{BSC}_2(\mathbb{B})$  s'écrit sous la forme  $A = a B_{21} + b B_{22}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{B}^2$ .

Nous dirons que  $\{B_{21}, B_{22}\}$  constitue la « base canonique » de  $\mathcal{BSC}_2(\mathbb{B})$ .

On a donc :  $\mathcal{BSC}_2(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{21}, B_{22})$ .

$n = 3$

Soit  $N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  et soit  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$ ,  $(a, b, c, d) \in \mathbb{B}^4$ , une matrice quelconque de  $\mathcal{BS}_3(\mathbb{B})$ .

Cherchons à quelles conditions la matrice produit  $A \cdot N_3$  est bisymétrique.

$$A \cdot N_3 = \begin{bmatrix} b & a+c & b \\ d & 0 & d \\ b & a+c & b \end{bmatrix}.$$

On voit donc qu'en règle générale,  $A \cdot N_3$  n'est pas bisymétrique. Cependant  $A \cdot N_3$  est bisymétrique si et seulement si la condition suivante ( $C_3$ ) est remplie :

$$(C_3) \quad d = a + c$$

Lorsque cette condition ( $C_3$ ) est remplie,  $A$  prend la forme générale suivante :

$$(F_3) \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

Réciproquement, on vérifie aisément que le produit de toute matrice  $A$  de la forme ( $F_3$ ) par la matrice  $N_3$  est bisymétrique.

*Remarque :*

Le produit  $N_3 \cdot A$  est le 1-transposé de  $A \cdot N_3$ . En effet :  ${}^t(N_3 \cdot A) = {}^t A \cdot {}^t N_3 = A \cdot N_3$ .

Si l'on avait formé le produit  $N_3 \cdot A$  (au lieu de  $A \cdot N_3$ ) et si l'on avait cherché à quelles conditions  $N_3 \cdot A$  est bisymétrique, on aurait retrouvé la même condition ( $C_3$ ) :  $d = a + c$ .

De même, si l'on avait cherché à quelles conditions le produit  $A \cdot N_3$  est commutatif, donc à quelles conditions :  $A \cdot N_3 = N_3 \cdot A$ , on aurait à nouveau retrouvé la même condition ( $C_3$ ) :  $d = a + c$ .

En conclusion,  $A \cdot N_3$  est bisymétrique si et seulement si  $A$  est de la forme ( $F_3$ ) ci-dessus.

Donc :  $\text{Com}(N_3)$  dans  $\mathcal{BS}_3(\mathbb{B}) =$  ensemble des matrices  $A$  de la forme ( $F_3$ ).

(Il convient de noter que la matrice  $N_3$  correspond à la matrice  $A$  pour laquelle :  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ).

Considérons maintenant les 3 matrices  $B_{31}$ ,  $B_{32}$  et  $B_{33}$ , faisant l'objet de la Définition 2-1.

$$B_{31} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B_{32} = N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B_{33} = J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices appartiennent à  $\text{Com}(N_3)$ , comme on le vérifie aisément :

- $B_{31}$  correspond aux valeurs :  $a = 1, b = 0, c = 0$ ,
- $B_{32}$  correspond aux valeurs :  $a = 0, b = 1, c = 0$ ,
- $B_{33}$  correspond aux valeurs :  $a = 0, b = 0, c = 1$ .

Le système  $\{B_{31}, B_{32}, B_{33}\}$  est un système générateur de  $\text{Com}(N_3)$ , puisque toute matrice  $A$  de  $\text{Com}(N_3)$  s'écrit sous la forme :  $A = a B_{31} + b B_{32} + c B_{33}$ .

Par ailleurs, le système  $\{B_{31}, B_{32}, B_{33}\}$  est libre (cf. Théorème 2-2).

En conclusion, le système  $\{B_{31}, B_{32}, B_{33}\}$ , libre et générateur, est une base de  $\text{Com}(N_3)$ .

Donc :  $\text{Com}(N_3) = \text{Vect}(B_{3i}), 1 \leq i \leq 3$ .

Nous allons maintenant montrer que le produit de 2 matrices quelconques  $A$  et  $A'$  de  $\text{Com}(N_3)$  est commutatif.

Commençons par montrer que tel est bien le cas pour les matrices de la base  $\{B_{31}, B_{32}, B_{33}\}$  de  $\text{Com}(N_3)$ , autrement dit que :  $B_{3i} \cdot B_{3j} = B_{3j} \cdot B_{3i}$ , pour :  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$ .

Pour  $i = 2$ , comme  $B_{32} = N_3$ , nous sommes assurés, par définition même de  $\text{Com}(N_3)$ , que :  $B_{32} \cdot B_{3j} = B_{3j} \cdot B_{32}$ ,  $1 \leq j \leq 3$ .

Table de multiplication  $B_{3i} \cdot B_{3j} = B_{3j} \cdot B_{3i}$  ( $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$ )

(Par commodité d'écriture, le 1<sup>er</sup> indice de  $B$  relatif à l'ordre  $n = 3$  a été omis dans le tableau ci-dessous).

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$B_1$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$B_2$	$B_2$	$B_1 + B_3$	$B_2$
$B_3$	$B_3$	$B_2$	$B_1$

Les matrices de la base  $\{B_{31}, B_{32}, B_{33}\}$  de  $\text{Com}(N_3)$  sont donc bien commutantes.

Bien entendu, ceci suffit à établir la commutativité du produit de 2 matrices quelconques de  $\text{Com}(\mathbb{N}_3)$ , autrement dit :

$$\forall A \in \text{Com}(\mathbb{N}_3), \forall A' \in \text{Com}(\mathbb{N}_3) : A \cdot A' = A' \cdot A.$$

En effet, comme :  $A = \sum_{i=1}^3 a_i B_{3i}$  et comme :  $A' = \sum_{j=1}^3 a'_j B_{3j}$ , le produit :

$$A \cdot A' = \left( \sum_{i=1}^3 a_i B_{3i} \right) \left( \sum_{j=1}^3 a'_j B_{3j} \right) \text{ est commutatif,}$$

puisque tous les produits  $B_{3i} \cdot B_{3j}$  ( $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$ ) le sont.

Nous posons, par définition :  $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B}) = \text{Com}(\mathbb{N}_3)$  dans  $\mathcal{BS}_3(\mathbb{B})$ , et donc :

$$\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{31}, B_{32}, B_{33}).$$

Nous dirons que  $\{B_{31}, B_{32}, B_{33}\}$  constitue la « base canonique » de  $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$ .

$\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$  est un sev de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{B})$  et de  $\mathcal{BS}_3(\mathbb{B})$  de dimension 3, constitué de matrices bisymétriques commutantes.

$n = 4$

$$\text{Soit } N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et soit } A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{B}^6, \text{ une matrice}$$

quelconque de  $\mathcal{BS}_4(\mathbb{B})$ .

Cherchons à quelles conditions la matrice produit  $A \cdot N_4$  est bisymétrique.

$$A \cdot N_4 = \begin{bmatrix} b & a+c & b+d & c \\ e & b+f & c+e & f \\ f & c+e & b+f & e \\ c & b+d & a+c & b \end{bmatrix}.$$

On voit donc qu'en règle générale,  $A \cdot N_4$  n'est pas bisymétrique. Cependant  $A \cdot N_4$  est bisymétrique si et seulement si les conditions suivantes ( $C_4$ ) sont remplies :

$$(C_4) \quad e = a + c \quad \text{et} \quad f = b + d$$

Lorsque ces conditions ( $C_4$ ) sont remplies,  $A$  prend la forme générale suivante :

$$(F_4) \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a+c & b+d & c \\ c & b+d & a+c & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

Réciproquement, on vérifie aisément que le produit de toute matrice  $A$  de la forme  $(F_4)$  par la matrice  $N_4$  est bisymétrique.

*Remarque :*

Comme dans le cas  $n = 3$ , on aurait aussi pu former le produit  $N_4 \cdot A$  (au lieu de  $A \cdot N_4$ ) et rechercher à quelles conditions ce produit est bisymétrique. On aurait retrouvé les mêmes conditions  $(C_4)$ . De même, si l'on avait cherché les conditions dans lesquelles le produit  $A \cdot N_4$  est commutatif, on aurait à nouveau retrouvé les mêmes conditions  $(C_4)$ .

En conclusion,  $A \cdot N_4$  est bisymétrique si et seulement si  $A$  est de la forme  $(F_4)$  ci-dessus.

Donc :  $\text{Com}(N_4)$  dans  $\mathcal{BS}_4(\mathbb{B})$  = ensemble des matrices  $A$  de la forme  $(F_4)$ .

(Il convient de noter que la matrice  $N_4$  correspond à la matrice  $A$  pour laquelle :  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ).

Considérons maintenant les 4 matrices  $B_{41}$ ,  $B_{42}$ ,  $B_{43}$ ,  $B_{44}$ , faisant l'objet de la Définition 2-1.

$$B_{41} = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B_{42} = N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$B_{44} = J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices appartiennent à  $\text{Com}(N_4)$ , comme on le vérifie aisément :

- $B_{41}$  correspond aux valeurs :  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $d = 0$ ,
- $B_{42}$  correspond aux valeurs :  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 0$ ,
- $B_{43}$  correspond aux valeurs :  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,  $d = 0$ ,
- $B_{44}$  correspond aux valeurs :  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $d = 1$ .

Le système  $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$  est un système générateur de  $\text{Com}(N_4)$ , puisque toute matrice  $A$  de  $\text{Com}(N_4)$  s'écrit sous la forme :  $A = a B_{41} + b B_{42} + c B_{43} + d B_{44}$ .

Par ailleurs, le système  $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$  est libre (cf. Théorème 2-2).

En conclusion, le système  $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$ , libre et générateur, est une base de  $\text{Com}(N_4)$ .

Donc :  $\text{Com}(N_4) = \text{Vect}(B_{4i}), 1 \leq i \leq 4$ .

Il convient maintenant de montrer que le produit de 2 matrices quelconques  $A$  et  $A'$  de  $\text{Com}(N_4)$  est commutatif.

Commençons par montrer que tel est bien le cas pour les matrices de la base  $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$  de  $\text{Com}(N_4)$ , autrement dit que :  $B_{4i} \cdot B_{4j} = B_{4j} \cdot B_{4i}$ , pour :  $1 \leq i \leq 4$  et  $1 \leq j \leq 4$ .

Pour  $i=2$ , comme  $B_{42} = N_4$ , nous sommes assurés, par définition même de  $\text{Com}(N_4)$ , que :  $B_{42} \cdot B_{4j} = B_{4j} \cdot B_{42}$ ,  $1 \leq j \leq 4$ .

Table de multiplication  $B_{4i} \cdot B_{4j} = B_{4j} \cdot B_{4i}$  ( $1 \leq i \leq 4$  et  $1 \leq j \leq 4$ )

(Par commodité d'écriture, le 1<sup>er</sup> indice de  $B$  relatif à l'ordre  $n = 4$  a été omis dans le tableau ci-dessous).

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$B_1$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$B_2$	$B_2$	$B_1 + B_3$	$B_2 + B_4$	$B_3$
$B_3$	$B_3$	$B_2 + B_4$	$B_1 + B_3$	$B_2$
$B_4$	$B_4$	$B_3$	$B_2$	$B_1$

Les matrices de la base  $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$  de  $\text{Com}(N_4)$  sont donc bien commutantes.

Bien entendu, ceci suffit à établir la commutativité du produit de 2 matrices quelconques de  $\text{Com}(N_4)$ , autrement dit :

$$\forall A \in \text{Com}(N_4), \forall A' \in \text{Com}(N_4) : A \cdot A' = A' \cdot A.$$

En effet, comme :  $A = \sum_{i=1}^4 a_i B_{4i}$  et comme :  $A' = \sum_{j=1}^4 a'_j B_{4j}$ , le produit

$$A \cdot A' = \left( \sum_{i=1}^4 a_i B_{4i} \right) \left( \sum_{j=1}^4 a'_j B_{4j} \right) \text{ est commutatif,}$$

puisque tous les produits  $B_{4i} \cdot B_{4j}$  ( $1 \leq i \leq 4$  et  $1 \leq j \leq 4$ ) le sont.

Nous posons, par définition :  $\mathcal{BSE}_4(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_4)$  dans  $\mathcal{BS}_4(\mathbb{B})$ , et donc :

$$\mathcal{BSE}_4(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}).$$

Nous dirons que  $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$  constitue la « base canonique » de  $\mathcal{BSE}_4(\mathbb{B})$ .

$\mathcal{BSE}_4(\mathbb{B})$  est un sev de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{B})$  et de  $\mathcal{BS}_4(\mathbb{B})$  de dimension 4, constitué de matrices bisymétriques commutantes.

$n = 5$

$$\text{Soit } N_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et soit } A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & f & g & h & d \\ c & g & i & g & c \\ d & h & g & f & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, (a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{B}^9,$$

une matrice quelconque de  $\mathcal{BS}_5(\mathbb{B})$ .

Cherchons à quelles conditions la matrice produit  $A \cdot N_5$  est bisymétrique.

$$A \cdot N_5 = \begin{bmatrix} b & a+c & b+d & e+c & d \\ f & b+g & f+h & d+g & h \\ g & c+i & 0 & c+i & g \\ h & d+g & f+h & b+g & f \\ d & e+c & b+d & a+c & b \end{bmatrix}$$

On voit donc qu'en règle générale,  $A \cdot N_5$  n'est pas bisymétrique. Cependant  $A \cdot N_5$  est bisymétrique si et seulement si les conditions suivantes ( $C_5$ ) sont remplies :

$$(C_5) \quad f = a+c, \quad g = b+d, \quad h = c+e, \quad i = a+c+e$$

Lorsque ces conditions ( $C_5$ ) sont remplies,  $A$  prend la forme générale suivante :

$$(F_5) \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a+c & b+d & c+e & d \\ c & b+d & a+c+e & b+d & c \\ d & c+e & b+d & a+c & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}$$

Réciproquement, on vérifie aisément que le produit de toute matrice  $A$  de la forme  $(F_5)$  par la matrice  $N_5$  est bisymétrique.

*Remarque :*

Comme dans les cas  $n = 3$  et  $n = 4$ , on aurait aussi pu former le produit  $N_5 \cdot A$  (au lieu de  $A \cdot N_5$ ) et rechercher à quelles conditions ce produit est bisymétrique. On aurait retrouvé les mêmes conditions  $(C_5)$ . De même, si l'on avait cherché les conditions dans lesquelles le produit  $A \cdot N_5$  est commutatif, on aurait à nouveau retrouvé les mêmes conditions  $(C_5)$ .

En conclusion,  $A \cdot N_5$  est bisymétrique si et seulement si  $A$  est de la forme  $(F_5)$  ci-dessus.

Donc :  $\text{Com}(N_5)$  dans  $\mathcal{BS}_5(\mathbb{B}) =$  ensemble des matrices  $A$  de la forme  $(F_5)$ .

(Il convient de noter que la matrice  $N_5$  correspond à la matrice  $A$  pour laquelle :  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 0$ ,  $e = 0$ ).

Considérons maintenant les 5 matrices  $B_{51}$ ,  $B_{52}$ ,  $B_{53}$ ,  $B_{54}$ ,  $B_{55}$ , faisant l'objet de la Définition 2-1.

$$B_{51} = I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; B_{52} = N_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; B_{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$B_{54} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; B_{55} = J_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ces matrices appartiennent à  $\text{Com}(N_5)$ , comme on le vérifie aisément :



- $B_{51}$  correspond aux valeurs :  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0,$
- $B_{52}$  correspond aux valeurs :  $a = 0, b = 1, c = 0, d = 0, e = 0,$
- $B_{53}$  correspond aux valeurs :  $a = 0, b = 0, c = 1, d = 0, e = 0,$
- $B_{54}$  correspond aux valeurs :  $a = 0, b = 0, c = 0, d = 1, e = 0,$
- $B_{55}$  correspond aux valeurs :  $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0, e = 1.$

Le système  $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$  est un système générateur de  $\text{Com}(N_5)$ , puisque toute matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  s'écrit sous la forme :  $A = a B_{51} + b B_{52} + c B_{53} + d B_{54} + e B_{55}.$

Par ailleurs le système  $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$  est libre (cf. Théorème 2-2).

En conclusion, le système  $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$ , libre et générateur, est une base de  $\text{Com}(N_5)$ .

Donc :  $\text{Com}(N_5) = \text{Vect}(B_{5i}), 1 \leq i \leq 5.$

Il convient maintenant de montrer que le produit de 2 matrices quelconques  $A$  et  $A'$  de  $\text{Com}(N_5)$  est commutatif.

Commençons par montrer que tel est bien le cas pour les matrices de la base  $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$  de  $\text{Com}(N_5)$ , autrement dit que :  $B_{5i} \cdot B_{5j} = B_{5j} \cdot B_{5i}$ , pour :  $1 \leq i \leq 5$  et  $1 \leq j \leq 5.$

Pour  $i = 2$ , comme  $B_{52} = N_5$ , nous sommes assurés, par définition même de  $\text{Com}(N_5)$ , que :  $B_{52} \cdot B_{5j} = B_{5j} \cdot B_{52}$ ,  $1 \leq j \leq 5.$

Table de multiplication $B_{5i} \cdot B_{5j} = B_{5j} \cdot B_{5i}$ ( $1 \leq i \leq 5$ et $1 \leq j \leq 5$ )
--

(Par commodité d'écriture, le 1<sup>er</sup> indice de  $B$  relatif à l'ordre  $n = 5$  a été omis dans le tableau ci-dessous).

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
$B_1$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
$B_2$	$B_2$	$B_1 + B_3$	$B_2 + B_4$	$B_3 + B_5$	$B_4$
$B_3$	$B_3$	$B_2 + B_4$	$B_1 + B_3 + B_5$	$B_2 + B_4$	$B_3$
$B_4$	$B_4$	$B_3 + B_5$	$B_2 + B_4$	$B_1 + B_3$	$B_2$
$B_5$	$B_5$	$B_4$	$B_3$	$B_2$	$B_1$

Les matrices de la base canonique  $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$  de  $\text{Com}(N_5)$  sont donc bien commutantes.

Bien entendu, ceci suffit à établir la commutativité du produit de 2 matrices quelconques de  $\text{Com}(N_5)$ , autrement dit :

$$\forall A \in \text{Com}(N_5), \forall A' \in \text{Com}(N_5) : A \cdot A' = A' \cdot A.$$

En effet, comme :  $A = \sum_{i=1}^5 a_i B_{5i}$  et comme :  $A' = \sum_{j=1}^5 a'_j B_{5j}$ , le produit :

$$A \cdot A' = \left( \sum_{i=1}^5 a_i B_{5i} \right) \left( \sum_{j=1}^5 a'_j B_{5j} \right) \text{ est commutatif,}$$

puisque tous les produits  $B_{5i} \cdot B_{5j}$  ( $1 \leq i \leq 5$  et  $1 \leq j \leq 5$ ) le sont.

Nous posons, par définition :  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_5)$  dans  $\mathcal{BS}_5(\mathbb{B})$ , et donc :

$$\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}).$$

Nous dirons que  $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$  constitue la « base canonique » de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$ .

$\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  est un sev de  $\mathcal{M}_5(\mathbb{B})$  et de  $\mathcal{BS}_5(\mathbb{B})$  de dimension 5, constitué de matrices bisymétriques commutantes.

$n = 6$

Nous allons procéder légèrement différemment des cas précédemment étudiés  $n = 1$  à 5. Cet exemple préfigurerait l'approche adoptée dans la section suivante, traitant le cas général  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Nous prédéfinirons  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  comme un sous-ensemble particulier de  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})$ .

Puis nous établirons que ce sous-ensemble est un sev de  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})$  de dimension 6.

Nous démontrerons ensuite que  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_6)$  dans  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})$ .

Nous établirons enfin que le produit de deux matrices quelconques de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  est commutatif.

Par définition donc,  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  sera le sous-ensemble de  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})$  constitué des matrices de la forme générale :

$$(F_6) \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a+c & b+d & c+e & d+f & e \\ c & b+d & a+c+e & b+d+f & c+e & d \\ d & c+e & b+d+f & a+c+e & b+d & c \\ e & d+f & c+e & b+d & a+c & b \\ f & e & d & c & b & a \end{bmatrix}$$

Considérons maintenant les 6 matrices  $B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}$ , faisant l'objet de la Définition 2-1.

$$B_{61} = I_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_{62} = N_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_{63} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{64} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_{65} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{66} = J_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices appartiennent bien à  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$ , comme on le vérifie aisément :

- $B_{61}$  correspond aux valeurs :  $a=1, b=0, c=0, d=0, e=0, f=0$ ,
- $B_{62}$  correspond aux valeurs :  $a=0, b=1, c=0, d=0, e=0, f=0$ ,
- $B_{63}$  correspond aux valeurs :  $a=0, b=0, c=1, d=0, e=0, f=0$ ,
- $B_{64}$  correspond aux valeurs :  $a=0, b=0, c=0, d=1, e=0, f=0$ ,
- $B_{65}$  correspond aux valeurs :  $a=0, b=0, c=0, d=0, e=1, f=0$ ,
- $B_{66}$  correspond aux valeurs :  $a=0, b=0, c=0, d=0, e=0, f=1$ .

Moyennant l'introduction de ces matrices, la matrice générale de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  ayant la forme  $(F_6)$  ci-dessus s'écrit comme suit :  $a B_{61} + b B_{62} + c B_{63} + d B_{64} + e B_{65} + f B_{66}$ .

Le système  $\{B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}\}$  est donc un système générateur de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$ ,

Par ailleurs le système  $\{B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}\}$  est libre (cf. Théorème 2-2).

En conclusion, le système  $\{B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}\}$ , libre et générateur, est une base de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$ .

Nous dirons que  $\{B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}\}$  constitue la « base canonique » de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$ .

On a donc :  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66})$ .

Nous allons maintenant démontrer que :  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_6)$  dans  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})$ .

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & g & h & i & j & e \\ c & h & k & l & i & d \\ d & i & l & k & h & c \\ e & j & i & h & g & b \\ f & e & d & c & b & a \end{bmatrix}, (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l) \in \mathbb{B}^{12} \text{ une matrice}$$

quelconque de  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})$ .

$$\text{Soit : } N_6 = B_{62} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cherchons à quelles conditions la matrice produit  $A \cdot N_6$  est bisymétrique.

$$A \cdot N_6 = \begin{bmatrix} b & a+c & b+d & c+e & d+f & e \\ g & b+h & g+i & h+j & i+e & j \\ h & c+k & h+l & k+i & l+d & i \\ i & d+l & i+k & l+h & k+c & h \\ j & e+i & j+h & i+g & h+b & g \\ e & f+d & e+c & d+b & c+a & b \end{bmatrix}$$

On voit donc qu'en règle générale,  $A \cdot N_6$  n'est pas bisymétrique. Cependant  $A \cdot N_6$  est bisymétrique si les conditions suivantes  $(C_6)$  sont remplies :

$$(C_6) \quad g = a + c, \quad h = b + d, \quad i = c + e, \quad j = d + f, \quad c + k = g + i, \quad d + l = h + j$$

soit encore :

$$(C_6) \quad g = a + c, \quad h = b + d, \quad i = c + e, \quad j = d + f, \quad k = a + c + e, \quad l = b + d + f$$

Lorsque ces conditions  $(C_6)$  sont remplies, on constate que  $A$  prend la forme générale  $(F_6)$  introduite plus haut :

$$(F_6) \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a+c & b+d & c+e & d+f & e \\ c & b+d & a+c+e & b+d+f & c+e & d \\ d & c+e & b+d+f & a+c+e & b+d & c \\ e & d+f & c+e & b+d & a+c & b \\ f & e & d & c & b & a \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, on vérifie aisément que le produit de toute matrice  $A$  de la forme  $(F_6)$  par la matrice  $N_6$  est bisymétrique.

En conclusion,  $A \cdot N_6$  est bisymétrique si et seulement si la matrice  $A$  est de la forme  $(F_6)$  ci-dessus.

*Remarque :*

Comme dans les cas  $n=3$ ,  $n=4$  et  $n=5$ , on aurait aussi pu former le produit  $N_6 \cdot A$  (au lieu de  $A \cdot N_6$ ) et rechercher à quelles conditions ce produit est bisymétrique.

De même, on aurait pu chercher à déterminer les conditions dans lesquelles le produit  $A \cdot N_6$  est commutatif. Dans les deux cas, on aurait abouti à la conclusion que  $A$  doit être de la forme  $(F_6)$  ci-dessus.

Finalement,  $A \cdot N_6$  est bisymétrique (ou :  $N_6 \cdot A$  est bisymétrique, ou encore :  $A \cdot N_6$  est commutatif), si et seulement si :  $A \in \mathcal{BSC}_6(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66})$ .

Et donc :  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_6)$  dans  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})$ .

Il convient maintenant de montrer que le produit de 2 matrices quelconques  $A$  et  $A'$  de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  est commutatif.

Commençons par montrer que tel est bien le cas pour les matrices de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$ , autrement dit que :  $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$ , pour :  $1 \leq i \leq 6$  et  $1 \leq j \leq 6$ .

Pour  $i = 2$ , comme  $B_{62} = N_6$ , nous sommes assurés, par définition même de  $\text{Com}(N_6)$ , que :  $B_{62} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{62}$ ,  $1 \leq j \leq 6$ .

Si nous procédions comme dans les exemples précédents,  $n = 1$  à  $5$ , nous nous contenterions de calculer la table de multiplication  $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$  pour :  $1 \leq i \leq 6$  et  $1 \leq j \leq 6$ , et de constater la commutativité de chacun de ces produits. Cherchons une démonstration généralisable à un ordre  $n$  quelconque.

Montrons d'abord que  $B_{6i} \cdot B_{6j}$  ( $1 \leq i \leq 6$  et  $1 \leq j \leq 6$ )  $\in \mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$ .

Ce dernier point n'est pas acquis puisque le produit de 2 matrices bisymétriques n'est pas nécessairement bisymétrique.

Pour ce faire, nous allons démontrer que le produit de la matrice  $(B_{6i} \cdot B_{6j})$  et de la matrice  $B_{62} = N_6$  est commutatif, c.-à-d. que :  $(B_{6i} \cdot B_{6j}) \cdot B_{62} = B_{6i} \cdot (B_{6j} \cdot B_{62})$ .

Or  $B_{6j} \cdot B_{62}$  est commutatif, donc :

$$(B_{6i} \cdot B_{6j}) \cdot B_{62} = B_{6i} \cdot (B_{6j} \cdot B_{62}) = B_{6i} \cdot (B_{62} \cdot B_{6j}) = (B_{6i} \cdot B_{62}) \cdot B_{6j}$$

$$B_{6i} \cdot B_{62} \text{ est commutatif, donc : } (B_{6i} \cdot B_{62}) \cdot B_{6j} = (B_{62} \cdot B_{6i}) \cdot B_{6j} = B_{62} \cdot (B_{6i} \cdot B_{6j}).$$

Donc le produit de la matrice  $(B_{6i} \cdot B_{6j})$  et de la matrice  $B_{62} = N_6$  est bien commutatif.

Comme seules les matrices bisymétriques appartenant à  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  commutent avec  $B_{62} = N_6$ , on en conclut que :

$$B_{6i} \cdot B_{6j} \text{ (} 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6 \text{)} \in \mathcal{BSC}_6(\mathbb{B}).$$

De ce fait la matrice produit  $B_{6i} \cdot B_{6j}$  est bisymétrique. Or, si ce produit  $B_{6i} \cdot B_{6j}$  est bisymétrique, alors c'est qu'il est commutatif. Donc  $B_{6i} \cdot B_{6j}$  est commutatif.

Redémontrons ce dernier point :

$B_{6i} \cdot B_{6j}$  étant bisymétrique,  $B_{6i} \cdot B_{6j}$  est symétrique.

$$\text{Donc : } B_{6i} \cdot B_{6j} = {}^t(B_{6i} \cdot B_{6j}) = {}^t B_{6j} \cdot {}^t B_{6i} = B_{6j} \cdot B_{6i}$$

La commutativité du produit  $B_{6i} \cdot B_{6j}$  est donc bien établie.

Les matrices de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  sont donc bien commutantes.

Bien entendu, ceci suffit à établir la commutativité du produit de 2 matrices quelconques de  $\mathcal{BSE}_6(\mathbb{B})$ , autrement dit :

$$A \in \mathcal{BSE}_6(\mathbb{B}), \forall A' \in \mathcal{BSE}_6(\mathbb{B}) : A \cdot A' = A' \cdot A.$$

En effet, comme :  $A = \sum_{i=1}^6 a_i B_{6i}$  et comme :  $A' = \sum_{j=1}^6 a'_j B_{6j}$ , le produit :

$A \cdot A' = \left( \sum_{i=1}^6 a_i B_{6i} \right) \left( \sum_{j=1}^6 a'_j B_{6j} \right)$  est commutatif, puisque tous les produits  $B_{6i} \cdot B_{6j}$  ( $1 \leq i \leq 6$  et  $1 \leq j \leq 6$ ) le sont.

Ci-après la table de multiplication  $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$  pour :  $1 \leq i \leq 6$  et  $1 \leq j \leq 6$ .

La lecture de ce tableau montre bien que le produit  $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$  ( $1 \leq i \leq 6$  et  $1 \leq j \leq 6$ ) est commutatif.

Table de multiplication $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$ ( $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$ )
--

(Par commodité d'écriture, le 1<sup>er</sup> indice de B relatif à l'ordre  $n = 6$  a été omis dans le tableau ci-dessous).

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$
$B_1$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$
$B_2$	$B_2$	$B_1 + B_3$	$B_2 + B_4$	$B_3 + B_5$	$B_4 + B_6$	$B_5$
$B_3$	$B_3$	$B_2 + B_4$	$B_1 + B_3 + B_5$	$B_2 + B_4 + B_6$	$B_3 + B_5$	$B_4$
$B_4$	$B_4$	$B_3 + B_5$	$B_2 + B_4 + B_6$	$B_1 + B_3 + B_5$	$B_2 + B_4$	$B_3$
$B_5$	$B_5$	$B_4 + B_6$	$B_3 + B_5$	$B_2 + B_4$	$B_1 + B_3$	$B_2$
$B_6$	$B_6$	$B_5$	$B_4$	$B_3$	$B_2$	$B_1$

En conclusion :

$\mathcal{BSE}_6(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66})$  est un sev de  $\mathcal{M}_6(\mathbb{B})$  et de  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})$  de dimension 6, constitué de matrices bisymétriques commutantes.

**2.3.2. Matrices bisymétriques commutatives d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  - Espace vectoriel  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$   
 - Base canonique  $B_{ni}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$**

Nous allons nous inspirer du cas précédent  $n = 6$ .

Nous pré-définirons  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  comme un sous-ensemble particulier de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ . Puis nous établirons que  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de dimension  $n$ .

Nous démontrerons ensuite que  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n)$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Nous établirons enfin que le produit de deux matrices quelconques de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est commutatif.

Par définition donc,  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sera le sous-ensemble de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  constitué des matrices dont les paramètres (notés  $[i, j]$ ) vérifient les Relations suivantes (\*):

(R<sub>1</sub>):

$$\begin{aligned} [1,1] &\in \mathbb{B}, \text{ quelconque,} \\ [1,2] &\in \mathbb{B}, \text{ quelconque,} \\ \dots & \\ [1,i] &\in \mathbb{B}, \text{ quelconque,} \\ \dots & \\ [1,n-1] &\in \mathbb{B}, \text{ quelconque,} \\ [1,n] &\in \mathbb{B}, \text{ quelconque.} \end{aligned}$$

(R<sub>2</sub>):

$$\begin{aligned} [2,2] &= [1,1] + [1,3] \\ [2,3] &= [1,2] + [1,4] \\ \dots & \\ [2,i] &= [1,i-1] + [1,i+1] \\ \dots & \\ [2,n-2] &= [1,n-3] + [1,n-1] \\ [2,n-1] &= [1,n-2] + [1,n] \end{aligned}$$

---

(\*) Note : Les paramètres d'une matrice bisymétrique font l'objet de la Définition 1-22 du Chapitre 1

Nous supposons  $n > 6$  (les cas  $n = 1$  à  $6$  ayant déjà été traités), de manière qu'il existe des paramètres de niveau 1 à 3 au moins.



(R<sub>3</sub>):

$$\begin{aligned} [3,2] &= [1,1] + [1,3] + [1,5] \\ [3,3] &= [1,2] + [1,4] + [1,6] \\ \dots \\ [3,i] &= [1,i-2] + [1,i] + [1,i+2] \\ \dots \\ [3,n-3] &= [1,n-5] + [1,n-3] + [1,n-1] \\ [3,n-2] &= [1,n-4] + [1,n-2] + [1,n] \end{aligned}$$

...

(R<sub>k</sub>):

( $1 \leq k \leq \nu$ , si  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), et  $1 \leq k \leq \nu + 1$ , si  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ )).

$$\begin{aligned} [k, k] &= [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1,2k-3] + [1,2k-1] \\ [k, k+1] &= [1,2] + [1,4] + [1,6] + \dots + [1,2k-2] + [1,2k] \\ [k, k+2] &= [1,3] + [1,5] + [1,7] + \dots + [1,2k-1] + [1,2k+1] \\ \dots \\ [k, k+h] &= [1,1+h] + [1,3+h] + [1,5+h] + \dots + [1,2k-3+h] + [1,2k-1+h] \quad (*) \\ (0 \leq h \leq n-2k+1) \\ \dots \\ [k, n-k] &= [1, n-2k+1] + [1, n-2k+3] + [1, n-2k+5] + \dots + [1, n-3] + [1, n-1] \\ [k, n-k+1] &= [1, n-2k+2] + [1, n-2k+4] + [1, n-2k+6] + \dots + [1, n-2] + [1, n] \end{aligned}$$

(\*) soit aussi, en effectuant le changement d'indices :  $i = k+h$  ( $k \leq i \leq n-k+1$ ) :

$$[k, i] = [1, i-k+1] + [1, i-k+3] + [1, i-k+5] + \dots + [1, i+k-3] + [1, i+k-1].$$

Précisons la forme des Relations (R<sub>k</sub>) obtenues pour  $k = \nu$ , si  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), et pour  $k = \nu + 1$ , si  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ).

- pour  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) :

(R<sub>ν</sub>):  $h$  ne peut prendre que les valeurs 0 et 1.

$$\begin{aligned} [\nu, \nu] &= [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1, n-3] + [1, n-1] && (\nu \text{ termes}) \\ [\nu, \nu+1] &= [1,2] + [1,4] + [1,6] + \dots + [1, n-2] + [1, n] && (\nu \text{ termes}) \end{aligned}$$

- pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ) :

(R<sub>ν+1</sub>):  $h$  ne peut prendre que la seule valeur 0.

$$[\nu+1, \nu+1] = [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1, n-2] + [1, n] \quad (\nu+1 \text{ termes})$$

La matrice générale de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  a donc la structure suivante :

$$\begin{bmatrix} [1,1] & [1,2] & [1,3] & \dots & [1,n-2] & [1,n-1] & [1,n] \\ [1,2] & [1,1]+[1,3] & [1,2]+[1,4] & \dots & [1,n-3]+[1,n-1] & [1,n-2]+[1,n] & [1,n-1] \\ [1,3] & [1,2]+[1,4] & [1,1]+[1,3]+[1,5] & \dots & [1,n-4]+[1,n-2]+[1,n] & [1,n-3]+[1,n-1] & [1,n-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [1,n-2] & [1,n-3]+[1,n-1] & [1,n-4]+[1,n-2]+[1,n] & \dots & [1,1]+[1,3]+[1,5] & [1,2]+[1,4] & [1,3] \\ [1,n-1] & [1,n-2]+[1,n] & [1,n-3]+[1,n-1] & \dots & [1,2]+[1,4] & [1,1]+[1,3] & [1,2] \\ [1,n] & [1,n-1] & [1,n-2] & \dots & [1,3] & [1,2] & [1,1] \end{bmatrix}$$

*Remarque :*

Il est clair que les paramètres de cette matrice bisymétrique (cf. Notation et Définition 1-27) ne dépendent que des  $n$  paramètres constituant sa 1<sup>ère</sup> ligne :  $[1,1]$ ,  $[1,2]$ ,  $\dots$ ,  $[1,i]$ ,  $\dots$ ,  $[1,n-1]$ ,  $[1,n]$ .

Considérons maintenant les  $n$  matrices obtenues en posant :  $[1,j] = 0$  si  $j \neq i$  et  $[1,i] = 1$ . On constate que ces matrices ne sont autres que les matrices  $B_{ni}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) faisant l'objet de la Définition 2-1.

Moyennant l'introduction de ces matrices, la matrice générale de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  s'écrit sous la forme suivante :

$$[1,1] B_{n1} + [1,2] B_{n2} + \dots + [1,i] B_{ni} + \dots + [1,n-1] B_{n,n-1} + [1,n] B_{nn}$$

soit encore :  $\sum_{i=1}^n [1,i] B_{ni}$ .

Ceci prouve que le système  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est générateur de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Par ailleurs le système  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est libre (cf. Théorème 2.2)

En conclusion, le système  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , libre et générateur, est une base de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Nous dirons que  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , constitue la « base canonique » de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

On a donc :  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{ni})$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

$\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , de dimension  $n$ .

Nous allons maintenant démontrer que  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n)$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Nous nous intéresserons d'abord, en toute généralité, au produit d'une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  par  $N_n = B_{n2}$ .

Soit A une telle matrice, que nous écrivons sous la forme :

$$A = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_i \ \dots \ C_{n-1} \ C_n],$$

écriture dans laquelle les  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , désignent les colonnes de la matrice A.

Soit :

$$N_n = B_{n2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculons :

$$A \cdot N_n = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_i \ \dots \ C_{n-1} \ C_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc :

$$A \cdot N_n = [C_2 \ C_1 + C_3 \ \dots \ C_{i-1} + C_{i+1} \ \dots \ C_{n-2} + C_n \ C_{n-1}] \quad (1)$$

Considérons maintenant le cas où  $A$  est une matrice quelconque de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Reportons-nous à la Section 1.3.4.3. du Chapitre 1 - « Structure générale d'une matrice bisymétrique d'ordre  $n$  ».

$A$  se présente sous la forme générale suivante :

$$A = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_i & \dots & C_{n-1} & C_n \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} [1,1] & [1,2] & \cdot & [1,i] & \cdot & [1,n-1] & [1,n] \\ [1,2] & [2,2] & \cdot & [2,i] & \cdot & [2,n-1] & [1,n-1] \\ [1,3] & [2,3] & \cdot & [3,i] & \cdot & [2,n-2] & [1,n-2] \\ [1,4] & [2,4] & \cdot & [4,i] & \cdot & [2,n-3] & [1,n-3] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1,i] & [2,i] & \cdot & [i,i] & \cdot & [2,n-i+1] & [1,n-i+1] \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,i+1] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,i+2] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,i+3] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,n-i-2] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,n-i-1] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,n-i] & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1,n-i+1] & [2,n-i+1] & \cdot & [i,n-i+1] & \cdot & [2,i] & [1,i] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1,n-3] & [2,n-3] & \cdot & [4,n-i+1] & \cdot & [2,4] & [1,4] \\ [1,n-2] & [2,n-2] & \cdot & [3,n-i+1] & \cdot & [2,3] & [1,3] \\ [1,n-1] & [2,n-1] & \cdot & [2,n-i+1] & \cdot & [2,2] & [1,2] \\ [1,n] & [1,n-1] & \cdot & [1,n-i+1] & \cdot & [1,2] & [1,1] \end{array} \right. \end{matrix}$$

Examinons la structure de la matrice-produit  $A \cdot N_n$ .

Conformément à la relation (1) page 50, la multiplication à droite de  $A$  par  $N_n$  conduit à :

	<u>Col. 1</u>	<u>Col. 2</u>	...	<u>Col. i</u>	...	<u>Col. n-1</u>	<u>Col. n</u>
	$C_2$	$C_1 + C_3$	...	$C_{i-1} + C_{i+1}$	...	$C_{n-2} + C_n$	$C_{n-1}$
$A \cdot N_n =$	[1,2]	[1,1]+[1,3]	.	[1,i-1]+[1,i+1]	.	[1,n-2]+[1,n]	[1,n-1]
	[2,2]	[1,2]+[2,3]	.	[2,i-1]+[2,i+1]	.	[2,n-2]+[1,n-1]	[2,n-1]
	[2,3]	[1,3]+[3,3]	.	[3,i-1]+[3,i+1]	.	[3,n-2]+[1,n-2]	[2,n-2]
	[2,4]	[1,4]+[3,4]	.	[4,i-1]+[4,i+1]	.	[3,n-3]+[1,n-3]	[2,n-3]
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	[2,i]	[1,i]+[3,i]	.	[i-1,i-1]+[i-1,i+1]	.	[3,n-i+1]+[1,n-i+1]	[2,n-i+1]
	.	.	.	[i-1,i]+[i,i+1]	.	.	.
	.	.	.	[i-1,i+1]+[i+1,i+1]	.	.	.
	.	.	.	[i-1,i+2]+[i+1,i+2]	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	[i-1,n-i-1]+[i+1,n-i-1]	.	.	.
	.	.	.	[i-1,n-i]+[i+1,n-i]	.	.	.
	.	.	.	[i-1,n-i+1]+[i,n-i]	.	.	.
	[2,n-i+1]	[3,n-i+1]+[1,n-i+1]	.	[i-1,n-i+2]+[i-1,n-i]	.	[1,i]+[3,i]	[2,i]
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	[2,n-3]	[3,n-3]+[1,n-3]	.	[4,n-i+2]+[4,n-i]	.	[1,4]+[3,4]	[2,4]
	[2,n-2]	[3,n-2]+[1,n-2]	.	[3,n-i+2]+[3,n-i]	.	[1,3]+[3,3]	[2,3]
	[2,n-1]	[2,n-2]+[1,n-1]	.	[2,n-i+2]+[2,n-i]	.	[1,2]+[2,3]	[2,2]
	[1,n-1]	[1,n-2]+[1,n]	.	[1,n-i+2]+[1,n-i]	.	[1,1]+[1,3]	[1,2]

On voit donc qu'en règle générale, la matrice  $A \cdot N_n$  n'est pas bisymétrique.

Nous allons démontrer l'équivalence :  $A \cdot N_n$  bisymétrique  $\Leftrightarrow A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Démontrons d'abord l'implication :

$A \cdot N_n$  bisymétrique  $\Rightarrow A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , ou ce qui revient au même :

$A \cdot N_n$  bisymétrique  $\Rightarrow A$  satisfait aux Relations  $(R_1)$ ,  $(R_2)$ , ...,  $(R_k)$ , ..., jusqu'à la Relation  $(R_\nu)$  pour  $n$  pair, ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) ou jusqu'à la Relation  $(R_{\nu+1})$  pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ).

$(R_1)$ :

Les relations  $(R_1)$  n'appellent aucune vérification particulière : elles expriment simplement, comme il a été dit plus haut, que les  $n$  paramètres constituant la 1<sup>ère</sup> ligne :  $[1,1]$ ,  $[1,2]$ , ...,  $[1,i]$ , ...,  $[1,n-1]$ ,  $[1,n]$  de la matrice générale de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  peuvent être fixés de façon arbitraire.

(R<sub>2</sub>):

Rappelons ces relations :

$$[2,2] = [1,1] + [1,3]$$

$$[2,3] = [1,2] + [1,4]$$

...

$$[2,i] = [1,i-1] + [1,i+1]$$

...

$$[2,n-2] = [1,n-3] + [1,n-1]$$

$$[2,n-1] = [1,n-2] + [1,n]$$

Il s'agit de démontrer que :  $A \cdot N_n$  bisymétrique  $\Rightarrow$  (R<sub>2</sub>).

Remarquons que les  $(n-2)$  paramètres de niveau 2 de la matrice  $A$  se trouvent dans la colonne 1 de la matrice  $A \cdot N_n$ , entre les indices  $2 \leq i \leq n-1$ .

Pour que  $A \cdot N_n$  soit bisymétrique il faut que tous les éléments de sa 1<sup>ère</sup> colonne, entre les indices  $2 \leq i \leq n-1$ , soient égaux aux éléments correspondants de sa 1<sup>ère</sup> ligne, soit :

$$[2,i] = [1,i-1] + [1,i+1], \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

et la Relation (R<sub>2</sub>) est donc bien satisfaite.

Notons que (R<sub>2</sub>) entraîne bien la bisymétrie de l'ensemble du cadre de niveau 1 de  $A \cdot N_n$  (cf. Définition 1-26 du Chapitre 1).

(R<sub>3</sub>):

Rappelons ces relations :

$$[3,2] = [1,1] + [1,3] + [1,5]$$

$$[3,3] = [1,2] + [1,4] + [1,6]$$

...

$$[3,i] = [1,i-2] + [1,i] + [1,i+2]$$

...

$$[3,n-3] = [1,n-5] + [1,n-3] + [1,n-1]$$

$$[3,n-2] = [1,n-4] + [1,n-2] + [1,n]$$

Il s'agit de démontrer que :  $A \cdot N_n$  bisymétrique  $\Rightarrow$  (R<sub>3</sub>).

Remarquons que les  $(n-4)$  paramètres de niveau 3 de la matrice  $A$  se trouvent dans la colonne 2 de la matrice  $A \cdot N_n$ , entre les indices  $3 \leq i \leq n-2$ .

Pour que  $A \cdot N_n$  soit bisymétrique il faut que tous les éléments de sa 2<sup>ème</sup> colonne, entre les indices  $3 \leq i \leq n-2$ , soient égaux aux éléments correspondants de sa 2<sup>ème</sup> ligne, soit :

$$[1,i] + [3,i] = [2,i-1] + [2,i+1], \quad 3 \leq i \leq n-2, \text{ soit encore :}$$

$$[3,i] = [1,i] + [2,i-1] + [2,i+1], \quad 3 \leq i \leq n-2.$$

Or la Relation  $(R_2)$  entraîne que :

$$[2, i-1] = [1, i-2] + [1, i] \quad \text{et} \quad [2, i+1] = [1, i] + [1, i+2]$$

On en déduit :

$$[3, i] = [1, i-2] + [1, i] + [1, i+2], \quad 3 \leq i \leq n-2.$$

et la Relation  $(R_3)$  est donc bien satisfaite.

Notons que  $(R_3)$  entraîne bien la bisymétrie de l'ensemble du cadre de niveau 2 de  $A \cdot N_n$  (cf. Définition 1-26 du Chapitre 1).

...

$(R_k)$  :

( $1 \leq k \leq \nu$ , si  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), et  $1 \leq k \leq \nu + 1$ , si  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ )).

Rappelons ces relations :

$$[k, k] = [1, 1] + [1, 3] + [1, 5] + \dots + [1, 2k-3] + [1, 2k-1]$$

$$[k, k+1] = [1, 2] + [1, 4] + [1, 6] + \dots + [1, 2k-2] + [1, 2k]$$

$$[k, k+2] = [1, 3] + [1, 5] + [1, 7] + \dots + [1, 2k-1] + [1, 2k+1]$$

...

$$[k, k+h] = [1, 1+h] + [1, 3+h] + [1, 5+h] + \dots + [1, 2k-3+h] + [1, 2k-1+h] \quad (*)$$

( $0 \leq h \leq n-2k+1$ )

...

$$[k, n-k] = [1, n-2k+1] + [1, n-2k+3] + [1, n-2k+5] + \dots + [1, n-3] + [1, n-1]$$

$$[k, n-k+1] = [1, n-2k+2] + [1, n-2k+4] + [1, n-2k+6] + \dots + [1, n-2] + [1, n]$$

(\*) soit aussi, en effectuant le changement d'indices :  $i = k+h$  ( $k \leq i \leq n-k+1$ ) :

$$[k, i] = [1, i-k+1] + [1, i-k+3] + [1, i-k+5] + \dots + [1, i+k-3] + [1, i+k-1].$$

Nous allons démontrer  $(R_k)$  est donc satisfaite, par récurrence forte sur  $k$ .

Nous admettrons donc (hypothèse de récurrence) que :  $A \cdot N_n$  bisymétrique  $\Rightarrow$  toutes les Relations  $(R_k)$  sont vraies jusqu'au rang  $k$ .

Nous établirons qu'il en est alors de même pour  $(R_{k+1})$ . (On supposera aussi  $k < E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ,

faut de quoi  $(R_{k+1})$  n'existe pas).

Remarquons que les  $(n-2k)$  paramètres de niveau  $k+1$  de la matrice  $A$  se trouvent dans la colonne  $k$  de la matrice  $A \cdot N_n$ , entre les indices  $k+1 \leq h \leq n-k$ .

Pour que  $A \cdot N_n$  soit bisymétrique il faut que tous les éléments de sa  $k^{\text{ème}}$  colonne, entre les indices  $k+1 \leq h \leq n-k$  soient égaux aux éléments correspondants de sa  $k^{\text{ème}}$  ligne, soit :

$$\begin{aligned}
 [k-1, k+1] &+ [k+1, k+1] &= [k, k] &+ [k, k+2] \\
 [k-1, k+2] &+ [k+1, k+2] &= [k, k+1] &+ [k, k+3] \\
 [k-1, k+3] &+ [k+1, k+3] &= [k, k+2] &+ [k, k+4] \\
 \dots & & & \\
 [k-1, k+h] &+ [k+1, k+h] &= [k, k+h-1] &+ [k, k+h+1] \quad (*) \\
 \dots & & & \\
 [k-1, n-k-2] &+ [k+1, n-k-2] &= [k, n-k-3] &+ [k, n-k-1] \\
 [k-1, n-k-1] &+ [k+1, n-k-1] &= [k, n-k-2] &+ [k, n-k] \\
 [k-1, n-k] &+ [k+1, n-k] &= [k, n-k-1] &+ [k, n-k+1]
 \end{aligned}$$

(\*) avec :  $1 \leq h \leq n-2k$ .

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
 [k+1, k+h] &= [k-1, k+h] + [k, k+h-1] + [k, k+h+1] \quad (1) \\
 \text{avec : } &1 \leq h \leq n-2k.
 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les Relations  $(R_k)$  et  $(R_{k-1})$  sont satisfaites. Donc :

$$\begin{aligned}
 [k-1, k+h] &= [1, 2+h] + [1, 4+h] + [1, 6+h] + \dots + [1, 2k-4+h] + [1, 2k-2+h] \\
 [k, k+h-1] &= [1, h] + [1, 2+h] + [1, 4+h] + \dots + [1, 2k-4+h] + [1, 2k-2+h] \\
 [k, k+h+1] &= [1, 2+h] + [1, 4+h] + [1, 6+h] + \dots + [1, 2k-2+h] + [1, 2k+h]
 \end{aligned}$$

En reportant ces trois égalités dans l'expression (1) ci-dessus, il vient après simplification :

$$\begin{aligned}
 [k+1, k+h] &= [1, h] + [1, 2+h] + [1, 4+h] + \dots + [1, 2k+h-2] + [1, 2k+h], \\
 \text{avec : } &1 \leq h \leq n-2k.
 \end{aligned}$$

La Relation  $(R_{k+1})$  est donc bien satisfaite.

Nous allons vérifier que la Relation  $(R_\nu)$  est satisfaite lorsque  $k$  atteint sa valeur limite supérieure  $k = \nu$ , pour  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), puis que la Relation  $(R_{\nu+1})$  est satisfaite lorsque  $k$  atteint sa valeur limite supérieure  $k = \nu+1$ , pour  $n$  impair ( $n = 2\nu+1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ).

$(R_\nu)$   $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) :

Rappelons les 2 relations correspondantes à vérifier :

$$[\nu, \nu] = [1, 1] + [1, 3] + [1, 5] + \dots + [1, n-3] + [1, n-1] \quad (2)$$

$$[\nu, \nu+1] = [1, 2] + [1, 4] + [1, 6] + \dots + [1, n-2] + [1, n] \quad (3)$$

Nous admettons, par hypothèse de récurrence, que les Relations  $(R_{\nu-1})$  et  $(R_{\nu-2})$  sont bien vérifiées. Celles qui nous intéressent sont les suivantes :

$$[\nu-1, \nu-1] = [1, 1] + [1, 3] + [1, 5] + \dots + [1, n-5] + [1, n-3] \quad (4)$$

$$[\nu-1, \nu] = [1, 2] + [1, 4] + [1, 6] + \dots + [1, n-4] + [1, n-2] \quad (5)$$

$$[\nu-1, \nu+1] = [1, 3] + [1, 5] + [1, 7] + \dots + [1, n-3] + [1, n-1] \quad (6)$$

$$[\nu-1, \nu+2] = [1, 4] + [1, 6] + [1, 8] + \dots + [1, n-5] + [1, n] \quad (7)$$



$$[\nu-2, \nu] = [1,3] + [1,5] + [1,7] + \dots + [1, n-5] + [1, n-3] \quad (8)$$

$$[\nu-2, \nu+1] = [1,4] + [1,6] + [1,8] + \dots + [1, n-4] + [1, n-2] \quad (9)$$

L'expression (1) prend, quant à elle, les 2 formes suivantes :

$$[\nu, \nu] = [\nu-2, \nu] + [\nu-1, \nu-1] + [\nu-1, \nu-1] \quad (10)$$

$$[\nu, \nu+1] = [\nu-2, \nu+1] + [\nu-1, \nu] + [\nu-1, \nu+2] \quad (11)$$

En reportant les égalités (4), (6) et (8) dans (10), on obtient immédiatement l'égalité (2).

En reportant les égalités (3), (7) et (9) dans (11), on obtient immédiatement l'égalité (3).

La Relation  $(R_\nu)$  est donc bien satisfaite.

$(R_{\nu+1})$   $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ) :

Rappelons l'unique relation correspondante à vérifier :

$$[\nu+1, \nu+1] = [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1, n-2] + [1, n] \quad (12)$$

Nous admettrons, par hypothèse de récurrence, que les Relations  $(R_\nu)$  et  $(R_{\nu-1})$  sont bien vérifiées. Celles qui nous intéressent sont les suivantes :

$$[\nu, \nu] = [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1, n-4] + [1, n-2] \quad (13)$$

$$[\nu, \nu+2] = [1,3] + [1,5] + [1,7] + \dots + [1, n-2] + [1, n] \quad (14)$$

$$[\nu-1, \nu+1] = [1,3] + [1,5] + [1,7] + \dots + [1, n-4] + [1, n-2] \quad (15)$$

L'expression (1) prend, quant à elle, la forme suivante :

$$[\nu+1, \nu+1] = [\nu-1, \nu+1] + [\nu, \nu] + [\nu, \nu+2] \quad (16)$$

En reportant les égalités (13), (14) et (15) dans (16), on obtient immédiatement l'égalité (12).

La Relation  $(R_{\nu+1})$  est donc bien satisfaite.

Reste maintenant à démontrer l'implication inverse :  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A \cdot N_n$  bisymétrique, ou ce qui revient au même, la proposition suivante :

Si  $A$  vérifie les Relations  $(R_1), (R_2), \dots, (R_k), \dots$  jusqu'à la Relation  $(R_\nu)$  pour  $n$  pair, ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ) ou jusqu'à la Relation  $(R_{\nu+1})$  pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ), alors la matrice  $A \cdot N_n$  est bisymétrique.

Par hypothèse donc, les paramètres de  $A$  vérifient les Relations  $(R_k)$  (telle que définie plus haut) pour toute valeur de  $k$  telle que les paramètres ci-dessous existent (c. à d. :  $1 \leq k \leq \nu$ , pour  $n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ) et  $1 \leq k \leq \nu + 1$ , pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ )).

$$[k, k+h] = [1, 1+h] + [1, 3+h] + [1, 5+h] + \dots + [1, 2k-1+h] \quad (0 \leq h \leq n-2k+1)$$

ou encore :

$$[k, k+h] = \sum_{i=1}^k [2i-1+h]$$

$$(0 \leq h \leq n-2k+1)$$

Il s'agit de démontrer que cette propriété entraîne la bisymétrie de la matrice  $A \in \mathbb{N}_n$ , et donc de démontrer l'égalité (17) qui suit, pour toute valeur de  $k$  telle que les paramètres ci-dessous existent (c. à d. plus précisément :  $2 \leq k \leq \nu-1$ , pour  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) et  $2 \leq k \leq \nu$ , pour  $n$  impair ( $n = 2\nu+1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ )) :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = [k, k+h-1] + [k, k+h+1] \quad (17)$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

$k$  étant fixé dans le domaine de validité défini ci-dessus, nous allons calculer :

$$[k-1, k+h] = [k-1, (k-1) + (h+1)]$$

$$(0 \leq h+1 \leq n-2(k-1)+1)$$

soit :

$$[k-1, k+h] = \sum_{i=1}^{k-1} [1, 2i-1+h+1] = \sum_{i=1}^{k-1} [1, 2i+h]$$

$$(-1 \leq h \leq n-2k+2)$$

Par ailleurs :

$$[k+1, k+h] = [k+1, (k+1) + (h-1)]$$

$$(0 \leq h-1 \leq n-2(k+1)+1)$$

soit :

$$[k+1, k+h] = \sum_{i=1}^{k+1} [1, 2i-1+h-1] = \sum_{i=1}^{k+1} [1, 2i-2+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

On a donc :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = \sum_{i=1}^{k-1} [1, 2i+h] + \sum_{i=1}^{k+1} [1, 2i-2+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

En posant :  $j = i-1$  dans le 2<sup>ème</sup> terme  $\sum$  :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = \sum_{i=1}^{k-1} [1, 2i+h] + \sum_{j=0}^k [1, 2j+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

Et, après simplification :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = [1, h] + [1, 2k+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

Calculons de même :

$$[k, k+h-1]$$

$$(0 \leq h-1 \leq n-2k+1)$$

soit :

$$[k, k+h-1] = \sum_{i=1}^k [1, 2i-1+h-1] = \sum_{i=1}^k [1, 2i-2+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k+2)$$

Calculons par ailleurs :

$$[k, k+h+1]$$

$$(0 \leq h+1 \leq n-2k+1)$$

soit :

$$[k, k+h+1] = \sum_{i=1}^k [1, 2i-1+h+1] = \sum_{i=1}^k [1, 2i+h]$$

$$(-1 \leq h \leq n-2k)$$

On a donc :

$$[k, k+h-1] + [k, k+h+1] = \sum_{i=1}^k [1, 2i-2+h] + \sum_{i=1}^k [1, 2i+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

En posant :  $j = i-1$  dans le 1<sup>er</sup> signe  $\sum$  :

$$[k, k+h-1] + [k, k+h+1] = \sum_{j=0}^{k-1} [1, 2j+h] + \sum_{i=1}^k [1, 2i+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

Et, après simplification :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = [1, h] + [1, 2k+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

Finalement, on aboutit bien, dans tout le domaine de validité de  $k$ , à l'égalité :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = [k, k+h-1] + [k, k+h+1]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

En conclusion, l'implication réciproque est bien vérifiée :

$$A \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A \cdot N_n \text{ bisymétrique}$$

Nous avons donc établi l'équivalence :

$$A \cdot N_n \text{ bisymétrique} \Leftrightarrow A \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$$

(ou :  $N_n \cdot A$  bisymétrique, ou :  $A \cdot N_n$  commutatif)

Et donc, en conclusion :  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n)$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Il convient maintenant de montrer que le produit de 2 matrices quelconques  $A$  et  $A'$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est commutatif.

Commençons par montrer que tel est bien le cas lorsqu'on choisit 2 matrices de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , autrement dit que :  $B_{ni} \cdot B_{nj} = B_{nj} \cdot B_{ni}$ , pour :  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ .

Pour  $i = 2$ , on a :  $B_{n2} = N_n$ . Comme  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est le commutant de la matrice  $N_n$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , nous sommes assurés que :  $B_{n2} \cdot B_{nj} = B_{nj} \cdot B_{n2}$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Montrons maintenant que  $B_{ni} \cdot B_{nj}$  ( $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ )  $\in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Ce dernier point n'est pas acquis puisque le produit de 2 matrices bisymétriques n'est pas nécessairement bisymétrique.

Pour ce faire, nous allons démontrer que le produit de la matrice  $(B_{ni} \cdot B_{nj})$  et de la matrice  $B_{n2} = N_n$  est commutatif.

$$(B_{ni} \cdot B_{nj}) \cdot B_{n2} = B_{ni} \cdot (B_{nj} \cdot B_{n2})$$

Or  $B_{nj} \cdot B_{n2}$  est commutatif, donc :

$$(B_{ni} \cdot B_{nj}) \cdot B_{n2} = B_{ni} \cdot (B_{nj} \cdot B_{n2}) = B_{ni} \cdot (B_{n2} \cdot B_{nj}) = (B_{ni} \cdot B_{n2}) \cdot B_{nj}$$

$B_{ni} \cdot B_{n2}$  est commutatif, donc :

$$(B_{ni} \cdot B_{n2}) \cdot B_{nj} = (B_{n2} \cdot B_{ni}) \cdot B_{nj} = (B_{n2} \cdot (B_{ni} \cdot B_{nj}))$$

Donc le produit de la matrice  $(B_{ni} \cdot B_{nj})$  et de la matrice  $B_{n2} = N_n$  est bien commutatif.

Comme  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n)$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , on en conclut que :

$$B_{ni} \cdot B_{nj} \quad (1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n) \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}).$$

De ce fait la matrice produit  $B_{ni} \cdot B_{nj}$  est bisymétrique.

Or, si le produit  $B_{ni} \cdot B_{nj}$  est bisymétrique, alors c'est qu'il est commutatif. Donc  $B_{ni} \cdot B_{nj}$  est commutatif.

Redémontrons ce dernier point :

$B_{ni} \cdot B_{nj}$  étant bisymétrique,  $B_{ni} \cdot B_{nj}$  est symétrique. Donc :

$$B_{ni} \cdot B_{nj} = {}^t(B_{ni} \cdot B_{nj}) = {}^t B_{nj} \cdot {}^t B_{ni} = B_{nj} \cdot B_{ni}$$

La commutativité du produit  $B_{ni} \cdot B_{nj}$  est donc bien établie.

Les matrices de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont donc bien commutantes.

Bien entendu, ceci suffit à établir la commutativité du produit de 2 matrices quelconques de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , autrement dit :

$$\forall A \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}), \forall A' \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) : A \cdot A' = A' \cdot A.$$

En effet, comme :  $A = \sum_{i=1}^n a_i B_{ni}$  et comme :  $A' = \sum_{j=1}^n a'_j B_{nj}$ , le produit :

$$A \cdot A' = \left( \sum_{i=1}^n a_i B_{ni} \right) \left( \sum_{j=1}^n a'_j B_{nj} \right) \text{ est commutatif,}$$

puisque tous les produits  $B_{ni} \cdot B_{nj}$  ( $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ ) le sont.

En conclusion :

$\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$ , est un sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  et de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , de dimension  $n$ , constitué de matrices bisymétriques commutantes.

De plus,  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  est une sous-algèbre commutative de l'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , la 2<sup>ème</sup> loi interne étant la multiplication matricielle.

*Remarque :*

Comme dans les cas particuliers  $n = 3$  à  $6$  étudiés précédemment, on aurait pu former le produit  $N_n \cdot A$  (au lieu de  $A \cdot N_n$ ) et rechercher à quelles conditions ce produit est bisymétrique.

De même, on aurait pu chercher à déterminer les conditions dans lesquelles le produit  $A \cdot N_n$  est commutatif.

Dans les deux cas, on aurait conclu de la même façon que  $A$  doit alors satisfaire aux relations  $(R_1), (R_2), \dots, (R_k), \dots$  jusqu'à la Relation  $(R_\nu)$  pour  $n$  pair, ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ) ou jusqu'à la Relation  $(R_{\nu+1})$  pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ).

La proposition qui suit résume l'ensemble des résultats obtenus.

**Définition et Théorème 2-5 – 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> Définitions de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  – 2<sup>ème</sup> Définition des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .**

**1<sup>ère</sup> Définition de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  :** L'ensemble  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est constitué de l'ensemble des matrices bisymétriques d'ordre  $n$  dont les paramètres sont définis par les Relations  $(R_k)$  ci-dessous,  $1 \leq k \leq \nu$ , si  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), et  $1 \leq k \leq \nu + 1$ , si  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ).

$(R_k)$  :

$$[k, k] = [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1,2k-1]$$

$$[k, k+1] = [1,2] + [1,4] + [1,6] + \dots + [1,2k]$$

$$[k, k+2] = [1,3] + [1,5] + [1,7] + \dots + [1,2k+1]$$

.....

$$[k, k+h] = [1,1+h] + [1,3+h] + [1,5+h] + \dots + [1,2k-1+h] \quad (*)$$

$(0 \leq h \leq n-2k+1)$

.....

$$[k, n-k] = [1, n-2k+1] + [1, n-2k+3] + [1, n-2k+5] + \dots + [1, n-1]$$

$$[k, n-k+1] = [1, n-2k+2] + [1, n-2k+4] + [1, n-2k+6] + \dots + [1, n]$$

(\*) soit aussi, en effectuant le changement d'indices :  $i = k+h$  ( $k \leq i \leq n-k+1$ ) :

$$[k, i] = [1, i-k+1] + [1, i-k+3] + [1, i-k+5] + \dots + [1, i+k-1].$$

Note : Pour  $k=1$ ,  $(R_1)$  n'implique aucune contrainte : les paramètres  $[1,1], [1,2], \dots, [1, n-1], [1, n]$  sont arbitraires dans  $\mathbb{B}$ .

L'ensemble des Relations  $(R_k)$  constitue un condition nécessaire et suffisante assurant que  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est le commutant de la matrice  $N_n$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , et donc :

**2<sup>ème</sup> Définition de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  :**  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n)$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

**2<sup>ème</sup> Définition des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$  :**  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est l'ensemble des  $n$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont les paramètres de la 1<sup>ère</sup> ligne sont de la forme :

$$[1, j] = 0, \quad 1 \leq j \leq n \text{ et } j \neq i, \text{ et } [1, i] = 1.$$

**3<sup>ème</sup> Définition de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  :**  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{ni})$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Le système  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , constitue la « base canonique » de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

$\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  (et donc de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ ) de dimension  $n$ , commutatif pour la multiplication matricielle.

$\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est également une sous-algèbre commutative de l'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , la 2<sup>ème</sup> loi interne étant la multiplication matricielle.

*Remarque 1 :*

La Définition et le Théorème 2-5 renferment trois définitions équivalentes de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Nous donnerons dans le Chapitre 3 trois nouvelles définitions de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

La Définition et le Théorème 2-5 incluent également une 2<sup>ème</sup> définition des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , équivalente à la 1<sup>ère</sup> définition (Définition 2-1). La différence essentielle entre ces deux définitions tient au fait que la 2<sup>ème</sup> définition nécessite d'avoir défini au préalable l'ensemble  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , ce que la 1<sup>ère</sup> définition n'exige pas : les matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , y ont été définies sans aucun préalable.

*Remarque 2 :*

La Définition et le Théorème 2-5 énoncent l'existence d'au moins un sous-espace vectoriel commutatif de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de dimension  $n$ . Il ne garantit pas son unicité et ce point est d'ailleurs faux (cf. Chapitre Conclusion de la présente étude).

*Remarque 3 :*

Pour construire  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , nous avons étudié la commutativité d'une matrice  $A$  quelconque de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  avec la matrice de référence  $B_{n2} = N_n$ . Était-il possible d'utiliser comme matrice de référence n'importe quelle matrice  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , pour parvenir au même résultat ? Autrement dit, se pourrait-il que :  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(B_{ni})$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ ,  $\forall i, 1 < i < n$ .

La réponse est clairement négative. En effet, à titre d'exemples :

Pour  $B_{n1} = I_n$ ,  $\text{Com}(B_{n1})$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) = \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ . Et donc :  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \neq \text{Com}(B_{n1})$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Pour  $B_{nn} = J_n$ ,  $\text{Com}(B_{nn})$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) = \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ . Et donc :  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \neq \text{Com}(B_{nn})$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Mais, outre ces cas particuliers correspondant à  $i=1$  et à  $i=n$ , montrons que d'autres matrices  $B_{ni}$ ,  $1 < i < n$ , ne conviennent pas. Fournissons un exemple relatif à  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$ .

Choisissons  $B_{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  comme matrice de référence (en lieu et place de  $B_{52}$ ).

Soit  $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & f & g & h & d \\ c & g & i & g & c \\ d & h & g & f & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}$ ,  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{B}^9$  une matrice donnée de  $\mathcal{BS}_5(\mathbb{B})$ .

Tous calculs faits :

$$A \cdot B_{53} = \begin{bmatrix} c & b+d & a+c+e & b+d & c \\ g & f+h & b+g+d & f+h & g \\ i & 0 & i & 0 & i \\ g & f+h & b+g+d & f+h & g \\ c & b+d & a+c+e & b+d & c \end{bmatrix}$$

$A \cdot B_{53}$  est bisymétrique si et seulement si les conditions (C) sont réalisées :

$$(C) \quad g = b+d \text{ et } i = a+c+e.$$

Si l'on adopte  $B_{53}$  comme matrice de référence, il n'existe donc, dans ce cas, aucune contrainte sur les valeurs de  $f$  et  $h$ .

La forme générale des matrices  $A$  commutant avec  $B_{53}$  est donc la suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & f & b+d & h & d \\ c & b+d & a+c+e & b+d & c \\ d & h & b+d & f & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, (a, b, c, d, e, f, h) \in \mathbb{B}^7$$

Le commutant de  $B_{53}$  dans  $\mathcal{BS}_5(\mathbb{B})$  est donc un sev de  $\mathcal{BS}_5(\mathbb{B})$  de dimension 7, dont  $\mathcal{BSE}_5(\mathbb{B})$  est lui-même un sev de dimension 5.

En conséquence, si les conditions (C) ci-dessus sont remplies, le produit  $A \cdot B_{53}$  sera bien commutatif, mais le produit  $A \cdot B_{52}$  ne le sera pas, en règle générale, puisque les conditions supplémentaires  $f = a+c$  et  $h = c+e$  (cf. cas  $n=5$  étudié plus haut) ne seront pas nécessairement remplies.

Autrement dit, la matrice de référence  $B_{53}$  ne permet pas de « construire »  $\mathcal{BSE}_5(\mathbb{B})$ .

*Remarque 4 :*

Les sous-matrices centrales (smc) d'une matrice bisymétrique sont bisymétriques. Par contre, les sous-matrices centrales (smc) d'une matrice de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  n'appartiennent pas en règle générale à  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , comme on le vérifie aisément.

\*  
\* \*



**Théorème 2-6.** Soient  $A \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  et  $P$  un polynôme quelconque de  $\mathbb{B}[X]$ .

Alors :  $P(A) \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

*Preuve :*

Pour  $P = 0$ , polynôme nul :  $P(A) = O_n$  et  $O_n \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Pour  $P = 1$  (constante 1) :  $P(A) = A^0 = I_n$  et  $I_n \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Dans le cas général,  $P$  est un polynôme de degré  $p$  non nul.

Il est clair que :  $A \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A^2 \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}), \dots, A^p \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Comme toute combinaison linéaire de matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  appartient à  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ ,  $P(A)$  appartient à  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

**Théorème 2-7.**  $A \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ .

*Preuve :*

Nous savons (cf. Théorème 1-25 du Chapitre 1) que :

$$A \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}).$$

Soit  $A \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ .

Comme  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) \subseteq \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ ,  $A^{-1}$  existe et  $A^{-1} \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Montrons que :  $A^{-1} \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Nous utiliserons à nouveau l'équivalence :

$$A^{-1} \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) \Leftrightarrow A^{-1} \cdot N_n \text{ commutatif (ou : } A^{-1} \cdot B_{n_2} \text{ commutatif, puisque } N_n = B_{n_2}).$$

$$\text{Or : } A \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A \cdot B_{n_2} = B_{n_2} \cdot A$$

$$\text{Par ailleurs : } A^{-1} \text{ existe, donc : } A^{-1} \cdot A \cdot B_{n_2} = A^{-1} \cdot B_{n_2} \cdot A$$

$$\Rightarrow B_{n_2} = A^{-1} \cdot B_{n_2} \cdot A \Rightarrow B_{n_2} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B_{n_2} \cdot A \cdot A^{-1}$$

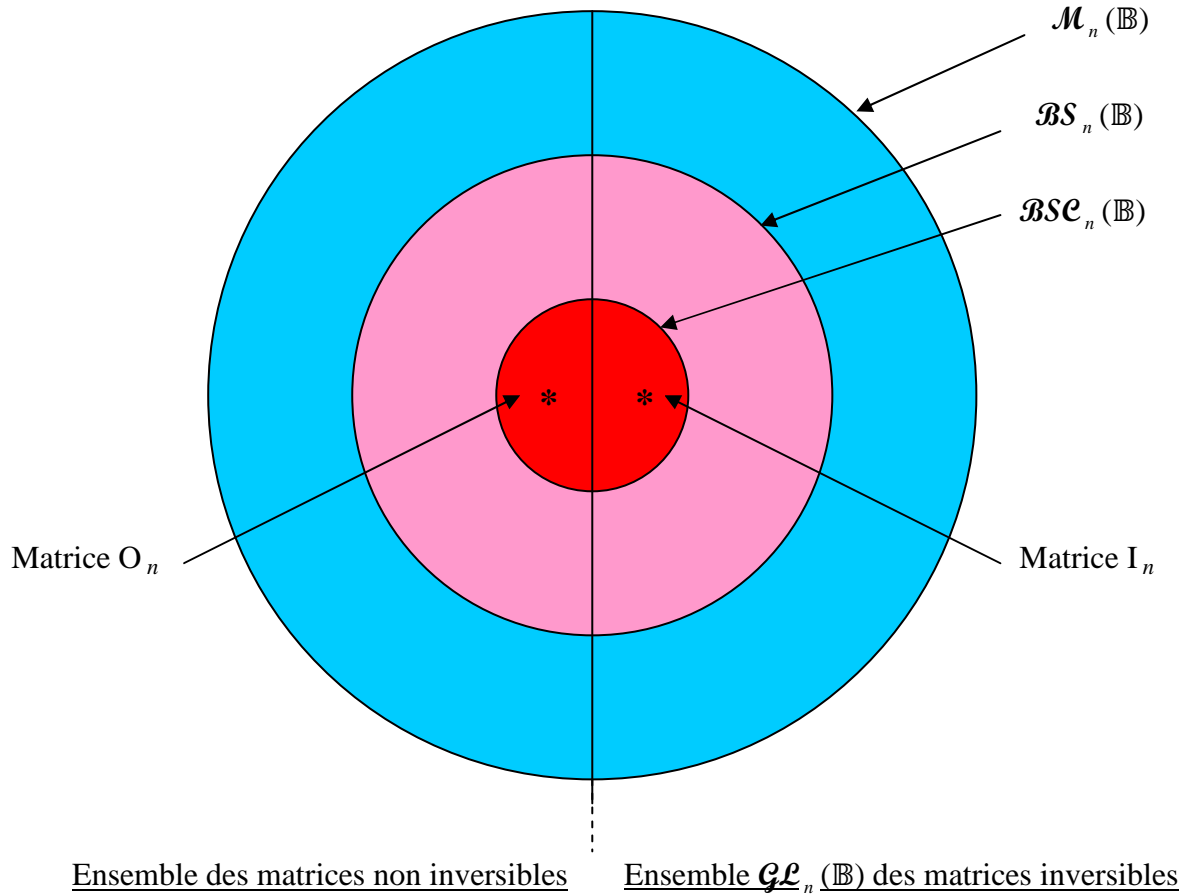
$$\Rightarrow B_{n_2} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B_{n_2}.$$

Donc le produit  $A^{-1} \cdot B_{n_2}$  est commutatif.

Par suite :  $A^{-1} \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  et donc :  $A^{-1} \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ .

\*  
\* \*

**2.4. Schéma représentant les inclusions :  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \subseteq \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{B})$**



Rappelons que :  $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{B})) = n^2$ ;  $\dim(\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})) = \left[ E\left(\frac{n+1}{2}\right) \right]^2$ ;  $\dim(\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})) = n$ .

NOTATION

Par souci d'allègement d'écriture, nous noterons fréquemment les matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , sous la forme simplifiée :  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Autrement dit, le 1<sup>er</sup> indice de  $B_{ni}$  correspondant à l'ordre  $n$ , sera alors sous-entendu.



## TABLE DES MATIÈRES

### PARTIE 2 : CHAPITRES 3 – 4

<b>CHAPITRE 3</b>	<b>69</b>
<b>SIGNATURE-COLONNE ET SIGNATURE-LIGNE D'UNE MATRICE DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> – ISOMORPHISMES ENTRE <math>\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})</math> ET <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> ET ENTRE <math>\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})</math> ET <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> – PRODUIT DE MATRICES DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> – DEFINITIONS NOUVELLES DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> – DEFINITION NOUVELLE DES MATRICES <math>B_{ni}, 1 \leq i \leq n</math></b>	<b>69</b>
<b>3.1. Signature-colonne et signature-ligne d'une matrice de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>69</b>
<b>3.2. Isomorphismes entre <math>\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})</math> et <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> et entre <math>\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})</math> et <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>69</b>
<b>3.3. Transformation d'un système affine associé à une matrice de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> en équation matricielle</b>	<b>73</b>
<b>3.4. Produit <math>B_i \cdot B_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n</math></b>	<b>74</b>
<b>3.5. Produit d'une matrice quelconque de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> par une matrice de la base canonique <math>B_i, 1 \leq i \leq n</math></b>	<b>80</b>
<b>3.6. Produit de 2 matrices quelconques de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>97</b>
<b>3.7. Nouvelle définition de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>98</b>
<b>3.8. Commutant de la matrice <math>N_n</math> dans <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{B})</math> – Nouvelle propriété caractéristique des matrices de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> – Nouvelles définitions de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>99</b>
<b>ANNEXE / CHAPITRE 3</b>	<b>111</b>
<b>POLYNÔMES <math>P_n(\lambda)</math> DE <math>\mathbb{R}[X]</math> – POLYNÔMES <math>\hat{P}_n(\lambda)</math> DE <math>\mathbb{B}[X]</math></b>	<b>111</b>

<b>CHAPITRE 4</b>	<b>127</b>
<b>DETERMINANT DES MATRICES <math>B_{ni}</math>, <math>1 \leq i \leq n</math>, DE LA BASE CANONIQUE DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>127</b>
<b>4.1. Introduction</b>	<b>127</b>
<b>4.2. Tableau donnant les déterminants des matrices <math>B_{ni}</math>, <math>1 \leq i \leq n</math>, <math>1 \leq n \leq 16</math>, de la base canonique de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>128</b>
<b>4.3. Théorème du déterminant des matrices <math>B_{ni}</math>, <math>1 \leq i \leq n</math>, de la base canonique de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>129</b>
<b>ANNEXE / CHAPITRE 4</b>	<b>165</b>
<b>DÉTERMINANT D'UNE MATRICE DE <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>165</b>

## CHAPITRE 3

**Signature-colonne et signature-ligne d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  – Isomorphismes entre  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  et entre  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  – Produit de matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  – Définitions nouvelles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  – Définition nouvelle des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$**

### 3.1. Signature-colonne et signature-ligne d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

**Définition 3-1.** Soit  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

On appelle signature-colonne de  $A$  la matrice-colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  dont les éléments sont ceux de la 1<sup>ère</sup> colonne de  $A$ . Nous la noterons :  $|A|$ .

On appelle signature-ligne de  $A$  la matrice-ligne de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$  dont les éléments sont ceux de la 1<sup>ère</sup> ligne de  $A$ . Nous la noterons :  $\overline{A}$ .

Les éléments de la signature-colonne et de la signature-ligne de  $A$  ont ainsi pour valeur les  $n$  paramètres de  $A$  :  $[1, i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

*Remarque :*

Il est clair que  $|A|$  ou  $\overline{A}$  détermine parfaitement la matrice  $A$ . En effet, la donnée de  $|A|$  ou  $\overline{A}$  détermine la connaissance des  $n$  paramètres  $[1, i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la matrice  $A$ . Or ceux-ci ne sont autres que les coordonnées de  $A$  dans la base canonique  $\{B_i\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

(Rappelons en effet que :  $A = \sum_{i=1}^n [1, i] B_{ni}$ ).

### 3.2. Isomorphismes entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ et entre $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

**Définition 3-2.**

Nous désignerons par  $\varphi$  l'isomorphisme entre  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  défini par :

$$|A| \xrightarrow{\varphi} A$$

Nous désignerons par  $\psi$  l'isomorphisme entre  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  défini par :

$$\overline{A} \xrightarrow{\psi} A$$

*Remarque 1 :*

Le schéma ci-dessous précise la nature de l'isomorphisme  $\varphi$ .

Soit  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Les  $n$  paramètres  $[1, i]$ ,  $1 \leq i \leq n$  de  $A$  sont ici notés :  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

$\varphi$  est l'application bijective suivante entre les ev  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  :

$$|A| = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi} A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

Schéma équivalent pour  $\psi$ , application bijective entre  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque 2 :*

L'isomorphisme  $\varphi$  permet de doter  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  d'une loi multiplicative interne, définie comme suit.

Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux matrices-colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ .

L'isomorphisme  $\varphi$  permet d'associer à  $C_1$  et à  $C_2$  deux matrices  $A_1$  et  $A_2$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  :

$$C_1 \xrightarrow{\varphi} A_1 \quad \text{et} \quad C_2 \xrightarrow{\varphi} A_2.$$

Nous dirons que le produit des deux matrices-colonnes  $C_1$  et  $C_2$ , noté  $C_1 \cdot C_2$ , est, par définition, la signature-colonne du produit  $A_1 \cdot A_2$ .

On a donc,  $\varphi$  étant bijectif :

$$A_1 \cdot A_2 \xrightarrow{\varphi^{-1}} C_1 \cdot C_2.$$

On pourra définir de la même façon le carré d'une matrice-colonne  $C$ , que l'on notera  $C^2$ , plus généralement la puissance  $k^{\text{ème}}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) d'une matrice-colonne  $C$ , que l'on notera  $C^k$ .

Si la matrice  $A$ , image de  $C$  par  $\varphi$ , est inversible, on pourra définir la matrice-colonne inverse de  $C$ , notée  $C^{-1}$ , et on pourra définir plus généralement  $C^k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ .

On a donc doté l'ensemble  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  d'une loi de multiplication interne.

L'isomorphisme  $\varphi$  entre les ev  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  devient alors un isomorphisme d'algèbres, faisant correspondre la multiplication interne à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  ainsi définie à la multiplication matricielle classique interne à  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

**Théorème 3-3.** Soient  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $B \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

On a les équivalences suivantes :

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad |A| = |B| \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} = \overline{B}$$

**Théorème 3-4.** Soient  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $B \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

$$|A+B| = |A| + |B| \quad \text{et} \quad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

*Preuve:*

Les Théorèmes 3-3 et 3-4 sont des conséquences directes des isomorphismes  $\varphi$  et  $\psi$  précédents.

**Théorème 3-5.** Soient  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $B \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

$$|A \cdot B| = A \cdot |B| = B \cdot |A| \quad \text{et} \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot B = \overline{B} \cdot A,$$

ou encore :

La signature-colonne du produit de 2 matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est égale au produit de l'une quelconque de ces matrices par la signature-colonne de l'autre (dans l'ordre requis).

La signature-ligne du produit de 2 matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est égale au produit de l'une quelconque de ces matrices par la signature-ligne de l'autre (dans l'ordre requis).

*Preuve:*

La matrice-colonne  $|A \cdot B|$  est la signature-colonne de la matrice-produit  $A \cdot B$ . Elle est donc égale à la 1<sup>ère</sup> colonne de  $A \cdot B$ .

La matrice-colonne  $A \cdot |B|$  est aussi égale à la 1<sup>ère</sup> colonne de la matrice-produit  $A \cdot B$ .

$$\text{Donc : } |A \cdot B| = A \cdot |B|.$$

Comme  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  et  $B \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , on a :  $A \cdot B = B \cdot A$ .

Donc :  $|A \cdot B| = |B \cdot A| = B \cdot |A|$  (conformément au résultat précédent).

Même raisonnement pour les signatures-lignes.

**Théorème 3-6.** Soient  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $B \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  telles que :  $A \cdot B = O_n$ , où la matrice  $O_n$  est la matrice nulle d'ordre  $n$ . On a :

$$A \cdot B = O_n \Leftrightarrow A \cdot |B| = |O_n| \Leftrightarrow B \cdot |A| = |O_n|$$

$$A \cdot B = O_n \Leftrightarrow \overline{A} \cdot B = \overline{O_n} \Leftrightarrow \overline{B} \cdot A = \overline{O_n}$$

*Preuve:*

Notons d'abord que :  $|O_n| = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ , matrice-colonne nulle de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ ,

et que :  $\overline{O_n} = [ \quad 0 \quad ]_n$ , matrice-ligne nulle de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ .

Ce théorème est une conséquence directe du Théorème 3-5 qui précède dans le cas particulier où  $A \cdot B = O_n$ .



**Théorème 3-7.** Soient  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $B \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

On a les implications suivantes :

$$A \cdot |B| = |O_n| \Rightarrow \overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$$

$$B \cdot |A| = |O_n| \Rightarrow \overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$$

$$\overline{A} \cdot B = \overline{O_n} \Rightarrow \overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$$

$$\overline{B} \cdot A = \overline{O_n} \Rightarrow \overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$$

*Preuve:*

Notons bien que :

$\overline{A} \cdot |B|$  est un scalaire de  $\mathbb{B}$  : il s'agit de l'élément d'indice (1, 1) de la matrice  $A \cdot B$ ,

$\overline{B} \cdot |A|$  est un scalaire de  $\mathbb{B}$  : il s'agit de l'élément d'indice (1, 1) de la matrice  $B \cdot A$ .

Comme  $A \cdot B = B \cdot A$ , on a :  $\overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A|$ .

D'après le Théorème 3-6 :  $A \cdot |B| = |O_n| \Rightarrow A \cdot B = O_n$

$$\overline{A} \cdot B = \overline{O_n} \Rightarrow A \cdot B = O_n.$$

Par suite, et dans les 2 cas, tous les éléments de  $A \cdot B$  sont nuls, en particulier l'élément d'indice (1, 1). Donc :

$$\overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0.$$

*Remarque :*

Il est clair que les implications énoncées dans le Théorème 3-7 sont « à sens unique ».

En effet, lorsque :  $\overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$ , seul l'élément d'indice (1, 1) de la matrice  $A \cdot B$  est nul. Ceci n'entraîne en rien la nullité du produit  $A \cdot B$ .

Considérons l'exemple suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \in \mathcal{BSC}_3(\mathbb{B}) \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{BSC}_3(\mathbb{B}).$$

$$\text{On a : } A \cdot B = B \neq O_n \quad \text{et} \quad |A \cdot B| = A \cdot |B| = B \cdot |A| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq |O_n|.$$

Donc :  $\overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$ , mais :  $A \cdot B = B \cdot A \neq O_n$ .

### 3.3. Transformation d'un système affine associé à une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ en équation matricielle

L'isomorphisme  $\varphi$  permet de transposer un système affine associé à une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  en équation matricielle et vice versa.

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ une matrice de } \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}).$$

Considérons le système affine (S) suivant de  $n$  équations à  $n$  inconnues  $x_1, \dots, x_n$ .

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Nous dirons que le système (S) est associé à la matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  et inversement que la matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est associée au système (S).

Le système (S) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(S) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Posons } [X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B}) \text{ et } [B] = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B}).$$

(S) s'écrit alors sous la forme : (S)  $A \cdot [X] = [B]$

Introduisons la matrice  $X$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  telle que :  $|X| = [X]$ .

Introduisons de même la matrice  $B$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  telle que :  $|B| = [B]$ .

L'isomorphisme  $\varphi$  permet d'affirmer qu'il revient au même de résoudre le système affine :

(S)  $A \cdot [X] = [B]$ , où l'inconnue est la matrice-colonne  $[X]$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ ,

ou l'équation matricielle (S') suivante :

(S')  $A \cdot X = B$ , où l'inconnue est la matrice  $X$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

### 3.4. Produit $B_i \cdot B_j$ , $1 \leq i \leq n$ , $1 \leq j \leq n$

#### 3.4.1. Aspects théoriques

Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3-8.** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

Soit  $U_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) la matrice-colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne  $i$ .

Soit  $V_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) la matrice-ligne de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$  dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne  $j$ .

Alors :  $A \cdot U_i$  est la matrice-colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  égale à la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A$ ,  
et :  $V_j \cdot A$  est la matrice-ligne de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$  égale à la  $j^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$ .

*Preuve:*

Raisonnons sur les colonnes. (Même raisonnement s'agissant des lignes).

Ecrivons  $A$  sous la forme :  $[C_1 \ \dots \ C_i \ \dots \ C_n]$ , où les  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , désignent les colonnes de la matrice  $A$ .

$$\text{Notons : } U_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } i. \text{ On a donc : } A \cdot U_i = [C_1 \ \dots \ C_i \ \dots \ C_n] \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = [C_i].$$

**Théorème 3-9.** Le produit de 2 matrices de la base canonique  $B_i \cdot B_j$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , est la matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont la signature-colonne (resp. signature-ligne) est :

- la  $i^{\text{ème}}$  colonne (resp.  $i^{\text{ème}}$  ligne) de la matrice  $B_j$

ou :

- la  $j^{\text{ème}}$  colonne (resp.  $j^{\text{ème}}$  ligne) de la matrice  $B_i$ ,

ces 2 colonnes (resp. lignes) étant égales.

*Preuve:*

Raisonnons sur les colonnes.

$$\text{Remarquons d'abord que : } |B_j| = U_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } j.$$

D'après le Lemme 3-8 précédent :

$$B_i \cdot |B_j| = B_i \cdot U_j = j^{\text{ème}} \text{ colonne de la matrice } B_i.$$

D'après le Théorème 3-5 :  $|B_i \cdot B_j| = B_i \cdot |B_j|$ , donc :

$$|B_i \cdot B_j| = j^{\text{ème}} \text{ colonne de la matrice } B_i.$$

Le Théorème 3-3 permet alors de conclure :

$B_i \cdot B_j =$  matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  de signature-colonne égale à la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B_i$ .

Comme  $B_i \cdot B_j = B_j \cdot B_i$ , on a parallèlement :

$B_j \cdot B_i =$  matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  de signature-colonne égale à la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $B_j$ .

En rapprochant les deux résultats, on en déduit que la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $B_j$  est égale à la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B_i$ .

Même raisonnement s'agissant des lignes.

### 3.4.2. Calcul pratique du produit $B_i \cdot B_j$ , $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ .

Le Théorème 3-9 permet de calculer très simplement le produit de 2 matrices  $B_i$  et  $B_j$  de la base canonique ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ).

#### 3.4.2.1. Représentation simplifiée des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Nous utiliserons à maintes reprises dans la suite de cette étude la représentation simplifiée suivante d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , dans laquelle :

- la matrice est représentée par un tableau de  $n \times n$  cases,
- les cases dont l'élément est égal à la valeur est 1 contiennent une croix : x,
- les cases dont l'élément est égal à la valeur est 0 sont laissées à blanc.

L'avantage de ce mode de représentation simplifiée est que la structure des matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est plus clairement perceptible.

*Exemples :*

Dans ce mode de représentation, on a à titre d'exemples :

$I_4 = B_1$	$N_4 = B_2$	$B_3$	$J_4 = B_4$																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>x</td></tr> </table>	x					x					x					x	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr> </table>		x			x		x			x		x			x		<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr> </table>			x			x		x	x		x			x			<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> </table>	x			x		x	x			x	x		x			x
x																																																																			
	x																																																																		
		x																																																																	
			x																																																																
	x																																																																		
x		x																																																																	
	x		x																																																																
		x																																																																	
		x																																																																	
	x		x																																																																
x		x																																																																	
	x																																																																		
x			x																																																																
	x	x																																																																	
	x	x																																																																	
x			x																																																																
$N_4 + I_4$	$B_2 + B_3$	$I_4 + J_4 = B_1 + B_4$	$B_1 + B_2 + B_3 + B_4$																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td></tr> </table>	x	x			x	x	x			x	x	x			x	x	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> </table>		x	x		x	x	x	x	x	x	x	x		x	x		<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> </table>	x			x		x	x			x	x	x	x			x	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> </table>	x	x	x	x	x			x	x			x	x	x	x	x
x	x																																																																		
x	x	x																																																																	
	x	x	x																																																																
		x	x																																																																
	x	x																																																																	
x	x	x	x																																																																
x	x	x	x																																																																
	x	x																																																																	
x			x																																																																
	x	x																																																																	
	x	x	x																																																																
x			x																																																																
x	x	x	x																																																																
x			x																																																																
x			x																																																																
x	x	x	x																																																																

Avec ce mode de représentation, la table de multiplication  $B_i \cdot B_j$ ,  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$  s'obtient par simple lecture de la façon suivante :

- on se positionne dans la ligne  $j$  de la matrice  $B_i$ ,
- on recherche dans cette ligne  $j$  les indices-colonnes des cases contenant une croix. Ces indices correspondent aux coordonnées non nulles dans la base canonique du produit  $B_i \cdot B_j$ . A titre d'exemple, si l'on veut calculer  $B_3 \cdot B_4$  (en supposant  $n \geq 6$ ), on trouvera une croix dans les colonnes 2, 4 et 6 de la ligne 4 de la matrice  $B_3$ , alors :  $B_3 \cdot B_4 = B_2 + B_4 + B_6$ .

D'après le Théorème 3-9, il est indifférent de regarder le contenu de la ligne  $j$  de la matrice  $B_i$  ou celui de la ligne  $i$  de la matrice  $B_j$  : le résultat est identique.

Nous allons retrouver, à titre d'application, les résultats correspondant aux tables de multiplication  $B_i \cdot B_j$ ,  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ , pour  $n = 1$  à 6, du Chapitre 2.

### 3.4.2.2. Tables de multiplication $B_i \cdot B_j$ , $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ , pour $n = 1$ à 6.

$n = 1$

$$B_1$$

$$B_1 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} = B_1$$

$n = 2$

$$B_1$$

$$B_1 \begin{array}{|c|c|} \hline x & \\ \hline & x \\ \hline \end{array} = B_1$$

$$B_2 \begin{array}{|c|c|} \hline & x \\ \hline x & \\ \hline \end{array} = B_2$$

$$B_2$$

$$B_1 \begin{array}{|c|c|} \hline & x \\ \hline x & \\ \hline \end{array} = B_2$$

$$B_2 \begin{array}{|c|c|} \hline x & \\ \hline & x \\ \hline \end{array} = B_1$$

$n = 3$

$$B_1$$

$$B_1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & & \\ \hline & x & \\ \hline & & x \\ \hline \end{array} = B_1$$

$$B_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x & \\ \hline x & & \\ \hline & & x \\ \hline \end{array} = B_2$$

$$B_3 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & x \\ \hline & x & \\ \hline x & & \\ \hline \end{array} = B_3$$

$$B_2$$

$$B_1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x & \\ \hline x & & x \\ \hline & x & \\ \hline \end{array} = B_2$$

$$B_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & & x \\ \hline & x & \\ \hline & x & \\ \hline \end{array} = B_1 + B_3$$

$$B_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x & \\ \hline & x & \\ \hline & x & \\ \hline \end{array} = B_2$$

$B_3$

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & & x \\
 \hline
 & x & \\
 \hline
 x & & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_3 \\
 = B_2 \\
 = B_1
 \end{array}$$

$n = 4$

$B_1$

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 x & & & \\
 \hline
 & x & & \\
 \hline
 & & x & \\
 \hline
 & & & x \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_1 \\
 = B_2 \\
 = B_3 \\
 = B_4
 \end{array}$$

$B_2$

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & x & & \\
 \hline
 x & & x & \\
 \hline
 & x & & x \\
 \hline
 & & x & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_2 \\
 = B_1 + B_3 \\
 = B_2 + B_4 \\
 = B_3
 \end{array}$$

$B_3$

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & x & \\
 \hline
 & x & & x \\
 \hline
 x & & x & \\
 \hline
 & x & & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_3 \\
 = B_2 + B_4 \\
 = B_1 + B_3 \\
 = B_2
 \end{array}$$

$B_4$

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & x \\
 \hline
 & & x & \\
 \hline
 & x & & \\
 \hline
 x & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_4 \\
 = B_3 \\
 = B_2 \\
 = B_1
 \end{array}$$

$n = 5$

$B_1$

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4 \\
 B_5
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 x & & & & \\
 \hline
 & x & & & \\
 \hline
 & & x & & \\
 \hline
 & & & x & \\
 \hline
 & & & & x \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_1 \\
 = B_2 \\
 = B_3 \\
 = B_4 \\
 = B_5
 \end{array}$$

**B<sub>2</sub>**

<b>B<sub>1</sub></b>		x				= <b>B<sub>1</sub></b>
<b>B<sub>2</sub></b>	x		x			= <b>B<sub>1</sub> + B<sub>3</sub></b>
<b>B<sub>3</sub></b>		x		x		= <b>B<sub>2</sub> + B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>4</sub></b>			x		x	= <b>B<sub>3</sub> + B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>5</sub></b>				x		= <b>B<sub>4</sub></b>

**B<sub>3</sub>**

<b>B<sub>1</sub></b>			x			= <b>B<sub>1</sub></b>
<b>B<sub>2</sub></b>		x		x		= <b>B<sub>2</sub> + B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>3</sub></b>	x		x		x	= <b>B<sub>1</sub> + B<sub>3</sub> + B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>4</sub></b>		x		x		= <b>B<sub>2</sub> + B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>5</sub></b>			x			= <b>B<sub>3</sub></b>

**B<sub>4</sub>**

<b>B<sub>1</sub></b>				x		= <b>B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>2</sub></b>			x		x	= <b>B<sub>3</sub> + B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>3</sub></b>		x		x		= <b>B<sub>2</sub> + B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>4</sub></b>	x		x			= <b>B<sub>1</sub> + B<sub>3</sub></b>
<b>B<sub>5</sub></b>		x				= <b>B<sub>2</sub></b>

**B<sub>5</sub>**

<b>B<sub>1</sub></b>					x	= <b>B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>2</sub></b>				x		= <b>B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>3</sub></b>			x			= <b>B<sub>3</sub></b>
<b>B<sub>4</sub></b>		x				= <b>B<sub>2</sub></b>
<b>B<sub>5</sub></b>	x					= <b>B<sub>1</sub></b>

 $n = 6$ **B<sub>1</sub>**

<b>B<sub>1</sub></b>	x						= <b>B<sub>1</sub></b>
<b>B<sub>2</sub></b>		x					= <b>B<sub>2</sub></b>
<b>B<sub>3</sub></b>			x				= <b>B<sub>3</sub></b>
<b>B<sub>4</sub></b>				x			= <b>B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>5</sub></b>					x		= <b>B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>6</sub></b>						x	= <b>B<sub>6</sub></b>

**B<sub>2</sub>**

<b>B<sub>1</sub></b>		x					= <b>B<sub>2</sub></b>
<b>B<sub>2</sub></b>	x		x				= <b>B<sub>1</sub> + B<sub>3</sub></b>
<b>B<sub>3</sub></b>		x		x			= <b>B<sub>2</sub> + B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>4</sub></b>			x		x		= <b>B<sub>3</sub> + B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>5</sub></b>				x		x	= <b>B<sub>4</sub> + B<sub>6</sub></b>
<b>B<sub>6</sub></b>					x		= <b>B<sub>5</sub></b>

**B<sub>3</sub>**

<b>B<sub>1</sub></b>			x				= <b>B<sub>3</sub></b>
<b>B<sub>2</sub></b>		x		x			= <b>B<sub>2</sub> + B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>3</sub></b>	x		x		x		= <b>B<sub>1</sub> + B<sub>3</sub> + B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>4</sub></b>		x		x		x	= <b>B<sub>2</sub> + B<sub>4</sub> + B<sub>6</sub></b>
<b>B<sub>5</sub></b>			x		x		= <b>B<sub>3</sub> + B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>6</sub></b>				x			= <b>B<sub>4</sub></b>

**B<sub>4</sub>**

<b>B<sub>1</sub></b>				x			= <b>B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>2</sub></b>			x		x		= <b>B<sub>3</sub> + B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>3</sub></b>		x		x		x	= <b>B<sub>2</sub> + B<sub>4</sub> + B<sub>6</sub></b>
<b>B<sub>4</sub></b>	x		x		x		= <b>B<sub>1</sub> + B<sub>3</sub> + B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>5</sub></b>		x		x			= <b>B<sub>2</sub> + B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>6</sub></b>			x				= <b>B<sub>3</sub></b>

**B<sub>5</sub>**

<b>B<sub>1</sub></b>					x		= <b>B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>2</sub></b>				x		x	= <b>B<sub>4</sub> + B<sub>6</sub></b>
<b>B<sub>3</sub></b>			x		x		= <b>B<sub>3</sub> + B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>4</sub></b>		x		x			= <b>B<sub>2</sub> + B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>5</sub></b>	x		x				= <b>B<sub>1</sub> + B<sub>3</sub></b>
<b>B<sub>6</sub></b>		x					= <b>B<sub>2</sub></b>

**B<sub>6</sub>**

<b>B<sub>1</sub></b>						x	= <b>B<sub>6</sub></b>
<b>B<sub>2</sub></b>					x		= <b>B<sub>5</sub></b>
<b>B<sub>3</sub></b>				x			= <b>B<sub>4</sub></b>
<b>B<sub>4</sub></b>			x				= <b>B<sub>3</sub></b>
<b>B<sub>5</sub></b>		x					= <b>B<sub>2</sub></b>
<b>B<sub>6</sub></b>	x						= <b>B<sub>1</sub></b>

Tous les résultats obtenus ci-dessus sont en parfaite conformité avec ceux du Chapitre 2.



### 3.4.3. Remarque concernant le produit $B_i \cdot B_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}^*$

Remarquons tout d'abord que, dans une matrice quelconque donnée  $B_i$  de la base canonique ( $1 \leq i \leq n$ ), tous les éléments non nuls d'une ligne donnée ont un indice colonne de même parité. Si  $i$  est impair, les éléments non nuls d'une ligne impaire (resp. paire) ont un indice colonne impair (resp. pair). Si  $i$  est pair, les éléments non nuls d'une ligne impaire (resp. paire) ont un indice colonne pair (resp. impair).

Désignons par  $B\text{-pair}$  une matrice de la base canonique  $\{B_i\}, 1 \leq i \leq n$ , d'indice  $i$  pair et par  $B\text{-impair}$  une matrice de la base canonique  $\{B_i\}, 1 \leq i \leq n$ , d'indice  $i$  impair.

On tire de la remarque précédente les règles suivantes.

$$\begin{aligned} B\text{-pair} \times B\text{-pair} &= \sum B\text{-impair} \\ B\text{-impair} \times B\text{-impair} &= \sum B\text{-impair} \\ B\text{-pair} \times B\text{-impair} &= \sum B\text{-pair} \\ B\text{-impair} \times B\text{-pair} &= \sum B\text{-pair}. \end{aligned}$$

## 3.5. Produit d'une matrice quelconque de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ par une matrice de la base canonique $B_i, 1 \leq i \leq n$

### 3.5.1 Théorème relatif au produit d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ par une matrice de la base canonique $B_i, 1 \leq i \leq n$ .

Les deux théorèmes qui suivent généralisent le Théorème 3-9 relatif au produit de 2 matrices de la base canonique  $B_i \cdot B_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ .

**Théorème 3-10.** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Le produit de la matrice  $A$  par la matrice  $B_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , est la matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont la signature-colonne est égale à la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  et dont la signature-ligne est égale à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$ .

*Preuve :*

Raisonnons sur les colonnes.

Considérons  $A \cdot |B_i|$ .

$|B_i|$  est une matrice-colonne dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne  $i$ . On peut donc appliquer le Lemme 3-8 et conclure que :

$$A \cdot |B_i| = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

Mais :  $A \cdot |B_i| = |A \cdot B_i|$  (cf. Théorème 3-5). Donc :  $|A \cdot B_i| = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A$ .

Même raisonnement concernant les lignes.

Le théorème suivant, tout aussi important, est une conséquence directe du Théorème 3.10.

**Théorème 3-11.** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

La  $i^{\text{ème}}$  colonne ( $1 \leq i \leq n$ ) de la matrice  $A$  est égale à  $B_i \cdot |A|$ .

La  $i^{\text{ème}}$  ligne ( $1 \leq i \leq n$ ) de la matrice  $A$  est égale à  $\overline{A} \cdot B_i$ .

*Preuve :*

Raisonnons à nouveau sur les colonnes. D'après le Théorème 3-10 :

$$|A \cdot B_i| = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

Mais l'on a aussi :  $|A \cdot B_i| = |B_i \cdot A| = B_i \cdot |A|$  (d'après le Théorème 3-5).

Même raisonnement concernant les lignes.

*Remarque :*

Le Théorème 3-11 permet de calculer très aisément chaque colonne et chaque ligne d'une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Si l'on désigne :

- par  $L_1$  et par  $L_i$  les matrices-lignes de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$  correspondant à la 1<sup>ère</sup> et à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$ ,
- et par  $C_1$  et par  $C_i$  les matrices-colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$  correspondant à la 1<sup>ère</sup> et à la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ ,

le Théorème 3-11 affirme que :

$$L_i = L_1 \cdot B_i \quad \text{et} \quad C_i = B_i \cdot C_1$$

La suite de cette Section 3.5. est consacrée à diverses applications du Théorème 3-11.

### 3.5.2. Applications diverses du Théorème 3-11

*Remarque :*

Pour la définition du déterminant d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , se référer à l'Annexe 1 du Chapitre 4.

*Notation :*

Nous serons amenés à noter  $\overline{x}$  l'élément de  $\mathbb{B}$  qui prend la valeur alternative de celle de  $x$ . Si  $x$  vaut 0,  $\overline{x}$  vaut 1, et inversement.

On a donc :  $\overline{0} = 1$  et  $\overline{1} = 0$ .

On vérifie aisément que :  $\overline{\overline{x}} = x + 1$ . Noter que :  $\overline{\overline{x + y}} = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$ .

Calcul d'une colonne d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  à partir de sa signature-colonne

Calcul d'une colonne d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  à partir de sa signature-ligne

Les exemples qui suivent sont basés sur les colonnes. On aurait tout aussi bien pu effectuer des calculs identiques sur des lignes.

$n = 3$

Soit :  $C_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ , la forme générale de la signature-colonne d'une matrice A de  $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$ .

On vérifie sans peine que :  $C_1 = B_1 \cdot C_1$  et que :  $C_3 = B_3 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ .

Calculons  $C_2$  :

$$C_2 = B_2 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

D'où la forme générale d'une matrice A de  $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$  :

$$A = [C_1 \quad C_2 \quad C_3] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 + a_3 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

$n = 4$

Soit :  $C_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$ , la forme générale de la signature-colonne d'une matrice A de  $\mathcal{BSC}_4(\mathbb{B})$ .

On vérifie sans peine que :  $C_1 = B_1 \cdot C_1$  et que :  $C_4 = B_4 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ .

Calculons  $C_2$  :

$$C_2 = B_2 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de  $C_3$  est immédiat sachant que :  $B_3 = J_3 \cdot B_2$ .

$$C_3 = B_3 \cdot C_1 = J_3 \cdot B_2 \cdot C_1 = J_3 \cdot C_2 = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

D'où la forme générale d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$  :

$$A = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 + a_3 & a_2 + a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

$n = 5$

Soit :  $C_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}$ , la forme générale de la signature-colonne d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$ .

On vérifie sans peine que :  $C_1 = B_1 \cdot C_1$  et que :  $C_5 = B_5 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ .

$$C_2 = B_2 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_3 + a_5 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

$$C_3 = B_3 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_1 + a_3 + a_5 \\ a_2 + a_4 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

$$C_4 = B_4 \cdot C_1 = J_4 \cdot B_2 \cdot C_1 = J_4 \cdot C_2 = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 + a_5 \\ a_2 + a_4 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

D'où la forme générale d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  :

$$A = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_1 + a_3 & a_2 + a_4 & a_3 + a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 + a_5 & a_2 + a_4 & a_3 \\ a_4 & a_3 + a_5 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

$n = 6$

Nous allons mener nos calculs différemment en faisant appel à l'isomorphisme  $\varphi$  associant à une matrice-colonne  $C_1$  de  $\mathcal{M}_6(\mathbb{B})$  à la matrice de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  dont cette matrice-colonne représente la signature-colonne. Nous donnerons par commodité le même nom à la matrice-colonne  $C_1$  et à la matrice de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  associée :

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi} C_1 = a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + a_5 B_5 + a_6 B_6$$

Calculons  $C_2$  (considéré comme matrice de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$ ).

$$\begin{aligned} C_2 &= B_2 \cdot C_1 = B_2 (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + a_5 B_5 + a_6 B_6) \\ &= a_1 B_2 B_1 + a_2 B_2^2 + a_3 B_2 B_3 + a_4 B_2 B_4 + a_5 B_2 B_5 + a_6 B_2 B_6 \\ &= a_1 B_2 + a_2 (B_1 + B_3) + a_3 (B_2 + B_4) + a_4 (B_3 + B_5) + a_5 (B_4 + B_6) \\ &\quad + a_6 B_5 \\ &= a_2 B_1 + (a_1 + a_3) B_2 + (a_2 + a_4) B_3 + (a_3 + a_5) B_4 + (a_4 + a_6) B_5 + a_5 B_6 \end{aligned}$$

Par  $\varphi^{-1}$ , on en déduit la matrice-colonne  $C_2$ .

$$C_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_3 + a_5 \\ a_4 + a_6 \\ a_5 \end{bmatrix}, \text{ résultat conforme à notre attente.}$$

Calculons de même  $C_3$  (considéré comme matrice de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$ ).

$$\begin{aligned} C_3 &= B_3 \cdot C_1 = B_3 (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + a_5 B_5 + a_6 B_6) \\ &= a_1 B_3 B_1 + a_2 B_3 B_2 + a_3 B_3^2 + a_4 B_3 B_4 + a_5 B_3 B_5 + a_6 B_3 B_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 \mathbf{B}_3 + a_2 (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_4) + a_3 (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_5) + a_4 (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_6) \\
 &\quad + a_5 (\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_5) + a_6 \mathbf{B}_4 \\
 &= a_3 \mathbf{B}_1 + (a_2 + a_4) \mathbf{B}_2 + (a_1 + a_3 + a_5) \mathbf{B}_3 + (a_2 + a_4 + a_6) \mathbf{B}_4 \\
 &\quad + (a_3 + a_5) \mathbf{B}_5 + a_4 \mathbf{B}_6
 \end{aligned}$$

Par  $\varphi^{-1}$ , on en déduit la matrice-colonne  $C_3$ .

$$C_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_1 + a_3 + a_5 \\ a_2 + a_4 + a_6 \\ a_3 + a_5 \\ a_4 \end{bmatrix}, \text{ résultat conforme à notre attente.}$$

Sachant d'autre part que :  $C_4 = J_6 C_3$ ,  $C_5 = J_6 C_2$ ,  $C_6 = J_6 C_1$ ,

On en déduit la forme générale d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  :

$A = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6]$ , soit :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_1 + a_3 & a_2 + a_4 & a_3 + a_5 & a_4 + a_6 & a_5 \\ a_3 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 + a_5 & a_2 + a_4 + a_6 & a_3 + a_5 & a_4 \\ a_4 & a_3 + a_5 & a_2 + a_4 + a_6 & a_1 + a_3 + a_5 & a_2 + a_4 & a_3 \\ a_5 & a_4 + a_6 & a_3 + a_5 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 & a_2 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Etant donné un vecteur-colonne  $V$  de  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{B})$ , recherche d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  telle que la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  soit égale à  $V$ .

(Bien évidemment ce problème est transposable aux lignes)

Il s'agit donc de résoudre l'équation d'inconnue  $C_i$  :  $C_i = V$ , qui, par application du Théorème 3-11 s'écrit :

$$B_i C_1 = V \quad (\text{où l'inconnue est } C_1).$$

Ce problème peut avoir une solution unique, plusieurs solutions ou être impossible. Plus précisément :

- si  $\det(B_i) = 1$  (pour l'ordre  $n$  considéré), le système considéré est de Cramer. La matrice  $B_i$  est inversible. Il existe donc une solution unique :  $C_1 = B_i^{-1} V$ .
- si  $\det(B_i) = 0$  (pour l'ordre  $n$  considéré), le système considéré n'est pas de Cramer. La matrice  $B_i$  n'est pas inversible. Le problème peut avoir 0 ou plusieurs solutions.

Examinons quelques exemples.

$$\underline{n = 4}$$

Une particularité de l'ordre  $n = 4$  est que  $\det(B_i) = 1, \forall i = 1 \text{ à } 4$  (cf. Tableau de la Section 4.2. du Chapitre 4). Cette particularité (que l'on retrouve aussi à d'autres ordres tels que 6, 10 et 12) entraîne une conséquence très précise, à savoir :

$$\begin{aligned} \forall V \in \mathcal{M}_{41}(\mathbb{B}) : & \exists A_1 \text{ (unique)} \in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B}) \text{ telle que : } 1^{\text{ère}} \text{ colonne de } A_1 = V, \\ & \exists A_2 \text{ (unique)} \in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B}) \text{ telle que : } 2^{\text{ème}} \text{ colonne de } A_2 = V, \\ & \exists A_3 \text{ (unique)} \in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B}) \text{ telle que : } 3^{\text{ème}} \text{ colonne de } A_3 = V, \\ & \exists A_4 \text{ (unique)} \in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B}) \text{ telle que : } 4^{\text{ème}} \text{ colonne de } A_4 = V. \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, choisissons :  $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Il est clair que :  $\exists A_1$  (unique)  $\in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B})$  telle que :  $1^{\text{ère}} \text{ colonne de } A_1 = V$ .

En effet, l'unique solution  $A_1$  est évidemment celle correspondant à :  $|A_1| = V$ .

$$\text{Donc : } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est non moins clair que :  $\exists A_4$  (unique)  $\in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B})$  telle que :  $4^{\text{ème}} \text{ colonne de } A_4 = V$  et que :  $A_4 = A_1$ .

Cherchons à déterminer la matrice  $A_2 \in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B})$  telle que :  $2^{\text{ème}} \text{ colonne de } A_2 = V$ .

Par application du Théorème 3-11, nous avons à résoudre l'équation :

$$B_2 C_1 = V \quad (\text{où l'inconnue est } C_1).$$

On calcule  $B_2^{-1} = B_2 + B_4$  (le vérifier). On en déduit :

$$C_1 = B_2^{-1} V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enfin :  $\exists A_3$  (unique)  $\in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B})$  telle que : 3<sup>ème</sup> colonne de  $A_3 = V$   
 et l'on a :  $A_3 = A_2$  (comme on le constate en observant  $A_2$ ).

Ce résultat non surprenant tient au fait que :  $B_3 = J_4 B_2$ .

$n = 5$

A l'ordre  $n = 5$ , on a évidemment :  $\det(B_1) = 1$  et  $\det(B_5) = 1$ . Par contre, à la différence de l'ordre  $n = 4$  :  $\det(B_2) = 0$ ,  $\det(B_3) = 0$ ,  $\det(B_4) = 0$ , (cf. Chapitre 4). Les matrices  $B_2, B_3, B_4$  ne sont donc pas inversibles.

$$\text{Soit } V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cherchons à déterminer s'il existe une matrice  $A_2 \in \mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  telle que 2<sup>ème</sup> colonne de  $A_2 = V$ .

Par application du Théorème 3-11, nous avons à résoudre l'équation :

$$B_2 C_1 = V \quad (\text{où l'inconnue est } C_1).$$

$$\text{Posons } C_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}. \text{ Sachant que } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ il vient :}$$

$$B_2 C_1 = V \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ système équivalent à :}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_5 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}, \text{ dont on extrait : } \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}.$$



Ce sous-système est clairement impossible. Il n'existe donc pas de matrice  $A_2$  de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  ayant sa 2<sup>ème</sup> colonne égale à  $V$ .

Cherchons à déterminer s'il existe une matrice  $A_3 \in \mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  telle que 3<sup>ème</sup> colonne de  $A_3 = V$ .

Par application du Théorème 3-11, nous avons à résoudre l'équation :

$$B_3 C_1 = V \quad (\text{où l'inconnue est } C_1).$$

$$\text{Posons } C_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}. \text{ Sachant que } B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ il vient :}$$

$$B_3 C_1 = V \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ système équivalent à :}$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \\ x_4 = \overline{X_2} \quad (= X_2 + 1) \\ x_5 = X_1 \end{cases}$$

où  $X_1, X_2, X_3$  désignent des paramètres à valeur dans  $\mathbb{B}$  (pouvant donc prendre indifféremment la valeur 0 ou 1).

Nous en déduisons 4 solutions pour  $C_1$ , deux à deux symétriques :

$$C_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_1'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_1''' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_1'''' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les 4 matrices répondant au problème posé sont donc :

$$A_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } A_3''' = J_5 A_3'; \quad A_3'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } A_3'''' = J_5 A_3''.$$

Recherche des matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  ayant une colonne donnée nulle.

(Bien évidemment ce problème est transposable aux lignes).

Ce problème est un cas particulier du précédent, celui pour lequel  $V = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ .

Il s'agit donc de rechercher les matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  ayant leur  $i^{\text{ème}}$  colonne nulle ( $1 \leq i \leq n$ ).

Ceci revient à résoudre l'équation d'inconnue  $C_i : C_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ , qui, par application du

Théorème 3-11, s'écrit :

$$B_i C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n \text{ (où l'inconnue est } C_1).$$

Ce problème admet bien évidemment toujours la solution  $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ .

En effet, la matrice nulle  $O_n$  ayant toutes ses colonnes (et toutes ses lignes) nulles répond clairement au problème,  $\forall i = 1 \text{ à } n$ .

Il convient donc de rechercher les solutions non triviales, s'il en existe.

Plus précisément :

- si  $\det(B_i) = 1$  (pour l'ordre  $n$  considéré), le système considéré est de Cramer.

La matrice  $B_i$  est inversible. Il existe donc une solution unique :  $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$  et

la matrice nulle  $O_n$  est la seule solution au problème posé.

- si  $\det(B_i) = 0$  (pour l'ordre  $n$  considéré), le système considéré n'est pas de Cramer.

La matrice  $B_i$  n'est pas inversible. Il existe, outre la solution  $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ , d'autres solutions, non nulles, pour  $C_1$  et, outre la matrice nulle, il existe d'autres solutions au problème posé.

Examinons deux exemples correspondant à l'ordre  $n = 5$ .

Cherchons à savoir s'il existe (outre la matrice nulle  $O_5$ ) des matrices de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  telles que leur 2<sup>ème</sup> colonne soit nulle ? Comme  $\det(B_2) = 0$ , la réponse est positive. Nous allons les identifier.

Il s'agit donc de résoudre :  $B_2 C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_5$  (où l'inconnue est  $C_1$ ).

Posons  $C_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ . Sachant que  $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , il vient :

$$B_2 C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ système équivalent à :}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = X_1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = X_1 \end{cases}, \text{ où } X_1 \in \mathbb{B}.$$

Pour  $X_1 = 0$ , on obtient :  $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  correspondant à la matrice nulle.

Pour  $X_1 = 1$ , on obtient :  $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  correspondant à la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ qui est bien une solution non nulle du problème posé.}$$

Il n'existe donc, dans ce cas précis, outre  $O_5$ , qu'une seule solution non triviale au problème posé.

Cherchons maintenant à savoir s'il existe (outre la matrice nulle  $O_5$ ) des matrices de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  telles que leur 3<sup>ème</sup> colonne soit nulle ? Comme  $\det(B_3) = 0$ , la réponse est positive. Nous allons les identifier.

Il s'agit donc de résoudre :  $B_3 C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_5$  (où l'inconnue est  $C_1$ ).

Posons  $C_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ . Sachant que  $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , il vient :

$$B_3 C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ système équivalent à :}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = X_2 \\ x_5 = X_1 \end{cases}, \text{ où } X_1 \in \mathbb{B} \text{ et } X_2 \in \mathbb{B}.$$

Nous en déduisons 4 solutions pour  $C_1$ .

1)  $X_1 = 0, X_2 = 0$  correspond clairement à la solution triviale :  $O_5$ .

$$2) X_1 = 1, X_2 = 0 \text{ correspond à } C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ et donc à la matrice : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

$$3) X_1 = 0, X_2 = 1 \text{ correspond à } C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et donc à la matrice : } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

$$4) X_1 = 1, X_2 = 1 \text{ correspond à } C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ et donc à la matrice : } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

Il existe donc, dans ce cas précis, outre  $O_5$ , 3 solutions non triviales au problème posé.

Détermination des matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  telles que leur  $i^{\text{ème}}$  colonne soit égale à leur  $1^{\text{ère}}$  colonne.

(Bien évidemment ce problème est transposable aux lignes).

Il s'agit donc de résoudre l'équation d'inconnue  $C_i = C_1$ , qui, par application du Théorème 3-11, s'écrit :

$$B_i C_1 = C_1 \text{ (où l'inconnue est } C_1 \text{)}.$$

Cette équation est équivalente à la suivante :

$$(B_i + B_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n.$$

Il s'agit là d'une équation homogène dont  $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$  constitue la solution triviale.

La matrice correspondante est la matrice nulle  $O_n$  qui répond à l'évidence au problème posé.

Nous ne nous intéresserons dorénavant qu'aux solutions non triviales.

- si  $\det(B_i + B_1) = 1$  (pour l'ordre  $n$  considéré), le système considéré est de Cramer. La matrice  $(B_i + B_1)$  est inversible.

La solution triviale  $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$  est l'unique solution et la matrice nulle  $O_n$  est la seule solution au problème posé.

- si  $\det(B_i + B_1) = 0$  (pour l'ordre  $n$  considéré), le système considéré n'est pas de Cramer. La matrice  $(B_i + B_1)$  n'est pas inversible.

Il existe, outre la solution  $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ , d'autres solutions non nulles pour  $C_1$  et, outre la matrice nulle  $O_n$ , il existe d'autres solutions non nulles au problème posé.

Examinons quelques exemples.

$n = 3$

$i = 2$  :  $\det(B_2 + B_1) = \det(M_2) = 1$  : la matrice nulle  $O_3$  est la seule solution.

$i = 3$  :  $\det(B_3 + B_1) = 0$ . On est amené à résoudre le système :  $(B_3 + B_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_3$ ,

sachant que :  $B_3 + B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Posons :  $C_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ . Le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 0x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ x_1 + x_3 = 0$$

Ce système a pour solution générale :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_1 \end{cases} \quad \text{où } X_1 \in \mathbb{B} \text{ et } X_2 \in \mathbb{B}.$$

1)  $X_1 = 0, X_2 = 0$  correspond clairement à la solution triviale :  $O_5$ .

2)  $X_1 = 1, X_2 = 0$  correspond à  $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , et donc à la matrice  $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

3)  $X_1 = 0, X_2 = 1$  correspond à  $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , et donc à la matrice :  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

4)  $X_1 = 1, X_2 = 1$  correspond à  $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , et donc à la matrice :  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

Il existe donc, dans ce cas précis, 3 solutions non triviales au problème posé.

$n = 4$

$i = 2$  :  $\det(B_2 + B_1) = \det(M_2) = 1$  : la matrice nulle  $O_4$  est la seule solution.

$i = 3$  :  $\det(B_3 + B_1) = 1$  : la matrice nulle  $O_4$  est la seule solution.

$i = 4$  :  $\det(B_4 + B_1) = 0$  : On est amené à résoudre le système :  $(B_4 + B_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_4$ ,

sachant que :  $B_4 + B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Ce système a pour solution générale :

$$C_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} \quad \text{où } X_1 \in \mathbb{B} \text{ et } X_2 \in \mathbb{B}.$$

Les 3 matrices non triviales répondant au problème posé sont :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Remarque :*

Nous remarquons que, pour les ordres  $n=3$  et  $n=4$ , nous avons toujours trouvé des solutions multiples non triviales de matrices réalisant l'égalité de leur 1<sup>ère</sup> et de leur dernière colonne. Ceci est toujours le cas à tous les ordres. En effet, si l'on choisit pour signature-colonne d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  un vecteur-colonne symétrique par rapport à son axe médian, alors, en raison de la bisymétrie de la matrice concernée, la dernière colonne de cette matrice sera égale à sa 1<sup>ère</sup> colonne (*idem* pour les lignes).

Précisons que ces matrices ayant une signature-colonne symétrique par rapport à son axe médian représentent les seules solutions au problème posé. En effet une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  ayant une signature-colonne non symétrique par rapport à son axe médian aura pour dernière colonne un vecteur-colonne égal au symétrique de celui de la 1<sup>ère</sup> colonne par rapport à son axe médian. Dès lors, la 1<sup>ère</sup> colonne et la dernière colonne de cette matrice ne seront pas égales.

$n=5$  Contentons-nous de fournir les résultats.

$i=2$  :  $\det(\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1) = \det(\mathbf{M}_2) = 0$ .

Le système :  $(\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1) \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_5$  a des solutions dont la forme générale est :

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1 \\ 0 \\ X_1 \\ X_1 \end{bmatrix}, \text{ où } X_1 \in \mathbb{B}.$$

Pour  $X_1 = 1$ , on trouve la seule solution non triviale au problème posé:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



$i = 3$  :  $\det(\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1) = 0$ .

Le système :  $(\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_5$  a des solutions dont la forme générale est :

$$C_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \\ X_1 \\ 0 \\ X_1 \end{bmatrix}, \text{ où } X_1 \in \mathbb{B}.$$

Pour  $X_1 = 1$ , on trouve la seule solution non triviale au problème posé :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$i = 4$  :  $\det(\mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_1) = 0$ .

La seule solution réalisant l'égalité de la 1<sup>ère</sup> et de la 4<sup>ème</sup> colonne d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  est aussi celle qui réalise l'égalité de la 1<sup>ère</sup> et de la 2<sup>ème</sup> colonne (cf. le cas  $i = 2$ ), à savoir :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$i = 4$  :  $\det(\mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_1) = 0$ .

Il s'agit du cas d'égalité de la 1<sup>ère</sup> et de la dernière colonne d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$ . Nous avons établi plus haut (cf. Remarque conclusive du cas  $n = 4$ ) que toute matrice ayant une signature-colonne symétrique par rapport à son axe médian, répond à la question. Nous avons aussi établi que ce sont les seules.

Nous pouvons donc, sans même résoudre le système :  $(\mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_5$

conclure que la solution générale de ce système est de la forme :

$$C_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_2 \\ X_1 \end{bmatrix}, \text{ où } X_1 \in \mathbb{B}, X_2 \in \mathbb{B} \text{ et } X_3 \in \mathbb{B}.$$

Hormis la solution nulle  $O_5$ , il y a donc 7 solutions non triviales au problème posé, à savoir :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.6. Produit de 2 matrices quelconques de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Le théorème qui suit généralise les Théorèmes 3-9, 3-10 et 3-11.

**Théorème 3-12.** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  :  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Désignons par  $C_i(A)$  la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  et par  $L_i(A)$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Désignons par  $C_i(B)$  la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $B$  et par  $L_i(B)$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $B$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Le produit de matrices  $A \cdot B$  est la matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont la signature-colonne est :

$$|A \cdot B| = |B \cdot A| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) = \sum_{i=1}^n a_{1i} C_i(B).$$

Le produit de matrices  $A \cdot B$  est la matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont la signature-ligne est :

$$\overline{A \cdot B} = \overline{B \cdot A} = \sum_{i=1}^n b_{1i} L_i(A) = \sum_{i=1}^n a_{1i} L_i(B).$$

*Preuve :*

Raisonnons sur les colonnes.

$B_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , désigne comme toujours la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Il est clair que :  $A = \sum_{i=1}^n a_{1i} B_i$  et que :  $B = \sum_{i=1}^n b_{1i} B_i$ .

Par application du Théorème 3-11 :

$A \cdot |B_i| = C_i(A)$ ,  $\forall i = 1$  à  $n$ . Donc :

$$\sum_{i=1}^n b_{1i} (A \cdot |B_i|) = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) \Rightarrow A \cdot \sum_{i=1}^n |b_{1i} B_i| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) \Rightarrow$$

$$A \cdot \left| \sum_{i=1}^n b_{1i} B_i \right| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) \Rightarrow A \cdot |B| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) \Rightarrow$$

$$|A \cdot B| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A).$$

En raison de la commutativité du produit  $A \cdot B$ , on a aussi :

$$|A \cdot B| = |B \cdot A| = \sum_{i=1}^n a_{1i} C_i(B).$$

Même raisonnement pour les lignes.

### 3.7. Nouvelle définition de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

**Théorème 3-13.**  $B_{nk}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , désignent les matrices objets de la Définition 2-1.

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , telle que l'ensemble de ses colonnes  $C_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) vérifient la relation :  $C_k = B_{nk} \cdot C_1$ ,  $\forall k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Alors  $A$  appartient à  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , telle que l'ensemble de ses lignes  $L_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) vérifient la relation :  $L_k = L_1 \cdot B_{nk}$ ,  $\forall k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Alors  $A$  appartient à  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Preuve:*

Raisonnons sur les colonnes.

Soit  $A'$  la matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  ayant pour signature-colonne  $|A'| = C_1$ .

D'après le Théorème 3-11, la  $k^{\text{ème}}$  colonne  $C'_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) de  $A'$  est égale à  $B_k \cdot C_1$ .

D'après les hypothèses du Théorème 3-13, la  $k^{\text{ème}}$  colonne  $C_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) de  $A$  est aussi égale à  $B_k \cdot C_1$ .

Donc :  $\forall k$  ( $1 \leq k \leq n$ ):  $C_k = C'_k$ , et donc :  $A = A'$

Par suite :  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Raisonnement identique pour les lignes.

Une nouvelle définition de l'ensemble  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  résulte de ce qui précède.

**Définition 3-14 – 4<sup>ème</sup> définition de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .**

$B_{nk}, 1 \leq k \leq n$ , désignent les matrices faisant l'objet de la Définition 2-1.

$\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  constitué des matrices telles que toutes les colonnes  $C_k (1 \leq k \leq n)$  de ces matrices vérifient la relation :  $C_k = B_{nk} \cdot C_1$ .

$\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  constitué des matrices telles que toutes les lignes  $L_k (1 \leq k \leq n)$  de ces matrices vérifient la relation :  $L_k = L_1 \cdot B_{nk}$ .

### 3.8. Commutant de la matrice $N_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ – Nouvelle propriété caractéristique des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ – Nouvelles définitions de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Nous avons initialement défini l'ensemble  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  comme le commutant de la matrice  $N_n$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ . Cette approche nous a amené à découvrir une première propriété caractéristique des matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , à savoir que ce sont les matrices de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  dont les paramètres sont définis par les Relations ( $R_k$ ),  $1 \leq k \leq \nu$ , si  $n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ), et  $1 \leq k \leq \nu + 1$ , si  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ) – (cf. 1<sup>ère</sup> définition de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dans Définition et Théorème 2-5).

Nous allons maintenant établir une autre propriété caractéristique des matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  en nous intéressant au commutant de la matrice  $N_n$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  (et non plus, comme auparavant, dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ ).

Nous allons démontrer que :

$$\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{B}).$$

Introduisons les matrices élémentaires  $E_{ij} (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$  constituant la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

Rappelons que  $\forall i (1 \leq i \leq n), \forall j (1 \leq j \leq n), \forall k (1 \leq k \leq n), \forall l (1 \leq l \leq n)$  :

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = O_n \text{ si } j \neq k, \text{ et } E_{ij} \cdot E_{jl} = E_{il} \text{ (lorsque donc } j = k).$$

Notons alors que la matrice  $N_n$  s'écrit : 
$$N_n = \sum_{i=1}^{n-1} (E_{i,i+1} + E_{i+1,i}).$$

On établit facilement les égalités :

$$E_{jk} \cdot N_n = E_{j,k+1} + E_{j,k-1} \text{ si } : k \neq 1 \text{ et } k \neq n.$$

$$E_{j1} \cdot N_n = E_{j2} \text{ (} k = 1 \text{)} ; E_{jn} \cdot N_n = E_{j,n-1} \text{ (} k = n \text{)}.$$

De même :

$$N_n \cdot E_{jk} = E_{j-1k} + E_{j+1k} \quad \text{si : } j \neq 1 \text{ et } j \neq n.$$

$$N_n \cdot E_{1k} = E_{2k} \quad (j=1); \quad N_n \cdot E_{nk} = E_{n-1k} \quad (j=n).$$

Soit alors  $A [a_{jk}]$  ( $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ ) une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ . On a :

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{jk} E_{jk}.$$

On établit aisément les égalités :

$$A \cdot N_n = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{jk-1} + a_{jk+1}) E_{jk} \quad \text{en convenant que : } a_{j0} = a_{jn+1} = 0.$$

$$N_n \cdot A = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{j-1k} + a_{j+1k}) E_{jk} \quad \text{en convenant que : } a_{0k} = a_{n+1k} = 0.$$

D'où le théorème qui suit.

**Théorème 3-15.** Soit  $A [a_{jk}]$  ( $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ ) une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

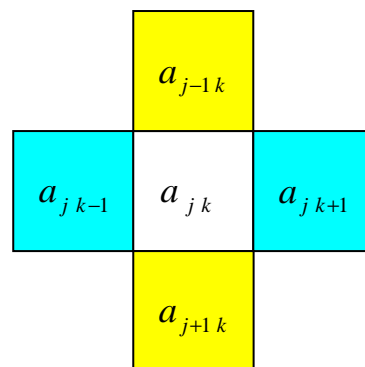
Les matrices  $A$  et  $N_n$  commutent si et seulement si les coefficients de  $A$  vérifient les Relations (RVI<sub>jk</sub>) ci-dessous :

$$(RVI_{jk}) : \forall j (1 \leq j \leq n), \forall k (1 \leq k \leq n) : a_{jk-1} + a_{jk+1} = a_{j-1k} + a_{j+1k}$$

en convenant que :  $a_{j0} = a_{jn+1} = 0$  et  $a_{0k} = a_{n+1k} = 0$ .

*Terminologie:* Relation des Voisins Immédiats (RVI).

Considérons le schéma cruciforme suivant, centré sur l'élément  $a_{jk}$  de  $A$  :



Le Théorème 3-15 stipule que les matrices  $A$  et  $N_n$  commutent si et seulement si, quel que soit le coefficient  $a_{jk}$  de  $A$  considéré, la somme de ses (coefficients) voisins immédiats situés dans la même colonne (ici en jaune) est égale à la somme de ses (coefficients) voisins immédiats situés dans la même ligne (ici en bleu).

Si le coefficient  $a_{jk}$  considéré se trouve en bordure de la matrice (1<sup>ère</sup> ou dernière colonne ou 1<sup>ère</sup> ou dernière ligne), on « ignore » les coefficients voisins qui sortent du cadre de la matrice  $A$  et l'on réduit donc l'égalité  $a_{jk-1} + a_{jk+1} = a_{j-1k} + a_{j+1k}$  aux seuls coefficients figurant à l'intérieur de la matrice  $A$ . (Ceci revient bien à dire que :  $a_{j0} = a_{jn+1} = 0$  et  $a_{0k} = a_{n+1k} = 0$ ).

Nous dénommerons « Relation des Voisins Immédiats (RVI) » chacune des Relations (RVI $_{jk}$ ) donnée par le Théorème 3-15.

*Remarque:*

Dans la mesure où tous les coefficients  $a_{jk}$  ( $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ ) de la matrice  $A$  sont à valeur dans  $\mathbb{B}$ , la RVI peut aussi s'exprimer sous la forme équivalente suivante :

$$a_{jk-1} + a_{jk+1} + a_{j-1k} + a_{j+1k} = 0 \quad (1)$$

On peut alors énoncer la RVI comme suit : « La somme des (coefficients) voisins immédiats de  $a_{jk}$  est nulle ».

Cependant, nous préférons, en règle générale, exprimer la RVI sous la forme donnée par le Théorème 3-15, plutôt que sous la forme (1) ci-dessus, et ceci pour la raison suivante.

Considérons la matrice  $N_n$  comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Les valeurs 0 et 1 que renferme  $N_n$  sont alors l'élément neutre de l'addition et l'élément neutre de la multiplication dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ . Si l'on s'intéresse maintenant au commutant de  $N_n$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ou dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on s'apercevra que les Relations (RVI $_{jk}$ ) données par le Théorème 3-15 demeurent toujours valables. Par contre, les relations de la forme (1) ci-dessus ne le sont bien évidemment plus. Il est dès lors préférable de réserver la dénomination de RVI aux seules Relations (RVI $_{jk}$ ) données par le Théorème 3-15.

\*  
\* \*

Avant de poursuivre le fil de cet exposé, nous aurons besoin de démontrer la proposition suivante. Celle-ci fait appel aux polynômes  $\hat{P}_k(\lambda)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , de  $\mathbb{B}[X]$  définis dans l'Annexe du présent chapitre. On se référera donc à cette étude avant d'aborder ce qui suit.

**Lemme 3-16.**  $\hat{P}_k(\lambda)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sont les polynômes de  $\mathbb{B}[X]$  définis dans l'Annexe du présent chapitre.  $\{B_{nk}\}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , désigne la « base canonique » de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Si l'on pose :  $N_n = B_{n2}$ , alors  $\forall k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) :  $\hat{P}_{k-1}(N_n) = B_{nk}$ .

*Preuve:*

Par récurrence sur  $k$ .

(Dans la démonstration qui suit, nous noterons  $B_{nk}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , sous sa forme abrégée  $B_k$ ).

$I_n$  désigne la matrice-identité d'ordre  $n$ .

Pour  $k = 1$  :  $\hat{P}_0(\lambda) = 1 \Rightarrow \hat{P}_0(N_n) = I_n = B_1$

Pour  $k = 2$  :  $\hat{P}_1(\lambda) = \lambda \Rightarrow \hat{P}_1(N_n) = N_n = B_2$

Supposons la propriété vérifiée au rang  $k-1$  et  $k$  ( $k \leq n-1$ ). On a donc par hypothèse de récurrence :  $\hat{P}_{k-2}(N_n) = B_{k-1}$  et  $\hat{P}_{k-1}(N_n) = B_k$ .

D'après la relation fondamentale des polynômes  $\hat{P}_k(\lambda)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (cf. Théorème A3-8 de l'Annexe du présent chapitre) :

$$\hat{P}_k(\lambda) = \lambda \hat{P}_{k-1}(\lambda) + \hat{P}_{k-2}(\lambda) \quad (k \geq 2).$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \hat{P}_k(N_n) &= N_n \hat{P}_{k-1}(N_n) + \hat{P}_{k-2}(N_n) = B_2 \cdot B_k + B_{k-1} = B_k \cdot B_2 + B_{k-1} \\ &= (B_{k-1} + B_{k+1}) + B_{k-1} = B_{k+1}. \end{aligned}$$

La proposition est donc établie.

\*  
\* \*

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante : toute matrice dont les coefficients vérifient la Relation des Voisins Immédiats (c.-à-d. les Relations (RVI<sub>j<sub>k</sub></sub>) du Théorème 3-15), est un élément de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

**Théorème 3-17.** Soit  $A [a_{jk}]$  ( $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ ) une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  dont les coefficients vérifient les Relations (RVI<sub>j<sub>k</sub></sub>) :

$$(RVI_{j_k}) : \forall j (1 \leq j \leq n), \forall k (1 \leq k \leq n) : a_{jk-1} + a_{jk+1} = a_{j-1k} + a_{j+1k}$$

(en convenant que :  $a_{j_0} = a_{j_{n+1}} = 0$  et  $a_{0k} = a_{n+1k} = 0$ ).

Alors :  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Preuve :*

La Relation des Voisins Immédiats (RVI<sub>j<sub>k</sub></sub>) peut s'écrire comme suit :

$$a_{jk+1} = a_{j-1k} + a_{j+1k} + a_{jk-1} \quad (1)$$

En faisant varier  $j$  de 1 à  $n$ , la relation (1) se traduit sous la forme matricielle qui suit :

$$\begin{bmatrix} a_{1k+1} \\ a_{2k+1} \\ a_{3k+1} \\ \dots \\ a_{n-2k+1} \\ a_{n-1k+1} \\ a_{nk+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \\ \dots \\ a_{n-2k} \\ a_{n-1k} \\ a_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1k-1} \\ a_{2k-1} \\ a_{3k-1} \\ \dots \\ a_{n-2k-1} \\ a_{n-1k-1} \\ a_{nk-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Si l'on désigne par  $C_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) la  $k^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A$ , la relation (2) entraîne :

$$C_{k+1} = N_n \cdot C_k + C_{k-1} \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (3)$$

Comme  $a_{j_0} = 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ , la colonne  $C_0$  doit être considérée comme nulle :

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n.$$

L'étude faite en Annexe du présent chapitre (à laquelle on se référera) permet d'écrire, en introduisant les polynômes  $\hat{P}_k(\lambda)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , de  $\mathbb{B}[X]$  :

$$C_k = \hat{P}_{k-1}(N_n) C_1 + \hat{P}_{k-2}(N_n) C_0 \quad (1 \leq k \leq n) \quad (4)$$

Comme :  $C_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ , la relation (4) se réduit simplement à :

$$C_k = \hat{P}_{k-1}(N_n) C_1 \quad (1 \leq k \leq n). \quad (5)$$

Le Lemme 3-16 établit l'égalité :  $\hat{P}_{k-1}(N_n) = B_{nk}$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

(5) s'écrit donc :

$$C_k = B_{nk} \cdot C_1 \quad (1 \leq k \leq n).$$

Le Théorème 3-13 permet alors de conclure que la matrice  $A$  appartient à  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

### Définition et Théorème 3-18 – 5<sup>ème</sup> Définition de $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Le commutant de la matrice  $N_n$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  et le commutant de la matrice  $N_n$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  sont égaux. Donc :

$$\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{B}).$$

*Preuve:*

Conséquence immédiate du Théorème 3-17.

*Remarque 1 :*

La Relation des Voisins Immédiats (RVI) est une relation très puissante, puisque, lorsque tous les coefficients d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  y satisfont, alors cette matrice est bisymétrique et, mieux encore, elle appartient à  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .



*Remarque 2 :*

Le Théorème 3-18 a établi que :  $\text{Com}(N_n)$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n)$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

Cette égalité entraîne donc les implications qui suivent :

$$\left. \begin{array}{l} A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \\ \text{et} \\ A \text{ satisfait donc aux Relations} \\ (\mathbf{R}_k) \text{ (cf. Déf. et Théorème 2-5).} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} A \text{ satisfait aux RVI} \\ \text{c.-à-d.} \\ \text{aux Relations (RVI}_{jk}) \\ \text{du Théorème 3-15} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) \\ \text{et} \\ A \text{ satisfait aux RVI} \\ \text{c.-à-d.} \\ \text{aux Relations (RVI}_{jk}) \\ \text{du Théorème 3-15.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2) \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \\ \text{et} \\ A \text{ satisfait donc aux Relations} \\ (\mathbf{R}_k) \text{ (cf. Déf. et Théorème 2-5).} \end{array}$$

Il est dès lors intéressant de chercher à démontrer les implications (1) et (2) par la voie la plus « directe » possible.

### Implication 1

En fait, nous avons déjà mis en évidence cette implication lors de la démonstration de la proposition :  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n)$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  (cf. Chapitre 2) .

Nous avons en effet établi dans le Chapitre 2 (page 55) la relation suivante :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = [k, k+h-1] + [k, k+h+1]$$

avec :  $1 \leq h \leq n-2k$ .

Cette relation implique les paramètres de la zone principale de la matrice bisymétrique A concernée (cf. Définition 1-22 et Notation et Définition 1-27).

On reconnaît bien la Relation des Voisins Immédiats (RVI), restreinte toutefois aux coefficients-paramètres de la zone principale de la matrice bisymétrique A.

Il est ensuite aisé de vérifier que la RVI est satisfaite pour tous les coefficients de la 1<sup>ère</sup> ligne de A, puis pour tous les coefficients de la 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> diagonale de A, situés dans la zone principale.

La bisymétrie de A garantit alors que la RVI est satisfaite pour l'ensemble des coefficients de la matrice A.

Implication 2

Il est aisé de démontrer dans un premier temps l'implication suivante :

$$\left. \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) \\ \text{et} \\ A \text{ satisfait aux RVI} \\ \text{c.-à-d.} \\ \text{aux Relations (RVI}_{jk}) \\ \text{du Théorème 3-15.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2a) \\ \Rightarrow \\ A \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \end{array}$$

Sans entrer dans les détails de la preuve, indiquons brièvement la marche à suivre.

Il faut, dans un premier temps, démontrer que la matrice  $A$  est 1-symétrique.

En positionnant le centre de la croix (cf. ci-dessus page 100) successivement sur les coefficients  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , on démontre pas à pas la symétrie des 2 premières sous-diagonales inférieure et supérieure de  $A$ . Puis en positionnant 2 croix sur 2 coefficients symétriques appartenant à ces 2 premières sous-diagonales inférieure et supérieure ( $a_{12}$  et  $a_{21}, a_{23}$  et  $a_{32}, \dots$ , jusqu'à  $a_{n-1n}$  et  $a_{nn-1}$ ), on démontre pas à pas la symétrie des 2 deuxièmes sous-diagonales inférieure et supérieure de  $A$ . Le raisonnement ci-dessus s'extrapole aisément et l'on démontre par récurrence la 1-symétrie de des 2  $i^{\text{èmes}}$  sous-diagonales inférieure et supérieure de  $A$  ( $2 \leq i \leq n$ ), sachant que les 2  $n^{\text{èmes}}$  sous-diagonales inférieure et supérieure de  $A$  se réduisent en fait aux 2 seuls coefficients  $a_{1n}$  et  $a_{n1}$ .

Dans un deuxième temps, un raisonnement identique, développé cette fois-ci selon la direction de la 2<sup>ème</sup> diagonal, permet de démontrer que la matrice  $A$  est 2-symétrique.

Finalement la matrice  $A$  est bisymétrique et l'implication (2 a) ci-dessus est établie.

Reste à démontrer l'implication (2 b) suivante (sachant que la matrice  $A$  est bisymétrique) :

$$\left. \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) \\ \text{et} \\ A \text{ satisfait aux RVI} \\ \text{c.-à-d.} \\ \text{aux Relations (RVI}_{jk}) \\ \text{du Théorème 3-15.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2b) \\ \Rightarrow \\ A \text{ satisfait aux Relations} \\ (R_k) \text{ (cf. Déf. et Théorème 2-5).} \end{array}$$

Deux raisonnements sont possibles, le raisonnement direct (R1), plutôt long et complexe, et le raisonnement indirect (R2), bref et simple.

(R1) Nous ne nous attarderons pas sur le raisonnement direct (R1) qui consiste à démontrer par récurrence que, si tous les coefficients-paramètres de la zone principale de la matrice bisymétrique  $A$  vérifient la Relation des Voisins Immédiats (RVI), alors l'ensemble des Relations  $(R_k)$   $1 \leq k \leq \nu$ , si  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), et  $1 \leq k \leq \nu + 1$ , si  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ) sont satisfaites.

Cette démonstration est analogue à celle effectuée dans le Chapitre 2 (pages 50 et suivantes) lorsqu'il s'agissait d'établir que  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n)$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

(R2) Le raisonnement indirect est le suivant :

D'après le Théorème 3-15 :

$$\left. \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) \\ \text{et} \\ A \text{ satisfait aux RVI} \\ \text{c.-à-d.} \\ \text{aux Relations (RVI}_{jk}) \\ \text{du Théorème 3-15.} \end{array} \right\} \Rightarrow A \in \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$$

Mais, d'après l'implication (2 a), A est bisymétrique. On a donc :

$$\left. \begin{array}{l} A \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \\ \text{et} \\ A \in \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) \end{array} \right\} \Rightarrow A \in \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}).$$

Mais alors, d'après la Définition et le Théorème 2-5 :

$$A \in \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$$

Et, toujours d'après la Définition et le Théorème 2-5 :

$$A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A \text{ satisfait aux Relations (R}_k).$$

*Remarque 3 :*

Le Théorème 3-18 a établi que :  $\text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

Cette égalité, vraie donc pour  $N_n = B_{n2}$ , est-elle vraie, en toute généralité, pour toute matrice  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$  ? Autrement dit, se pourrait-il que :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n : \text{Com}(B_{ni}) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) = \text{Com}(B_{ni}) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) ?$$

La réponse est clairement négative.

En effet, pour  $B_{n1} = I_n$  et  $B_{nn} = J_n$ , on a :

$$\text{Com}(I_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) = \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}). \text{Com}(I_n) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{B}).$$

$$\text{Com}(J_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) = \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}). \text{Com}(J_n) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{B}).$$

Et donc, dans ces deux cas :

$$\text{Com}(I_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \neq \text{Com}(I_n) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{B}).$$

$$\text{Com}(J_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \neq \text{Com}(J_n) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{B}).$$

Mais, outre ces cas particulier, fournissons deux autres contre-exemples moins banals.

Contre-exemple 1:

$$\text{Soit } B_{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{BSC}_5(\mathbb{B}).$$

On démontre que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_5(\mathbb{B})$  commutant avec  $B_{53}$  est (tous calculs faits) de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & f+j & i & j \\ k & b+d & a+c+e & b+d & c \\ j & i & f+j & g & f \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}.$$

avec :  $(a, b, c, d, e, f, g, i, j) \in \mathbb{B}^9$ .

L'ensemble des matrices de  $\mathcal{BS}_5(\mathbb{B})$  commutant avec  $B_{63}$ , s'obtient en écrivant que dans la forme générale ci-dessus :  $b = f, c = k, d = \delta, d = j$ .

Les matrices obtenues sont alors de la forme générale :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & g & b+d & i & d \\ c & b+d & a+c+e & b+d & c \\ d & i & b+d & g & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, (a, b, c, d, e, f, h) \in \mathbb{B}^7$$

(On retrouve par ce biais les résultats obtenus dans l'exemple de la Remarque 3 faite à la suite de la Définition et du Théorème 2-5 du Chapitre 2).

En définitive, on a les inclusions strictes suivantes :

$$\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B}) \subset \text{Commutant de } B_{53} \text{ dans } \mathcal{BS}_5(\mathbb{B}) \subset \text{Commutant de } B_{53} \text{ dans } \mathcal{M}_5(\mathbb{B})$$

Contre-exemple 2 :

$$\text{Soit } B_{63} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{BSC}_6(\mathbb{B}).$$

On démontre que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_6(\mathbb{B})$  commutant avec  $B_{63}$  est (tous calculs faits) de la forme :

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ \beta & \alpha + \gamma & \beta + \delta & \gamma + \varepsilon & \delta + \varphi & \varepsilon \\ c & b + d & a + c + e & b + d + f & c + e & d \\ \delta & \gamma + \varepsilon & \beta + \delta + \varphi & \alpha + \gamma + \varepsilon & \beta + \delta & \gamma \\ e & b + f & c + e & b + d & a + c & b \\ \varphi & \varepsilon & \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

avec :  $(a, b, c, d, e, f, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi) \in \mathbb{B}^{12}$ .

L'ensemble des matrices de  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})$  commutant avec  $B_{63}$ , s'obtient en écrivant que dans la forme générale ci-dessus :  $a = \alpha, b = \beta, c = \gamma, d = \delta, e = \varepsilon, f = \varphi$ .

On établit ainsi que : Commutant de  $B_{63}$  dans  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B}) = \mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$ . Et donc, dans ce cas :

Commutant de  $B_{63}$  dans  $\mathcal{BS}_6(\mathbb{B}) = \mathcal{BSC}_6(\mathbb{B}) \subset \text{Commutant de } B_{63} \text{ dans } \mathcal{M}_6(\mathbb{B})$ .

\*  
\* \*

L'étude qui précède permet maintenant de fournir une 6<sup>ème</sup> Définition de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , équivalente aux définitions précédentes.

**Définition 3-19 – 6<sup>ème</sup> Définition de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .**

$\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est constitué par l'ensemble des matrices  $A [a_{jk}]$  ( $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ ) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , dont les coefficients vérifient les Relations  $(RVI_{jk})$  :

$$(RVI_{jk}) : \forall j (1 \leq j \leq n), \forall k (1 \leq k \leq n) : a_{jk-1} + a_{jk+1} = a_{j-1k} + a_{j+1k}$$

(en convenant que :  $a_{j0} = a_{jn+1} = 0$  et  $a_{0k} = a_{n+1k} = 0$ ).

*Preuve* : Conséquence directe du Théorème 3-17 et de la Définition et du Théorème 3-18.

*Remarque :*

Pour « construire » une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , en utilisant les Relations des Voisins Immédiats ( $\text{RVI}_{jk}$ ) ci-dessus, on procède comme suit :

- 1) On choisit la valeur de la signature-colonne (resp. de la signature-ligne) de la matrice à construire.
- 2) Puis on calcule, de proche en proche, en utilisant les Relations ( $\text{RVI}_{jk}$ ) la valeur de chacun des coefficients de la matrice, en procédant de droite à gauche (resp. de haut en bas).

Cette approche permet, en particulier, de construire toutes les matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Celles-ci peuvent ainsi faire l'objet de la 3<sup>ème</sup> Définition suivante.

**Définition 3-20 – 3<sup>ème</sup> Définition des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .**

$B_{ni} [b_{jk}^{(ni)}]$  ( $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ ) est l'unique matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  dont tous les coefficients de la 1<sup>ère</sup> colonne sont nuls, à l'exception de  $b_{i1}^{(ni)}$  égal à 1 (ou encore : dont tous les coefficients de la 1<sup>ère</sup> ligne sont nuls, à l'exception de  $b_{1i}^{(ni)}$  égal à 1), et dont l'ensemble des coefficients vérifie les Relations ( $\text{R}'_{jk}$ ) :

$$(\text{R}'_{jk}) : \forall j (1 \leq j \leq n), \forall k (1 \leq k \leq n) : b_{jk-1}^{(ni)} + b_{jk+1}^{(ni)} = b_{j-1k}^{(ni)} + b_{j+1k}^{(ni)}$$

(en convenant que :  $b_{j0}^{(ni)} = b_{jn+1}^{(ni)} = 0$  et  $b_{0k}^{(ni)} = b_{n+1k}^{(ni)} = 0$ ).

\*  
\* \*

Nous disposons donc maintenant de 3 Définitions équivalentes des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

- La 1<sup>ère</sup> est donnée par la Définition 2-1.
- La 2<sup>ème</sup> est donnée par la Définition et le Théorème 2-5.
- La 3<sup>ème</sup> est donnée par la Définition 3-20.

Nous disposons aussi de 6 Définitions équivalentes de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , que nous rappelons ci-dessous.

3 Définitions ont été fournies dans le Chapitre 2 (cf. Définition et Théorème 2-5) :

- $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) =$  Commutant de la matrice  $N_n$  dans  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ ,
- $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) =$  ensemble des matrices bisymétriques dont les paramètres sont définis par les Relations ( $\text{R}_k$ ),
- $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$ , les matrices  $B_{ni}$  devant alors être prédéfinies.

3 nouvelles Définitions sont issues du présent Chapitre 3.

- $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  = ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  telles que toutes leurs colonnes  $C_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) vérifient la relation :  $C_k = B_k C_1$  - (cf. Définition 3-14).
- $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  = ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  telles que toutes leurs lignes  $L_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) vérifient la relation :  $L_k = L_1 B_k$  - (cf. Définition 3-14).
- $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  = Commutant de la matrice  $N_n$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  - (cf. Définition et Théorème 3-18).
- $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  = ensemble des matrices dont les coefficients vérifient les Relations des Voisins Immédiats ( $RVI_{jk}$ ) - (cf. Définition 3-19).

### ANNEXE / CHAPITRE 3

#### POLYNÔMES $P_n(\lambda)$ DE $\mathbb{R}[X]$ – POLYNÔMES $\hat{P}_n(\lambda)$ DE $\mathbb{B}[X]$

##### A3.1. Étude de la suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $a_n = \lambda a_{n-1} + a_{n-2}$ – Polynômes $P_n(\lambda)$ associés

Nous allons étudier la suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2 :  $a_n = \lambda a_{n-1} + a_{n-2}$ , avec :  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pour initialiser la suite, nous nous donnerons 2 nombres réels  $a_0$  et  $a_1$  arbitraires.

**Théorème A3-1.** Soit la suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$a_n = \lambda a_{n-1} + a_{n-2}, a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}, a_0 \text{ et } a_1 \text{ arbitraires}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le terme général  $a_n$  de cette suite s'exprime en fonction d'un couple quelconque de termes consécutifs  $(a_{n-i}, a_{n-i-1})$ , avec  $1 \leq i \leq n-1$ , de la façon suivante :

$$a_n = P_i(\lambda) a_{n-i} + P_{i-1}(\lambda) a_{n-i-1}$$

où  $P_i(\lambda)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , est une suite de polynômes vérifiant la relation de récurrence « fondatrice » :

$$P_i(\lambda) = \lambda P_{i-1}(\lambda) + P_{i-2}(\lambda) \quad (i \geq 2), \text{ avec } P_0(\lambda) = 1 \text{ et } P_1(\lambda) = \lambda.$$

$$\text{En particulier, pour } n \geq 2 : \quad a_n = P_{n-1}(\lambda) a_1 + P_{n-2}(\lambda) a_0$$

*Preuve :*

$$\text{On a : } a_n = \lambda a_{n-1} + a_{n-2}, a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}, a_0 \text{ et } a_1 \text{ arbitraires et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc, en posant :  $P_0(\lambda) = 1$  et  $P_1(\lambda) = \lambda$ , on obtient :

$$a_n = P_1(\lambda) a_{n-1} + P_0(\lambda) a_{n-2}, \text{ où } P_0(\lambda) \text{ et } P_1(\lambda) \text{ sont bien des polynômes de } \mathbb{R}[X] \text{ en } \lambda.$$

Démontrons la propriété annoncée par le théorème par récurrence sur le rang  $i$ .

Supposons à cet effet (hypothèse de récurrence) que l'on ait à un certain rang  $i$  (avec  $n \geq i + 2$ ) :  $a_n = P_i(\lambda) a_{n-i} + P_{i-1}(\lambda) a_{n-i-1}$  (1)

Remarquons que cette hypothèse est bien vérifiée pour  $i = 1$ .

$$\text{On a par ailleurs : } a_{n-i} = \lambda a_{n-i-1} + a_{n-i-2} \quad (2)$$

En reportant (2) dans (1) :

$$\begin{aligned} a_n &= P_i(\lambda) (\lambda a_{n-i-1} + a_{n-i-2}) + P_{i-1}(\lambda) a_{n-i-1} \\ a_n &= [\lambda P_i(\lambda) + P_{i-1}(\lambda)] a_{n-i-1} + P_{i-1}(\lambda) a_{n-i-2} \end{aligned}$$

$$\text{En posant : } P_{i+1}(\lambda) = \lambda P_i(\lambda) + P_{i-1}(\lambda), \text{ on obtient : } a_n = P_{i+1}(\lambda) a_{n-i-1} + P_i(\lambda) a_{n-i-2}$$

Le théorème est donc bien démontré et la suite de polynômes  $P_i(\lambda)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , vérifie bien la relation de récurrence annoncé :  $P_i(\lambda) = \lambda P_{i-1}(\lambda) + P_{i-2}(\lambda)$  ( $i \geq 2$ ), avec  $P_0(\lambda) = 1$  et  $P_1(\lambda) = \lambda$ .



Reste à calculer formellement les polynômes  $P_i(\lambda)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Tel est l'objet du théorème qui suit.

**Théorème A3-2.** Les polynômes  $P_n(\lambda)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définis par la relation de récurrence :

$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) + P_{n-2}(\lambda)$  ( $n \geq 2$ ), avec  $P_0(\lambda) = 1$  et  $P_1(\lambda) = \lambda$  ont les propriétés suivantes :

- (1)  $P_n(\lambda)$  est de degré  $n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- (2)  $P_n(\lambda)$  est pair pour  $n$  pair.  $P_n(\lambda)$  est impair pour  $n$  impair.
- (3) L'expression des polynômes  $P_n(\lambda)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est la suivante :

$$P_{2k}(\lambda) = \sum_{i=0}^k C_{k+i}^{k-i} \lambda^{2i}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$P_{2k+1}(\lambda) = \sum_{i=0}^k C_{k+i+1}^{k-i} \lambda^{2i+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- (4)  $\text{Valuation}(P_{2k}) = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ;  $\text{Valuation}(P_{2k+1}) = 1$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

*Preuve :*

Nous allons commencer par démontrer le point (3) en raisonnant par récurrence « à 2 étages » sur  $k$ .

En faisant  $k = 0$  dans les 2 expressions ci-dessus, il vient :

$$P_0(\lambda) = \sum_{i=0}^0 C_{k+i}^{k-i} \lambda^{2i} = C_0^0 \lambda^0 = 1 \quad \text{et} \quad P_1(\lambda) = \sum_{i=0}^0 C_{k+i+1}^{k-i} \lambda^{2i+1} = C_1^0 \lambda = \lambda$$

Les expressions données sont donc vérifiées pour  $k = 1$ .

Par hypothèse de récurrence, supposons que l'on ait bien :

$$P_{2k-1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i}^{k-i-1} \lambda^{2i+1} \quad \text{et} \quad P_{2k-2}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i-1}^{k-i-1} \lambda^{2i}$$

Calculons d'abord  $P_{2k}(\lambda)$  au moyen de la relation de récurrence :

$$P_{2k}(\lambda) = \lambda P_{2k-1}(\lambda) + P_{2k-2}(\lambda).$$

Il vient :

$$P_{2k}(\lambda) = \lambda \left[ \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i}^{k-i-1} \lambda^{2i+1} \right] + \left[ \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i-1}^{k-i-1} \lambda^{2i} \right]$$

$$P_{2k}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i}^{k-i-1} \lambda^{2i+2} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i-1}^{k-i-1} \lambda^{2i}$$

Effectuons le changement d'indice :  $j = i + 1$  dans le 1<sup>er</sup> signe  $\sum$ .

Il vient :

$$P_{2k}(\lambda) = \sum_{j=1}^k C_{k+j-1}^{k-j} \lambda^{2j} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i-1}^{k-i-1} \lambda^{2i}$$

$$P_{2k}(\lambda) = C_{2k-1}^0 \lambda^{2k} + \sum_{i=1}^{k-1} [C_{k+i-1}^{k-i} + C_{k+i-1}^{k-i-1}] \lambda^{2i} + C_{k-1}^{k-1} \lambda^0$$

Or, d'après la relation du Triangle de Pascal :  $C_{k+i-1}^{k-i} + C_{k+i-1}^{k-i-1} = C_{k+i}^{k-i}$  et donc :

$$P_{2k}(\lambda) = \sum_{i=0}^k C_{k+i}^{k-i} \lambda^{2i}, \text{ expression conforme à celle de l'hypothèse de récurrence.}$$

Calculons de même  $P_{2k+1}(\lambda)$  au moyen de la relation de récurrence :

$$P_{2k+1}(\lambda) = \lambda P_{2k}(\lambda) + P_{2k-1}(\lambda).$$

Il vient :

$$P_{2k+1}(\lambda) = \lambda \left[ \sum_{i=0}^k C_{k+i}^{k-i} \lambda^{2i} \right] + \left[ \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i}^{k-i-1} \lambda^{2i+1} \right]$$

$$P_{2k+1}(\lambda) = \sum_{i=0}^k C_{k+i}^{k-i} \lambda^{2i+1} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i}^{k-i-1} \lambda^{2i+1}$$

$$P_{2k+1}(\lambda) = C_{2k}^0 \lambda^{2k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} [C_{k+i}^{k-i} + C_{k+i}^{k-i-1}] \lambda^{2i+1}$$

Or, d'après la relation du Triangle de Pascal :  $C_{k+i}^{k-i} + C_{k+i}^{k-i-1} = C_{k+i+1}^{k-i}$  et donc :

$$P_{2k+1}(\lambda) = \lambda^{2k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i+1}^{k-i} \lambda^{2i+1}$$

$$P_{2k+1}(\lambda) = \sum_{i=0}^k C_{k+i+1}^{k-i} \lambda^{2i+1}, \text{ expression conforme à celle de l'hypothèse de récurrence.}$$

Le point (3) du théorème est donc établi.

Les points (1) et (2) en découlent immédiatement.

Concernant le point (4) :

$P_{2k}$  est pair.

Pour  $i = 0$ , le terme de degré 0 de  $P_{2k}$  est :  $C_k^k = 1$ . Donc :  $\text{Valuation}(P_{2k}) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ .

$P_{2k+1}$  est impair. Pour  $i = 0$ , le terme de degré 1 de  $P_{2k+1}$  est  $C_{k+1}^k = C_{k+1}^1 = k+1 > 0$ .

Donc :  $\text{Valuation}(P_{2k+1}) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$ .

Tous les points du Théorème A3-2 sont donc bien établis.

### A3.2. Propriétés des polynômes $P_n(\lambda)$

#### Théorème A3-3.

$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}$ , tels que :  $1 \leq j \leq i-1$  :  $P_i(\lambda) = P_j(\lambda) P_{i-j}(\lambda) + P_{j-1}(\lambda) P_{i-j-1}(\lambda)$

*Preuve :*

Par récurrence sur  $j$  avec :  $1 \leq j \leq i-1$ . Pour alléger l'écriture, nous écrivons simplement  $P_i$  en lieu et place de  $P_i(\lambda)$  et  $P_j$  en lieu et place de  $P_j(\lambda)$ .

Notons tout d'abord que la relation est bien vérifiée pour  $j=1$ , valeur pour laquelle on retrouve la relation de récurrence fondatrice des polynômes objets de notre étude :

$$P_i = \lambda P_{i-1} + P_{i-j-1}.$$

Supposons la propriété vraie à un certain rang  $j$  (hypothèse de récurrence), à savoir :

$$P_i = P_j P_{i-j} + P_{j-1} P_{i-j-1}$$

Supposons maintenant :  $j+1 \leq i-1$ , soit :  $j \leq i-2$ , de sorte que :  $i-(j+1)-1 \geq 0$  et que :

$$P_{i-(j+1)-1} = P_{i-j-2} \text{ existe bien.}$$

Démontrons que la propriété est bien vérifiée au rang  $j+1$ .

$$\text{D'une part : } P_{i-j} = P_1 P_{i-j-1} + P_{i-j-2} \quad (1)$$

$$\text{D'autre part : } P_{j+1} = P_1 P_j + P_{j-1} \quad (2)$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad P_{j-1} = P_{j+1} - P_1 P_j \quad (3)$$

Par hypothèse de récurrence :  $P_i = P_j P_{i-j} + P_{j-1} P_{i-j-1}$

En reportant (1) et (3) dans cette relation :

$$P_i = P_j (P_1 P_{i-j-1} + P_{i-j-2}) + (P_{j+1} - P_1 P_j) P_{i-j-1}$$

$$\text{soit : } P_i = P_1 P_j P_{i-j-1} + P_j P_{i-j-2} + P_{j+1} P_{i-j-1} - P_1 P_j P_{i-j-1}$$

et, après simplification :  $P_i = P_{j+1} P_{i-j-1} + P_j P_{i-j-2}$

Le théorème annoncé est donc démontré.

#### Théorème A3-4.

$$P_{2j} = P_j^2 + P_{j-1}^2 \quad \forall j \in \mathbb{N}^* ; \quad P_{2j+1} = P_j (P_{j+1} + P_{j-1}) \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

*Preuve :*

Le Théorème A1-3. assure que :  $P_i = P_j P_{i-j} + P_{j-1} P_{i-j-1}$  pour tout  $j$  tel que :  $1 \leq j \leq i-1$ .

- En supposant  $i$  pair et en posant :  $i = 2j$ ,  $j \in \mathbb{N}^*$ , à l'évidence :  $1 \leq j \leq i-1$ .

$$\text{Dès lors : } P_{2j} = P_j P_j + P_{j-1} P_{j-1} = P_j^2 + P_{j-1}^2$$

- En supposant  $i$  impair et en posant :  $i = 2j+1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , à l'évidence :  $1 \leq j \leq i-1$ .

$$\text{Dès lors : } P_{2j+1} = P_j P_{j+1} + P_{j-1} P_j = P_j (P_{j+1} + P_{j-1}).$$

**Théorème A3-5.**

(1)  $P_{2k-1}^2 - P_{2k-2} P_{2k} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$  ;  $P_{2k}^2 - P_{2k-1} P_{2k+1} = +1 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$ .

(2)  $\text{p.g.c.d.} (P_n, P_{n+1}) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ premiers entre eux, } \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Preuve :*

(1) Par récurrence forte sur  $k$ .

$$P_0 = 1, P_1 = \lambda, P_2 = \lambda^2 + 1, P_3 = \lambda^3 + 2\lambda.$$

$$P_1^2 - P_0 P_2 = \lambda^2 - 1 \cdot (\lambda^2 + 1) = -1 \quad \text{et} \quad P_2^2 - P_1 P_3 = (\lambda^2 + 1)^2 - \lambda(\lambda^3 + 2\lambda) = +1$$

Les relations (1) sont donc vraies pour  $k = 1$ .

Supposons les relations (1) vraies jusqu'au rang  $k$  (hypothèse de récurrence).

Comme :  $P_{2k+2} = \lambda P_{2k+1} + P_{2k}$ , on a :

$$P_{2k+1}^2 - P_{2k} P_{2k+2} = P_{2k+1}^2 - P_{2k} (\lambda P_{2k+1} + P_{2k}) = P_{2k+1} (P_{2k+1} - \lambda P_{2k}) - P_{2k}^2$$

$$\text{Or : } P_{2k+1} = \lambda P_{2k} + P_{2k-1} \text{ et donc : } P_{2k+1} - \lambda P_{2k} = P_{2k-1}.$$

$$\text{Par suite : } P_{2k+1}^2 - P_{2k} P_{2k+2} = P_{2k+1} P_{2k-1} - P_{2k}^2 = -1.$$

Ensuite, comme :  $P_{2k+3} = \lambda P_{2k+2} + P_{2k+1}$ , on a :

$$P_{2k+2}^2 - P_{2k+1} P_{2k+3} = P_{2k+2}^2 - P_{2k+1} (\lambda P_{2k+2} + P_{2k+1}) = P_{2k+2} (P_{2k+2} - \lambda P_{2k+1}) - P_{2k+1}^2$$

$$\text{Or : } P_{2k+2} = \lambda P_{2k+1} + P_{2k} \text{ et donc : } P_{2k+2} - \lambda P_{2k+1} = P_{2k}. \text{ Par suite :}$$

$$P_{2k+2}^2 - P_{2k+1} P_{2k+3} = P_{2k+2} P_{2k} - P_{2k+1}^2 = +1.$$

Le point (1) du théorème est donc bien établi.

(2) Le théorème de Bezout permet immédiatement de déduire des relations (1) que :

$$\text{p.g.c.d.} (P_n, P_{n+1}) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ et donc que :}$$

$$P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont premiers entre eux, } \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Remarque :*

Les polynômes  $P_n(\lambda)$  jouissent de nombreuses autres propriétés qui ne seront pas évoquées ici. Il existe notamment d'autres expressions formelles de ces polynômes. L'une d'elles évoque une certaine ressemblance avec les polynômes de Tchebychev  $T_n(x)$  de 1<sup>ère</sup> espèce, les lignes hyperboliques se substituant aux lignes trigonométriques. Le théorème qui suit est donné sans démonstration.

**Théorème A3-6.**

Les polynômes  $P_{2k}(\lambda)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et  $P_{2k+1}(\lambda)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , s'écrivent sous la forme paramétrée suivante (où l'on a posé :  $\lambda = 2 \text{sh } \theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ) :

$$P_{2k}(2 \text{sh } \theta) = \frac{\text{ch}(2k+1)\theta}{\text{ch } \theta}, \quad P_{2k+1}(2 \text{sh } \theta) = \frac{\text{sh}(2k+2)\theta}{\text{ch } \theta}.$$

**A3.3. Polynômes  $P_n(\lambda)$** **POLYNÔMES  $P_n(\lambda)$** 

$$P_0(\lambda) = 1$$

$$P_1(\lambda) = \lambda$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda$$

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 1$$

$$P_5(\lambda) = \lambda^5 + 4\lambda^3 + 3\lambda$$

$$P_6(\lambda) = \lambda^6 + 5\lambda^4 + 6\lambda^2 + 1$$

$$P_7(\lambda) = \lambda^7 + 6\lambda^5 + 10\lambda^3 + 4\lambda$$

$$P_8(\lambda) = \lambda^8 + 7\lambda^6 + 15\lambda^4 + 10\lambda^2 + 1$$

$$P_9(\lambda) = \lambda^9 + 8\lambda^7 + 21\lambda^5 + 20\lambda^3 + 5\lambda$$

$$P_{10}(\lambda) = \lambda^{10} + 9\lambda^8 + 28\lambda^6 + 35\lambda^4 + 15\lambda^2 + 1$$

$$P_{11}(\lambda) = \lambda^{11} + 10\lambda^9 + 36\lambda^7 + 56\lambda^5 + 35\lambda^3 + 6\lambda$$

$$P_{12}(\lambda) = \lambda^{12} + 11\lambda^{10} + 45\lambda^8 + 84\lambda^6 + 70\lambda^4 + 21\lambda^2 + 1$$

$$P_{13}(\lambda) = \lambda^{13} + 12\lambda^{11} + 55\lambda^9 + 120\lambda^7 + 126\lambda^5 + 56\lambda^3 + 7\lambda$$

$$P_{14}(\lambda) = \lambda^{14} + 13\lambda^{12} + 66\lambda^{10} + 165\lambda^8 + 210\lambda^6 + 126\lambda^4 + 28\lambda^2 + 1$$

$$P_{15}(\lambda) = \lambda^{15} + 14\lambda^{13} + 78\lambda^{11} + 220\lambda^9 + 330\lambda^7 + 252\lambda^5 + 84\lambda^3 + 8\lambda$$

$$P_{16}(\lambda) = \lambda^{16} + 15\lambda^{14} + 91\lambda^{12} + 286\lambda^{10} + 495\lambda^8 + 462\lambda^6 + 210\lambda^4 + 36\lambda^2 + 1$$

### A3.4. Préambule à la définition des Polynômes $\hat{P}_n(\lambda)$ de $\mathbb{B}[X]$

Nous allons dériver l'existence et les propriétés des polynômes  $\hat{P}_n(\lambda)$  appartenant à  $\mathbb{B}[X]$  de l'existence et des propriétés des polynômes  $P_n(\lambda)$  précédemment étudiés, appartenant à  $\mathbb{R}[X]$ .

#### A3.4.1. Coefficients $\hat{C}_n^p$ dans $\mathbb{B}$

Rappelons les points suivants.

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ . Si  $p \leq n$ , le nombre de combinaisons linéaires de  $p$  éléments pris dans l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  noté  $C_n^p$  vaut :  $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ . On a :  $C_n^0 = C_n^n = 1$ .

On prolonge la définition des  $C_n^p$  de la façon suivante :

- si  $p > n$  :  $C_n^p = 0$ ,
- si  $p \in \mathbb{Z}_-^*$  :  $C_n^p = 0$ .

Partant de là, nous allons introduire les coefficients  $\hat{C}_n^p$  à valeur dans  $\mathbb{B}$  de la façon suivante :  $\hat{C}_n^p = 0$  si  $C_n^p$  est nul ou pair ;  $\hat{C}_n^p = 1$  si  $C_n^p$  est impair.

Comme pour les  $C_n^p$  :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : \hat{C}_n^p = \hat{C}_n^{n-p}$$

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : \hat{C}_{n+1}^{p+1} = \hat{C}_n^{p+1} + \hat{C}_n^p$$

Cette dernière relation est génératrice du Triangle de Pascal dans  $\mathbb{B}$ .

Triangle de Pascal : $\hat{C}_n^p$ pour $n = 0$ à 8									
$n=0$ :									1
$n=1$ :								1	1
$n=2$ :							1	0	1
$n=3$ :						1	1	1	1
$n=4$ :					1	0	0	0	1
$n=5$ :				1	1	0	0	1	1
$n=6$ :			1	0	1	0	1	0	1
$n=7$ :		1	1	1	1	1	1	1	1
$n=8$ :	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Les résultats qui suivent sont données sans démonstration.

**Théorème A3-7.**

- (1)  $\hat{C}_n^p = \hat{0}$ ,  $1 \leq p < n$ , pour  $n = 2^v$ ,  $\forall v \in \mathbb{N}^*$ ,
- (2)  $\hat{C}_n^p = \hat{1}$ ,  $1 \leq p \leq n$ , pour  $n = 2^v - 1$ ,  $\forall v \in \mathbb{N}^*$ ,
- (3)  $\hat{C}_n^p = \hat{1}$  si et seulement si la décomposition en base 2 de  $p$  est une combinaison linéaire des seules puissances de 2 figurant dans la décomposition en base 2 de  $n$ .

*Note :* La proposition (3) entraîne les propositions (1) et (2).

**A3.4.2. Formule du Binôme de Newton**

La formule du Binôme de Newton reste applicable.

Si l'on désigne par  $A$  et  $B$  deux objets mathématiques (matrices, polynômes,...) à valeur dans  $\mathbb{B}$ , et sous réserve que le produit  $A \times B$  soit commutatif, on a la relation :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \hat{C}_n^k A^k B^{n-k}.$$

**A3.5. Définition des polynômes  $\hat{P}_n(\lambda)$**

Dans la Section 3.8. du présent Chapitre 3, nous avons été conduits, pour la démonstration du Théorème 3-17, à nous intéresser à la suite matricielle rappelée ci-dessous.

$A$  étant une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $C_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) désignait la  $k^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ .

$N_n$  désignait (comme toujours) la matrice  $B_2$  de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

La suite à étudier était alors :

$$C_{k+1} = N_n \cdot C_k + C_{k-1} \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

La colonne  $C_1$  était arbitraire, mais la colonne  $C_0$  devait être considérée comme nulle :

Nous allons lever certaines restrictions en considérant maintenant que :

- $A$  est une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .
- $B$  (qui se substitue à la matrice  $N_n$ ) est une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .
- L'indice  $k$  appartient à  $\mathbb{B}^*$ .
- Les valeurs des colonnes  $C_0$  et  $C_1$  sont arbitraires.

La suite (S) qui nous intéresse est alors la suivante :

$$C_{k+1} = B \cdot C_k + C_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}^*), \quad C_0 \text{ et } C_1 \text{ sont arbitraires.} \quad (\text{S})$$

En fait, c'est la forme même de cette suite matricielle qui nous a incité à étudier en tête de la présente Annexe la suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$a_n = \lambda a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{avec : } a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}, a_0 \text{ et } a_1 \text{ arbitraires, et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'étude faite plus haut nous permet maintenant d'énoncer le résultat suivant, qu'il convient de rapprocher du Théorème A3-1.

**Théorème A3-8.**

Soit la suite matricielle récurrente linéaire d'ordre 2 :  $C_{k+1} = N_n \cdot C_k + C_{k-1}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), dans laquelle :  $C_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ ,  $C_0$  et  $C_1$  étant arbitraires.

Le terme général  $C_k$  de cette suite s'exprime en fonction d'un couple quelconque de termes consécutifs  $(C_{k-i}, C_{k-i-1})$ , avec  $i \leq k-1$ , de la façon suivante :

$$C_k = \hat{P}_i(B) C_{k-i} + \hat{P}_{i-1}(B) C_{k-i-1}$$

où  $\hat{P}_i(\lambda)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , est une suite de polynômes vérifiant la relation de récurrence :

$$\hat{P}_i(\lambda) = \lambda \hat{P}_{i-1}(\lambda) + \hat{P}_{i-2}(\lambda) \quad (i \geq 2)$$

avec  $\hat{P}_0(\lambda) = 1$  et  $\hat{P}_1(\lambda) = \lambda$ .

On a donc, en particulier, pour  $k \geq 2$  :  $C_k = \hat{P}_{k-1}(B) C_1 + \hat{P}_{k-2}(B) C_0$

*Preuve* : Elle suit en tout point celle effectuée pour le Théorème A3-1.

Nous pouvons également énoncer le théorème qui suit, qu'il convient de rapprocher du Théorème A3-2.

**Théorème A3-9.**

Les polynômes  $\hat{P}_n(\lambda)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définis par la relation de récurrence :

$\hat{P}_n(\lambda) = \lambda \hat{P}_{n-1}(\lambda) + \hat{P}_{n-2}(\lambda)$  ( $n \geq 2$ ) avec  $\hat{P}_0(\lambda) = 1$  et  $\hat{P}_1(\lambda) = \lambda$  ont les propriétés suivantes :

- (1)  $\hat{P}_n(\lambda)$  est de degré  $n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- (2)  $\hat{P}_n(\lambda)$  est pair pour  $n$  pair.  $\hat{P}_n(\lambda)$  est impair pour  $n$  impair.
- (3) L'expression des polynômes  $\hat{P}_n(\lambda)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est la suivante :

$$\hat{P}_{2k}(\lambda) = \sum_{i=0}^k \hat{C}_{k+i}^{k-i} \lambda^{2i}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\hat{P}_{2k+1}(\lambda) = \sum_{i=0}^k \hat{C}_{k+i+1}^{k-i} \lambda^{2i+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- (4) Valuation  $(\hat{P}_{2k}) = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  ; Valuation  $(\hat{P}_{4k+1}) = 1$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  ; Valuation  $(\hat{P}_{4k+3}) > 1$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .



*Preuve :*

Concernant les points (1), (2) et (3), elle suit, pas à pas, la démonstration du Théorème A3-2.

Concernant le point (4) :

$\hat{P}_{2k}$  est pair.

Pour  $i = 0$ , le terme de degré 0 de  $\hat{P}_{2k}$  est :  $C_k^k = 1$ . Donc : Valuation ( $\hat{P}_{2k}$ ) = 0,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

$\hat{P}_{2k+1}$  est impair.

Pour  $i = 0$ , le terme de degré 1 de  $\hat{P}_{2k+1}$  est  $\hat{C}_{k+1}^k = \hat{C}_{k+1}^1 \equiv k+1 \pmod{2}$ , qui est tantôt pair, tantôt impair.

Si l'on pose :  $k = 2h$ ,  $\hat{C}_{2h+1}^{2h} = \hat{C}_{2h+1}^1 \equiv 2h+1 \pmod{2} = \hat{1}$ . D'où le résultat annoncé.

Si l'on pose :  $k = 2h+1$ ,  $\hat{C}_{2h+2}^{2h+1} = \hat{C}_{2h+2}^1 \equiv 2h+2 \pmod{2} = \hat{0}$ . D'où le résultat annoncé.

### A3.6. Propriétés des polynômes $\hat{P}_n(\lambda)$

Le théorème qui suit est à rapprocher du Théorème A3-3.

#### Théorème A3-10.

$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}$ , tels que :  $1 \leq j \leq i-1$  :  $\hat{P}_i(\lambda) = \hat{P}_j(\lambda) \hat{P}_{i-j}(\lambda) + \hat{P}_{j-1}(\lambda) \hat{P}_{i-j-1}(\lambda)$ .

*Preuve :*

Elle est identique à la démonstration du Théorème A3-3 concernant les polynômes  $P_n(\lambda)$ .

Le théorème qui suit est à rapprocher du Théorème A3-4.

#### Théorème A3-11.

$\hat{P}_{2j} = \hat{P}_j^2 + \hat{P}_{j-1}^2 = (\hat{P}_j + \hat{P}_{j-1})^2 \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$  ;  $\hat{P}_{2j+1} = \hat{P}_1 \hat{P}_j^2 = \lambda \hat{P}_j^2 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ .

*Preuve :*

Elle est analogue à la démonstration du Théorème A3-4 concernant les polynômes  $P_n(\lambda)$ .

Concernant les polynômes d'indice pair, cette démonstration aboutit à :

$\hat{P}_{2j} = \hat{P}_j^2 + \hat{P}_{j-1}^2$ , et dès lors :  $\hat{P}_{2j} = (\hat{P}_j + \hat{P}_{j-1})^2$ .

Concernant les polynômes d'indice impair, cette démonstration aboutit à :

$\hat{P}_{2j+1} = \hat{P}_j (\hat{P}_{j+1} + \hat{P}_{j-1})$ , mais dans le cas d'espèce :

$\hat{P}_{j+1} = \lambda \hat{P}_j + \hat{P}_{j-1} = \hat{P}_1 \hat{P}_j + \hat{P}_{j-1}$ , et donc :  $\hat{P}_{j+1} + \hat{P}_{j-1} = \lambda \hat{P}_j = \hat{P}_1 \hat{P}_j$ .

Dès lors :  $\hat{P}_{2j+1} = \hat{P}_1 \hat{P}_j^2 = \lambda \hat{P}_j^2$ .

#### Théorème A3-12.

$\hat{P}_{2^n-1} = \lambda^{2^n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Preuve :*

Démontrons la relation annoncée par récurrence sur  $n$ .

Constatons déjà que :  $\hat{P}_1(\lambda) = \lambda$ , que :  $\hat{P}_3(\lambda) = \lambda^3$  et que :  $\hat{P}_7(\lambda) = \lambda^7$ .

La relation est donc vraie pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  et  $n = 3$ .

Supposons-la établie au rang  $n = k$  (hypothèse de récurrence). On a donc, par hypothèse :

$$\hat{P}_{2^k-1} = \lambda^{2^k-1}.$$

D'après le Théorème A3-11 :  $\hat{P}_{2^{j+1}} = \hat{P}_1 \hat{P}_j^2 = \lambda \hat{P}_j^2, \forall j \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Donc : } \hat{P}_{2^{k+1}-1} = \lambda \hat{P}_{2^k-1}^2$$

Et donc :

$$\hat{P}_{2^{k+1}-1} = \lambda \left[ \lambda^{2^k-1} \right]^2 = \lambda \left[ \lambda^{2^{k+1}-2} \right] = \lambda^{2^{k+1}-1}$$

Et le théorème est établi.

Le théorème qui suit est à rapprocher du Théorème A3-5.

### **Théorème A3-13.**

$$(1) \hat{P}_n^2 + \hat{P}_{n-1} \hat{P}_{n+1} = \hat{1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$(2) \text{p.g.c.d.}(\hat{P}_n, \hat{P}_{n+1}) = 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \hat{P}_n \text{ et } \hat{P}_{n+1} \text{ premiers entre eux, } \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Preuve :*

Identique à celle du Théorème A3-5, relatif aux polynômes  $P_n(\lambda)$ .

### **Théorème A3-14.**

$$(1) \hat{P}_{2k} = \lambda \hat{P}_k \hat{P}_{k-1} + \hat{1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$(2) \hat{P}_{2k+1} = \lambda \hat{P}_k^2 = \hat{P}_1 \hat{P}_k^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Preuve :*

(2) Il s'agit en fait d'une relation connue : elle fait l'objet du Théorème A3-11, Point (2). Elle n'est mentionnée ici qu'en raison du parallélisme entre (1) et (2).

$$(1) \hat{P}_{2k} = \hat{P}_k^2 + \hat{P}_{k-1}^2 \quad (\text{Cf. Théorème A3-11}). \text{ Donc :}$$

$$\hat{P}_{2k} + \hat{1} = \hat{P}_k^2 + \hat{P}_{k-1}^2 + \hat{1} = (\hat{P}_k^2 + \hat{1}) + \hat{P}_{k-1}^2$$

D'après le Théorème A3-13 Point (1) :  $\hat{P}_k^2 + \hat{1} = \hat{P}_{k-1} \hat{P}_{k+1}$ . Donc :

$$\hat{P}_{2k} + \hat{1} = \hat{P}_{k-1} \hat{P}_{k+1} + \hat{P}_{k-1}^2 = \hat{P}_{k-1} (\hat{P}_{k+1} + \hat{P}_{k-1}) = \hat{P}_{k-1} (\lambda \hat{P}_k) = \lambda \hat{P}_k \hat{P}_{k-1}$$

Le théorème est donc établi.

**Théorème A3-15.**

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2 : \hat{P}_i(\lambda) = \hat{P}_{i+k}(\lambda) \hat{P}_{k-2}(\lambda) + \hat{P}_{i+k-1}(\lambda) \hat{P}_{k-1}(\lambda)$$

*Remarques préliminaires :*

- 1) On peut rapprocher cette relation de celle énoncée par le Théorème A3-10, à savoir :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \text{ tels que } : 1 \leq j \leq i-1 : \hat{P}_i(\lambda) = \hat{P}_j(\lambda) \hat{P}_{i-j}(\lambda) + \hat{P}_{j-1}(\lambda) \hat{P}_{i-j-1}(\lambda).$$

Cette dernière relation établit en effet que tout polynôme  $\hat{P}_i(\lambda)$  peut s'exprimer sous la forme de la somme de produits de polynômes de même type, de degré inférieur à celui de  $\hat{P}_i(\lambda)$ .

Le Théorème A3-15 énonce, lui, que tout polynôme  $\hat{P}_i(\lambda)$  peut aussi s'exprimer sous la forme de la somme de produits de polynômes de même type, de degré supérieur à celui de  $\hat{P}_i(\lambda)$ . Il est clair que tous les termes du membre de droite de degré supérieur à  $i$  s'annulent donc nécessairement.

- 2) La relation exprimée par le Théorème A3-15 généralise en fait la relation de récurrence fondatrice des polynômes  $\hat{P}_i(\lambda)$ .

En effet, pour  $k = 2$ , on retrouve cette dernière sous la forme :

$$\hat{P}_i(\lambda) = \hat{P}_{i+2}(\lambda) \hat{P}_0(\lambda) + \hat{P}_{i+1}(\lambda) \hat{P}_1(\lambda) \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

soit encore, sous forme plus « classique » :

$$\hat{P}_i(\lambda) = \lambda \hat{P}_{i+1}(\lambda) + \hat{P}_{i+2}(\lambda) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

En faisant varier  $k$ , on obtient plus généralement les relations suivantes :

$$\text{- pour } k = 3 : \quad \hat{P}_i(\lambda) = \hat{P}_{i+3}(\lambda) \hat{P}_1(\lambda) + \hat{P}_{i+2}(\lambda) \hat{P}_2(\lambda) \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

$$\text{- pour } k = 4 : \quad \hat{P}_i(\lambda) = \hat{P}_{i+4}(\lambda) \hat{P}_2(\lambda) + \hat{P}_{i+3}(\lambda) \hat{P}_3(\lambda) \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

et ainsi de suite.

- 3) La relation exprimée par le Théorème A3-15 inclut en outre, comme cas particulier, la relation (1) exprimée par le Théorème A3-13. En effet, pour  $i = 0$ , la relation exprimée par le Théorème A3-15 prend la forme :

$$\hat{P}_0(\lambda) = \hat{P}_k(\lambda) \hat{P}_{k-2}(\lambda) + \hat{P}_{k-1}(\lambda) \hat{P}_{k-1}(\lambda) \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2,$$

$$\text{soit encore : } \hat{1} = \hat{P}_k(\lambda) \hat{P}_{k-2}(\lambda) + \hat{P}_{k-1}^2(\lambda) \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Il s'agit bien là de la relation (1) exprimée par le Théorème A3-13.

*Démonstration du Théorème A3-15 :*

Par commodité d'écriture, nous noterons, dans toute la démonstration qui suit,  $\hat{P}_i(\lambda)$  sous la forme abrégée  $\hat{P}_i$ .

$i \in \mathbb{N}$  étant fixé, nous allons démontrer le Théorème A3-15, par récurrence sur  $k$ ,  $k$  entier  $\geq 2$ .

Pour initialiser la récurrence, vérifions la validité du Théorème A3-15 pour  $k = 2$ , puis pour  $k = 3$ .

Pour  $k = 2$ , nous avons déjà noté que la relation à démontrer n'est autre que la relation la fondatrice des polynômes  $\hat{P}_i(\lambda)$  (cf. Remarque 2 ci-dessus).

Pour  $k = 3$ , il s'agit d'établir la relation :  $\hat{P}_i = \hat{P}_{i+3} \hat{P}_1 + \hat{P}_{i+2} \hat{P}_2$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ .

Comme  $\hat{P}_2 = \hat{P}_1^2 + \hat{P}_0$  et comme  $\hat{P}_1 \hat{P}_{i+3} = \hat{P}_{i+2} + \hat{P}_{i+4}$  :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{i+3} \hat{P}_1 + \hat{P}_{i+2} \hat{P}_2 &= \hat{P}_1 \hat{P}_{i+3} + (\hat{P}_1^2 + \hat{P}_0) \hat{P}_{i+2} = \hat{P}_{i+2} + \hat{P}_{i+4} + \hat{P}_1^2 \hat{P}_{i+2} + \hat{P}_{i+2} \\ &= \hat{P}_{i+4} + \hat{P}_1^2 \hat{P}_{i+2} = \hat{P}_{i+4} + \hat{P}_1 (\hat{P}_1 \hat{P}_{i+2}) \end{aligned}$$

Comme  $\hat{P}_1 \hat{P}_{i+2} = \hat{P}_{i+1} + \hat{P}_{i+3}$  :

$$\hat{P}_{i+3} \hat{P}_1 + \hat{P}_{i+2} \hat{P}_2 = \hat{P}_{i+4} + \hat{P}_1 (\hat{P}_{i+1} + \hat{P}_{i+3}) = \hat{P}_{i+4} + \hat{P}_1 \hat{P}_{i+1} + \hat{P}_1 \hat{P}_{i+3}$$

Et comme :  $\hat{P}_1 \hat{P}_{i+1} = \hat{P}_i + \hat{P}_{i+2}$  et  $\hat{P}_1 \hat{P}_{i+3} = \hat{P}_{i+2} + \hat{P}_{i+4}$ , il vient :

$$\hat{P}_{i+3} \hat{P}_1 + \hat{P}_{i+2} \hat{P}_2 = \hat{P}_{i+4} + (\hat{P}_i + \hat{P}_{i+2}) + (\hat{P}_{i+2} + \hat{P}_{i+4}) = \hat{P}_i.$$

La relation est donc vraie pour  $k = 3$ .

Nous allons maintenant admettre (hypothèse de récurrence) que la relation exprimée par le Théorème A3-15 est vraie au rang  $k-1$  ainsi qu'au rang  $k$  (on suppose :  $k \geq 3$ ).

On a donc, par hypothèse :

$$\hat{P}_i = \hat{P}_{i+k-1} \hat{P}_{k-3} + \hat{P}_{i+k-2} \hat{P}_{k-2} \quad (\text{a}) \quad \text{et} \quad \hat{P}_i = \hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-2} + \hat{P}_{i+k-1} \hat{P}_{k-1} \quad (\text{b})$$

Calculons alors :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{i+k+1} \hat{P}_{k-1} + \hat{P}_{i+k} \hat{P}_k &= (\hat{P}_1 \hat{P}_{i+k} + \hat{P}_{i+k-1}) (\hat{P}_1 \hat{P}_{k-2} + \hat{P}_{k-3}) + (\hat{P}_1 \hat{P}_{i+k-1} + \hat{P}_{i+k-2}) (\hat{P}_1 \hat{P}_{k-1} + \hat{P}_{k-2}) \\ &= \hat{P}_1^2 (\hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-2} + \hat{P}_{i+k-1} \hat{P}_{k-1}) + \hat{P}_1 (\hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-3} + \hat{P}_{i+k-1} \hat{P}_{k-2} + \hat{P}_{i+k-1} \hat{P}_{k-2} + \hat{P}_{i+k-2} \hat{P}_{k-1}) \\ &\quad + \hat{P}_{i+k-1} \hat{P}_{k-3} + \hat{P}_{i+k-2} \hat{P}_{k-2} \end{aligned}$$

En utilisant (b) dans le 1<sup>er</sup> terme et (a) le dernier terme, il vient, après simplification :

$$\hat{P}_{i+k+1} \hat{P}_{k-1} + \hat{P}_{i+k} \hat{P}_k = \hat{P}_1^2 \hat{P}_i + \hat{P}_1 (\hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-3} + \hat{P}_{i+k-2} \hat{P}_{k-1}) + \hat{P}_i.$$

Calculons  $\hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-3} + \hat{P}_{i+k-2} \hat{P}_{k-1}$  :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-3} + \hat{P}_{i+k-2} \hat{P}_{k-1} &= \hat{P}_{i+k} (\hat{P}_1 \hat{P}_{k-2} + \hat{P}_{k-1}) + \hat{P}_{k-1} (\hat{P}_1 \hat{P}_{i+k-1} + \hat{P}_{i+k}) \\ &= \hat{P}_1 \hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-2} + \hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-1} + \hat{P}_1 \hat{P}_{k-1} \hat{P}_{i+k-1} + \hat{P}_{k-1} \hat{P}_{i+k} \end{aligned}$$

En simplifiant, puis en utilisant (b), il vient :

$$\hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-3} + \hat{P}_{i+k-2} \hat{P}_{k-1} = \hat{P}_1 (\hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-2} + \hat{P}_{k-1} \hat{P}_{i+k-1}) = \hat{P}_1 \hat{P}_i$$

Par suite :

$$\hat{P}_{i+k+1} \hat{P}_{k-1} + \hat{P}_{i+k} \hat{P}_k = \hat{P}_1^2 \hat{P}_i + \hat{P}_1^2 \hat{P}_i + \hat{P}_i = \hat{P}_i.$$

La relation à démontrer est donc vraie au rang  $k+1$ .

Le Théorème A3-15 est donc établi.

*Remarque :*

Les polynômes  $P_n(\lambda)$  jouissent de nombreuses autres propriétés qui ne seront pas évoquées ici. Nous nous contenterons d'énoncer la proposition qui suit :

**Théorème A3-16.**

La définition des polynômes  $\hat{P}_n(\lambda)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , peut être prolongée à  $n \in \mathbb{Z}$  au moyen de la relation de récurrence fondatrice des polynômes  $\hat{P}_n(\lambda)$ , étendue à tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$\hat{P}_n(\lambda) = \lambda \hat{P}_{n-1}(\lambda) + \hat{P}_{n-2}(\lambda), \text{ avec } \hat{P}_0(\lambda) = 1 \text{ et } \hat{P}_1(\lambda) = \lambda.$$

On a alors :  $\hat{P}_{-1}(\lambda) = 0$ ,  $\hat{P}_{-2}(\lambda) = 1$ ,  $\hat{P}_{-3}(\lambda) = \lambda$ , ... et plus généralement :

$$\hat{P}_{-i}(\lambda) = \hat{P}_{i-2}(\lambda), \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Moyennant cette extension, les propriétés énoncées par les Théorèmes A3-10, A3-11, A3-13, A3-14 et A3-15 relatives aux polynômes  $\hat{P}_n(\lambda)$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , restent valables pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

On a donc (en notant systématiquement  $\hat{P}_i(\lambda)$  sous la forme abrégée  $\hat{P}_i$ ) :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{Z}, \forall j \in \mathbb{Z} & : \hat{P}_i = \hat{P}_j \hat{P}_{i-j} + \hat{P}_{j-1} \hat{P}_{i-j-1} \\ \forall j \in \mathbb{Z} & : \hat{P}_{2j} = \hat{P}_j^2 + \hat{P}_{j-1}^2 = (\hat{P}_j + \hat{P}_{j-1})^2 ; \hat{P}_{2j+1} = \hat{P}_1 \hat{P}_j^2 = \lambda \hat{P}_j^2 \\ \forall n \in \mathbb{Z} & : \hat{P}_n^2 + \hat{P}_{n-1} \hat{P}_{n+1} = \hat{1} \\ \forall k \in \mathbb{Z} & : \hat{P}_{2k} = \lambda \hat{P}_k \hat{P}_{k-1} + \hat{1} \\ \forall i \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z} & : \hat{P}_i = \hat{P}_{i+k} \hat{P}_{k-2} + \hat{P}_{i+k-1} \hat{P}_{k-1} \end{aligned}$$

**A3.7. Polynômes  $\hat{P}_n(\lambda)$**

POLYNÔMES  $\hat{P}_n(\lambda)$

$$\hat{P}_0(\lambda) = 1$$

$$\hat{P}_1(\lambda) = \lambda$$

$$\hat{P}_2(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

$$\hat{P}_3(\lambda) = \lambda^3$$

$$\hat{P}_4(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + 1$$

$$\hat{P}_5(\lambda) = \lambda^5 + \lambda$$

$$\hat{P}_6(\lambda) = \lambda^6 + \lambda^4 + 1$$

$$\hat{P}_7(\lambda) = \lambda^7$$

$$\hat{P}_8(\lambda) = \lambda^8 + \lambda^6 + \lambda^4 + 1$$

$$\hat{P}_9(\lambda) = \lambda^9 + \lambda^5 + \lambda$$

$$\hat{P}_{10}(\lambda) = \lambda^{10} + \lambda^8 + \lambda^4 + \lambda^2 + 1$$

$$\hat{P}_{11}(\lambda) = \lambda^{11} + \lambda^3$$

$$\hat{P}_{12}(\lambda) = \lambda^{12} + \lambda^{10} + \lambda^8 + \lambda^2 + 1$$

$$\hat{P}_{13}(\lambda) = \lambda^{13} + \lambda^9 + \lambda$$

$$\hat{P}_{14}(\lambda) = \lambda^{14} + \lambda^{12} + \lambda^8 + 1$$

$$\hat{P}_{15}(\lambda) = \lambda^{15}$$

$$\hat{P}_{16}(\lambda) = \lambda^{16} + \lambda^{14} + \lambda^{12} + \lambda^8 + 1$$



## CHAPITRE 4

### Déterminant des matrices $B_{ni}$ , $1 \leq i \leq n$ , de la Base Canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

*Note :*

Pour la définition du déterminant d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , se référer à l'Annexe du présent chapitre.

#### 4.1. Introduction

Nous noterons dans ce chapitre les matrices de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sous la forme  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Le Tableau constituant la Section 4.2. du présent chapitre fournit la valeur du déterminant des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq n \leq 16$ .

Le calcul a été effectué au moyen d'un programme informatique développé en Visual Basic résolvant des équations matricielles de la forme :

$$A \cdot X = B$$

où  $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{B})$  est l'inconnue, où  $A$  est une matrice donnée de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  et où  $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{B})$  représente le second membre.

Nous nous sommes servis de ce programme pour résoudre des équations homogènes du type :

$$B_{ni} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq n \leq 16.$$

La résolution d'une telle équation homogène permet de déterminer si cette dernière possède

d'autres solutions que la solution nulle:  $X = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}_n$ .

- Si l'équation considérée n'admet que la solution nulle, on en déduit alors que :  $\det(B_{ni}) = 1$ , pour la valeur de  $i$  et pour l'ordre  $n$  considérés,
- Si l'équation considérée admet d'autres solutions que la solution nulle, on en déduit alors que :  $\det(B_{ni}) = 0$ , pour la valeur de  $i$  et pour l'ordre  $n$  considérés.

L'examen des lignes et des colonnes du Tableau 4.2. met en évidence l'existence de périodicités dans les valeurs des déterminants  $\det(B_{ni})$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq n \leq 16$ .

Les Théorèmes 4-1 et 4-4 de la Section 4.3. fournissent l'explication de ces périodicités.



**4.2. Tableau donnant les déterminants des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq n \leq 16$ , de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$**

Ordre	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$	$B_8$	$B_9$	$B_{10}$	$B_{11}$	$B_{12}$	$B_{13}$	$B_{14}$	$B_{15}$	$B_{16}$
1	1															
2	1	1														
3	1	0	1													
4	1	1	1	1												
5	1	0	0	0	1											
6	1	1	1	1	1	1										
7	1	0	1	0	1	0	1									
8	1	1	0	1	1	0	1	1								
9	1	0	1	0	0	0	1	0	1							
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
11	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1					
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
13	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1			
14	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1		
15	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

### 4.3. Théorème du déterminant des matrices $B_{ni}$ , $1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

**Théorème 4-1 - Théorème du déterminant des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  (1<sup>ère</sup> formulation).**

Soit  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\det(B_{ni}) = 1 \Leftrightarrow i \text{ est premier avec } n+1$$

ou :

$$\det(B_{ni}) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(i, n+1) = 1$$

*Remarques :*

1 est premier avec  $n+1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , puisque  $\text{pgcd}(1, n+1) = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Par suite :

$$\det(B_{n1}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$n$  est premier avec  $n+1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , puisque  $\text{pgcd}(n, n+1) = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Par suite :

$$\det(B_{n1}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lorsque le nombre  $n+1$  est premier (ceci se produit dans le Tableau 4.2. pour les ordres  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=4$ ,  $n=6$ ,  $n=10$ ,  $n=12$ ,  $n=16$ ), alors  $\text{pgcd}(i, n+1) = 1$ ,  $\forall i = 1$  à  $n$ . Par suite, dans ce cas-là :  $\det(B_{ni}) = 1$ ,  $\forall i = 1$  à  $n$ .

On vérifiera plus généralement que le contenu du Tableau 4.2. est en parfaite adéquation avec le Théorème 4-1 ci-dessus.

Nous allons proposer une deuxième formulation du Théorème 4-1 rigoureusement équivalente à la première.

Comme on n'a pas manqué de le remarquer, l'ensemble des coefficients non nuls des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dessinent une configuration en forme de rectangle formé de chiffres 1, dont les côtés sont orientés selon les 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> diagonales de la matrice considérée.

Ceci nous amène à poser les définitions suivantes.

**Définition et Théorème 4-2.** Soit  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

L'ensemble des chiffres 1 qui y figurent dessine une configuration en forme de rectangle.

Nous appellerons longueur (notée  $\mathcal{L}$ ) de la matrice  $B_{ni}$ , le nombre de chiffres 1 portés par l'un des côtés de ce rectangle, parallèle à la 1<sup>ère</sup> diagonale.

Nous appellerons largeur (notée  $\mathcal{l}$ ) de la matrice  $B_{ni}$ , le nombre de chiffres 1 portés par l'un des côtés de ce rectangle, parallèle à la 2<sup>ème</sup> diagonale.

On a :  $\mathcal{l} = i$  et  $\mathcal{L} = n - i + 1$ .

Nous dénommerons matrice-losange toute matrice  $B_{2\nu+1, \nu+1}$  d'ordre  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ . On a alors :  $\mathcal{L} = \mathcal{l} = \nu + 1$ .

*Preuve :*

On établit sans peine les relations :  $\ell = i$  et  $\mathcal{L} = n - i + 1$ .

*Remarques :*

- 1) Lorsque  $1 \leq i \leq E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ , on a :  $\ell < \mathcal{L}$ . Lorsque  $E\left(\frac{n+1}{2}\right) < i \leq n$ , on a :  $\ell > \mathcal{L}$ .
- 2) Lorsque  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), pour  $i = \nu + 1$ , la matrice  $B_{2\nu+1, \nu+1}$  est une matrice-losange dont l'ensemble des éléments non nuls ont la forme d'un carré « reposant sur la pointe ». C'est la seule matrice telle que :  $\ell = \mathcal{L}$ .

**Lemme 4-3.** Soit  $B_{n,i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{pgcd}(i, n+1) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(\mathcal{L}, \ell) = 1$$

*Preuve :*

Démonstration immédiate.

**Théorème 4-4 - Théorème du déterminant des matrices  $B_{n,i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  (2<sup>ème</sup> formulation).**

Soit  $B_{n,i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\det(B_{n,i}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{L} \text{ est premier avec } \ell$$

ou :

$$\det(B_{n,i}) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(\mathcal{L}, \ell) = 1$$

*Remarque :*

La 2<sup>ème</sup> formulation du Théorème résulte directement du Lemme 4-3.

*Preuve des Théorèmes 4-1 et 4-4 :*

La démonstration de ce théorème repose sur une utilisation originale de l'algorithme d'Euclide appliqué à la recherche du pgcd de 2 entiers.

La suite de ce chapitre est consacrée à cette démonstration. Celle-ci a été découpée en 6 Étapes.

L'idée directrice en est assez simple mais nécessite l'introduction d'une série de définitions, qui fait l'objet de la 1<sup>ère</sup> Étape.

\*  
\* \*

1<sup>ère</sup> Etape : Définitions préalables

Nous utiliserons dans ce qui suit, pour plus de lisibilité, une représentation dite « non conventionnelle » du déterminant d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ . Celle-ci est définie comme suit.

**Convention de représentation 4-5.**

*Nous représenterons le déterminant d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  sous forme d'un tableau de dimensions  $n \times n$ , constitué de cases carrées.*

*Toute case correspondant à un coefficient non nul (« case non nulle »), qui contient normalement la valeur  $1 \in \mathbb{B}$ , apparaîtra colorée.*

*Toute case correspondant à un coefficient nul (« case nulle »), qui contient normalement la valeur  $0 \in \mathbb{B}$ , sera laissée à blanc. (On la désignera aussi de ce fait sous le vocable de : « case blanche »).*

*Remarque 1 :*

Cette représentation « non conventionnelle » du déterminant d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  est à rapprocher de celle utilisée, pour les matrices elles-mêmes, au Chapitre 1 (cf. Note à la suite de la Définition 1-22 et se référer, d'une manière générale, à la Section 1.3.4. du Chapitre 1 ; cf. également Section 3.4.2.1. du Chapitre 3 : Représentation simplifiée des matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ ).

*Remarque 2 :*

S'agissant du déterminant  $\det(B_{n_i})$  d'une matrice  $B_{n_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , nous adopterons le même vocabulaire (notamment : longueur  $\mathcal{L}$ , largeur  $\mathcal{L}$ ) que pour la matrice  $B_{n_i}$  elle-même (se reporter à Définition et Théorème 4-2).

*Exemples :*

Représentation « non conventionnelle » de  $\det(B_{2\nu+1 \nu+1})$  à l'ordre  $n = 2\nu + 1$ , pour  $n = 1, 3$  et  $5$  ( $\nu = 0$  à  $2$ ).

$$\det [1] = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = 1 ;$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} = 0 ;$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & & \\ \hline & 1 & & 1 & \\ \hline 1 & & 1 & & 1 \\ \hline & 1 & & 1 & \\ \hline & & 1 & & \\ \hline \end{array} = 0.$$

**Définition 4-6.** Soit  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Posons  $B_{ni} = [b_{pq}^{(ni)}]$ ,  $1 \leq p \leq n$ ,  $1 \leq q \leq n$ .

Soient  $\mathcal{L}$  sa longueur et  $\ell$  sa largeur. (Rappelons les relations :  $\ell = i$  et  $\mathcal{L} = n - i + 1$ ).

Soit  $\det(B_{ni})$  le déterminant de  $B_{ni}$  (dans sa représentation « non conventionnelle »).

Nous dénommerons « 1-rectangle de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  » (ou en abrégé : 1-rectangle  $\mathcal{L} \times \ell$ ) l'ensemble des cases non nulles de  $B_{ni}$ , complété par l'ensemble des cases nulles (blanches) de  $B_{ni}$ , situées entre 2 cases non nulles (s'il en existe).

Nous dirons que le 1-rectangle de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  correspond (ou : est associé) à la matrice  $B_{ni}$ . Inversement, nous dirons que la matrice  $B_{ni}$  correspond (ou : est associée) au 1-rectangle de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$ .

Par extension, nous dirons aussi que le 1-rectangle de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  correspond (ou : est associé) au déterminant  $\det(B_{ni})$ , ou que le déterminant  $\det(B_{ni})$  correspond (ou : est associé) au 1-rectangle de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$ .

Nous appellerons côté supérieur gauche de  $B_{ni}$  ou de  $\det(B_{ni})$  l'ensemble des éléments  $b_{pq}^{(ni)}$  tels que :  $p + q = i + 1$  ( $1 \leq p \leq i$  ou  $1 \leq q \leq i$  ou  $1 \leq p \leq \ell$  ou  $1 \leq q \leq \ell$ ).

Nous appellerons côté supérieur droit de  $B_{ni}$  ou de  $\det(B_{ni})$  l'ensemble des éléments  $b_{pq}^{(ni)}$  tels que :  $q - p = i - 1$  ( $1 \leq p \leq n - i + 1$  ou  $i \leq q \leq n$  ou  $1 \leq p \leq \mathcal{L}$  ou  $\ell \leq q \leq n$ ).

Nous appellerons côté inférieur gauche de  $B_{ni}$  ou de  $\det(B_{ni})$  l'ensemble des éléments  $b_{pq}^{(ni)}$  tels que :  $p - q = i - 1$  ( $i \leq p \leq n$  ou  $1 \leq q \leq n - i + 1$  ou  $\ell \leq p \leq n$  ou  $1 \leq q \leq \mathcal{L}$ ).

Nous appellerons côté inférieur droit de  $B_{ni}$  ou de  $\det(B_{ni})$  l'ensemble des éléments  $b_{pq}^{(ni)}$  tels que :  $p + q = 2n - i + 1$  ( $n - i + 1 \leq p \leq n$  ou  $n - i + 1 \leq q \leq n$  ou  $\mathcal{L} \leq p \leq n$  ou  $\mathcal{L} \leq q \leq n$ ).

La configuration particulière correspondant au cas  $\mathcal{L} = \ell$  sera dénommée « 1-losange de dimensions  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  » (ou en abrégé : 1-losange  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ ). Elle correspond à  $B_{2v+1, v+1}$ , matrice-losange d'ordre  $n = 2v + 1$ ,  $v \in \mathbb{N}$ . On a alors :  $\mathcal{L} = \ell = v + 1$ .

Exemples :

1						
	1					
		1				
			1			
				1		
					1	
						1

	1					
1	1	1				
	1	1	1			
		1	1	1		
			1	1	1	
				1	1	1
					1	

1-rectangle  $7 \times 1$  (correspondant à  $B_{71}$ )    1-rectangle  $6 \times 2$  (correspondant à  $B_{72}$ )

		1				
	1		1			
1		1		1		
	1		1		1	
		1		1		1
			1		1	
				1		

				1		
			1		1	
		1		1		1
	1		1		1	
1		1		1		
	1		1			
		1				

1-rectangle  $5 \times 3$  (correspondant à  $B_{37}$ )    1-rectangle  $3 \times 5$  (correspondant à  $B_{75}$ )

					1	
				1		1
			1		1	
		1		1		
	1		1			
1		1				
	1					

						1
					1	
				1		
			1			
		1				
	1					
1						

1-rectangle  $2 \times 6$  (correspondant à  $B_{76}$ )    1-rectangle  $1 \times 7$  (correspondant à  $B_{77}$ )

*Remarque :*

Un 1-losange  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  possède en fait la forme d'un « carré reposant sur la pointe » (cf. Remarque 2 faisant suite à la Définition et au Théorème 4-2).

*Exemples :*

1
---

1-losange  $1 \times 1$   
(correspondant à  $B_{11}$ )

	1	
1		1
	1	

1-losange  $2 \times 2$   
(correspondant à  $B_{32}$ )

		1		
	1		1	
1		1		1
	1		1	
		1		

1-losange  $3 \times 3$   
(correspondant à  $B_{53}$ )

			1			
		1		1		
	1		1		1	
1		1		1		1
	1		1		1	
		1		1		
			1			

1-losange  $4 \times 4$   
(correspondant à  $B_{74}$ )

**Définition 4-7.** Soit  $B_{n_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) une matrice quelconque de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Soit  $\mathcal{L}$  la longueur et  $\ell$  la largeur de  $B_{n_i}$ .

Soit  $\det(B_{n_i})$  le déterminant de  $B_{n_i}$  (dans sa représentation « non conventionnelle »).

$d$  désigne un entier positif tel que :  $d \leq \inf(\mathcal{L}, \ell)$ .

On appellera « 1-losange  $d \times d$  inclus dans  $\det(B_{n_i})$  » tout ensemble de cases contenu dans le déterminant de  $B_{n_i}$  et ayant la structure d'un 1-rectangle  $d \times d$  conforme à la Définition 4-6.

On appellera « 1-losange maximal inclus dans  $\det(B_{n_i})$  » tout 1-losange  $\ell \times \ell$ , si  $\ell < \mathcal{L}$ , ou  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ , si  $\ell > \mathcal{L}$ .

Il a pour dimensions  $(\nu+1) \times (\nu+1)$  dans le cas particulier de la matrice-losange  $B_{2\nu+1, \nu+1}$  d'ordre  $n$  impair ( $n = 2\nu+1, \nu \in \mathbb{N}$ ).

Exemple :  $\det(B_{19,5})$ , avec  $B_{19,5}$ ,  $n = 19$ ,  $\mathcal{L} = 15$ ,  $\ell = 5$ .

				1														
			1	1	1													
		1		1		1												
	1		1		1		1		1									
1		1	1	1		1		1		1								
	1	1	1	1		1		1		1								
		1	1	1		1		1		1								
			1		1		1		1		1							
				1		1		1		1		1						
					1		1		1		1		1					
						1		1		1		1		1				
							1		1		1		1		1			
								1		1		1		1		1		
									1		1		1		1		1	
										1		1		1		1		1
											1		1		1		1	
												1		1				
													1					

Les 1-losanges suivant sont inclus dans  $\det(B_{19,5})$  :

En rouge : 1-losange  $1 \times 1$ . En orange : 1-losange  $2 \times 2$ .

En bleu : 1-losange  $3 \times 3$ . En jaune : 1-losange  $4 \times 4$ .

En vert : 1-losange  $5 \times 5$  : Il s'agit d'un 1-losange maximal (cf. Définition 4-7), c.-à-d. de la plus grande configuration de 1-losange incluse dans  $\det(B_{19,5})$ .

**Définition 4-8.** Soit  $B_{n_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) une matrice quelconque de la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ . Soit  $\mathcal{L}$  la longueur et  $\ell$  la largeur de  $B_{n_i}$ .

Si  $\ell < \mathcal{L}$ , nous appellerons 1-losange inférieur droit de  $\det(B_{n_i})$  le 1-losange maximal inclus dans  $\det(B_{n_i})$  et renfermant le côté inférieur droit du 1-rectangle correspondant à  $\det(B_{n_i})$ .

Si  $\ell > \mathcal{L}$ , nous appellerons 1-losange inférieur gauche de  $\det(B_{n_i})$  le 1-losange maximal inclus dans  $\det(B_{n_i})$  et renfermant le côté inférieur gauche du 1-rectangle correspondant à  $\det(B_{n_i})$ .

Dans le cas particulier de la matrice-losange  $B_{2\nu+1 \nu+1}$  d'ordre  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), le seul 1-losange maximal de  $\det(B_{2\nu+1 \nu+1})$  est à la fois son 1-losange inférieur droit et son 1-losange inférieur gauche.

*Remarques :*

Si  $\ell < \mathcal{L}$ ,  $\det(B_{n_i})$  ne renferme pas de 1-losange inférieur gauche.

Si  $\ell > \mathcal{L}$ ,  $\det(B_{n_i})$  ne renferme pas de 1-losange inférieur droit.

Si  $\ell = \mathcal{L}$ , nous sommes dans le cas particulier d'une matrice-losange  $B_{2\nu+1 \nu+1}$  d'ordre  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ). Le 1-losange maximal correspondant à la configuration même de  $\det(B_{2\nu+1 \nu+1})$  est à la fois son 1-losange inférieur droit et son 1-losange inférieur gauche.

*Exemples :*

Le 1-losange inférieur droit de  $\det(B_{19_5})$  représenté à la page précédente est figuré en vert.

Les exemples ci-dessous correspondent à  $\det(B_{5_i})$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . Le 1-losange inférieur droit de  $\det(B_{5_1})$  et de  $\det(B_{5_2})$  apparaît en vert. Le 1-losange inférieur gauche de  $\det(B_{5_4})$  et de  $\det(B_{5_5})$  apparaît en rouge. En ce qui concerne  $\det(B_{5_3})$ , qui correspond à la matrice-losange  $B_{5_3}$ , son 1-losange maximal est à la fois son 1-losange inférieur droit et son 1-losange inférieur gauche. Il apparaît en bleu.

1				
	1			
		1		
			1	
				1

	1			
1		1		
	1		1	
		1	1	
			1	

		1		
	1	1	1	
1	1	1	1	1
	1	1	1	
		1		

			1	
		1		1
	1		1	
1	1	1		
	1			

				1
			1	
		1		
	1			
1				



2<sup>ème</sup> Étape : Étude du déterminant de la matrice-losange  $B_{2\nu+1, \nu+1}$  d'ordre  $n$  est impair

$$(n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N})$$

Rappelons la forme de la matrice  $B_{2\nu+1, \nu+1}$  ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ) pour  $n = 1, 3, 5, 7$ .

$$\begin{array}{cccc}
 [1] ; & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_{1,1} & B_{3,2} & B_{5,3} & B_{7,4}
 \end{array}$$

**Théorème 4-9.** Soit  $n$  un entier impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ).

Soit  $B_{2\nu+1, \nu+1}$  la matrice-losange d'ordre  $n$ .

- $\det(B_{2\nu+1, \nu+1}) = 1$  pour  $n = 1$  (et donc  $\nu = 0$ ),
- $\det(B_{2\nu+1, \nu+1}) = 0$  pour  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$  (et donc  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ).

*Preuve :*

Immédiate.

Pour  $n = 1$  ( $\nu = 0$ ),  $B_{2\nu+1, \nu+1} = B_{1,1}$  et donc :  $\det(B_{2\nu+1, \nu+1}) = \det(B_{1,1}) = 1$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$  (et donc  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), il existe dans la matrice  $B_{2\nu+1, \nu+1}$  au moins 2 lignes (et 2 colonnes) égales, et donc :  $\det(B_{2\nu+1, \nu+1}) = 0$ .

3<sup>ème</sup> Étape : Réduction du déterminant d'une matrice-losange  $B_{2\nu+1, \nu+1}$  d'ordre  $n$  est impair

$$(n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}).$$

Dans ce qui suit :

$L_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) désigne la  $i^{\text{ème}}$  ligne d'un déterminant d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ ,

$C_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) désigne la  $j^{\text{ème}}$  colonne d'un déterminant d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

Nous désignerons classiquement par :  $L_i \rightarrow L_i + L_k$  ( $1 \leq i \leq n ; 1 \leq k \leq n, k \neq i$ ) l'opération de remplacement de la  $i^{\text{ème}}$  ligne du déterminant d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  par la somme des lignes  $L_i$  et  $L_k$ .

Nous désignerons de même par :  $C_j \rightarrow C_j + C_h$  ( $1 \leq j \leq n ; 1 \leq h \leq n, h \neq j$ ) l'opération de remplacement de la  $j^{\text{ème}}$  colonne du déterminant d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  par la somme de des colonnes  $C_j$  et  $C_h$ .

Rappelons que ces opérations de remplacement de lignes ou de colonnes ne modifient pas la valeur du déterminant auquel on les applique.

Considérons le déterminant d'une matrice-losange  $B_{2\nu+1 \ \nu+1}$  de la base canonique ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ). Nous allons démontrer que l'on peut, par une succession d'opérations de remplacement, restructurer  $\det(B_{2\nu+1 \ \nu+1})$  et le ramener à un déterminant de même valeur (dénommé forme réduite  $\det(B_{2\nu+1 \ \nu+1})$ ) dans lequel les coefficients non nuls se réduisent au seul côté supérieur droit ou gauche ou au seul côté inférieur droit ou gauche de  $\det(B_{\nu+1 \ 2\nu+1})$ .

Dans la mesure, où nous n'utiliserons par la suite que la forme réduite  $\det(B_{2\nu+1 \ \nu+1})$  à son côté inférieur (droit ou gauche), la définition qui suit se restreint à ce type de réduction.

**Définition 4-10.** Soit  $n$  un entier impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ).

Soit  $\det(B_{2\nu+1 \ \nu+1})$  le déterminant de la matrice-losange d'ordre  $n$ .

Nous dénommerons « réduction au côté inférieur droit » (en abrégé : RCID) de  $\det(B_{2\nu+1 \ \nu+1})$  les suites d'opérations suivantes à effectuer dans l'ordre indiqué, si ces opérations sont possibles et tant que ces opérations sont possibles.

- 1<sup>ère</sup> suite :  $L_i \rightarrow L_i + L_{n-i+1}$  ( $1 \leq i \leq \nu$ )  
 2<sup>ème</sup> suite :  $L_{\nu+1} \rightarrow L_{\nu+1} + L_{\nu+3}$  ;  $L_{\nu+3} \rightarrow L_{\nu+3} + L_{\nu+5}$  ; ... ;  
 $L_{\nu+2p+1} \rightarrow L_{\nu+2p+1} + L_{\nu+2p+3}$  ( $0 \leq 2p \leq \nu - 2$ ).  
 3<sup>ème</sup> suite :  $L_{\nu+2} \rightarrow L_{\nu+2} + L_{\nu+4}$  ;  $L_{\nu+4} \rightarrow L_{\nu+4} + L_{\nu+6}$  ; ... ;  
 $L_{\nu+2p+2} \rightarrow L_{\nu+2p+2} + L_{\nu+2p+4}$  ( $0 \leq 2p \leq \nu - 3$ ).  
 4<sup>ème</sup> suite :  $C_j \rightarrow C_j + C_{n-j+1}$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ).

Nous dénommerons « réduction au côté inférieur gauche » (en abrégé : réduction RCIG) de  $\det(B_{\nu+1 \ 2\nu+1})$  les suites d'opérations suivantes à effectuer dans l'ordre indiqué, si ces opérations sont possibles et tant que ces opérations sont possibles.

- 1<sup>ère</sup> suite : identique à RCID,  
 2<sup>ème</sup> suite : identique à RCID,  
 3<sup>ème</sup> suite : identique à RCID,  
 4<sup>ème</sup> suite :  $C_{n-j+1} \rightarrow C_{n-j+1} + C_j$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ).

A l'issue de ces 4 suites d'opérations  $\det(B_{2\nu+1 \ \nu+1})$  apparaît sous la forme réduite, notée  $\det(B_{2\nu+1 \ \nu+1}^{\text{RCID}})$  ou  $\det(B_{2\nu+1 \ \nu+1}^{\text{RCIG}})$ , dans laquelle tous les coefficients sont nuls, à l'exception :

- pour RCID : des coefficients  $c_{ij}$  tels que :  $i + j = 3\nu + 2$  ( $\nu + 1 \leq i \leq n$ ), correspondant au côté inférieur droit de  $\det(B_{2\nu+1 \ \nu+1})$ ,
- pour RCIG : des coefficients  $c_{ij}$  tels que :  $i - j = \nu$  ( $\nu + 1 \leq i \leq n$ ), correspondant au côté inférieur gauche de  $\det(B_{2\nu+1 \ \nu+1})$ .

*Remarques :*

Pour  $n = 1$ , aucune des 4 séries d'opérations n'est possible :  $\det(B_{1,1})$  pour  $n = 1$  se trouve déjà sous forme réduite. Autrement dit :  $\det(B_{1,1}) = \det(B_{1,1}^{\text{RCID}}) = \det(B_{1,1}^{\text{RCIG}}) = 1$ .

Pour  $n = 3$ , seule la 1<sup>ère</sup> opération de la 1<sup>ère</sup> suite d'opérations est possible. Aucune opération de la 2<sup>ème</sup> suite, ni de la 3<sup>ème</sup> suite d'opérations n'est possible. Enfin, seule la 1<sup>ère</sup> opération de la 4<sup>ème</sup> suite d'opérations est possible.

Pour  $n = 5$ , dans la 2<sup>ème</sup> suite d'opérations, seule la 1<sup>ère</sup> opération est possible.

Pour  $n = 7$ , dans la 3<sup>ème</sup> suite d'opérations, seule la 1<sup>ère</sup> opération est possible.

Dans la 2<sup>ème</sup> suite d'opérations, la condition  $2p \leq \nu - 2$  assure que  $\nu + 2p + 3 \leq n$ .

Dans la 3<sup>ème</sup> suite d'opérations, la condition  $2p \leq \nu - 3$  assure que  $\nu + 2p + 4 \leq n$ .

*Exemple :*  $n = 9$  ( $\nu = 4$ )

Le déterminant considéré est  $\det(B_{9,5})$  :

				1				
			1		1			
		1		1		1		
	1		1		1		1	
1		1		1		1		1
	1		1		1		1	
		1		1		1		
			1		1			
				1				

La 1<sup>ère</sup> suite d'opérations a pour effet d'annuler tous les coefficients des lignes 1 à  $\nu$  de  $\det(B_{9,5})$ . Le résultat obtenu est le suivant :

1		1		1		1		1
	1		1		1		1	
		1		1		1		
			1		1			
				1				

La 2<sup>ème</sup> suite d'opérations a pour effet d'annuler tous les coefficients égaux à 1 (hormis les coefficients extrêmes) des lignes  $\nu+1, \nu+3, \dots, \nu+2p+1$ , et ceci tant que  $\nu+2p+3 \leq n$ .  
Le résultat obtenu est le suivant :

1								1
		1		1		1		1
			1				1	
				1		1		
				1				

La 3<sup>ème</sup> suite d'opérations a pour effet d'annuler tous les coefficients égaux à 1 (hormis les coefficients extrêmes) des lignes  $\nu+2, \nu+4, \dots, \nu+2p+2$ , et ceci tant que  $\nu+2p+4 \leq n$ .  
Le résultat obtenu est le suivant :

1								1
		1						1
			1				1	
				1		1		
				1				

S'agissant de la réduction RCID, la 4<sup>ème</sup> suite d'opérations a pour effet d'annuler tous les coefficients du côté inférieur gauche de  $\det(B_{\nu_5})$ . Le résultat obtenu est le suivant :

								1
								1
							1	
				1		1		
				1				

Le déterminant ci-dessus, noté  $\det(\mathbf{B}_{9_5}^{\text{RCID}})$ , constitue la forme réduite inférieure droite de  $\det(\mathbf{B}_{9_5})$ . On vérifiera sans peine que les coefficients  $c_{ij}$  non nuls sont ceux tels que :  $i + j = 3\nu + 2$  ( $\nu + 1 \leq i \leq n$ ), soit ici :  $i + j = 14$  ( $5 \leq i \leq 9$ ), à savoir :  $c_{59}, c_{68}, c_{77}, c_{86}, c_{95}$ .

S'agissant de la réduction RCIG, la 4<sup>ème</sup> suite d'opérations a pour effet d'annuler tous les coefficients du côté inférieur droit de  $\det(\mathbf{B}_{9_5})$ . Le résultat obtenu est le suivant :

1								
	1							
		1						
			1					
				1				

Le déterminant ci-dessus, noté  $\det(\mathbf{B}_{9_5}^{\text{RCIG}})$ , constitue la forme réduite inférieure gauche de  $\det(\mathbf{B}_{9_5})$ . On vérifiera sans peine que les coefficients  $c_{ij}$  non nuls sont ceux tels que :  $i - j = \nu$  ( $\nu + 1 \leq i \leq n$ ), soit ici :  $i - j = 4$  ( $5 \leq i \leq 9$ ), à savoir :  $c_{51}, c_{62}, c_{73}, c_{84}, c_{95}$ .

*Remarque :*

Il est bien évidemment possible de définir la réduction au côté supérieur droit (RCSD) ou au côté supérieur gauche (RCSG) de  $\det(\mathbf{B}_{2\nu+1 \nu+1})$ , mais nous ne nous en servons pas.

La méthode exposée ci-dessus se généralise sans peine. Elle s'applique à tout déterminant  $\det(\mathbf{B}_{2\nu+1 \nu+1})$  correspondant à la matrice-losange d'ordre  $n$  ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ). On aboutit à un déterminant réduit  $\det(\mathbf{B}_{2\nu+1 \nu+1}^{\text{RCID}})$  ou  $\det(\mathbf{B}_{2\nu+1 \nu+1}^{\text{RCIG}})$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux du côté inférieur droit pour  $\det(\mathbf{B}_{2\nu+1 \nu+1}^{\text{RCID}})$ , ou ceux du côté inférieur gauche pour  $\det(\mathbf{B}_{2\nu+1 \nu+1}^{\text{RCIG}})$ .

Dans le cas particulier où  $n = 1$  ( $\nu = 0$ ) :  $\det(\mathbf{B}_{1_1}) = \det(\mathbf{B}_{1_1}^{\text{RCID}}) = \det(\mathbf{B}_{1_1}^{\text{RCIG}}) = 1$

4<sup>ème</sup> Étape : Processus initial de réduction du déterminant d'une matrice  $\mathbf{B}_{n i_0}$  quelconque ( $1 \leq i_0 \leq n$ ) de la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Le cas de la matrice  $\mathbf{B}_{2\nu+1 \nu+1}$  d'ordre  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ) a été traité dans les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> Étapes ci-dessus (cf. Théorème 4-9 et Définition 4-10). Ce cas correspond à l'égalité  $\ell = \mathcal{L}$ .

Nous considérerons donc maintenant le cas d'une matrice  $B_{n i_0}$  ( $1 \leq i_0 \leq n$ ) de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  correspondant à l'hypothèse  $\ell < \mathcal{L}$ , puis à l'hypothèse  $\ell > \mathcal{L}$ . Rappelons les égalités :  $\ell = i_0$  et  $\mathcal{L} = n - i_0 + 1$  (cf. Définition et Théorème 4-2).

Hypothèse 1 :  $\ell < \mathcal{L}$  c.-à-d.  $1 \leq i_0 < E\left(\frac{n+1}{2}\right)$  (\*)

(\*) cf. Remarque 1 faisant suite à Définition et Théorème 4-2

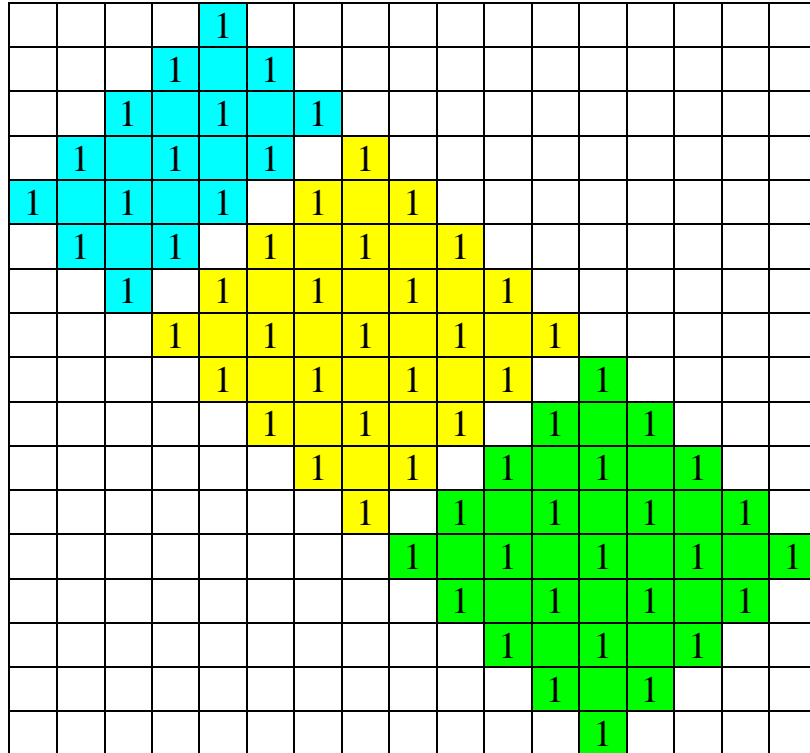
Désignons par  $q$  et  $r$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $\mathcal{L}$  par  $\ell$  :

$\mathcal{L} = q\ell + r$  avec :  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $r \in \mathbb{N}$  et  $r < \ell$ . (Bien noter que :  $\ell = i_0$ ).

*Remarque :*  $q \in \mathbb{N}^*$ , faute de quoi l'on aurait  $\ell > \mathcal{L}$ .

$\det(B_{n i_0})$  inclut alors  $q$  1-losanges maximaux disjoints (c.-à-d. qui ne se recouvrent pas) de dimensions  $\ell \times \ell$ . Le 1-losange inférieur droit de  $\det(B_{n i_0})$  (cf. Définition 4-8) portera le n° 1. Les suivants dans l'ordre ascendant sont numérotés de 2 à  $q$ . Ces  $q$  1-losanges sont complétés, si  $r \neq 0$ , par un 1-rectangle « résiduel » de dimensions  $r \times \ell$ .

*Exemple :*  $\det(B_{17 5})$ ,  $n = 17$ ,  $\mathcal{L} = 13$ ,  $\ell = i_0 = 5$ . On a ici :  $q = 2$  et  $r = 3$ .



Comme  $q = 2$ , il y a dans  $\det(B_{17 5})$ , 2 1-losange maximaux disjoints de dimensions  $5 \times 5$ . Le 1-losange inférieur droit n° 1 est en vert. Le 1-losange maximal n° 2 est en jaune. De plus, il existe dans ce cas (puisque  $r \neq 0$ ) un 1-rectangle résiduel de dimensions  $2 \times 3$  (en bleu).

**Définition et Théorème 4-11.** Soit  $B_{n i_0}$  ( $1 \leq i_0 < E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ), de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  ( $\ell < \mathcal{L}$ ) une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  - (On rappelle que :  $\ell = i_0$ ).

Posons :  $\mathcal{L} = q \ell + r$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq r < \ell$ ).

On appelle « réduction au côté inférieur droit » (en abrégé : RCID) du déterminant de  $B_{n i_0}$  l'opération consistant à procéder à la réduction au côté inférieur droit (RCID) du 1-losange inférieur droit de  $\det(B_{n i_0})$  conformément à la Définition 4-10.

Pour la réaliser, on effectue les 4 suites d'opérations décrites dans cette Définition 4-10, sachant que les lignes et colonnes concernées sont les lignes complètes et les colonnes complètes de  $\det(B_{n i_0})$  traversant le 1-losange inférieur droit de ce déterminant.

La RCID du déterminant de  $B_{n i_0}$  n'impacte que son 1-losange inférieur droit. Elle n'altère :

- ni les  $(q-1)$  autres 1-losanges maximaux inclus dans  $\det(B_{n i_0})$ ,
- ni le 1-rectangle résiduel de dimensions  $r \times \ell$  (si  $r \neq 0$ ),
- ni les coefficients nuls de  $\det(B_{n i_0})$  situés en-dehors de ces configurations.

Le nouveau déterminant  $\det(B_{n i_0}^{\text{RCID}})$  obtenu après la RCID de  $\det(B_{n i_0})$  est égal à  $\det(B_{n i_0})$ . Autrement dit :  $\det(B_{n i_0}^{\text{RCID}}) = \det(B_{n i_0})$ .

*Remarque :* Le cas  $r = 0$  et  $q = 1$  correspond à celui d'une matrice-losange déjà traité.

*Preuve :* Nous nous appuyerons sur l'exemple de  $\det(B_{17 5})$ ,  $n = 17$ ,  $\mathcal{L} = 13$ ,  $\ell = 5$ ,  $q = 2$  et  $r = 3$ , déjà mentionné plus haut.

				1													
			1	1	1												
		1	1	1	1												
	1	1	1	1	1	1											
1	1	1	1	1	1	1	1										
	1	1	1	1	1	1	1	1									
		1	1	1	1	1	1	1	1								
			1	1	1	1	1	1	1	1							
				1	1	1	1	1	1	1	1						
					1	1	1	1	1	1	1	1					
						1	1	1	1	1	1	1	1				
							1	1	1	1	1	1	1	1			
								1	1	1	1	1	1	1	1		
									1	1	1	1	1	1	1		
										1	1	1	1	1	1		
											1	1	1	1	1		
												1	1	1	1		
													1	1	1		
														1	1		
															1		

Effectuons la réduction au côté inférieur droit (RCID) du 1-losange inférieur droit de  $\det(B_{17\ 5})$  (1-losange vert). Cette réduction s'effectue en procédant « *in situ* », dans le 1-losange en question, aux séries d'opérations décrites dans la Définition 4-10.

Bien évidemment, ces opérations porteront sur les lignes complètes et sur les colonnes complètes de  $\det(B_{17\ 5})$  traversant le 1-losange inférieur droit.

On constatera que la réduction effectuée ne modifie en aucune manière :

- ni le 1-losange maximal jaune,
- ni le 1-rectangle résiduel bleu de dimensions  $2 \times 3$ ,
- ni les coefficients nuls situés en-dehors de ces configurations.

Après réduction, le nouveau déterminant  $\det(B_{17\ 5}^{\text{RCID}})$  obtenu est le suivant :

				1													
			1	1	1												
		1	1	1	1												
	1	1	1	1		1											
1	1	1	1		1	1	1										
	1		1		1		1		1								
		1		1		1		1		1							
			1		1		1		1		1						
				1		1		1		1		1					
					1		1		1		1		1				
						1		1		1		1		1			
							1		1		1		1		1		
								1		1		1		1		1	
									1		1		1		1		1
										1		1		1		1	
											1		1		1		1
												1		1		1	
													1		1		1

Aucune des opérations effectuées ne modifient la valeur du déterminant initial. En conséquence,  $\det(B_{17\ 5}^{\text{RCID}}) = \det(B_{17\ 5})$ .

La procédure de réduction exposée sur cet exemple se généralise aisément au déterminant  $\det(B_{n\ i_0})$  de toute matrice  $B_{n\ i_0}$  ( $1 \leq i_0 < E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ) de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , avec  $\mathcal{L} = q\ell + r$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ).



**Théorème 4-12.** Soit  $B_{n i_0}$  ( $1 \leq i_0 < E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ), de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  ( $\ell < \mathcal{L}$ ) une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  - (Rappelons que :  $\ell = i_0$ ). Posons :  $\mathcal{L} = q \ell + r$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq r < \ell$ ) et  $m = n - \ell$ .

Soit  $B_{m i_0} \in \mathcal{BSC}_m(\mathbb{B})$ , de dimensions  $(\mathcal{L} - \ell) \times \ell$ .

On a alors :  $\det(B_{m i_0}) = \det(B_{n i_0})$ .

*Preuve :*

Rappelons les relations :  $i_0 = \ell$  et  $n = \mathcal{L} + \ell - 1$ . Par suite :  $m = n - \ell = \mathcal{L} - 1$ .

Comme  $\mathcal{L} > \ell \geq 1$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ .  $\mathcal{BSC}_m(\mathbb{B})$  existe bien.

Démontrons le Théorème 4-12 en nous appuyant à nouveau sur l'exemple de  $\det(B_{17 5})$ ,  $n = 17$ ,  $\mathcal{L} = 13$ ,  $\ell = 5$ ,  $q = 2$  et  $r = 3$ , utilisé plus haut.

En procédant à la RCID de  $\det(B_{17 5})$ , nous avons démontré que  $\det(B_{17 5})$  est égal au déterminant réduit suivant  $\det(B_{17 5}^{\text{RCID}})$  (cf. Démonstration du Théorème 4-11).

				1													
			1	1													
		1	1	1													
	1	1	1	1		1											
1	1	1	1	1		1	1										
	1	1	1		1	1	1	1									
		1		1	1	1	1	1	1								
			1	1	1	1	1	1									
				1	1	1	1										
					1	1											
						1											
							1										
								1									
									1								
										1							
											1						
												1					
													1				

On constate que les 5 dernières lignes du nouveau déterminant obtenu ne comportent chacune qu'un seul coefficient non nul. On procède alors au développement de  $\det(B_{17 5}^{\text{RCID}})$  par rapport à sa dernière ligne. Puis on réitère le processus 4 fois avec le nouveau déterminant obtenu.

On en conclut que le déterminant de départ  $\det(B_{17\ 5})$  est égal au déterminant suivant  $\det(B_{12\ 5})$  d'ordre  $m = n - \ell = 12$  :

				1							
			1	1	1						
		1		1		1					
	1		1		1		1				
1		1		1		1		1			
	1		1		1		1		1		
		1		1		1		1		1	
			1		1		1		1		1
				1		1		1		1	
					1		1		1		
						1		1			
							1				

Le raisonnement exposé sur l'exemple ci-dessus se généralise aisément au déterminant  $\det(B_{n\ i_0})$  de toute matrice  $B_{n\ i_0}$  ( $1 \leq i_0 < E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ) de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , avec  $\mathcal{L} = q\ell + r$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq r < \ell$ ).

On en déduit l'égalité :  $\det(B_{m\ i_0}) = \det(B_{n\ i_0})$ , où  $B_{m\ i_0}$  est une matrice d'ordre  $m = n - \ell$  n'incluant plus que  $(q-1)$  1-losanges de dimensions  $\ell \times \ell$  (si  $q > 1$ ), complétés, si  $r \neq 0$ , par un 1-rectangle résiduel de dimensions  $r \times \ell$ .

*Remarque :*

Lorsque l'on passe de  $B_{n\ i_0}$  à  $B_{m\ i_0}$ , on constate que l'ordre de la matrice est diminué de la valeur  $\ell$ . La valeur de l'indice  $i_0$  demeure, elle, inchangée.

Distinguons maintenant les cas  $r \neq 0$  et  $r = 0$ .

Cas n° 1 :  $r \neq 0$ .

Dans ce cas de figure,  $\det(B_{n\ i_0})$  inclut  $q$  1-losanges maximaux disjoints de dimensions  $\ell \times \ell$  (dont le 1-losange inférieur droit de  $\det(B_{n\ i_0})$ ). Ces  $q$  1-losanges sont complétés, puisque  $r \neq 0$ , par un 1-rectangle résiduel de dimensions  $r \times \ell$ .

**Théorème 4-13.** Soit  $B_{n i_0}$  ( $1 \leq i_0 < E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ), de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  ( $\ell < \mathcal{L}$ ) une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  - (Rappelons que :  $\ell = i_0$ ).

Posons :  $\mathcal{L} = q \ell + r$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ). On suppose  $r \neq 0$ , soit :  $0 < r < \ell$ .

Posons :  $m_q = n - q \ell$ . On a alors :  $m_q = \ell + r - 1$ .

Soit  $B_{m_q i_0} \in \mathcal{BSC}_{m_q}(\mathbb{B})$ . Alors :

- 1)  $B_{m_q i_0}$  est une matrice d'ordre  $m_q$ , de dimensions  $r \times \ell$ .
- 2)  $\det(B_{m_q i_0}) = \det(B_{n i_0})$ .

*Preuve :*

Le déterminant de la matrice  $B_{n i_0}$  d'ordre  $n$  inclut  $q$  1-losanges maximaux disjoints de dimensions  $\ell \times \ell$ . L'hypothèse  $r \neq 0$  implique l'existence d'un 1-rectangle résiduel de dimensions  $r \times \ell$ .

Le Théorème 4-12 établit que l'on peut dériver à partir de  $B_{n i_0}$  une matrice  $B_{m_1 i_0}$  d'ordre  $m_1 = n - \ell$ , dont le déterminant inclut  $(q-1)$  1-losanges maximaux disjoints de dimensions  $\ell \times \ell$  (0 si  $q=1$ ). De plus, on a :  $\det(B_{m_1 i_0}) = \det(B_{n i_0})$ .

Réappliquons (si  $q \geq 2$ ) le Théorème 4-12 à  $B_{m_1 i_0}$ . On en déduit l'existence d'une matrice  $B_{m_2 i_0}$  d'ordre  $m_2 = n - 2\ell$ , dont le déterminant inclut  $(q-2)$  1-losanges maximaux disjoints de dimensions  $\ell \times \ell$  (0 si  $q=2$ ). De plus, on a :  $\det(B_{m_2 i_0}) = \det(B_{m_1 i_0})$ .

En itérant ce processus, on met en évidence un ensemble de matrices  $B_{n i_0}, B_{m_1 i_0}, B_{m_2 i_0}, \dots, B_{m_{q-1} i_0}, B_{m_q i_0}$  d'ordre respectif  $n, n - \ell, n - 2\ell, \dots, n - (q-1)\ell, n - q\ell$ , dont le déterminant inclut respectivement  $q, (q-1), (q-2), \dots, 1$ , puis 0 1-losanges maximaux disjoints de dimensions  $\ell \times \ell$ .

De plus, en cascade :

$$\det(B_{m_q i_0}) = \det(B_{m_{q-1} i_0}) = \dots = \det(B_{m_2 i_0}) = \det(B_{m_1 i_0}) = \det(B_{n i_0}).$$

Le déterminant de la dernière matrice obtenue  $B_{m_q i_0}$  correspond à un 1-rectangle de dimensions  $r \times \ell$ .

Par ailleurs, l'ordre  $m$  de  $B_{m_q i_0}$  vaut  $m_q = n - q \ell$ , comme établi plus haut.

Tenant compte de ce que :  $n = \mathcal{L} + \ell - 1$  et de ce que :  $\mathcal{L} = q \ell + r$ , on a :

$$m_q = n - q \ell = \mathcal{L} + \ell - 1 - q \ell = \ell + r - 1.$$

Exemple :

Le Théorème 4-13 nous apprend que les 3 déterminants suivants sont égaux :

$\det(B_{17\ 5}), n = 17,$   
 $\mathcal{L} = 13, \ell = 5 :$

				1												
			1	1	1											
		1	1	1	1											
	1	1	1	1	1	1										
1	1	1	1	1	1	1	1									
	1	1	1	1	1	1	1	1								
		1	1	1	1	1	1	1	1							
			1	1	1	1	1	1	1	1						
				1	1	1	1	1	1	1	1	1				
					1	1	1	1	1	1	1	1	1			
						1	1	1	1	1	1	1	1	1		
							1	1	1	1	1	1	1	1	1	
								1	1	1	1	1	1	1	1	
									1	1	1	1	1	1	1	
										1	1	1	1	1	1	
											1	1	1	1	1	
												1	1	1	1	
													1	1	1	
														1	1	
															1	

puis :

$\det(B_{12\ 5}), n = 12,$   
 $\mathcal{L} = 8, \ell = 5 :$

				1												
			1	1	1											
		1	1	1	1	1										
	1	1	1	1	1	1	1									
1	1	1	1	1	1	1	1	1								
	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
		1	1	1	1	1	1	1	1	1						
			1	1	1	1	1	1	1	1	1					
				1	1	1	1	1	1	1	1	1				
					1	1	1	1	1	1	1	1	1			
						1	1	1	1	1	1	1	1	1		
							1	1	1	1	1	1	1	1	1	
								1	1	1	1	1	1	1	1	
									1	1	1	1	1	1	1	
										1	1	1	1	1	1	
											1	1	1	1	1	
												1	1	1	1	
													1	1	1	
														1	1	
															1	

et, finalement, le déterminant de la matrice « résiduelle » :

$\det(\mathbf{B}_{7,5}), n=7,$

$\mathcal{L}=3, \ell=5 :$

(déterminant pour lequel  $\mathcal{L} < \ell$ )

				1		
			1	1		
		1		1	1	
	1		1		1	
1		1		1		
	1		1			
		1				

Cas n° 2 :  $r=0$ .

On a alors :  $\mathcal{L} = q \ell$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ).  $\mathcal{L}$  est un multiple de  $\ell = i_0$ .

$\det(\mathbf{B}_{n i_0})$  inclut alors exactement  $q$  1-losanges maximaux disjoints de dimensions  $\ell \times \ell$ .

Il n'y a plus de 1-rectangle résiduel puisque  $r=0$ .

**Théorème 4-14.** Soit  $\mathbf{B}_{n i_0}$  ( $1 \leq i_0 < E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ), de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  ( $\ell < \mathcal{L}$ ) une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  - (Rappelons que :  $\ell = i_0$ ).

On suppose que :  $\mathcal{L} = q \ell$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ). Alors :

- Si  $\ell = 1$  :  $\det(\mathbf{B}_{n i_0}) = 1$ .

- Si  $\ell > 1$  :  $\det(\mathbf{B}_{n i_0}) = 0$ .

*Preuve :*

Traitons le cas :  $\ell = 1$ .

Si  $\ell = 1$  (et donc  $i_0 = 1$ ),  $\mathbf{B}_{n i_0} = \mathbf{B}_{n 1}$ , matrice-unité d'ordre  $n$ . Donc :

$\det(\mathbf{B}_{n i_0}) = \det(\mathbf{B}_{n 1}) = 1$ .

Supposons maintenant :  $\ell > 1$ .

En toute généralité :  $\ell = i_0$  et  $\mathcal{L} = n - i_0 + 1$ . Mais, dans ce cas particulier, puisque  $\mathcal{L} = q \ell$  :

$q \ell = n + 1 - \ell$ , soit :  $n = (q + 1) \ell - 1$ .

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{B}_{n i_0}$  d'ordre  $n$  inclut exactement  $q$  1-losanges maximaux disjoints de dimensions  $\ell \times \ell$ .

Si  $q = 1$ ,  $\mathbf{B}_{n i_0}$  est une matrice-losange de dimensions  $\ell \times \ell$  ( $\ell > 1$ ). On a alors :  $n = 2 \ell - 1$  et donc :  $n > 1$ . On sait qu'alors :  $\det(\mathbf{B}_{n i_0}) = 0$  (cf. Théorème 4-9).

Si  $q \geq 2$ , le Théorème 4-12 établit que l'on peut dériver à partir de  $\mathbf{B}_{n i_0}$  une matrice  $\mathbf{B}_{m_1 i_0}$  d'ordre  $m_1 = n - \ell$ , dont le déterminant inclut alors exactement  $(q - 1)$  1-losanges maximaux disjoints de dimensions  $\ell \times \ell$ . De plus, on a :  $\det(\mathbf{B}_{m_1 i_0}) = \det(\mathbf{B}_{n i_0})$ .

Réappliquons (si  $q > 2$ ) le Théorème 4-12 à  $B_{m_1 i_0}$ . On en déduit l'existence d'une matrice  $B_{m_2 i_0}$  d'ordre  $m_2 = n - 2\ell$ , dont le déterminant inclut exactement  $(q-2)$  1-losanges maximaux disjoints de dimensions  $\ell \times \ell$ . De plus, on a :  $\det(B_{m_2 i_0}) = \det(B_{m_1 i_0})$ .

En itérant ce processus, on met en évidence un ensemble de matrices  $B_{n i_0}, B_{m_1 i_0}, B_{m_2 i_0}, \dots, B_{m_{q-1} i_0}$ , d'ordre respectif  $n, n - \ell, n - 2\ell, \dots, n - (q-1)\ell$ , dont le déterminant inclut respectivement  $q, (q-1), (q-2), \dots, 2$ , puis 1 seul 1-losanges maximaux disjoints de dimensions  $\ell \times \ell$ .

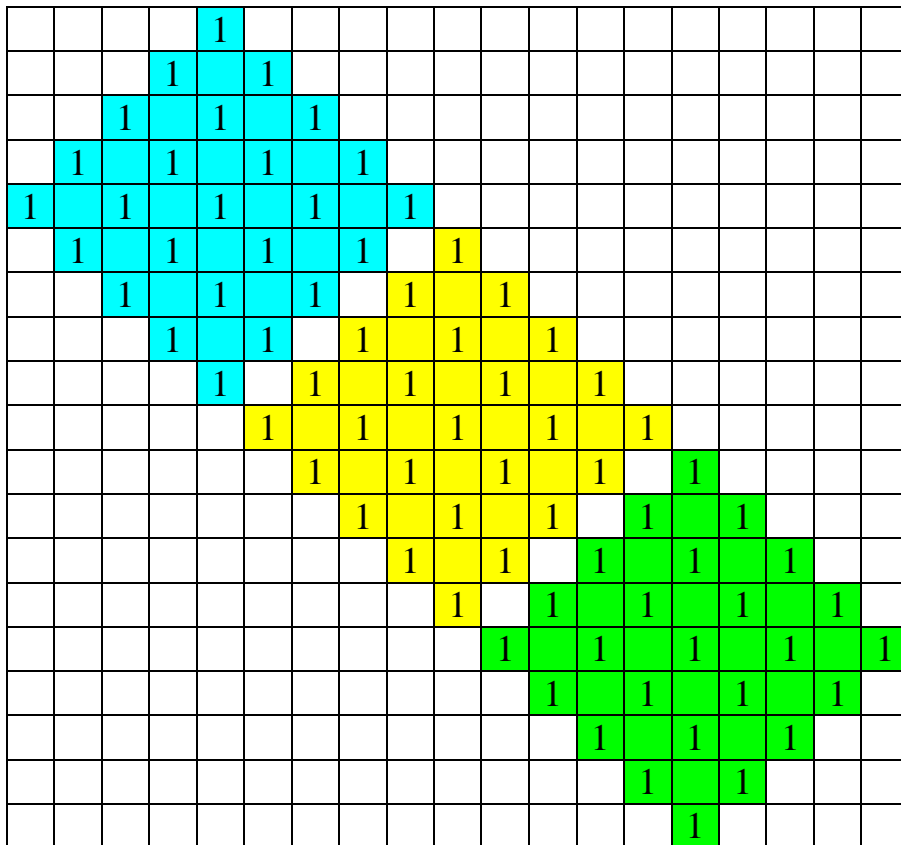
De plus, en cascade :

$$\det(B_{m_{q-1} i_0}) = \dots = \det(B_{m_2 i_0}) = \det(B_{m_1 i_0}) = \det(B_{n i_0}).$$

Le déterminant de la dernière matrice obtenue  $B_{m_{q-1} i_0}$  correspond à un 1-losange de dimensions  $\ell \times \ell$ , sachant que  $\ell > 1$  et donc que :  $n > 1$ . On sait qu'alors :  $\det(B_{m_{q-1} i_0}) = 0$  (cf. Théorème 4-9).

Il en résulte que :  $\det(B_{n i_0}) = 0$ .

*Exemple :*  $\det(B_{19_5}), n = 19, \mathcal{L} = 15, \ell = i_0 = 5, q = 3$ .



Le Théorème 4-14 nous apprend que le déterminant  $\det(B_{19\ 5})$  est égal aux 2 déterminants qui suivent :

$\det(B_{14\ 5}), n = 14,$   
 $\mathcal{L} = 10, \ell = 5 :$

				1									
			1	1	1								
		1	1	1	1								
	1	1	1	1	1	1							
1	1	1	1	1	1	1	1						
	1	1	1	1	1	1	1	1					
		1	1	1	1	1	1	1	1				
			1	1	1	1	1	1	1	1			
				1	1	1	1	1	1	1	1		
					1	1	1	1	1	1	1		
						1	1	1	1	1	1		
							1	1	1	1	1		
								1	1	1	1		
									1	1	1		
										1	1		
											1		

puis :

$\det(B_{9\ 5}), n = 9,$   
 $\mathcal{L} = \ell = 5 :$

				1				
			1	1	1			
		1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	1	
				1	1	1	1	

Or,  $\det(B_{9\ 5}) = 0$  (cf. Théorème 4-9).

Donc :  $\det(B_{19\ 5}) = \det(B_{14\ 5}) = \det(B_{9\ 5}) = 0$ .

Hypothèse 2 :  $\ell > \mathcal{L}$  c.-à-d.  $E\left(\frac{n+1}{2}\right) < i_0 \leq n$  (\*)

(\*) cf. Remarque 1 faisant suite à Définitions et Théorème 4-2.

Désignons par  $q$  et  $r$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $\ell$  par  $\mathcal{L}$  :

$\ell = q\mathcal{L} + r$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq r < \mathcal{L}$ ). (Bien noter que l'on a toujours :  $\ell = i_0$ ).

*Remarque* :  $q \in \mathbb{N}^*$ , faute de quoi l'on aurait  $\ell < \mathcal{L}$ .

1<sup>ère</sup> approche :

Il est bien évidemment possible de reprendre pas à pas l'approche adoptée dans le cadre du traitement de l'Hypothèse 1. On remplacera systématiquement la réduction inférieure au côté inférieur droit (RCID) par une réduction inférieure au côté inférieur gauche (RCIG).

On distinguera alors comme précédemment les cas  $r \neq 0$  et  $r = 0$ .

Cas n° 1 :  $r \neq 0$ .

Nous nous contenterons d'énoncer le Théorème 4-15 ci-dessous. Ce théorème est l'équivalent du Théorème 4-13. Les énoncés de ces deux théorèmes sont analogues à la nuance près figurant dans la Remarque faisant suite au Théorème 4-15.

**Théorème 4-15.** Soit  $B_{n i_0}$  ( $E\left(\frac{n+1}{2}\right) < i_0 \leq n$ ), de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  ( $\ell > \mathcal{L}$ ) une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  - (Note :  $\ell = i_0$ ).

Posons :  $\ell = q\mathcal{L} + r$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ). On suppose  $r \neq 0$ , soit :  $0 < r < \mathcal{L}$ .

Posons :  $m_q = n - q\mathcal{L}$ . On a alors :  $m_q = \mathcal{L} + r - 1$ .

Posons  $i_q = i_0 - q\mathcal{L} = \ell - q\mathcal{L} = r$ .

Soit  $B_{m_q i_q} \in \mathcal{BSC}_{m_q}(\mathbb{B})$ . Alors :

- 1)  $B_{m_q i_q}$  est une matrice d'ordre  $m_q$ , de dimensions  $r \times \mathcal{L}$ .
- 2)  $\det(B_{m_q i_q}) = \det(B_{n i_0})$ .

*Remarque* :

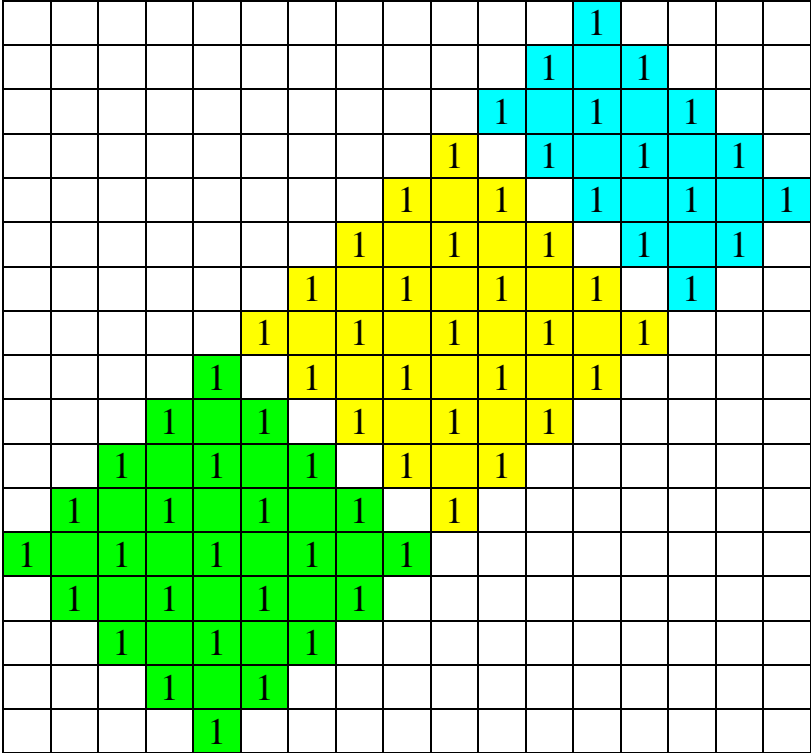
Lorsque l'on passe de  $B_{n i_0}$  à  $B_{m_q i_q}$ , l'ordre et l'indice de la matrice sont diminués de la valeur  $q\mathcal{L}$ . Dans le cas de Hypothèse 1, l'ordre était diminué de  $q\ell$ , mais non l'indice.

*Exemple* :  $\det(B_{17 13})$ ,  $n = 17$ ,  $\mathcal{L} = 5$ ,  $\ell = i_0 = 13$ . On a ici :  $q = 2$  et  $r = 3$ .

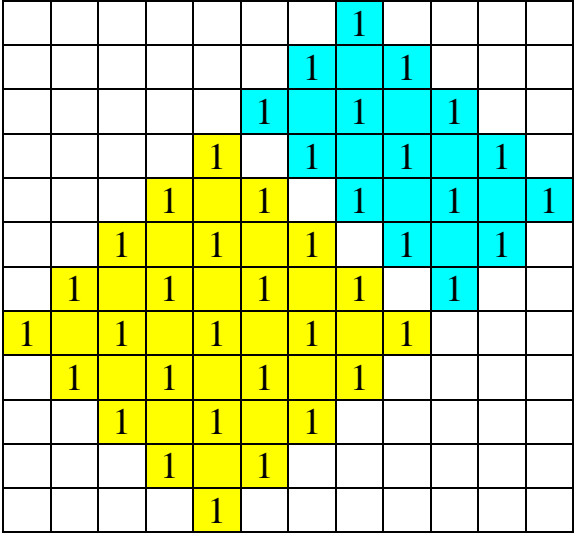
Les 3 déterminants qui suivent sont égaux. Le Théorème 4-15 énonce plus particulièrement l'égalité :  $\det(B_{17 13}) = \det(B_{7 3})$



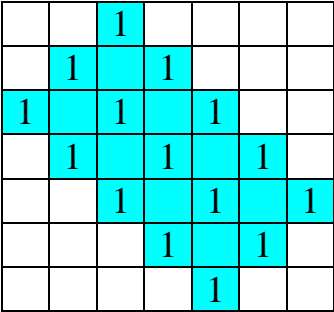
$\det(B_{17_{13}}), n = 17,$   
 $\mathcal{L} = 5, \ell = i_0 = 13 :$



$\det(B_{12_8}), n = 12,$   
 $\mathcal{L} = 5, \ell = i_0 = 8 :$



$\det(B_{7_3}), n = 7,$   
 $\mathcal{L} = 5, \ell = i_0 = 3 :$



Cas n° 2 :  $r = 0$ .

On a alors :  $\ell = q \mathcal{L}$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ).  $\ell = i_0$  est un multiple de  $\mathcal{L}$ .

Ce cas se traite exactement comme dans l'Hypothèse 1 auquel on se référera.

Nous nous contenterons d'énoncer le Théorème 4-16 ci-dessous. Ce théorème est l'équivalent du Théorème 4-14.

**Théorème 4-16.** Soit  $B_{n i_0}$  ( $E\left(\frac{n+1}{2}\right) < i_0 \leq n$ ), de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  ( $\ell > \mathcal{L}$ ) une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  - (Rappelons que :  $\ell = i_0$ ).

On suppose que :  $\ell = q \mathcal{L}$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ). Alors :

Si  $\mathcal{L} = 1$  :  $\det(B_{n i_0}) = 1$ .

Si  $\mathcal{L} > 1$  :  $\det(B_{n i_0}) = 0$ .

2<sup>ème</sup> approche :

Pour traiter l'Hypothèse 2 :  $\ell > \mathcal{L}$  c.-à-d.  $E\left(\frac{n+1}{2}\right) < i_0 \leq n$ , il est beaucoup plus rapide d'introduire la matrice  $J_n$  (c.-à-d. la matrice  $B_{n n}$  d'ordre  $n$ ).

Rappelons (cf. Chapitre 1 page 11) que la matrice  $J_n$  est la matrice d'ordre  $n$  dont les seuls éléments non nuls sont ceux de la 2<sup>ème</sup> diagonale :

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_n .$$

A l'évidence :  $\det(J_n) = 1$ .

L'une des propriétés essentielles de  $J_n$  est la suivante : si  $A$  désigne une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , alors  $A \cdot J_n$  est la matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian vertical.

Soit  $B_{n i_0}$  une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , telle que : ( $E\left(\frac{n+1}{2}\right) < i_0 \leq n$ ), de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  (avec donc :  $\ell > \mathcal{L}$ ). La matrice  $B_{n i_1} = B_{n i_0} \cdot J_n$  est donc la matrice symétrique de  $B_{n i_0}$  par rapport à son axe médian vertical.

Il s'ensuit que  $B_{n i_1}$  est la matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , telle que :

$i_1 = n - i_0 + 1$ , de dimensions  $\mathcal{L}' \times \ell'$ , avec :  $\mathcal{L}' = \ell$  et  $\ell' = \mathcal{L}$ .

On a donc :  $B_{n i_1} = B_{n i_0} \cdot J_n$ , (et inversement :  $B_{n i_0} = B_{n i_1} \cdot J_n$ ).

Par suite :  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{n i_1}) \cdot \det(J_n) = \det(B_{n i_1})$ .

L'étude d'une matrice  $B_{n i_0}$  de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  relevant de l'Hypothèse 2, se ramène donc à celle de la matrice  $B_{n i_1}$  de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , symétrique de  $B_{n i_0}$  par rapport à son axe médian vertical, qui relève de l'Hypothèse 1.

Le Théorème 4-17 qui suit résume les résultats essentiels obtenus au cours de la présente Étape 3.

**Théorème 4-17.** *Considérons un 1-losange de dimensions  $d \times d$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ ).*

*Soit  $B_{n i_0}$  ( $1 \leq i_0 \leq n$ ) une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$ .*

*(Rappelons que :  $\ell = i_0$ ). Posons :  $d = \inf.(\mathcal{L}, \ell)$ .*

1) *Si  $\ell = d$  et  $\mathcal{L} = q d$ , ou si  $\mathcal{L} = d$  et  $\ell = q d$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ), alors :*

- *si  $d = 1$  :  $\det(B_{n i_0}) = 1$ ,*

- *si  $d > 1$  :  $\det(B_{n i_0}) = 0$ .*

2) *Si  $\ell = d$  et  $\mathcal{L} = q d + r$  (avec  $q \in \mathbb{N}$  et  $r$  entier tel que :  $0 < r < d$ ), posons :*

*$m = d + r - 1$ .*

*Soit  $B_{m i'_0}$  la matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_m(\mathbb{B})$  correspondant au 1-rectangle résiduel  $d \times r$  (on a alors :  $i'_0 = d$ ).*

*Alors :  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{m i'_0})$ .*

3) *Si  $\mathcal{L} = d$  et  $\ell = q d + r$  (avec  $q \in \mathbb{N}$  et  $r$  entier tel que :  $0 < r < d$ ), posons :*

*$m = d + r - 1$ .*

*Soit  $B_{m i'_0}$  la matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_m(\mathbb{B})$  correspondant au 1-rectangle résiduel  $r \times d$  (on a alors :  $i'_0 = r$ ).*

*Alors :  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{m i'_0})$ .*

5<sup>ème</sup> Étape Algorithme d'Euclide pour la détermination du pgcd de 2 entiers positifs (Rappel)  
- Méthode graphique.

Rappelons brièvement l'algorithme d'Euclide permettant de déterminer le pgcd de 2 entiers positifs  $d_0$  et  $d_1$ . On suppose :  $d_0 > d_1 > 0$ .

Par divisions euclidiennes successives, que l'on poursuit tant que  $d_k > 0$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} d_0 &= q_1 d_1 + d_2 & d_2 \text{ entier tel que : } 0 \leq d_2 < d_1, \\ d_1 &= q_2 d_2 + d_3 & d_3 \text{ entier tel que : } 0 \leq d_3 < d_2, \\ \dots & \\ d_{k-2} &= q_{k-1} d_{k-1} + d_k & d_k \text{ entier tel que : } 0 \leq d_k < d_{k-1}. \end{aligned}$$

On peut dès lors écrire les inégalités :  $0 \leq d_k < d_{k-1} < \dots < d_3 < d_2 < d_1$ .

La suite d'entiers positifs  $d_k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) est strictement décroissante. Il existe donc nécessairement un rang  $k_0$  tel que :  $d_{k_0} = 0$ . On alors :

$$d_{k_0-2} = q_{k_0-1} d_{k_0-1} \quad (1)$$

Or tout diviseur commun de  $d_0$  et  $d_1$  est aussi diviseur commun de  $d_1$  et  $d_2$ , de  $d_2$  et  $d_3$ , et ainsi de suite jusqu'à  $d_{k_0-2}$  et  $d_{k_0-1}$ .

En particulier, le pgcd de  $d_0$  et  $d_1$  est aussi le pgcd de  $d_1$  et  $d_2$ , de  $d_2$  et  $d_3$  et ainsi de suite jusqu'à  $d_{k_0-2}$  et  $d_{k_0-1}$ .

D'après (1),  $d_{k_0-1}$  est le pgcd de  $d_{k_0-2}$  et  $d_{k_0-1}$ , donc :

$d_{k_0-1}$  est le pgcd des 2 entiers positifs  $d_0$  et  $d_1$  donnés au départ.

Méthode graphique pour la détermination du pgcd de 2 entiers positifs  $d_0$  et  $d_1$

Elle est basée sur l'algorithme d'Euclide exposé ci-dessus.

On construit tout d'abord un rectangle  $R_1$  de longueur  $d_0$  et de largeur  $d_1$ .

Puis on construit à l'intérieur du rectangle  $R_1$  (par convention de la gauche vers la droite) autant de carrés de dimensions  $d_1 \times d_1$  que  $R_1$  peut en contenir par défaut.

Si  $d_1$  divise  $d_0$ , alors il existe un nombre entier ( $q_1$ ) de carrés dans le rectangle  $R_1$  et  $d_1$  est le pgcd de  $d_0$  et  $d_1$ .

Sinon, il subsiste dans  $R_1$  (à droite de  $R_1$ ) un rectangle résiduel  $R_2$  de dimensions  $d_1 \times d_2$  telles que :  $0 < d_2 < d_1$ .

On poursuit alors le processus en construisant à l'intérieur du rectangle  $R_2$  (par convention de bas en haut) autant de carrés de dimensions  $d_2 \times d_2$  que  $R_2$  peut en contenir par défaut.

Si  $d_2$  divise  $d_1$ , alors il existe un nombre entier ( $q_2$ ) de carrés dans le rectangle  $R_2$  et  $d_2$  est alors le pgcd de  $d_2$  et  $d_1$  et donc de  $d_0$  et  $d_1$ .

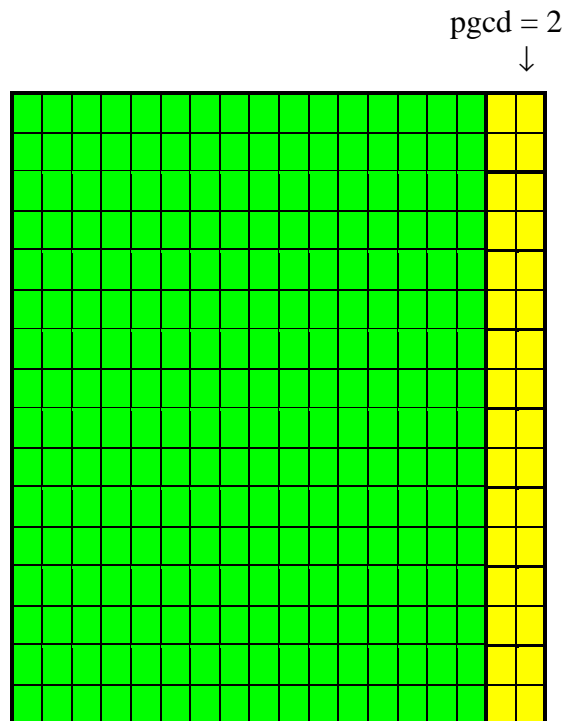
Sinon, il subsiste dans  $R_2$  (en haut de  $R_2$ ) un rectangle résiduel  $R_3$  de dimensions  $d_2 \times d_3$  telles que :  $0 < d_3 < d_2$ .

On réitère ces opérations jusqu'à l'obtention d'un rectangle  $R_{k_0-1}$  de dimensions  $d_{k_0-2} \times d_{k_0-1}$  (avec :  $0 < d_{k_0-1} < d_{k_0-2}$ ) telles que :  $d_{k_0-2} = q_{k_0-1} d_{k_0-1}$  (ce que l'algorithme d'Euclide garantit).

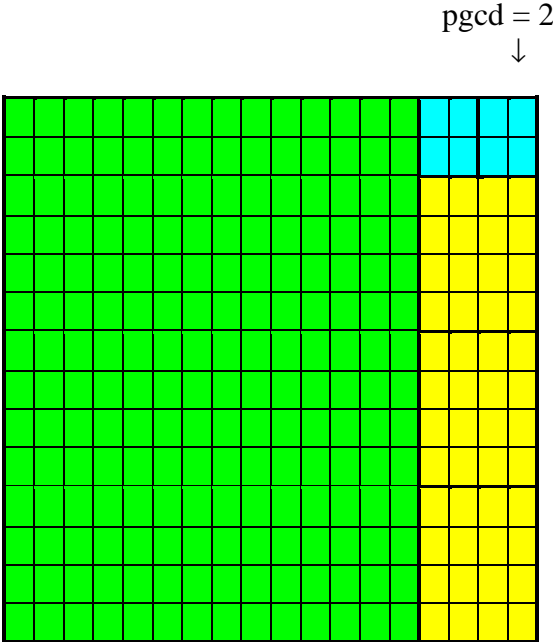
$d_{k_0-1}$  est alors le pgcd de  $d_0$  et  $d_1$ .

Les exemples suivants illustrent la méthode graphique présentée ci-dessus. L'introduction de couleurs permet de suivre *de visu* le processus décrit. La longueur du côté du plus petit carré obtenu, qui permet d'achever le « pavage » du Rectangle  $d_0 \times d_1$  représente le pgcd des entiers donnés  $d_0$  et  $d_1$ .

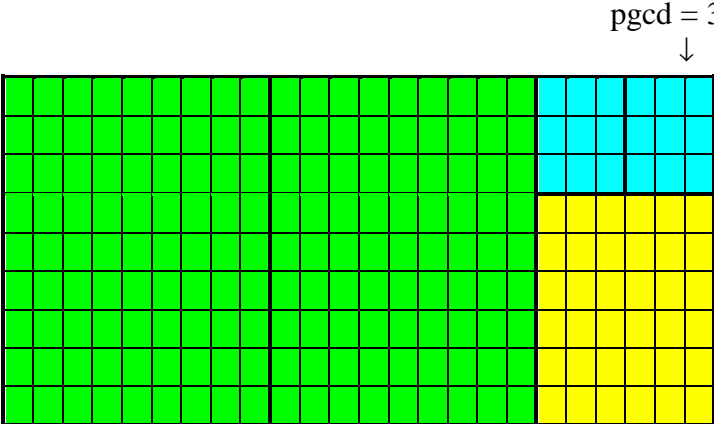
*Exemple 1* :  $d_0 = 18$  ;  $d_1 = 16$ .



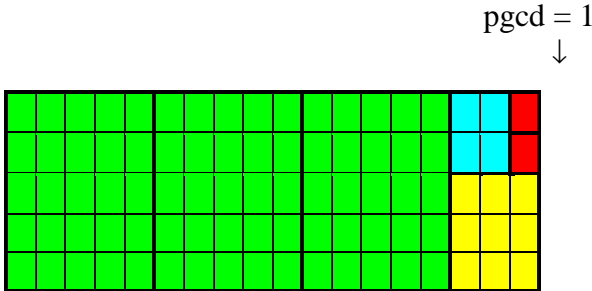
Exemple 2 :  $d_0 = 18 ; d_1 = 14$ .



Exemple 3 :  $d_0 = 24 ; d_1 = 9$ .



Exemple 4 :  $d_0 = 18 ; d_1 = 5$ .



18 et 5 sont premiers entre eux.

6<sup>ème</sup> Étape : Processus final de réduction du déterminant d'une matrice  $B_{n i_0}$  quelconque ( $1 \leq i_0 \leq n$ ) de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

**Théorème 4-18.** Soit  $B_{n i_0}$  ( $1 \leq i_0 \leq n$ ) une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

On peut toujours dériver à partir de  $B_{n i_0}$  une matrice-losange  $B_{m i'_0}$  de  $\mathcal{BSC}_m(\mathbb{B})$  de dimensions  $d \times d$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ ) et d'ordre  $m = 2d - 1$ , telle que :  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{m i'_0})$ .

Alors :

- si  $d = 1$  :  $\det(B_{n i_0}) = 1$ ,
- si  $d > 1$  :  $\det(B_{n i_0}) = 0$ .

*Preuve :*

Soit  $B_{n i_0}$  ( $1 \leq i_0 \leq n$ ) une matrice de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  de dimensions  $\mathcal{L} \times \ell$  (Rappel :  $\ell = i_0$ ).

Si  $\mathcal{L} = \ell$ , on a immédiatement comme solution :  $B_{m i'_0} = B_{n i_0}$  et l'on a :  $d = \mathcal{L} = \ell$  ainsi que :  $i'_0 = i_0$  et  $m = n$ .

Si  $\ell < \mathcal{L}$ , alors :  $1 \leq i_0 < E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ . Posons alors :  $d_0 = \mathcal{L} =$  et  $d_1 = \ell$  (avec donc :  $d_0 > d_1$ ).

Par division euclidienne de  $d_0$  par  $d_1$  :

$$d_0 = q_1 d_1 + d_2 \text{ avec } d_2 \text{ entier } (0 < d_2 < d_1).$$

Il existe alors d'après le Théorème 4-17 une matrice  $B_{m(1) i_0(1)}$  d'ordre  $m(1) = (d_1 + d_2 - 1)$ , telle que :  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{m(1) i_0(1)})$ .

Par division euclidienne de  $d_1$  par  $d_2$  :

$$d_1 = q_1 d_2 + d_3 \text{ avec } d_3 \text{ entier } (0 \leq d_3 < d_2).$$

- Si  $d_3 = 0$ , la matrice  $B_{m i'_0}$  est la matrice-losange correspondant au 1-losange de dimensions  $d_2 \times d_2$  et d'ordre  $m = 2d_2 - 1$ . On a alors :  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{m i'_0})$ ,

- Si  $d_3 > 0$ , il existe alors d'après le Théorème 4-17 une matrice  $B_{m(2) i_0(2)}$  d'ordre  $m(2) = (d_2 + d_3 - 1)$ , telle que :  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{m(1) i_0(1)}) = \det(B_{m(2) i_0(2)})$ .

....

Au rang  $k - 2$ , par division euclidienne de  $d_{k-1}$  par  $d_k$  (non nul) :

$$d_{k-2} = q_1 d_{k-1} + d_k \text{ avec } d_k \text{ entier } (0 \leq d_k < d_{k-1}).$$

Distinguons les cas  $d_k = 0$  et  $d_k > 0$ .

- Si  $d_k = 0$ , la matrice  $B_{m i'_0}$  est la matrice-losange correspondant au 1-losange de dimensions  $d_{k-1} \times d_{k-1}$  et d'ordre  $m = 2d_{k-1} - 1$ . On a alors :  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{m i'_0})$ .
- Si  $d_k > 0$ , il existe alors d'après le Théorème 4-17 une matrice  $B_{m(k-1) i_0(k-1)}$  d'ordre  $m(k-1) = (d_{k-1} + d_k - 1)$ , telle que :  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{m(1) i_0(1)}) = \det(B_{m(2) i_0(2)}) = \dots = \det(B_{m(k-1) i_0(k-1)})$ .

On met donc en évidence une suite d'entiers  $d_k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) tel que :

$$0 \leq d_k < d_{k-1} \dots < d_3 < d_2 < d_1 < d_0.$$

Comme cette suite d'entiers est strictement décroissante, il existe nécessairement un rang  $k_0$  tel que :  $d_{k_0} = 0$ .

La matrice  $B_{m i'_0}$  est alors la matrice-losange correspondant au 1-losange de dimensions  $d_{k_0-1} \times d_{k_0-1}$  d'ordre :  $m = 2d_{k_0-1} - 1$ . On a alors :  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{m i'_0})$ .

Si  $\ell > \mathcal{L}$ , alors :  $E\left(\frac{n+1}{2}\right) < i_0 \leq n$ . On pose dans ce cas :  $\ell = d_0$  et  $\mathcal{L} = d_1$  (avec donc :  $d_0 > d_1$ ). Le processus est à partir de là tout à fait analogue au cas  $\ell < \mathcal{L}$ .

7<sup>ème</sup> Étape : Achèvement de la démonstration des Théorèmes 4-1/4-4.

Le processus décrit ci-dessus pour la démonstration du Théorème 4-18 n'est autre que l'algorithme d'Euclide (cf. Étape 6) appliqué à la recherche du pgcd des entiers  $\ell = d_0$  et  $\mathcal{L} = d_1$ .

L'entier  $d_{k_0-1}$  obtenu plus haut est donc le pgcd des entiers  $\mathcal{L}$  et  $\ell$ .

Comme  $B_{m i'_0}$  est la matrice-losange de dimensions  $d_{k_0-1} \times d_{k_0-1}$  d'ordre :  $m = 2d_{k_0-1} - 1$ . (cf. démonstration du Théorème 4-18) et comme  $\det(B_{n i_0}) = \det(B_{m i'_0})$  :

- $\det(B_{n i_0}) = 1$  si  $\text{pgcd}(\mathcal{L}, \ell) = 1$  (c.-à-d. si  $\mathcal{L}$  et  $\ell$  sont premiers entre eux),
- $\det(B_{n i_0}) = 0$  si  $\text{pgcd}(\mathcal{L}, \ell) > 1$  (c.-à-d. si  $\mathcal{L}$  et  $\ell$  sont non premiers entre eux).

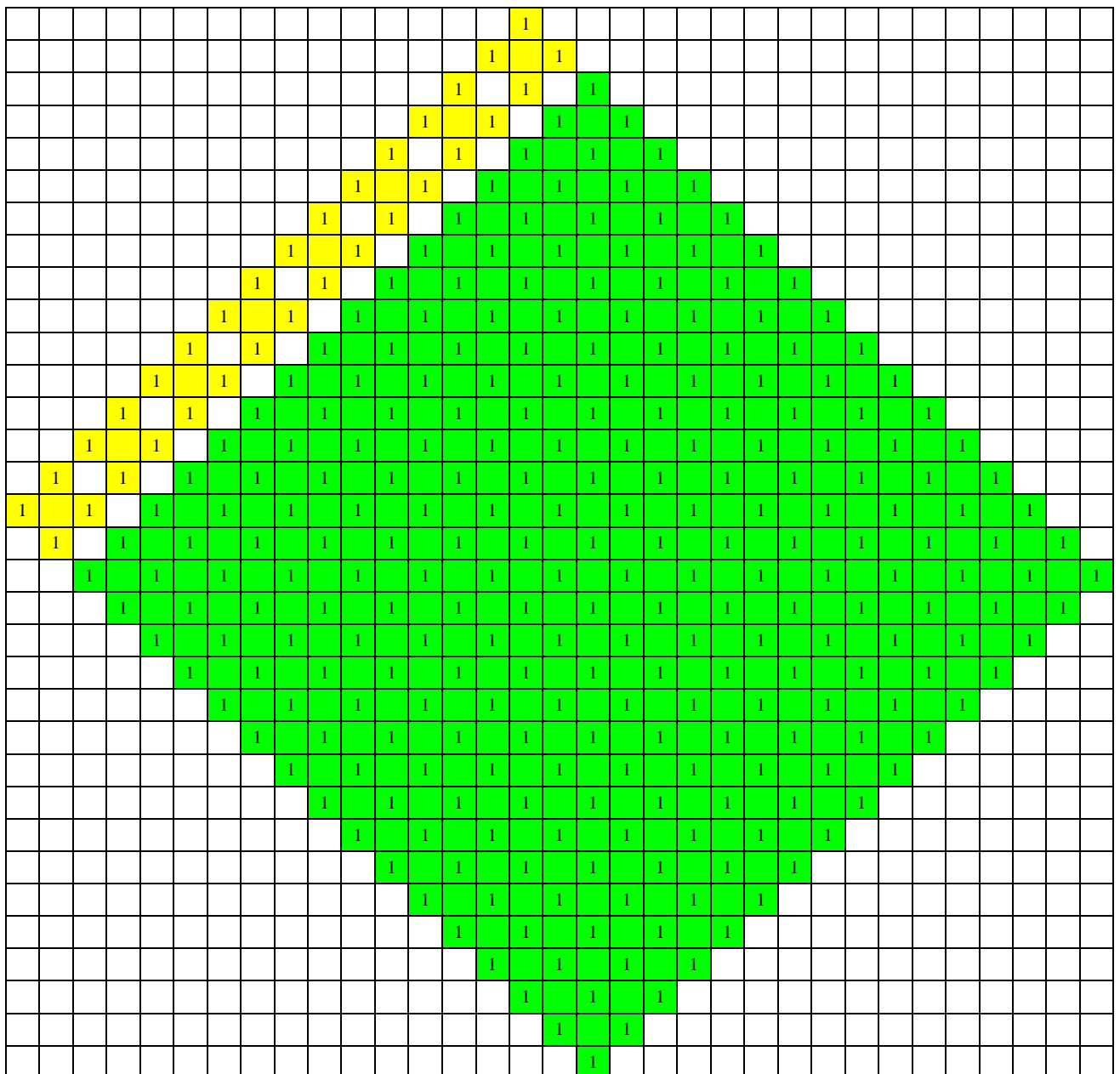
Les Théorèmes 4-1/4-4 sont ainsi démontrés.



Exemples :

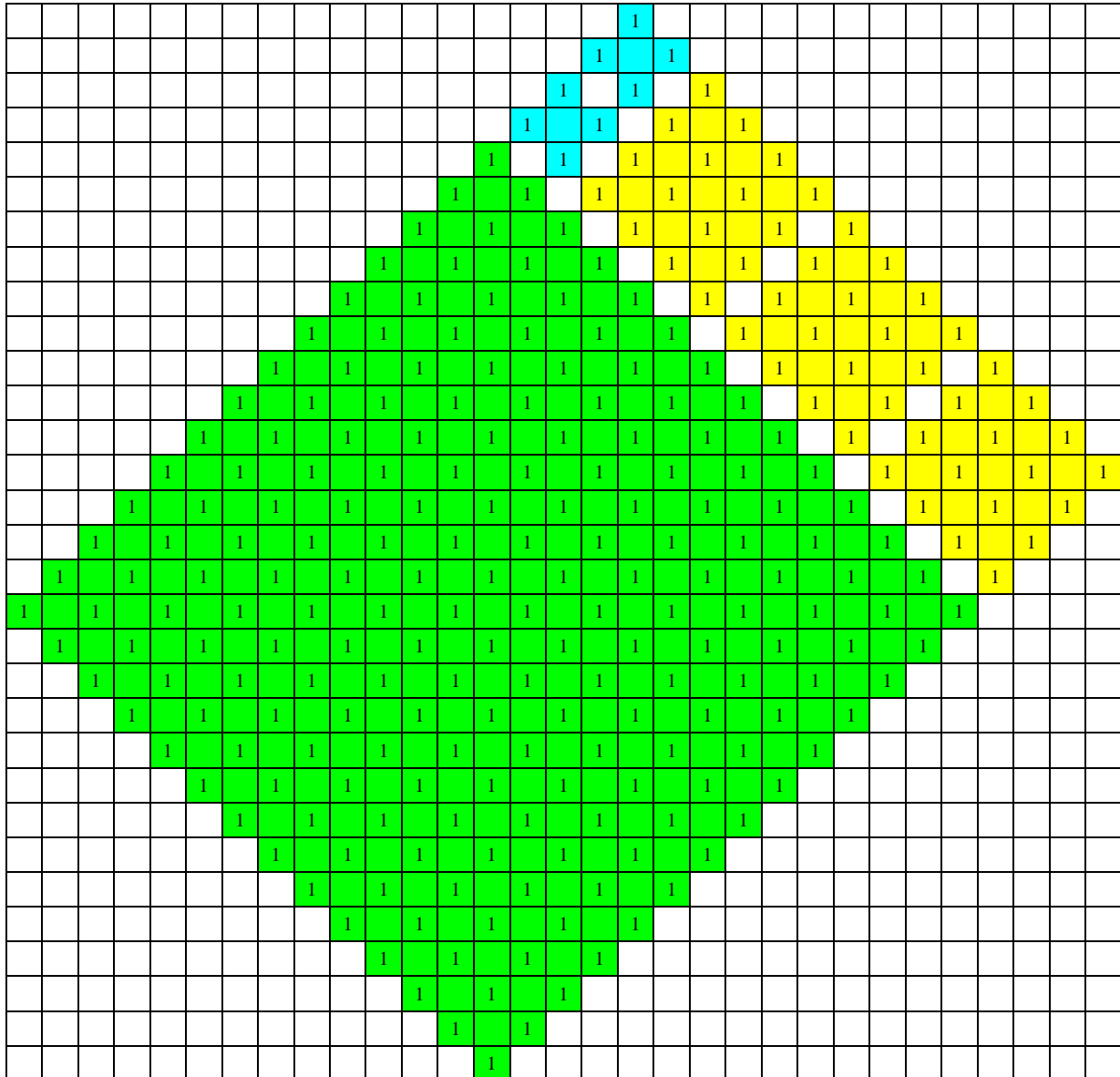
Nous allons déterminer graphiquement, en nous appuyant sur des exemples, le déterminant de matrices  $B_{n i_0}$  d'ordre  $n$ . Les 4 premiers exemples choisis sont les mêmes que ceux illustrant l'Étape 5. Les codes-couleurs utilisés sont identiques de manière à faciliter le rapprochement entre les divers découpages effectués. La seule différence notable est que, dans l'Étape 5, apparaissent des rectangles (et des carrés) dont les côtés sont horizontaux et verticaux, tandis que l'on a affaire ci-dessous à des 1-rectangles (et des 1-losanges) dont les côtés sont orientés selon les 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> diagonales des matrices concernées.

*Exemple 1 :*  $\det(B_{33 \ 16})$ ,  $n = 33$ ,  $\mathcal{L} = 18$ ,  $\ell = 16$  :  $\text{pgcd}(18,16) = 2 \Rightarrow \det(B_{33 \ 16}) = 0$ .

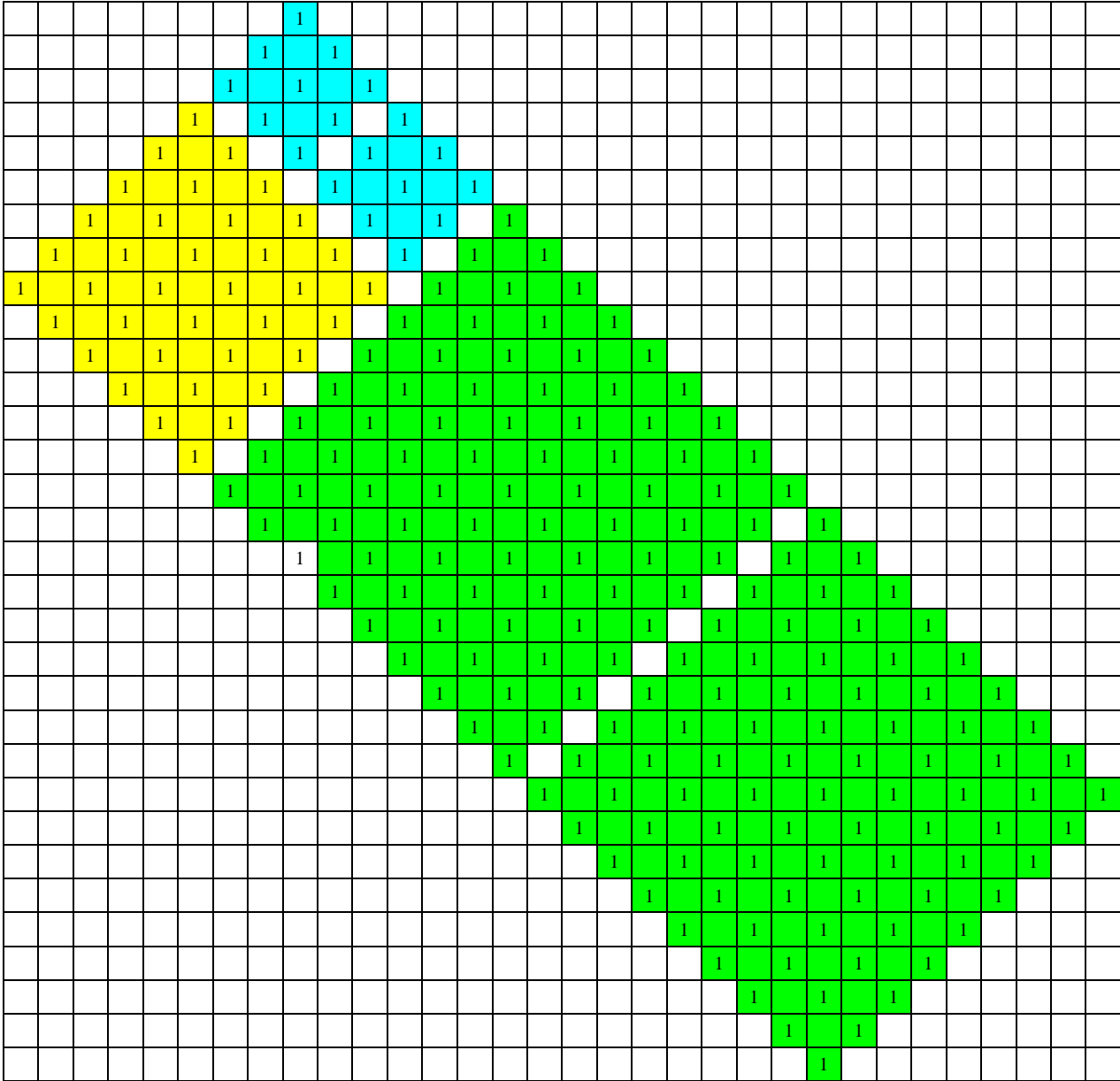


Exemple 2 :  $\det(B_{31\ 18})$ ,  $n = 31$ ,  $\mathcal{L} = 14$ ,  $\ell = 18$  :  $\text{pgcd}(14,18) = 2 \Rightarrow \det(B_{31\ 18}) = 0..$

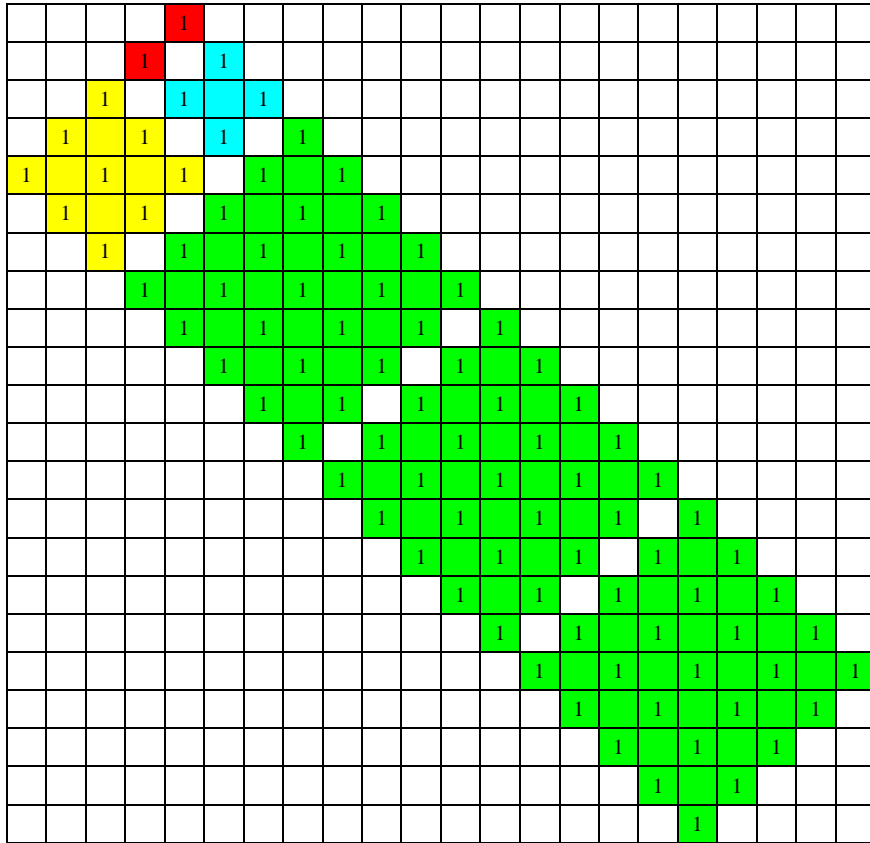
Dans cet exemple :  $\ell > \mathcal{L}$ . Mais le processus de découpage est strictement identique au cas  $\ell < \mathcal{L}$ .



Exemple 3 :  $\det (B_{32, 9})$ ,  $n = 32$ ,  $\mathcal{L} = 24$ ,  $\ell = 9$  :  $\text{pgcd}(24, 9) = 3 \Rightarrow \det (B_{32, 9}) = 0$ .



Exemple 4 :  $\det (B_{22\ 5})$ ,  $n = 22$ ,  $\mathcal{L} = 18$ ,  $\ell = 5$  :  $\text{pgcd}(18, 5) = 1 \Rightarrow \det (B_{22\ 5}) = 1$ .



Le dernier 1-losange (rouge) obtenu à l'issue du processus de découpage est de dimensions  $1 \times 1$ . La valeur de son côté est égale au  $\text{pgcd}$  de  $\mathcal{L} = 18$  et de  $\ell = 5$  (cf. algorithme d'Euclide).

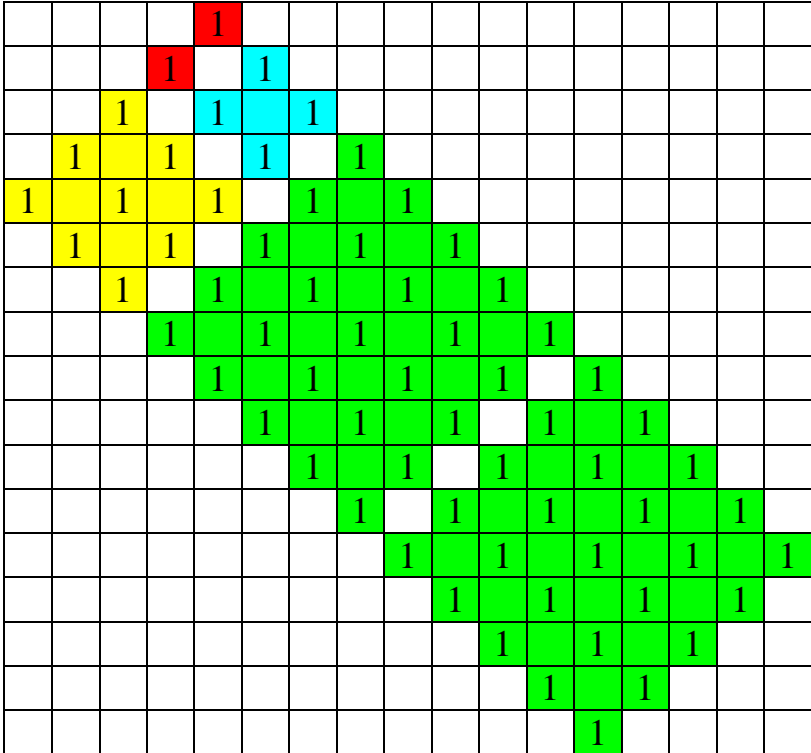
La matrice  $B_{m\ i'_0}$  à laquelle on aboutit (cf. notation employée dans le Théorème 4-18) correspond donc à cet ultime 1-losange de dimensions  $1 \times 1$ . Il s'agit donc de la matrice  $B_{11}$  d'ordre 1.

Par suite :  $\det (B_{m\ i'_0}) = 1$ .

Et donc, finalement :  $\det (B_{22\ 5}) = 1$ .

Exemple 5 :

Traitons pour finir l'exemple qui nous a servi tout au long de l'Étape 4 :  
 $\det(B_{17\ 5}), n = 17, \mathcal{L} = 13, \ell = 5 : \text{pgcd}(13, 5) = 1 \Rightarrow \det(B_{17\ 5}) = 1.$



## ANNEXE / CHAPITRE 4

### DÉTERMINANT D'UNE MATRICE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$

**Définition A4-1.** Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

Le déterminant de la matrice  $A$ , que nous noterons  $\det(A)$ , est le scalaire de  $\mathbb{B}$  défini comme suit :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n},$$

où  $\mathcal{O}_n$  représente l'ensemble des permutations de l'ensemble des entiers  $\{1, 2, \dots, n\}$  et

où  $\sigma$  représente une permutation donnée faisant partie de  $\mathcal{O}_n$ .

*Remarque :*

Nous admettrons dans le cadre de cette étude que le déterminant ainsi défini possède les propriétés « classiques » d'un déterminant, et en particulier la suivante :

**Théorème A4-2.** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  :  $A$  inversible  $\Leftrightarrow \det(A) = 1$ .

\*  
\* \*

## TABLE DES MATIÈRES

### PARTIE 3 : CHAPITRES 5 – 6

<b>CHAPITRE 5</b>	<b>169</b>
<b>ÉTUDE DES MATRICES CARREES DE MATRICES DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>169</b>
<b>5.1. Introduction</b>	<b>169</b>
<b>5.2. Étude des carrés des matrices <math>B_i</math>, <math>1 \leq i \leq n</math>, de la base canonique de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>171</b>
<b>5.3. Étude des carrés des matrices de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>172</b>
<b>5.4. Traduction matricielle des relations entre les coefficients <math>A_i</math> d'une matrice <math>A</math> de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> et les coefficients <math>\alpha_i</math> de la matrice <math>A^2</math></b>	<b>182</b>
<b>5.5. Signature réduite du carré d'une matrice de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>185</b>
<b>5.6. Considérations concernant la notation de la décomposition d'une matrice de <math>\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})</math> dans la base canonique de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>186</b>
<b>ANNEXE / CHAPITRE 5</b>	<b>189</b>
<b>RACINES CARRÉES DE LA MATRICE NULLE</b>	<b>189</b>

<b>CHAPITRE 6</b>	<b>193</b>
<b>ÉTUDE DES PUISSANCES <math>2^k</math> (<math>k \in \mathbb{N}^*</math>) DES MATRICES DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> – LOIS GÉNÉRALES RELATIVES AUX PUISSANCES DE BOUCLAGE DES MATRICES DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>193</b>
<b>6.1. Introduction</b>	<b>193</b>
<b>6.2. Étude relative à l'ordre pair : <math>n = 2\nu</math>, <math>\nu \in \mathbb{N}^*</math></b>	<b>193</b>
<b>6.3. Étude relative à l'ordre impair : <math>n = 2\nu + 1</math>, <math>\nu \in \mathbb{N}^*</math></b>	<b>197</b>
<b>6.4. Étude des matrices</b>	<b>201</b>
<b>6.5. Étude des puissances de bouclage d'une matrice quelconque de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>207</b>
<b>6.6. Autre formulation des Théorèmes 6-6, 6-7, 6-11 et 6-12</b>	<b>218</b>
<b>ANNEXE / CHAPITRE 6</b>	<b>219</b>
<b>THÉORÈME FONDAMENTAL DES MATRICES CARRÉES À ÉLÉMENTS DANS <math>\mathbb{B}</math></b>	<b>219</b>





## CHAPITRE 5

### Étude des matrices carrées de matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

#### 5.1. Introduction

Nous avons déjà été amenés à introduire dans le Chapitre 1 (page 11) la matrice  $J_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Cette matrice fait partie de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  : il s'agit de la matrice  $B_n$ .

$$J_n = B_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_n.$$

Rappelons brièvement les propriétés de  $J_n = B_n$ .

1)  $J_n^2 = I_n$  et :  $J_n^{-1} = J_n$ .

2)  $J_n = {}^t J_n = J_n^t$ .

3) Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

$A \cdot J_n$  est la matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian vertical.

$J_n \cdot A$  est la matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian horizontal.

Désignons par  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , les  $n$  de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Comme les matrices  $B_i$  et  $B_{n-i+1}$  sont symétriques l'une de l'autre par rapport à leurs deux axes médians, on peut énoncer le théorème suivant.

**Théorème 5-1.**  $B_{n-i+1} = J_n \cdot B_i = B_i \cdot J_n$ ,  $\forall i = 1$  à  $n$ .

*Remarque :*

Pour  $n$  impair,  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , on a donc :  $B_{\nu+1} = J_n \cdot B_{\nu+1} = B_{\nu+1} \cdot J_n$ .

La matrice  $B_{\nu+1}$  ( $n$  impair,  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ) est sa propre symétrique par rapport à ses deux axes médians. C'est la seule matrice de la base canonique dans ce cas.

*Exemples :*

(Les matrices deux à deux symétriques par rapport aux axes médians ont été mises en regard).

$n = 5$

$B_1$

x				
	x			
		x		
			x	
				x

$B_5 = J_5 = J_5 B_1$

				x
			x	
		x		
	x			
x				

$B_2$ 

	X			
X		X		
	X		X	
		X		X
			X	

 $B_4 = J_5 B_2$ 

			X	
		X		X
	X		X	
X		X		
	X			

 $B_3 = J_5 B_3$ 

		X		
	X		X	
X		X		X
	X		X	
		X		

 $n = 6$  $B_1$ 

X					
	X				
		X			
			X		
				X	
					X

 $B_6 = J_6 = J_6 B_1$ 

					X
				X	
			X		
		X			
	X				
X					

 $B_2$ 

	X				
X		X			
	X		X		
		X		X	
			X		X
				X	

 $B_5 = J_6 B_2$ 

				X	
			X		X
		X		X	
	X		X		
X		X			
	X				

 $B_3$ 

		X			
	X		X		
X		X		X	
	X		X		X
		X		X	
			X		

 $B_4 = J_6 B_3$ 

			X		
		X		X	
	X		X		X
X		X		X	
	X		X		
		X			

## 5.2. Étude des carrés des matrices $B_i, 1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

**Théorème 5-2.**  $B_{n-i+1}^2 = B_i^2 \quad \forall i = 1 \text{ à } n.$

*Preuve :* Immédiate à partir du Théorème 5-1, en tenant compte du fait que :  $J_n^2 = I_n$ .

### 5.2.1. Ordre pair : $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$

**Théorème 5-3.**

$$B_1^2 = B_1$$

$$B_2^2 = B_1 + B_3$$

$$B_3^2 = B_1 + B_3 + B_5$$

...

$$B_i^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2i-3} + B_{2i-1} \quad (1 \leq i \leq \nu)$$

...

$$B_\nu^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-3} + B_{2\nu-1}.$$

*Preuve :*

Immédiate. C'est une conséquence directe du Théorème 3-9 du Chapitre 3, relatif au produit de 2 matrices de la base canonique  $B_i, B_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ , dans le cas particulier où  $i = j$  (\*).

### 5.2.2. Ordre impair : $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$

**Théorème 5-4.**

$$B_1^2 = B_1$$

$$B_2^2 = B_1 + B_3$$

$$B_3^2 = B_1 + B_3 + B_5$$

...

$$B_i^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2i-3} + B_{2i-1} \quad (1 \leq i \leq \nu + 1)$$

...

$$B_\nu^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-3} + B_{2\nu-1}$$

$$B_{\nu+1}^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-1} + B_{2\nu+1}$$

*Preuve :*

Immédiate. Comme pour le cas d'un ordre pair (\*).

(\*) *Note :* Rappelons que le produit de 2 matrices de la base canonique  $B_i, B_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ , s'obtient par simple lecture de la ligne  $i$  de la matrice  $B_j$ . Dans cette ligne, les indices-colonnes des cases ayant la valeur 1 correspondent aux coordonnées non nulles dans la base canonique du produit  $B_i, B_j$ .

### 5.3. Étude des carrés des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  s'écrit en toute généralité :

$$A = \sum_{i=1}^n a_i B_i,$$

où  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , représentent les  $n$  paramètres de la 1<sup>ère</sup> ligne de  $A$ , ou encore les composantes (ou « coordonnées ») de  $A$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Dès lors :

$$A^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i B_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 B_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i B_i^2 \quad (\text{puisque : } a_i \in \mathbb{B} \Rightarrow a_i^2 = a_i).$$

#### 5.3.1. Ordre pair : $n = 2\nu$ , $\nu \in \mathbb{N}^*$

Scindons le signe  $\sum$  en 2 tranches :

$$A^2 = \sum_{i=1}^n a_i B_i^2 = \sum_{i=1}^{\nu} a_i B_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{2\nu} a_i B_i^2.$$

D'après le Théorème 5-2 ci-dessus :  $\forall i = 1$  à  $\nu$ , pour  $j = 2\nu - i + 1$  :  $B_j^2 = B_i^2$ .

On en déduit :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (a_i + a_{2\nu-i+1}) B_i^2$$

Posons :

$$(\sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu-1} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = a_{\nu-1} + a_{\nu+2} \\ A_{\nu} = a_{\nu} + a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} A_i B_i^2$$

Appliquons les résultats du Théorème 5-3 ci-dessus :

$$B_1^2 = B_1$$

$$B_2^2 = B_1 + B_3$$

$$B_3^2 = B_1 + B_3 + B_5$$

$$\begin{aligned} \dots \\ \mathbf{B}_i^2 &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_5 + \dots + \mathbf{B}_{2i-3} + \mathbf{B}_{2i-1} \\ \dots \\ \mathbf{B}_{\nu-1}^2 &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_5 + \dots + \mathbf{B}_{2\nu-5} + \mathbf{B}_{2\nu-3} \\ \mathbf{B}_\nu^2 &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_5 + \dots + \mathbf{B}_{2\nu-3} + \mathbf{B}_{2\nu-1} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$(\sigma_2) \left\{ \begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \dots + \mathbf{A}_i + \dots + \mathbf{A}_{\nu-1} + \mathbf{A}_\nu) \mathbf{B}_1 \\ &\quad + (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \dots + \mathbf{A}_i + \dots + \mathbf{A}_{\nu-1} + \mathbf{A}_\nu) \mathbf{B}_3 \\ &\quad + (\mathbf{A}_3 + \dots + \mathbf{A}_i + \dots + \mathbf{A}_{\nu-1} + \mathbf{A}_\nu) \mathbf{B}_5 \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + (\mathbf{A}_i + \dots + \mathbf{A}_{\nu-1} + \mathbf{A}_\nu) \mathbf{B}_{2i-1} \\ &\quad \dots \\ &\quad + (\mathbf{A}_{\nu-1} + \mathbf{A}_\nu) \mathbf{B}_{2\nu-3} \\ &\quad + (\mathbf{A}_\nu) \mathbf{B}_{2\nu-1} \end{aligned} \right.$$

**Théorème 5-5.** Soit  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{B}_i$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ).

Les composantes (ou « coordonnées ») de  $\mathbf{A}^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont données par les relations  $(\sigma_1)$  et  $(\sigma_2)$  ci-dessus. Toutes les composantes de  $\mathbf{A}^2$  relatives aux matrices  $\mathbf{B}_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

Remarques :

- 1) Pour  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), il existe  $\nu$  matrices  $\mathbf{B}_i$  d'indice  $i$  pair et  $\nu$  matrices  $\mathbf{B}_i$  d'indice  $i$  impair. Il n'existe donc au total « que »  $2^\nu$  matrices qui sont les carrés d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ).
- 2) Le point final du Théorème 5-5 découle directement du Théorème 5-3.  
Comme les composantes de tous les  $\mathbf{B}_i^2$ ,  $1 \leq i \leq n$ , d'indice  $i$  pair sont nulles (cf. Théorème 5-3), il en est de même pour :  $\mathbf{A}^2 = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{B}_i^2$ .

Réciproque du Théorème 5-5

Soit  $\mathbf{U}$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), dont toutes les composantes relatives aux matrices  $\mathbf{B}_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

$\mathbf{U}$  est de la forme :  $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \mathbf{B}_{2i-1}$ .

Montrons que cette matrice est le carré commun de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Considérons en effet le système  $(\sigma_3)$  suivant, dérivé des relations  $(\sigma_2)$  :

$$(\sigma_3) \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{v-1} + A_v = \alpha_1 \\ \quad A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{v-1} + A_v = \alpha_2 \\ \quad \quad + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{v-1} + A_v = \alpha_3 \\ \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad A_i + \dots + A_{v-1} + A_v = \alpha_i \\ \quad \quad \quad \quad \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_{v-1} + A_v = \alpha_{v-1} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_v = \alpha_v \end{array} \right.$$

Ce système de  $\nu$  équations à  $\nu$  inconnues se résout sans peine de bas en haut.

On obtient ainsi :

$$(\sigma_4) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ A_3 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ \dots \\ A_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \dots \\ A_{v-1} = \alpha_{v-1} + \alpha_v \\ A_v = \alpha_v \end{array} \right.$$

Les  $\nu$  coefficients  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) étant ainsi déterminés, il convient maintenant de résoudre le système  $(\sigma_1)$  constitué de  $\nu$  équations aux  $2\nu$  inconnues  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 2\nu$ )

$$(\sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu-1} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{v-1} = a_{v-1} + a_{v+2} \\ A_v = a_v + a_{v+1} \end{array} \right.$$

Ainsi qu'on le constate, on peut, par exemple, fixer arbitrairement la valeur (0 ou 1) des inconnues  $a_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ). Celle des inconnues  $a_i$  ( $\nu+1 \leq i \leq 2\nu$ ) en découle alors immédiatement. Il y a donc  $2^\nu$  solutions distinctes.

Le théorème suivant en découle.

**Théorème 5-6** Soit  $U = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i B_{2i-1}$  une matrice de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ), dont les composantes relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.  $U$  est alors le carré de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  dont les composantes (ou « coordonnées ») dans la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  sont données par les relations  $(\sigma_4)$  et  $(\sigma_1)$  ci-dessus.

*Remarque 1 :*

Nous démontrerons en Annexe du présent Chapitre le Théorème 5-6bis représentant une version plus élaborée du théorème ci-dessus. Celle-ci précisera le lien existant entre les  $2^\nu$  matrices racines carrées de  $U$ .

*Remarque 2 :*

Il existe,  $n$  étant pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ),  $2^{2\nu}$  matrices dans  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ . Chacune de ces matrices possède bien évidemment une matrice carrée. Nous avons établi qu'il n'existe « que »  $2^\nu$  matrices qui soient des carrés de matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ . (Ce sont celles dont les composantes dans la base canonique d'indice pair sont nulles).

Il n'est donc pas étonnant qu'une matrice carrée de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  soit dès lors le carré de  $\frac{2^{2\nu}}{2^\nu} = 2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque 3 :*

Notons que,  $n$  étant pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ), la matrice  $J_n = B_n = B_{2\nu}$  n'est le carré d'aucune matrice de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , sa seule composante non nulle dans la base canonique étant d'indice pair.

### 5.3.2. Ordre impair : $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$

Note : Laissons provisoirement de côté le cas trivial  $n = 1$  en imposant d'abord  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

Nous avons établi plus haut que :

$$A^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i B_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i B_i^2.$$

Scindons le signe  $\sum$  en 3 tranches, en isolant le terme central  $a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2$  :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} a_i B_i^2 + a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2 + \sum_{i=\nu+2}^{2\nu+1} a_i B_i^2.$$

D'après le Théorème 5-2 ci-dessus :  $\forall i = 1$  à  $\nu$ , pour  $j = 2\nu - i + 2$  :  $B_j^2 = B_i^2$ .

On en déduit :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (a_i + a_{2\nu-i+2}) B_i^2 + a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2$$



On constate que la différence essentielle, par rapport au cas où  $n$  est pair provient de l'existence du terme central :  $a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2$ .

Posons :

$$(\sigma_5) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} A_i B_i^2 + a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2$$

Appliquons les résultats du Théorème 5-4 ci-dessus :

$$B_1^2 = B_1$$

$$B_2^2 = B_1 + B_3$$

$$B_3^2 = B_1 + B_3 + B_5$$

...

$$B_i^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2i-3} + B_{2i-1} \quad (1 \leq i \leq \nu+1)$$

...

$$B_\nu^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-3} + B_{2\nu-1}$$

$$B_{\nu+1}^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-1} + B_{2\nu+1}$$

Il vient alors :

$$(\sigma_6) \left\{ \begin{array}{l} A^2 = (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1}) B_1 \\ \quad + (A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1}) B_3 \\ \quad + (A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1}) B_5 \\ \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad + (A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1}) B_{2i-1} \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad + (A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1}) B_{2\nu-3} \\ \quad \quad \quad + (A_\nu + A_{\nu+1}) B_{2\nu-1} \\ \quad \quad \quad + (A_{\nu+1}) B_{2\nu+1} \end{array} \right.$$

**Théorème 5-7.** Soit  $A = \sum_{i=1}^n a_i B_i$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ).

Les composantes (ou « coordonnées ») de  $A^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont données par les relations  $(\sigma_5)$  et  $(\sigma_6)$  ci-dessus. Toutes les composantes de  $A^2$  relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

(Note : dans l'énoncé du Théorème 5-7, nous avons réintégré le cas trivial :  $n = 1$ ).

*Remarques :*

1) Pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ), il existe  $\nu$  matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair et  $\nu + 1$  matrices  $B_i$  d'indice  $i$  impair. Il n'existe donc au total « que »  $2^{\nu+1}$  matrices qui sont les carrés d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ).

2) Le point final du Théorème 5-7 découle directement du Théorème 5-4.

Comme les composantes de tous les  $B_i^2, 1 \leq i \leq n$ , d'indice  $i$  pair sont nulles

(cf. Théorème 5-4), il en est de même pour :  $A^2 = \sum_{i=1}^n a_i B_i^2$ .

### Réciproque du Théorème 5-7

Soit  $U$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ), dont toutes les composantes relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

$U$  est de la forme :  $U = \sum_{i=1}^{\nu+1} \alpha_i B_{2i-1}$ .

Montrons que cette matrice est le carré commun de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Considérons en effet le système  $(\sigma_7)$  suivant, dérivé des relations  $(\sigma_6)$  :

$$(\sigma_7) \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_1 \\ A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_2 \\ \quad + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_3 \\ \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \dots \qquad \qquad \dots \qquad \dots \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_i \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \dots \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_{\nu-1} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_\nu \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad A_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Ce système de  $\nu + 1$  équations à  $\nu + 1$  inconnues se résout sans peine de bas en haut.

On obtient ainsi :

$$(\sigma_8) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ A_3 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ \dots \\ A_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu \\ A_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1} \\ A_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Les  $\nu+1$  coefficients  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu+1$ ) étant ainsi déterminés, il convient maintenant de résoudre le système  $(\sigma_5)$ , constitué de  $\nu+1$  équations aux  $2\nu+1$  inconnues  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 2\nu+1$ ).

$$(\sigma_5) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Ainsi qu'on le constate,  $a_{\nu+1}$  est parfaitement déterminé, puisque :  $a_{\nu+1} = A_{\nu+1}$ . Par contre, on peut, par exemple, fixer arbitrairement la valeur (0 ou 1) des inconnues  $a_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ). Celle des inconnues  $a_i$  ( $\nu+1 \leq i \leq 2\nu$ ) en découle alors immédiatement. Il y a donc  $2^\nu$  solutions distinctes.

Le théorème suivant en découle.

**Théorème 5-8.** Soit  $U = \sum_{i=1}^{\nu+1} \alpha_i B_{2i-1}$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), dont les composantes relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.  $U$  est alors le carré de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont les composantes (ou « coordonnées ») dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont données par les relations  $(\sigma_8)$  et  $(\sigma_5)$  ci-dessus.

*Remarque 1 :*

Nous démontrerons en Annexe du présent Chapitre le Théorème 5-8bis représentant une version plus élaborée du théorème ci-dessus. Celle-ci précisera le lien existant entre les  $2^\nu$  matrices racines carrées de  $U$ .

*Remarque 2 :*

Il existe,  $n$  étant impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ),  $2^{2\nu+1}$  matrices dans  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Chacune de ces matrices possède bien évidemment une matrice carrée. Nous avons établi qu'il n'existe « que »  $2^{\nu+1}$  matrices qui soient des carrés de matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . (Ce sont celles dont les composantes dans la base canonique d'indice pair sont nulles).

Il n'est donc pas étonnant qu'une matrice carrée de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  soit dès lors le carré de  $\frac{2^{2\nu+1}}{2^{\nu+1}} = 2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque 3 :*

Pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), la matrice  $J_n = B_n = B_{2\nu+1}$  a une seule composante non nulle dans la base canonique et cette composante est d'indice impair. D'après ce qui précède,  $J_n$  est donc le carré de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , (ce qui, rappelons-le, n'est pas le cas pour de  $J_n$  pour  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ )).

Nous allons, à titre d'exercice, nous placer dans les cas :  $n = 5$  ( $\nu = 2$ ) et déterminer les  $2^2 = 4$  matrices de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$ , « racines carrées » de  $J_5$ .

Il s'agit donc de résoudre le système  $(\sigma_8)$  :

$$(\sigma_8) \quad \begin{cases} A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ A_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Or :  $J_5 = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_3 + \alpha_3 B_5$ , avec :  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  et  $\alpha_3 = 1$ .

$(\sigma_8)$  se résout instantanément. On obtient :

$$(\sigma_8) \quad \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 1 \\ A_3 = 1 \end{cases}$$

Reste à résoudre, pour  $n = 5$ , le système  $(\sigma_5)$  où les inconnues sont :  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  :

$$(\sigma_5) \quad \begin{cases} A_1 = a_1 + a_5 \\ A_2 = a_2 + a_4 \\ A_3 = a_3 \end{cases}$$

Il vient :

$$(\sigma_5) \quad \begin{cases} a_1 + a_5 = 0 \\ a_2 + a_4 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

En prenant  $a_1$  et  $a_2$  comme paramètres ( $a_1$  et  $a_2$  peuvent donc prendre une valeur quelconque dans  $\mathbb{B}$ ), on aboutit à :

$$(\sigma_5) \quad \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 = 1 \\ a_4 = \overline{a_2} \\ a_5 = a_1 \end{cases} \quad (\text{Rappelons que : } \overline{\overline{a_2}} = a_2 + 1).$$

Les 4 matrices de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$ , « racines carrées » de  $J_5$ , sont donc de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \overline{a_2} & 1 & \overline{a_2} & a_1 \\ a_2 & a_1 & 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \overline{a_2} & \overline{a_1} & 1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & 1 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Pour :  $a_1 = 0, a_2 = 0$ , on obtient :  $A_1 = B_3 + B_4$ ,

pour :  $a_1 = 1, a_2 = 0$ , on obtient :  $A_2 = B_1 + B_3 + B_4 + B_5$ ,

pour :  $a_1 = 0, a_2 = 1$ , on obtient :  $A_3 = B_2 + B_3$ ,

pour :  $a_1 = 1, a_2 = 1$ , on obtient :  $A_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_5$ .

### 5.3.3. Conclusion de l'étude des carrés des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Nous allons résumer dans le Théorème 5-9 les résultats essentiels des Théorèmes 5-5, 5-6, 5.7 et 5.8 précédents, tout en les complétant.

**Théorème 5-9.** *Pour tout ordre  $n$  pair ou impair, une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  est le carré d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  si et seulement si ses composantes (ou « coordonnées ») d'indice pair dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont nulles.*

On peut donc écrire  $A^2$  sous la forme générale suivante :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} \alpha_i B_{2i-1} \quad (*)$$

(\*) Voir Considérations sur les Notations dans la Section 5.6 du présent chapitre.

L'ensemble noté  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$  qui contient les carrés des matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , constitue un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

- Pour  $n$  pair ( $n = 2v, v \in \mathbb{N}^*$ ), la dimension de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$  est égal à  $v$ .

- Pour  $n$  impair ( $n = 2v + 1, v \in \mathbb{N}$ ), la dimension de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$  est égal à  $v + 1$ .

$\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$  constitue une sous-algèbre commutative de l'algèbre commutative  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Preuve :*

Le dernier point de ce théorème est immédiat.

La 3<sup>ème</sup> loi de l'algèbre est bien évidemment la multiplication matricielle.

La somme et le produit de 2 matrices de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$  appartiennent à  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ . Cet ensemble est donc stable par l'addition et la multiplication matricielle.

La commutativité de la multiplication matricielle dérive de celle dans  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Rappelons (cf. Chapitre 2 - Théorème 2-5) l'ensemble des Relations ( $R_k$ ): ( $1 \leq k \leq \nu$ , si  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) et  $1 \leq k \leq \nu + 1$  si  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ )), définissant en toute généralité la matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  correspondant aux paramètres :  $[1,1], [1,2], [1,3], \dots, [1, n-1], [1, n]$  :

$$[k, k] = [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1, 2k-1]$$

$$[k, k+1] = [1,2] + [1,4] + [1,6] + \dots + [1, 2k]$$

$$[k, k+2] = [1,3] + [1,5] + [1,7] + \dots + [1, 2k+1]$$

.....

$$[k, k+h] = [1, 1+h] + [1, 3+h] + [1, 5+h] + \dots + [1, 2k-1+h] \quad (*)$$

( $0 \leq h \leq n-2k+1$ )

.....

$$[k, n-k] = [1, n-2k+1] + [1, n-2k+3] + [1, n-2k+5] + \dots + [1, n-1]$$

$$[k, n-k+1] = [1, n-2k+2] + [1, n-2k+4] + [1, n-2k+6] + \dots + [1, n]$$

Supposons que la matrice en question est le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , - autrement dit supposons que cette matrice appartient à  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ . D'après le Théorème 5-9, les paramètres correspondant aux composantes d'indice pair dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont nuls.

Donc :

$$[1,2] = [1,4] = \dots = [1, n-2] = [1, n] = 0, \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$[1,2] = [1,4] = \dots = [1, n-3] = [1, n-1] = 0, \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Il en découle que pour toutes les valeurs de  $k$  et de  $h$  (respectant les inégalités ci-dessus) :

$[k, k+h]$  n'est composé que de termes correspondant à des paramètres d'indice pair, lorsque  $h$  est impair.

Par suite, pour toutes les valeurs de  $k$  et de  $h$  (respectant les inégalités ci-dessus) :

$$[k, k+h] = 0 \text{ pour } h \text{ impair.}$$

En conséquence, dans une matrice de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$  :

- les éléments d'indices  $i$  impair,  $j$  pair, sont tous nuls
- les éléments d'indices  $i$  pair,  $j$  impair, sont tous nuls.

## 5.4. Traduction matricielle des relations entre les coefficients $A_i$ d'une matrice $A$ de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ et les coefficients $\alpha_i$ de la matrice $A^2$

### 5.4.1. Ordre pair : $n = 2\nu$ , $\nu \in \mathbb{N}^*$

Rappelons les relations  $(\sigma_3)$  établies au 5.3.1.

$$(\sigma_3) \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_1 \\ A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_2 \\ A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_i \\ \dots \dots \dots \\ + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_{\nu-1} \\ A_\nu = \alpha_\nu \end{array} \right.$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \end{bmatrix} = T_\nu \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \end{bmatrix},$$

$$\text{où : } T_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $T_\nu$ , matrice de passage  $A_i (1 \leq i \leq \nu) \rightarrow \alpha_i (1 \leq i \leq \nu)$ , est une matrice triangulaire supérieure d'ordre  $\nu$  dont tous les éléments situés au-dessus de la 1<sup>ère</sup> diagonale sont égaux à 1.

$T_\nu$  est inversible.

Les relations inverses  $(\sigma_4)$  sont :

$$(\sigma_4) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ A_3 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ \dots \\ A_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu \\ A_\nu = \alpha_\nu \end{array} \right.$$

Ces dernières se traduisent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} = T_\nu^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \end{bmatrix}$$

La matrice de passage  $\alpha_i (1 \leq i \leq \nu) \rightarrow A_i (1 \leq i \leq \nu)$  est évidemment la matrice  $T_\nu^{-1}$ .

Cette matrice est une matrice triangulaire supérieure nulle partout, à l'exception de la 1<sup>ère</sup> diagonale et de la 1<sup>ère</sup> sous-diagonale supérieure, dont tous les éléments valent 1.

*Remarque :*

Pour  $n = 2$  ( $\nu = 1$ ), on a :  $T_1 = T_1^{-1} = [1]$

#### 5.4.2. Ordre impair : $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$

Rappelons les relations  $(\sigma_7)$  établies au 5.3.2.

$$(\sigma_7) \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_1 \\ A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_2 \\ A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_i \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_{\nu-1} \\ A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_\nu \\ A_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} \end{array} \right.$$



Ces relations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \\ \alpha_{\nu+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \\ A_{\nu+1} \end{bmatrix} = T_{\nu+1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \\ A_{\nu+1} \end{bmatrix},$$

Dans le cas  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), on voit donc apparaître le même type de matrice que dans le cas  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), mais à l'ordre  $\nu + 1$  :

$$T_{\nu+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu + 1$ )  $\rightarrow \alpha_i$  ( $1 \leq i \leq \nu + 1$ ), est donc  $T_{\nu+1}$ .

Les relations inverses ( $\sigma_8$ ) sont :

$$(\sigma_8) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ A_3 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ \dots \\ A_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu \\ A_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1} \\ A_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Ces dernières se traduisent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \\ A_{\nu+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \\ \alpha_{\nu+1} \end{bmatrix} = T_{\nu+1}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \\ \alpha_{\nu+1} \end{bmatrix}$$

La matrice de passage  $\alpha_i (1 \leq i \leq \nu+1) \rightarrow A_i (1 \leq i \leq \nu+1)$  est évidemment la matrice  $T_{\nu+1}^{-1}$ .

*Remarque :*

Pour  $n = 1 (\nu = 0)$ , on a :  $T_1 = T_1^{-1} = [1]$

### 5.5. Signature réduite du carré d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Les paramètres d'indice pair de la signature (colonne ou ligne) d'une matrice  $A^2$ , carrée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , étant nuls, on peut songer à réduire la taille de la matrice-colonne ou de la matrice-ligne représentant cette signature  $y$  en éliminant les paramètres d'indice pair. On aboutit ce faisant à la notion de signature réduite d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ .

Le principal intérêt de la signature réduite d'une matrice  $A^2$  de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ , est que cette dernière condense toute l'information utile contenue dans la signature simple  $|A^2|$  sous forme d'une matrice de dimension réduite *grosso modo* de moitié, puisque celle-ci passe de  $n$  à  $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ .

**Définition 5-10.** On appelle signature-colonne réduite d'une matrice  $A^2$ , carrée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , le vecteur-colonne de  $\mathcal{M}_{E\left(\frac{n+1}{2}\right), 1}(\mathbb{B})$  constitué des éléments d'indice impair de la signature-colonne de la matrice  $A^2$ .

On appelle signature-ligne réduite d'une matrice  $A^2$  carrée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  le vecteur-ligne de  $\mathcal{M}_{1, E\left(\frac{n+1}{2}\right)}(\mathbb{B})$  constitué des éléments d'indice impair de la signature-ligne de la matrice  $A^2$ .

*Note :* Par la suite, nous ne serons amenés à utiliser que la signature-colonne réduite d'une matrice  $A^2$ , carrée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

**Notation 5-11.** Nous noterons la signature-colonne réduite d'une matrice  $A^2$ , carrée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , sous la forme :  $\langle A^2 \rangle$ .

*Remarque 1 :*

Il est évidemment capital de ne considérer la signature-colonne réduite d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  que si l'on a établi que cette matrice est une matrice appartenant à  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ .

*Remarque 2 :*

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  telles que :  $A^2 = B^2$ .

$$A^2 = B^2 \Leftrightarrow \langle A^2 \rangle = \langle B^2 \rangle.$$

Par contre :  $\langle A^2 \rangle = \langle B^2 \rangle \not\Rightarrow |A| = |B|$ , ni donc :  $A = B$ .

Ceci provient du fait que les carrés de deux matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  peuvent être égaux, sans que ces deux matrices soient égales. (Rappelons en effet que toute matrice, carrée d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , possède  $2^{\mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)}$  « racines carrées »).

*Exemple :*

$$\text{Soient : } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2 \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [1]_2.$$

On a bien :  $A^2 = B^2 = O_2$  (et donc :  $\langle A^2 \rangle = \langle B^2 \rangle = [0]$ ).

Par contre :  $|A| \neq |B|$  et  $A \neq B$ .

## 5.6. Considérations concernant la notation de la décomposition d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ dans la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .  $A^2$  appartient donc à  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ .

Nous avons vu que l'on peut écrire la matrice  $A^2$  sous la forme générale suivante :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)} \alpha_i B_{2i-1} \quad (\text{Notation I}).$$

Nous allons introduire le système de Notation II qui suit :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)} \alpha_{2i-1} B_{2i-1} \quad (\text{Notation II}).$$

Cette Notation II est équivalente à l'écriture « classique » :

$$A^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i, \text{ avec } \alpha_{i \text{ (i impair)}} = 0.$$

Dans les deux systèmes de Notation I et II n'apparaissent que les composantes ou « coordonnées » de  $A^2$  correspondant aux matrices d'indice impair de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Dans le système de Notation I, les composantes de  $A^2$  sont indexées séquentiellement de 1 à  $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ . C'est le système de notation adopté jusqu'à présent.

Dans le système de Notation II, les composantes de  $A^2$  portent un indice impair égal à l'indice de la matrice correspondante de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . En fait, dans ce système de notation, il faut sous-entendre que l'on a :

$$\alpha_{2i} = 0, \quad (1 \leq i \leq E\left(\frac{n+1}{2}\right)).$$

La Notation I est celle qui est la mieux adaptée à l'étude matricielle des matrices de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$  lorsqu'on représente leur signature sous forme réduite.

En revanche, le système de Notation (II) est plus intéressant lorsqu'on considère la décomposition du carré  $A^2$  d'une matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . En effet, l'écriture (2) ci-dessus a le grand intérêt d'affecter la même valeur d'indice à une composante (ou « coordonnée ») de  $A^2$  dans la base canonique et à la matrice correspondante dans la base, ce qui n'est pas le cas de la Notation I.



## ANNEXE / CHAPITRE 5

### RACINES CARRÉES DE LA MATRICE NULLE

Nous allons établir que la matrice nulle  $O_n$  possède  $2^\nu$  matrices racines carrées, pour  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) comme pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ). Nous en déduirons une version plus élaborée des Théorèmes 5-6 et 5-8 précédemment énoncés.

Ordre pair :  $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

En tout généralité, pour  $n$  pair (cf. Section 5.3.1. ci-dessus) :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} A_i B_i^2, \text{ avec :}$$

$$(\sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu-1} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = a_{\nu-1} + a_{\nu+2} \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Dès lors :

$$A^2 = O_n \Leftrightarrow A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{2\nu} = a_1 \\ a_{2\nu-1} = a_2 \\ a_{2\nu-2} = a_3 \\ \dots \\ a_{2\nu-i+1} = a_i \\ \dots \\ a_{\nu+2} = a_{\nu-1} \\ a_{\nu+1} = a_\nu \end{array} \right. .$$

**Théorème A5-1.** Soit  $n$  pair :  $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

Les matrices racines carrées de la matrice  $O_n$  sont les  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  symétriques par rapport à leurs 2 axes médians (\*).

(\*) Se reporter au Chapitre 7 consacré aux matrices symétriques par rapport à leurs 2 axes médians.

*Remarque :*

Bien entendu la matrice nulle  $O_n$  fait elle-même partie des matrices racines carrées de  $O_n$  : il s'agit de la matrice pour laquelle :  $a_i = 0$  ( $i = 1$  à  $n$ ).

Le Théorème 5-6 peut dès lors être complété comme suit (Point 2 ci-dessous).

**Théorème 5-6bis.** Soit  $U = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i B_{2i-1}$  une matrice de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ),

dont les composantes relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

- 1)  $U$  est alors le carré de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  dont les composantes (ou « coordonnées ») dans la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  sont données par les relations  $(\sigma_4)$  et  $(\sigma_1)$  ci-dessus.
- 2) On obtient l'ensemble des  $2^\nu$  matrices racines carrées de  $U$  en ajoutant à l'une quelconque d'entre elles les  $2^\nu$  matrices racines carrées de la matrice nulle  $O_n$ .

*Preuve du Point 2 :*

Soit  $\Omega_n$  l'une quelconque des  $2^\nu$  matrices racines carrées de la matrice nulle  $O_n$  et soit  $V$

l'une quelconque des  $2^\nu$  matrices racines carrées de la matrice  $U$ . Alors :

$$(V + \Omega_n)^2 = V^2 + \Omega_n^2 = U + O_n = U.$$

Par ailleurs, si  $V$  et  $V'$  désignent 2 matrices racines carrées de  $U$  :

$$V^2 = U \text{ et } V'^2 = U \Rightarrow (V + V')^2 = O_n \Rightarrow (V + V') \text{ est une racine carrée de } O_n.$$

Ordre impair :  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ .

En tout généralité, pour  $n$  impair (cf. Section 5.3.2. ci-dessus) :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} A_i B_i^2 + a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2, \text{ avec :}$$

$$(\sigma_5) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Dès lors :

$$A^2 = O_n \Leftrightarrow A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{2\nu+1} = a_1 \\ a_{2\nu} = a_2 \\ a_{2\nu-1} = a_3 \\ \dots \\ a_{2\nu-i+2} = a_i \\ \dots \\ a_{\nu+2} = a_\nu \end{array} \right. \text{ ET } a_{\nu+1} = 0.$$

**Théorème A5-2.** Soit  $n$  impair :  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ .

Les matrices racines carrées de la matrice  $O_n$  sont les  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  symétriques par rapport à leurs 2 axes médians et dont l'élément central de la signature est nul (\*).

(\*) Se reporter au Chapitre 7 consacré aux matrices symétriques par rapport à leurs 2 axes médians.

*Remarque :*

Bien entendu la matrice nulle  $O_n$  fait elle-même partie des matrices racines carrées de  $O_n$  : il s'agit de la matrice pour laquelle :  $a_i = 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Le Théorème 5-8 peut dès lors être complété comme suit (Point 2 ci-dessous).

**Théorème 5-8bis.** Soit  $U = \sum_{i=1}^{\nu+1} \alpha_i B_{2i-1}$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,

$\nu \in \mathbb{N}$ ), dont les composantes relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

- 1)  $U$  est alors le carré de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont les composantes (ou « coordonnées ») dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont données par les relations  $(\sigma_8)$  et  $(\sigma_5)$  ci-dessus.
- 2) On obtient l'ensemble des  $2^\nu$  matrices racines carrées de  $U$  en ajoutant à l'une quelconque d'entre elles les  $2^\nu$  matrices racines carrées de la matrice nulle  $O_n$ .

*Preuve du Point 2 :*

Identique au cas  $n$  pair.





## CHAPITRE 6

### Étude des puissances $2^k$ ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ – Lois générales relatives aux puissances de bouclage des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

*Note préliminaire :*

Les notions de puissances de bouclage d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  (et plus généralement de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ ) apparaissant dans le présent chapitre, font référence au Théorème fondamental des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  dont l'énoncé figure en Annexe du présent chapitre.

#### 6.1. Introduction

Cette étude s'appuie sur les résultats du Chapitre 5.

Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . (Nous écarterons initialement le cas trivial  $n = 1$  : rappelons que  $\mathcal{BSC}_1(\mathbb{B})$  ne renferme que les 2 matrices suivantes :  $[0]$  et  $[1]$ ).

Nous nous intéressons à la suite des puissances  $2^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) de la matrice  $A$  :  $A, A^2, A^4, A^8, \dots, A^{2^k}, \dots$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ).

Distinguons les cas  $n$  pair et  $n$  impair.

#### 6.2. Étude relative à l'ordre pair : $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$

Soit  $A = \sum_{i=1}^{2\nu} a_i B_i$  une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_{2\nu}(\mathbb{B})$ .

Nous savons (cf. système de Notation II - Section 5.6 du Chapitre 5) que l'on peut écrire  $A^2$  en toute généralité sous la forme :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{2\nu} \alpha_i B_i \quad (\text{avec : } \alpha_{i \text{ (i pair)}} = 0).$$

De la même façon,  $A^4$  étant le carré de la matrice  $A^2$ , s'écrira en toute généralité sous la forme :

$$A^4 = \sum_{i=1}^{2\nu} \alpha'_i B_i \quad (\text{avec : } \alpha'_{i \text{ (i pair)}} = 0).$$

Nous allons chercher à déterminer pour  $1 \leq i \leq 2\nu$  les composantes  $\alpha'_{i \text{ (i impair)}}$  de  $A^4$  en fonction des composantes  $\alpha_{i \text{ (i impair)}}$  de  $A^2$ .

Pour passer de  $A$  à  $A^2$ , nous avons été amené à introduire les  $\nu$  coefficients :  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_\nu$ , donnés par les relations  $(\sigma_1)$  (cf. Chapitre 5 - Section 5.3.1.) :

$$(\sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu-1} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = a_{\nu-1} + a_{\nu+2} \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

De la même façon, pour passer de  $A^2$  à  $A^4$ , nous allons introduire les  $\nu$  coefficients :  $A_1', A_2', A_3', \dots, A_i', \dots, A_\nu'$  suivants :

$$(\sigma_1') \left\{ \begin{array}{l} A_1' = \alpha_1 + \alpha_{2\nu} \\ A_2' = \alpha_2 + \alpha_{2\nu-1} \\ A_3' = \alpha_3 + \alpha_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i' = \alpha_i + \alpha_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1}' = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu+2} \\ A_\nu' = \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Tenant compte de la nullité des coefficients  $\alpha_{i \text{ (i pair)}}$ , il vient :

$$\begin{array}{l} A_1' = \alpha_1 \\ A_2' = \alpha_{2\nu-1} \\ A_3' = \alpha_3 \\ A_4' = \alpha_{2\nu-3} \\ A_5' = \alpha_5 \\ A_6' = \alpha_{2\nu-5} \\ \dots \\ A_{2j}' = \alpha_{2\nu-2j+1} \\ A_{2j+1}' = \alpha_{2j+1} \\ \dots \end{array}$$

Pour calculer  $A_{\nu-2}', A_{\nu-1}', A_\nu'$ , il convient de distinguer 2 cas :

a)  $\nu = 2p$  soit :  $n = 4p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ). On obtient alors :

$$\begin{array}{l} A_{\nu-2}' = \alpha_{2p+3} \\ A_{\nu-1}' = \alpha_{2p-1} \\ A_\nu' = \alpha_{2p+1} \end{array}$$

Par ailleurs, à partir des relations  $(\sigma_3)$  du Chapitre 5 - Section 5.3.1., on déduit que :

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= A_1' + A_2' + A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_\nu' \\ \alpha_3' &= A_2' + A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_\nu' \\ \alpha_5' &= A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_\nu' \\ &\dots \\ &\dots \\ \alpha_{2\nu-3}' &= A_{\nu-1}' + A_\nu' \\ \alpha_{2\nu-1}' &= A_\nu' \end{aligned}$$

Il découle de ce qui précède les expressions donnant les composantes  $\alpha_{2j-1}'$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ) de  $A^4$  en fonction des  $\alpha_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ) de  $A^2$ , sachant que dans ces expressions les termes entre crochets n'y figurent pas : ils sont à ignorer. On obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1} \\ \alpha_3' &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1} \\ \alpha_5' &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} [+ \alpha_{n-1}] \\ \alpha_7' &= [\alpha_1 + \alpha_3] + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} [+ \alpha_{n-1}] \\ &\dots \\ &\dots \\ \alpha_{n-5}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} +] \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}] \\ \alpha_{n-3}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} +] \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} [+ \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}] \\ \alpha_{n-1}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1}] + \alpha_{2p+1} [+ \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}] \end{aligned}$$

Ces expressions se traduisent immédiatement sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} p-1 & p & p+1 & p+2 & p+3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_3' \\ \alpha_5' \\ \alpha_7' \\ \dots \\ \alpha_{n-5}' \\ \alpha_{n-3}' \\ \alpha_{n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = R_{(4p)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

La matrice  $R_{(4p)}$  qui apparaît ci-dessus est une matrice d'ordre  $\nu = 2p$ , appartenant donc à  $\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{B})$ .

Nous étudierons de façon plus approfondie les matrices de la forme  $R_{(4p)}$  dans la Section 6.4.1.

b)  $\underline{\nu = 2p+1}$  soit :  $n = 4p+2$  ( $p \in \mathbb{N}$ ). On obtient alors :

$$A'_{\nu-2} = \alpha_{2p-1}$$

$$A'_{\nu-1} = \alpha_{2p+3}$$

$$A'_\nu = \alpha_{2p+1}$$

Par ailleurs, à partir des relations ( $\sigma_3$ ) du Chapitre 5 - Section 5.3.1., on déduit que :

$$\alpha'_1 = A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots + A'_{\nu-1} + A'_\nu$$

$$\alpha'_3 = A'_2 + A'_3 + \dots + A'_{\nu-1} + A'_\nu$$

$$\alpha'_5 = A'_3 + \dots + A'_{\nu-1} + A'_\nu$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\alpha'_{2\nu-3} = A'_{\nu-1} + A'_\nu$$

$$\alpha'_{2\nu-1} = A'_\nu$$

Il découle de ce qui précède les expressions donnant les composantes  $\alpha'_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ) de  $A^4$  en fonction des  $\alpha_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ) de  $A^2$ , sachant que dans ces expressions les termes entre crochets n'y figurent pas : ils sont à ignorer. On obtient, tous calculs faits :

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}$$

$$\alpha'_3 = [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}$$

$$\alpha'_5 = [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} [+ \alpha_{n-1}]$$

$$\alpha'_7 = [\alpha_1 + \alpha_3] + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} [+ \alpha_{n-1}]$$

$$\dots$$

$$\alpha'_{n-5} = [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots +] \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}]$$

$$\alpha'_{n-3} = [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} +] \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}]$$

$$\alpha'_{n-1} = [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} +] \alpha_{2p+1} [+ \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}]$$

Ces expressions se traduisent immédiatement sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} p-1 & p & p+1 & p+2 & p+3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_3 \\ \alpha'_5 \\ \alpha'_7 \\ \dots \\ \alpha'_{n-5} \\ \alpha'_{n-3} \\ \alpha'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{(4p+2)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

La matrice  $R_{(4p+2)}$  qui apparaît ci-dessus est une matrice d'ordre  $\nu = 2p + 1$ , appartenant donc à  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{B})$ .

Nous étudierons de façon plus approfondie les matrices de la forme  $R_{(4p)}$  dans la Section 6.4.1.

### 6.3. Étude relative à l'ordre impair : $n = 2\nu + 1$ , $\nu \in \mathbb{N}^*$

(Note : en imposant  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , nous laissons provisoirement de côté le cas trivial :  $n = 1$ ).

Soit  $A = \sum_{i=1}^{2\nu+1} a_i B_i$  une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_{2\nu+1}(\mathbb{B})$

Nous savons (cf. système de Notation II - Section 5.6 du Chapitre 5) que l'on peut écrire  $A^2$  en toute généralité sous la forme :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{2\nu+1} \alpha_i B_i \quad (\text{avec : } \alpha_{i \text{ (i pair)}} = 0).$$

De la même façon,  $A^4$  étant le carré de la matrice  $A^2$ , va s'écrire en toute généralité sous la forme :

$$A^4 = \sum_{i=1}^{2\nu+1} \alpha'_i B_i \quad (\text{avec : } \alpha'_{i \text{ (i pair)}} = 0).$$

Nous allons chercher à déterminer pour  $1 \leq i \leq 2\nu + 1$  les composantes  $\alpha'_{i \text{ (i impair)}}$  de  $A^4$  en fonction des composantes  $\alpha_{i \text{ (i impair)}}$  de  $A^2$ .

Pour passer de  $A$  à  $A^2$ , nous avons été amené à introduire les  $\nu + 1$  coefficients :  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_\nu, A_{\nu+1}$  donnés par les relations  $(\sigma_5)$  (cf. Chapitre 5 - Section 5.3.2.) :

$$(\sigma_5) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

De la même façon, pour passer de  $A^2$  à  $A^4$ , nous allons introduire les  $\nu + 1$  coefficients :  $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_i, \dots, A'_\nu, A'_{\nu+1}$  suivants :

$$(\sigma'_5) \left\{ \begin{array}{l} A'_1 = \alpha_1 + \alpha_{2\nu+1} \\ A'_2 = \alpha_2 + \alpha_{2\nu} \\ A'_3 = \alpha_3 + \alpha_{2\nu-1} \\ \dots \\ A'_i = \alpha_i + \alpha_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A'_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu+3} \\ A'_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Tenant compte de la nullité des coefficients  $\alpha_i$  ( $i$  pair), il vient :

$$\begin{array}{l} A'_1 = \alpha_1 + \alpha_{2\nu+1} \\ A'_2 = 0 \\ A'_3 = \alpha_3 + \alpha_{2\nu-1} \\ A'_4 = 0 \\ A'_5 = \alpha_5 + \alpha_{2\nu-3} \\ A'_6 = 0 \\ \dots \\ A'_{2j} = 0 \\ A'_{2j+1} = \alpha_{2j+1} + \alpha_{2\nu-2j+1} \\ \dots \end{array}$$

Pour calculer  $A'_{\nu-2}$ ,  $A'_{\nu-1}$ ,  $A'_\nu$ ,  $A'_{\nu+1}$ , il convient de distinguer 2 cas :

a)  $\nu = 2p$  soit :  $n = 4p + 1$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ). On obtient alors :

$$\begin{array}{l} A'_{\nu-2} = 0 \\ A'_{\nu-1} = \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+3} \\ A'_\nu = 0 \\ A'_{\nu+1} = \alpha_{2p+1} \end{array}$$

Par ailleurs, à partir des relations  $(\sigma_7)$  du Chapitre 5 - Section 5.3.2., on déduit que :

$$\begin{array}{l} \alpha'_1 = A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots + A'_{\nu-1} + A'_\nu + A'_{\nu+1} \\ \alpha'_3 = A'_2 + A'_3 + \dots + A'_{\nu-1} + A'_\nu + A'_{\nu+1} \\ \alpha'_5 = A'_3 + \dots + A'_{\nu-1} + A'_\nu + A'_{\nu+1} \\ \dots \\ \dots \\ \alpha'_{2\nu-3} = A'_{\nu-1} + A'_\nu + A'_{\nu+1} \\ \alpha'_{2\nu-1} = A'_\nu + A'_{\nu+1} \\ \alpha'_{2\nu+1} = A'_{\nu+1} \end{array}$$

Il découle de ce qui précède les expressions donnant les composantes  $\alpha'_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu+1$ ) de  $A^4$  en fonction des  $\alpha_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu+1$ ) de  $A^2$ , sachant que dans ces expressions les termes entre crochets n'y figurent pas : ils sont à ignorer. On obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
 \alpha'_1 &= \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n \\
 \alpha'_3 &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} [+ \alpha_n] \\
 \alpha'_5 &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} [+ \alpha_n] \\
 \alpha'_7 &= [\alpha_1 + \alpha_3] + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} [+ \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 &\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\
 \alpha'_{n-4} &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} +] \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 \alpha'_{n-2} &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1}] + \alpha_{2p+1} [+ \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 \alpha'_n &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1}] + \alpha_{2p+1} [+ \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n]
 \end{aligned}$$

Ces expressions se traduisent immédiatement sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} p-1 & p & p+1 & p+2 & p+3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
 \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_3 \\ \alpha'_5 \\ \alpha'_7 \\ \dots \\ \alpha'_{n-4} \\ \alpha'_{n-2} \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{(4p+1)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-4} \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_n \end{bmatrix}
 \end{array}$$

La matrice  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  qui apparaît ci-dessus est une matrice d'ordre  $\nu+1 = 2p+1$ , appartenant donc à  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{B})$ .

Nous étudierons de façon plus approfondie les matrices de la forme  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  dans la Section 6.4.2.

b)  $\nu = 2p+1$  soit :  $n = 4p+2$  ( $p \in \mathbb{N}$ ). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 A'_{\nu-2} &= \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+5} \\
 A'_{\nu-1} &= 0 \\
 A'_\nu &= \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} \\
 A'_{\nu+1} &= 0
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, à partir des relations  $(\sigma_7)$  du Chapitre 5 - Section 5.3.2., on déduit que :



$$\begin{aligned}
\alpha_1' &= A_1' + A_2' + A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_{\nu}' + A_{\nu+1}' \\
\alpha_3' &= A_2' + A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_{\nu}' + A_{\nu+1}' \\
\alpha_5' &= A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_{\nu}' + A_{\nu+1}' \\
&\dots \\
&\dots \\
\alpha_{2\nu-3}' &= A_{\nu-1}' + A_{\nu}' + A_{\nu+1}' \\
\alpha_{2\nu-1}' &= A_{\nu}' + A_{\nu+1}' \\
\alpha_{2\nu+1}' &= A_{\nu+1}'
\end{aligned}$$

Il découle de ce qui précède les expressions donnant les composantes  $\alpha_{2j-1}'$  ( $1 \leq j \leq \nu+1$ ) de  $A^4$  en fonction des  $\alpha_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu+1$ ) de  $A^2$ , sachant que dans ces expressions les termes entre crochets n'y figurent pas : ils sont à ignorer. On obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
\alpha_1' &= \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n \\
\alpha_3' &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} [+ \alpha_n] \\
\alpha_5' &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} [+ \alpha_n] \\
\alpha_7' &= [\alpha_1 + \alpha_3] + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} [+ \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
&\dots \\
\alpha_{n-5}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1}] + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
\alpha_{n-3}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1}] + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
\alpha_{n-1}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n]
\end{aligned}$$

Ces expressions se traduisent immédiatement sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} p & p+1 & p+2 & p+3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_3' \\ \alpha_5' \\ \alpha_7' \\ \dots \\ \alpha_{n-4}' \\ \alpha_{n-2}' \\ \alpha_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{(4p+3)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-4} \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_n \end{bmatrix}
\end{array}$$

La matrice  $\mathbf{R}_{(4p+3)}$  qui apparaît ci-dessus est une matrice d'ordre  $\nu+1 = 2p+2$ , appartenant donc à  $\mathcal{M}_{2p+2}(\mathbb{B})$ .

Nous étudierons de façon plus approfondie les matrices de la forme  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  dans la Section 6.4.2.

#### 6.4. Étude des matrices $R_{(n)}$ ( $n = 4p$ , $n = 4p + 1$ , $n = 4p + 2$ , $n = 4p + 3$ )

Nous avons mis en évidence, dans les Sections 6.2. et 6.3., 4 types de matrices :

$R_{(4p)}$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) correspondant à  $n = 4p$ .

$R_{(4p)}$  est une matrice d'ordre  $2p$  et appartient donc à  $\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{B})$ .

$R_{(4p+1)}$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) correspondant à  $n = 4p + 1$ .

( $p \in \mathbb{N}^*$  toujours pour écarter provisoirement le cas trivial :  $n = 1$ ).

$R_{(4p+1)}$  est une matrice d'ordre  $2p + 1$  et appartient donc à  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{B})$ .

$R_{(4p+2)}$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) correspondant à  $n = 4p + 2$ .

$R_{(4p+2)}$  est une matrice d'ordre  $2p + 1$  et appartient donc à  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{B})$ .

$R_{(4p+3)}$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) correspondant à  $n = 4p + 3$ .

$R_{(4p+3)}$  est une matrice d'ordre  $2p + 2$  et appartient donc à  $\mathcal{M}_{2p+2}(\mathbb{B})$ .

Nous allons classer ces matrices en deux catégories correspondant au cas  $n$  pair et au cas  $n$  impair.

##### 6.4.1. $n$ pair : $R_{(4p)}$ ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) et $R_{(4p+2)}$ ( $p \in \mathbb{N}$ )

Rappelons que l'on a  $n = 2\nu$  et donc :

- pour  $R_{(4p)}$  :  $\nu = 2p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ),
- pour  $R_{(4p+2)}$  :  $\nu = 2p + 1$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).

Conformément à la Section 6.2., la structure des matrices  $R_{(4p)}$  et  $R_{(4p+2)}$  obéit au schéma suivant :

1<sup>ère</sup> colonne (de haut en bas) : 1 « 1 » suivi de  $(\nu - 1)$  « 0 »,  
 $\nu$ <sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 2 « 1 » suivi de  $(\nu - 2)$  « 0 »,  
 2<sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 3 « 1 » suivi de  $(\nu - 3)$  « 0 »,  
 $(\nu - 1)$ <sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 4 « 1 » suivi de  $(\nu - 4)$  « 0 »,  
 3<sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 5 « 1 » suivi de  $(\nu - 5)$  « 0 »,  
 $(\nu - 2)$ <sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 6 « 1 » suivi de  $(\nu - 6)$  « 0 »,  
 etc.

La construction se poursuit, colonne par colonne, alternativement à gauche et à droite, jusqu'à l'axe médian vertical de la matrice.

Pour  $R_{(4p)}$  et pour  $R_{(4p+2)}$  la colonne  $(p + 1)$  est constituée entièrement de « 1 ».

Pour les matrices  $R_{(4p)}$ , l'axe médian vertical passe entre les colonnes  $p$  et  $(p + 1)$ , tandis que pour les matrices  $R_{(4p+2)}$ , l'axe médian vertical est porté par la colonne  $(p + 1)$ .

$R_{(2)}$  - matrice de type  $n = 4p + 2$ , avec  $p = 0$ . Elle est d'ordre 1.

$$R_{(2)} = [1]$$

$R_{(4)}$  - matrice de type  $n = 4p$ , avec  $p = 1$ . Elle est d'ordre 2.

$$R_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_{(6)}$  - matrice de type  $n = 4p + 2$ , avec  $p = 2$ . Elle est d'ordre 3.

$$R_{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(8)}$  - matrice de type  $n = 4p$ , avec  $p = 2$ . Elle est d'ordre 4.

$$R_{(8)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(10)}$  - matrice de type  $n = 4p + 2$ , avec  $p = 2$ . Elle est d'ordre 5.

$$R_{(10)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Théorème 6-1.**  $\forall p \in \mathbb{N}^* : \det(R_{(4p)}) = 1 \Leftrightarrow R_{(4p)}$  inversible

$\forall p \in \mathbb{N} : \det(R_{(4p+2)}) = 1 \Leftrightarrow R_{(4p+2)}$  inversible.

*Preuve :*

Se référer à la structure générale des matrices  $R_{(4p)}$  et  $R_{(4p+2)}$  : il suffit de développer le déterminant associé à la matrice concernée par rapport à sa dernière ligne, puis le déterminant d'ordre inférieur obtenu par rapport à sa dernière ligne, et de poursuivre ainsi de suite, jusqu'à obtenir un déterminant d'ordre 1 qui vaut 1.

On peut aussi remarquer que l'on peut réarranger les colonnes du déterminant de  $R_{(4p)}$  et  $R_{(4p+2)}$  de façon à obtenir une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale principale est formée de chiffres 1.

**Théorème 6-2.** *Pour toute matrice  $R_{(n)}$ ,  $n$  pair, il existe un entier minimal  $\rho(n) \in \mathbb{N}^*$  tel que :*

$$R_{(n)}^{\rho(n)} = I_{\frac{n}{2}}.$$

$\rho(n)$  est la puissance de bouclage (supérieure) de la matrice inversible  $R_{(n)}$ ,  $n$  pair.

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème Fondamental des matrices carrées à éléments dans  $\mathbb{B}$  (cf. Annexe du présent chapitre) correspondant au cas des matrices inversibles.

*Exemples :*

$$\underline{n=2} : \quad R_{(2)}^1 = I_1 \quad \Rightarrow \quad \rho(2) = 1.$$

$$\underline{n=4} : \quad R_{(4)}^2 = I_2 \quad \Rightarrow \quad \rho(4) = 2.$$

$$\underline{n=6} : \quad R_{(6)}^3 = I_3 \quad \Rightarrow \quad \rho(6) = 3.$$

$$\underline{n=8} : \quad R_{(8)}^3 = I_4 \quad \Rightarrow \quad \rho(8) = 3.$$

$$\underline{n=10} : \quad R_{(10)}^5 = I_5 \quad \Rightarrow \quad \rho(10) = 5.$$

$$\underline{n=12} : \quad R_{(12)}^6 = I_6 \quad \Rightarrow \quad \rho(12) = 6.$$

$$\underline{n=14} : \quad R_{(14)}^4 = I_7 \quad \Rightarrow \quad \rho(14) = 4.$$

$$\underline{n=16} : \quad R_{(16)}^4 = I_8 \quad \Rightarrow \quad \rho(16) = 4.$$

**6.4.2.  $n$  impair :**  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) et  $\mathbf{R}_{(4p+3)}$  ( $p \in \mathbb{N}$ )

( $p \in \mathbb{N}^*$  pour  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  pour écarter provisoirement le cas trivial  $n = 1$ ).

Rappelons que l'on a  $n = 2\nu + 1$  et donc :

- pour  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  :  $\nu = 2p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ),
- pour  $\mathbf{R}_{(4p+3)}$  :  $\nu = 2p + 1$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).

Conformément à la Section 6.3., la structure des matrices  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  et  $\mathbf{R}_{(4p+3)}$  obéit au schéma suivant :

1<sup>ère</sup> colonne (de haut en bas) : 1 « 1 » suivi de  $\nu$  « 0 »,  
 $(\nu + 1)$ <sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 1 « 1 » suivi de  $\nu$  « 0 »,  
 2<sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 3 « 1 » suivi de  $(\nu - 2)$  « 0 »,  
 $\nu$ <sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 3 « 1 » suivi de  $(\nu - 2)$  « 0 »,  
 3<sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 5 « 1 » suivi de  $(\nu - 4)$  « 0 »,  
 $(\nu - 2)$ <sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 5 « 1 » suivi de  $(\nu - 4)$  « 0 »,  
 etc.

La construction se poursuit ainsi, colonne par colonne, alternativement à gauche et à droite, jusqu'à l'axe médian vertical de la matrice.

La construction s'arrête pour les matrices  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  lorsqu'on atteint la colonne ( $p + 1$ ) entièrement constituée de « 1 » et pour les matrices  $\mathbf{R}_{(4p+3)}$  lorsqu'on atteint les colonnes ( $p + 1$ ) et ( $p + 2$ ) constituées de  $\nu$  « 1 » suivis de 1 « 0 ». Pour ce type de matrices, la dernière ligne est donc nulle.

Pour les matrices  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$ , l'axe médian vertical est porté par la colonne ( $p + 1$ ) tandis que pour les matrices  $\mathbf{R}_{(4p+3)}$ , l'axe médian vertical passe entre les colonnes ( $p + 1$ ) et ( $p + 2$ ).

*Remarque :*

Les matrices de type  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  et  $\mathbf{R}_{(4p+3)}$  sont symétriques par rapport à leur axe médian vertical (contrairement aux matrices de type  $\mathbf{R}_{(4p)}$  et  $\mathbf{R}_{(4p+2)}$ ).

*Exemples :*

$\mathbf{R}_{(1)}$  - matrice de type  $n = 4p + 1$ , avec  $p = 0$ . Elle est d'ordre 1.

(Nous rétablissons ici le cas trivial  $n = 1$ ).

$$\mathbf{R}_{(1)} = [1]$$

$\mathbf{R}_{(3)}$  - matrice de type  $n = 4p + 3$ , avec  $p = 0$ . Elle est d'ordre 2.

$$\mathbf{R}_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(5)}$  - matrice de type  $n = 4p + 1$ , avec  $p = 1$ . Elle est d'ordre 3.

$$R_{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(7)}$  - matrice de type  $n = 4p + 3$ , avec  $p = 1$ . Elle est d'ordre 4.

$$R_{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(9)}$  - matrice de type  $n = 4p + 1$ , avec  $p = 2$ . Elle est d'ordre 5.

$$R_{(9)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(11)}$  - matrice de type  $n = 4p + 3$ , avec  $p = 2$ . Elle est d'ordre 6.

$$R_{(11)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Théorème 6-3.**  $\forall p \in \mathbb{N}^* : \det(R_{(4p+1)}) = 0 \Leftrightarrow R_{(4p+1)}$  non inversible (\*)

$\forall p \in \mathbb{N} : \det(R_{(4p+3)}) = 0 \Leftrightarrow R_{(4p+3)}$  non inversible.

(\*) pour  $p = 0$ ,  $R_{(4p+1)} = R_{(1)}$  et l'on a :  $\det(R_{(1)}) = 1 \Leftrightarrow R_{(1)}$  inversible.

*Preuve :*

Se référer à la structure générale des matrices  $R_{(4p+1)}$  et  $R_{(4p+3)}$  : il suffit de remarquer que dès que leur ordre est supérieur à 1, ces matrices possèdent (au moins) 2 colonnes identiques. Le déterminant correspondant est donc nul.

(\*) *Remarque :*

Nous avons, tout au cours de l'étude des matrices  $R_{(4p+1)}$ , écarté le cas  $p = 0$  correspondant à :  $R_{(1)} = [1]$ . Cette matrice est tout à fait exceptionnelle en ce sens qu'elle est la seule matrice inversible du type  $R_{(4p+1)}$ .

**Théorème 6-4.** *Pour toute matrice  $\mathbf{R}_{(n)}$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), il existe un couple d'entiers minimal  $(\rho_1(n), \rho_2(n))$ ,  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$ , avec :  $\rho_2(n) > \rho_1(n)$ , tel que :*

$$\mathbf{R}_{(n)}^{\rho_2(n)} = \mathbf{R}_{(n)}^{\rho_1(n)}.$$

$\rho_1(n)$  et  $\rho_2(n)$  sont les puissances de bouclage (inférieure et supérieure de la matrice non inversible  $\mathbf{R}_{(n)}$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ )).

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème Fondamental des matrices carrées à éléments dans  $\mathbb{B}$  (cf. Annexe du présent chapitre) correspondant au cas des matrices non inversibles.

*Exemples :*

$$\underline{n=3} : \quad \mathbf{R}_{(3)}^2 = \mathbf{R}_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1(3) = 1, \rho_2(3) = 2.$$

On en déduit :  $\mathbf{R}_{(3)}^k = \mathbf{R}_{(3)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\underline{n=5} : \quad \mathbf{R}_{(5)}^2 = \mathbf{R}_{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1(5) = 1, \rho_2(5) = 2.$$

On en déduit :  $\mathbf{R}_{(5)}^k = \mathbf{R}_{(5)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\underline{n=7} : \quad \mathbf{R}_{(7)}^3 = \mathbf{R}_{(7)}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1(7) = 2, \rho_2(7) = 3.$$

On en déduit :  $\mathbf{R}_{(7)}^k = \mathbf{R}_{(7)}^2$ ,  $\forall k \geq 2$ .

$$\underline{n=9} : \quad \mathbf{R}_{(9)}^3 = \mathbf{R}_{(9)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1(9) = 1, \rho_2(9) = 3.$$

On en déduit :  $\mathbf{R}_{(9)}^{2k+1} = \mathbf{R}_{(9)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

$$\underline{n = 11} : \quad \mathbf{R}_{(11)}^3 = \mathbf{R}_{(11)}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1(11) = 2, \rho_2(11) = 3.$$

On en déduit :  $\mathbf{R}_{(11)}^k = \mathbf{R}_{(11)}^2, \forall k \geq 2$ .

$$\underline{n = 13} : \quad \mathbf{R}_{(13)}^4 = \mathbf{R}_{(13)} \Rightarrow \rho_1(13) = 1, \rho_2(13) = 4.$$

On en déduit :  $\mathbf{R}_{(13)}^{3k+1} = \mathbf{R}_{(13)}, \forall k \in \mathbb{N}$ .

$$\underline{n = 15} : \quad \mathbf{R}_{(15)}^4 = \mathbf{R}_{(15)}^3 \Rightarrow \rho_1(15) = 3, \rho_2(15) = 4.$$

On en déduit :  $\mathbf{R}_{(15)}^k = \mathbf{R}_{(15)}^3, \forall k \geq 3$ .

## 6.5. Étude des puissances de bouclage d'une matrice quelconque de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

### 6.5.1. $n$ pair

Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair. (On vérifiera que tout ce qui suit s'applique lorsque  $A = O_n$ ).

Soit  $\langle A^2 \rangle$  la signature réduite de  $A^2$ .

(Nous ne préciserons plus qu'il s'agit de la signature-colonne réduite de  $A^2$ , dans la mesure où nous ne ferons appel qu'à celle-ci).

On peut écrire la succession d'égalités :

$$\begin{aligned} \langle A^4 \rangle &= \mathbf{R}_{(n)} \langle A^2 \rangle \quad (\text{par définition même de la matrice } \mathbf{R}_{(n)}). \\ \langle A^8 \rangle &= \mathbf{R}_{(n)} \langle A^4 \rangle \\ \langle A^{16} \rangle &= \mathbf{R}_{(n)} \langle A^8 \rangle \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On aboutit ainsi, par récurrence immédiate, au théorème suivant.

**Théorème 6-5.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}), n \text{ pair, et } \forall i \in \mathbb{N} : \langle A^{2^{i+1}} \rangle = \mathbf{R}_{(n)}^i \langle A^2 \rangle.$

*Remarque :*

La relation ci-dessus reste en effet trivialement vraie pour  $i = 0$ .



Comme  $n$  est pair, nous sommes dans un cas de figure où la matrice  $R_{(n)}$  est inversible.

Soit donc  $\rho(n) \in \mathbb{N}^*$  la puissance de bouclage de  $R_{(n)}$  (cf. Théorème 6-2) On a donc :

$$R_{(n)}^{\rho(n)} = I_{\frac{n}{2}}.$$

En faisant  $i = k(n)$  dans le Théorème 6-5 ci-dessus, il vient :

$$\langle A^{2^{\rho(n)+1}} \rangle = R_{(n)}^{\rho(n)} \langle A^2 \rangle = I_{\frac{n}{2}} \langle A^2 \rangle = \langle A^2 \rangle$$

Les signatures réduites de  $A^{2^{\rho(n)+1}}$  et de  $A^2$  étant égales, ces matrices sont égales (cf. Remarque 2 de la Section 5.5. du Chapitre 5).

On peut donc énoncer le théorème suivant.

**Théorème 6-6.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair :  $A^{2^{\rho(n)+1}} = A^2$ , où  $\rho(n)$  désigne la puissance de bouclage de la matrice inversible  $R_{(n)}$ .

Plaçons-nous maintenant dans le cas où  $A$  est inversible.

**Théorème 6-7.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair :  $A^{2^{\rho(n)+1}-2} = I_n$ , où  $\rho(n)$  désigne la puissance de bouclage de la matrice inversible  $R_{(n)}$ .

*Preuve :* Immédiate.

**Théorème 6-8.** Le couple d'entiers minimal  $(k_1, k_2)$  constitué par les puissances de bouclage d'une matrice non inversible de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, est tel que :

$$k_1 = 1 \text{ ou } 2 \quad \text{et} \quad k_1 < k_2 \leq 2^{\rho(n)+1}$$

où  $\rho(n)$  désigne la puissance de bouclage de la matrice inversible  $R_{(n)}$ .

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 6-6 ci-dessus.

**Théorème 6-9.** La puissance de bouclage  $k_2$  d'une matrice inversible de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, est telle que :  $k_2$  divise  $\Omega(n) = 2^{\rho(n)+1} - 2$ .

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 6-7 ci-dessus.

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, et  $k_2$  sa puissance de bouclage supérieure. On a donc :  $A^{k_2} = I_n$ .

Par ailleurs, d'après le Théorème 6-7, on a également :  $A^{\Omega(n)} = I_n$

Clairement :  $k_2 \leq \Omega(n)$ , sinon  $k_2$  ne serait pas la puissance de bouclage minimale de  $A$ .

Soit  $q$  et  $r$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $\Omega(n)$  par  $k_2$ .

On a donc :  $\Omega(n) = q k_2 + r$ , avec  $0 \leq r < k_2$ .

Nous allons montrer que nécessairement :  $r = 0$ .

En effet :  $A^{\Omega(n)} = I_n \Leftrightarrow A^{q k_2 + r} = I_n \Leftrightarrow (A^{k_2})^q \cdot A^r = I_n$

Comme :  $A^{k_2} = I_n$ , on a :  $(A^{k_2})^q = I_n$ . On en déduit que :  $A^r = I_n$ .

Si  $r \neq 0$ , comme  $r < k_2$ , la précédente relation établirait que  $k_2$  ne serait pas la puissance de bouclage minimale de  $A$ . Contradiction. Donc  $r = 0$ .

*Remarques :*

1. Le Théorème 6-6 est général : il énonce une propriété commune à toutes les matrices inversibles et non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair.
2. Le Théorème 6-8 énonce une propriété commune à toutes les matrices non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair.
3. Les Théorèmes 6-7 et 6-9 énoncent une propriété commune à toutes les matrices inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair.
4. Une matrice particulière de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, peut fort bien avoir des puissances de bouclage inférieures aux exposants apparaissant dans le Théorème 6-6 (ou dans le Théorème 6-7 si cette matrice est inversible). Nous dirons, dans ce cas, que la matrice concernée « fait mieux » que la loi générale. Néanmoins, quand tel est le cas, cette matrice vérifie aussi la relation définie par le Théorème 6-6 (ou par le Théorème 6-7 si cette matrice est inversible). Il n'y a donc aucune contradiction entre « faire mieux » que la loi générale et, pour autant, respecter la loi générale.

*Exemple 1 :*

La matrice  $I_n$ ,  $n$  pair, vérifie :  $I_n^1 = I_n$ . Sa puissance de bouclage vaut donc 1.

$I_n$  vérifie aussi :  $I_n^{2^{\rho(n)+1}} = I_n$ , conformément au Théorème 6-7 (\*).

*Exemple 2 :*

La matrice  $J_n$ ,  $n$  pair, vérifie :  $J_n^2 = I_n$ . Sa puissance de bouclage vaut donc 2.

$J_n$  vérifie aussi :  $J_n^{2^{\rho(n)+1}} = I_n$ , conformément au Théorème 6-7 (\*).

(\*) *Remarque :*  $\rho(n) \geq 1 \Rightarrow \rho(n) + 1 \geq 2 \Rightarrow 2^{\rho(n)+1} - 2 \geq 2$ .

5. Hormis le cas très particulier de la matrice nulle, matrice pour laquelle :  $O_n^2 = O_n$ , je n'ai pas trouvé de matrice  $A$  non inversible de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, ayant pour puissances de bouclage  $(1, k_2)$ , c. à d. telle que l'on ait :  $A^{k_2} = A$ . Il serait intéressant d'établir s'il existe, hormis la matrice nulle, des matrices non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, telles que  $k_1 = 1$ .

Étude pour  $n = 2, n = 4, n = 6, n = 8, n = 10, n = 12, n = 14, n = 16$

$n = 2$  : Nous avons démontré que :  $\rho(2) = 1$ . Donc :  $2^{\rho(2)+1} = 4$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_2(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^4 = A^2$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_2(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^2 = I_2$$

$n = 4$  : Nous avons démontré que :  $\rho(4) = 2$ . Donc :  $2^{\rho(4)+1} = 8$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_4(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^8 = A^2$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_4(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^6 = I_4$$

$n = 6$  : Nous avons démontré que :  $\rho(6) = 3$ . Donc :  $2^{\rho(6)+1} = 16$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{16} = A^2$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_6(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{14} = I_6$$

$n = 8$  : Nous avons démontré que :  $\rho(8) = 3$ . Donc  $2^{\rho(8)+1} = 16$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_8(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{16} = A^2$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_8(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{14} = I_8$$

$n = 10$  : Nous avons démontré que :  $\rho(10) = 5$ . Donc :  $2^{\rho(10)+1} = 64$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{10}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{64} = A^2$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{10}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{62} = I_{10}$$

$n = 12$  : Nous avons démontré que :  $\rho(12) = 6$ . Donc :  $2^{\rho(12)+1} = 128$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{12}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{128} = A^2$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{12}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{126} = I_{12}$$

$n = 14$  : Nous avons démontré que :  $\rho(14) = 4$ . Donc :  $2^{\rho(14)+1} = 32$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{14}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{32} = A^2$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{14}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{30} = I_{14}$$

$n = 16$  : Nous avons démontré que :  $\rho(16) = 4$ . Donc :  $2^{\rho(16)+1} = 32$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{16}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{32} = A^2$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{16}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{30} = I_{16}$$

### 6.5.2. $n$ impair

Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair. (On vérifiera que tout ce qui suit s'applique lorsque  $A = O_n$ ).

Soit  $\langle A^2 \rangle$  la signature réduite de  $A^2$ .

On peut écrire la succession d'égalités :

$$\begin{aligned} \langle A^4 \rangle &= R_{(n)} \langle A^2 \rangle \quad (\text{par définition même de la matrice } R_{(n)}). \\ \langle A^8 \rangle &= R_{(n)} \langle A^4 \rangle \\ \langle A^{16} \rangle &= R_{(n)} \langle A^8 \rangle \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On aboutit ainsi, par récurrence immédiate, au théorème suivant.

**Théorème 6-10.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair et  $\forall i \in \mathbb{N} : \langle A^{2^{i+1}} \rangle = R_{(n)}^i \langle A^2 \rangle$ .

*Remarque :*

La relation ci-dessus s'applique pour  $n = 1$  et reste trivialement vraie pour  $i = 0$ .

Nous allons écarter dans le raisonnement qui suit le cas particulier  $n = 1$  dans la mesure où la matrice  $R_{(1)}$  est inversible.

Comme  $n$  est impair ( $n \neq 1$ ), nous sommes donc dans un cas de figure où la matrice  $R_{(n)}$  est non inversible.

Soit donc  $(\rho_1(n), \rho_2(n))$ ,  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$ , avec :  $\rho_2(n) > \rho_1(n)$ , le couple d'entiers minimal correspondant aux puissances de bouclage de  $R_{(n)}$  (cf. Théorème 6-4 de la Section 6.4.2.).

On a donc :  $R_{(n)}^{\rho_2(n)} = R_{(n)}^{\rho_1(n)}$ .

Par suite :  $R_{(n)}^{\rho_2(n)} \langle A^2 \rangle = R_{(n)}^{\rho_1(n)} \langle A^2 \rangle$

Le Théorème 6-10 ci-dessus entraîne :  $\langle A^{2^{\rho_2(n)+1}} \rangle = \langle A^{2^{\rho_1(n)+1}} \rangle$ .

Les signatures réduites de  $A^{2^{\rho_2(n)+1}}$  et de  $A^{2^{\rho_1(n)+1}}$  étant égales, ces matrices sont égales (cf. Remarque 2 de la Section 5.5. du Chapitre 5).

On peut donc énoncer le théorème suivant.

**Théorème 6-11.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ):  $A^{2^{\rho_2(n)+1}} = A^{2^{\rho_1(n)+1}}$ , où  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  désignent les puissances de bouclage de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ .

Plaçons-nous maintenant dans le cas où  $A$  est inversible.

**Théorème 6-12.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ):  $A^{2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1}} = I_n$ , où  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  désignent les puissances de bouclage de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ .

*Preuve :* Immédiate.

**Théorème 6-13.** Le couple minimal  $(k_1, k_2)$  constituant les puissances de bouclage d'une matrice non inversible de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), est tel que :

$$0 < k_1 \leq 2^{\rho_1(n)+1} \quad \text{et} \quad k_1 < k_2 \leq 2^{\rho_2(n)+1}$$

où  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  désignent les puissances de bouclage de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ .

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 6-11 ci-dessus.

**Théorème 6-14.** La puissance minimale de bouclage  $k_2$  d'une matrice inversible de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), est telle que :

$$k_2 \text{ divise } 2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1}$$

où  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  désignent les puissances de bouclage de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ .

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 6-12 ci-dessus.

Démonstration identique à celle du Théorème 6-9.

*Remarques :*

1. Le Théorème 6-11 est général : il énonce une propriété commune à toutes les matrices inversibles et non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ).
2. Le Théorème 6-13 énonce une propriété commune à toutes les matrices non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ).
3. Les Théorèmes 6-12 et 6-14 énoncent une propriété commune à toutes les matrices inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ).

4. Une matrice particulière de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), peut fort bien avoir des puissances de bouclage inférieures aux exposants apparaissant dans le Théorème 6-11 (ou dans le Théorème 6-12 si cette matrice est inversible). Nous dirons, dans ce cas, que la matrice concernée « fait mieux » que la loi générale. Néanmoins, quand tel est le cas, cette matrice vérifie aussi la relation définie par le Théorème 6-11 (ou par le Théorème 6-12 si cette matrice est inversible).

Il n'y a donc aucune contradiction entre « faire mieux » que la loi générale et, pour autant, respecter la loi générale.

*Exemple 1 :*

La matrice  $I_n$ ,  $n$  impair, vérifie :  $I_n^1 = I_n$ . Sa puissance de bouclage vaut donc 1.

$I_n$  vérifie aussi :  $I_n^{2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1}} = I_n$ , conformément au Théorème 6-12 (\*).

*Exemple 2 :*

La matrice  $J_n$ ,  $n$  impair, vérifie :  $J_n^2 = I_n$ . Sa puissance de bouclage vaut donc 2.

$J_n$  vérifie aussi :  $J_n^{2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1}} = I_n$ , conformément au Théorème 6-12 (\*).

(\* *Remarque :*

Notons que :  $\rho_2(n) \geq \rho_1(n) + 1 \Rightarrow \rho_2(n) + 1 \geq \rho_1(n) + 2 \Rightarrow$   
 $2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1} \geq 2^{\rho_1(n)+2} - 2^{\rho_1(n)+1}$ , et comme :  $\rho_1(n) \geq 1$ ,  
 $2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1} \geq 2^3 - 2^2 = 4$ .

*Exemple 3 :*

$n$  étant impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), intéressons-nous à la matrice particulière  $B_{\nu+1}$  de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Cette matrice a deux axes de symétrie médians, horizontal et vertical. Ceci entraîne clairement que  $B_{\nu+1}$  est non inversible.

On a :

$$B_{\nu+1}^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-3} + B_{2\nu-1} + B_{2\nu+1} = \sum_{i=0}^{\nu} B_{2i+1} \quad (\nu + 1 \text{ termes})$$

et :

$$B_{\nu+1}^4 = B_1^2 + B_3^2 + B_5^2 + \dots + B_{2\nu-3}^2 + B_{2\nu-1}^2 + B_{2\nu+1}^2 = \sum_{i=0}^{\nu} B_{2i+1}^2 \quad (\nu + 1 \text{ termes}).$$

Par ailleurs :  $B_1^2 = B_{2\nu+1}^2$ ,  $B_3^2 = B_{2\nu-1}^2$ ,  $B_5^2 = B_{2\nu-3}^2$ , ... etc.

La valeur de  $B_{\nu+1}^4$  dépend de l'existence ou non d'un terme médian dans la somme

$\sum_{i=0}^{\nu} B_{2i+1}^2$ , ce qui nous amène à distinguer 2 cas, suivant le cas où  $\nu$  est pair ou impair.

- Si  $n = 4p + 1$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  (soit :  $\nu = 2p$ ) :  $B_{\nu+1}^4 = B_{\nu+1}^2$  (a).

- Si  $n = 4p + 3$ ,  $p \in \mathbb{N}$  (soit :  $\nu = 2p + 1$ ) :  $B_{\nu+1}^4 = O_n$  (b).

Or, d'après le Théorème 6-11 ci-dessus, on a :

$\forall A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair :  $A^{2^{\rho_2(n)+1}} = A^{2^{\rho_1(n)+1}}$  (où  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$  et  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  désignent les puissances de bouclage de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ ).

Or :  $\rho_1(n) \geq 1 \Rightarrow \rho_1(n) + 1 \geq 2 \Rightarrow 2^{\rho_1(n)+1} \geq 4$   
 $\rho_2(n) \geq 2 \Rightarrow \rho_2(n) + 1 \geq 3 \Rightarrow 2^{\rho_2(n)+1} \geq 8$ .

On constate que les relations (a) ou (b) ci-dessus sont donc bien compatibles avec la loi générale :  $A^{2^{\rho_2(n)+1}} = A^{2^{\rho_1(n)+1}}$ .

6. Hormis le cas très particulier de la matrice nulle, matrice pour laquelle :  $O_n^2 = O_n$ , je n'ai pas trouvé de matrice  $A$  non inversible de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), ayant pour puissances de bouclage  $(1, k_2)$ , c. à d. telle que l'on ait :  $A^{k_2} = A$ .

Il serait intéressant d'établir s'il existe, hormis la matrice nulle, des matrices non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), telles que  $k_1 = 1$ .



Etude pour  $n = 1, n = 3, n = 5, n = 7, n = 9, n = 11, n = 13, n = 15$

$n = 1$  : Nous avons été amené à écarter de l'étude générale le cas particulier  $n = 1$ . La raison de cette mise à l'écart tient au fait, comme nous l'avons déjà dit, que la matrice  $R(1) = [1]$  est la seule matrice  $R_{(n)}$ ,  $n$  impair, qui soit inversible.

Il est vrai qu'il n'y a pas vraiment lieu d'établir une loi générale pour un ensemble ne contenant que deux matrices :  $O_1 = [0]$  et  $I_1 = [1]$ . S'il fallait en énoncer une, en posant  $A = O_1 = [0]$  ou  $A = I_1 = [1]$ , il est facile de constater qu'elles vérifient toutes deux la relation :  $A^2 = A$ .

$n = 3$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(3) = 1, \rho_2(3) = 2$ .

Donc :  $2^{\rho_1(3)+1} = 4$  et  $2^{\rho_2(3)+1} = 8$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^8 = A^4$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^4 = I_3$$

$n = 5$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(5) = 1, \rho_2(5) = 2$ .

Donc :  $2^{\rho_1(5)+1} = 4$  et  $2^{\rho_2(5)+1} = 8$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^8 = A^4$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^4 = I_5$$

$n = 7$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(7) = 2, \rho_2(7) = 3$ .

Donc :  $2^{\rho_1(7)+1} = 8$  et  $2^{\rho_2(7)+1} = 16$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_7(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{16} = A^8$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_7(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^8 = I_7$$

$n = 9$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(9) = 1$ ,  $\rho_2(9) = 3$ .

Donc :  $2^{\rho_1(9)+1} = 4$  et  $2^{\rho_2(9)+1} = 16$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_9(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{16} = A^4$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_9(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{12} = I_9$$

$n = 11$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(11) = 2$ ,  $\rho_2(11) = 3$ .

Donc :  $2^{\rho_1(11)+1} = 8$  et  $2^{\rho_2(11)+1} = 16$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{11}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{16} = A^8$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{11}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^8 = I_{11}$$

$n = 13$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(13) = 1$ ,  $\rho_2(13) = 4$ .

Donc :  $2^{\rho_1(13)+1} = 4$  et  $2^{\rho_2(13)+1} = 32$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{13}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{32} = A^4$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{13}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{28} = I_{13}$$

$n = 15$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(15) = 3$ ,  $\rho_2(15) = 4$ .

Donc :  $2^{\rho_1(15)+1} = 16$  et  $2^{\rho_2(15)+1} = 32$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{15}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{32} = A^{16}$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{15}(\mathbb{B})$  vérifie la relation :

$$A^{16} = I_{15}$$

## 6.6. Autre formulation des Théorèmes 6-6, 6-7, 6-11 et 6-12

Nous allons énoncer, sous une forme strictement équivalente et en les regroupant, les Théorèmes 6-6, 6-7, 6-11 et 6-12 précédemment établis.

### Théorème 6-15.

Désignons par  $\rho(n)$  la puissance de bouclage de la matrice inversible  $R_{(n)}$ ,  $n$  pair.

Toutes les matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, ont comme polynôme annulateur commun le polynôme de  $\mathbb{B}[X] : X^{2^{\rho(n)+1}} - X^2$ .

Toutes les matrices inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, ont comme polynôme annulateur commun le polynôme de  $\mathbb{B}[X] : X^{2^{\rho(n)+1}-2} - 1$ .

Désignons par  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  les puissances de bouclage de la matrice inversible  $R_{(n)}$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ).

Toutes les matrices  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), ont comme polynôme annulateur commun le polynôme de  $\mathbb{B}[X] : X^{2^{\rho_2(n)+1}} - X^{2^{\rho_1(n)+1}}$ .

Toutes les matrices inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), ont comme polynôme annulateur commun le polynôme de  $\mathbb{B}[X] : X^{2^{\rho_2(n)+1}-2^{\rho_1(n)+1}} - 1$ .

### Remarques

L'existence d'un polynôme annulateur commun à toutes les matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair ou  $n$  impair, n'a rien de surprenant. On peut en effet affirmer que, beaucoup plus généralement, toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , admettent un polynôme annulateur commun (et de ce fait une infinité de polynômes annulateurs communs puisque tout polynôme multiple d'un polynôme annulateur est lui aussi un polynôme annulateur).

La démonstration de cette proposition est immédiate : toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  a comme polynôme annulateur  $\chi_A$ , le polynôme caractéristique de  $A$ .

Soit alors :  $\Pi = \text{ppcm} \{ \chi_A, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) \}$ .

$\Pi$  est clairement un polynôme annulateur commun à toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

## ANNEXE / CHAPITRE 6

### THÉORÈME FONDAMENTAL DES MATRICES CARRÉES À ÉLÉMENTS DANS $\mathbb{B}$

#### **Théorème Fondamental et Définitions associées A6-1.**

Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

- 1) Il existe une infinité de couples d'entiers  $(\xi_1, \xi_2) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)$ ,  $\xi_2 > \xi_1$ , tels que :

$$A^{\xi_2} = A^{\xi_1}$$

Désignons par  $\{\xi_1\}$  l'ensemble des entiers de  $\mathbb{N}$  figurant à gauche dans l'ensemble des couples  $(\xi_1, \xi_2)$  définis ci-dessus, et par  $\{\xi_2\}$  l'ensemble des entiers de  $\mathbb{N}^*$  figurant à droite dans l'ensemble des couples  $(\xi_1, \xi_2)$  définis ci-dessus.

- 2) Si l'on désigne par  $k_1$  le plus petit élément de l'ensemble  $\{\xi_1\}$ , il existe une infinité d'entiers  $\xi_2 \in \mathbb{N}$ , avec  $\xi_2 > k_1$ , tels que :

$$A^{\xi_2} = A^{k_1}$$

- 3) Si l'on désigne par  $k_2$  le plus petit élément de l'ensemble  $\{\xi_2\}$ , il existe un couple d'entiers unique  $(k_1, k_2) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)$ ,  $k_2 > k_1$ , tel que :

$$A^{k_2} = A^{k_1}$$

On appelle ce couple d'entiers  $(k_1, k_2) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)$ ,  $k_2 > k_1$ , le couple d'entiers minimal réalisant l'égalité :  $A^{k_2} = A^{k_1}$ .

- 4) Si  $A$  est inversible, alors :  $k_1 = 0$ . Dans ce cas :  $\exists k_2 \in \mathbb{N}^*$ , unique minimal, tel que :

$$A^{k_2} = I_n \quad (I_n \text{ désigne la matrice-unité de } \mathcal{M}_n(\mathbb{B})).$$

On a alors :  $A^{-1} = A^{k_2-1}$ .

Si  $A$  est non inversible, alors :  $k_1 \in \mathbb{N}^*$  c. à d.  $k_1 > 0$ .

- 5) Les entiers  $k_1$  et  $k_2$  ainsi définis sont dénommés puissances de bouclage, inférieure et supérieure, relatives à la matrice  $A$ .

La puissance de bouclage inférieure  $k_1$  d'une matrice  $A$  inversible étant nulle, sa puissance de bouclage supérieure  $k_2$  sera fréquemment désignée comme étant la puissance de bouclage de la matrice  $A$ .

*Remarque :* La démonstration de ce théorème n'est pas très difficile. Elle est entièrement fondée sur le fait que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  est un ensemble de cardinal fini.

Une version plus élaborée du Théorème Fondamental des matrices carrées à éléments dans  $\mathbb{B}$  apporte des précisions concernant les matrices non inversibles. Il énonce en particulier l'inégalité suivante :  $k_1 \leq r(A) + 1 \leq n$ , où  $r(A)$  désigne le rang de  $A$ .



## TABLE DES MATIÈRES

### PARTIE 4 : CHAPITRES 7 – CONCLUSION

<b>CHAPITRE 7</b>	<b>223</b>
<b>MATRICES DE <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{B})</math> SYMETRIQUES PAR RAPPORT AUX AXES MEDIANS – MATRICES DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> SYMETRIQUES PAR RAPPORT AUX AXES MEDIANS</b>	<b>223</b>
<b>7.1. Définitions, notations, propriétés générales</b>	<b>223</b>
<b>7.2. Propriétés générales de la multiplication matricielle mettant en jeu des matrices symétriques par rapport à un axe médian</b>	<b>228</b>
<b>7.3. Multiplication matricielle dans <math>\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})</math></b>	<b>229</b>
<b>7.4. Ensemble <math>\mathcal{BS}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})</math></b>	<b>231</b>
<b>7.5. Ensemble <math>\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})</math></b>	<b>233</b>
 <b>CONCLUSION</b>	 <b>247</b>
<b>REFLEXIONS SUR LES SEV COMMUTATIFS DE <math>\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})</math> – DEFINITION DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{R})</math> ET DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{C})</math></b>	<b>247</b>
<b>1. <math>\mathbb{B}</math>-SEV constitués de matrices bisymétriques commutantes</b>	<b>247</b>
<b>2. Définition de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{R})</math> et de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{C})</math></b>	<b>264</b>



## CHAPITRE 7

### Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ symétriques par rapport aux axes médians – Matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ symétriques par rapport aux axes médians

#### 7.1. Définitions, notations, propriétés générales

*Note :* Dans tout le présent chapitre :  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Les notions d'axe médian (vertical et horizontal) d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  ont déjà été introduites dans le Chapitre 1 page 11. Elles se généralisent instantanément à une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ .

**Définition 7-1.** Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ).

On appelle matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian vertical la matrice  $A' = [a'_{ij}]$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ) obtenue en opérant une symétrie des éléments de  $A$  par rapport à son axe médian vertical.

On a donc, par définition même :  $\forall i = 1 \text{ à } n, \forall j = 1 \text{ à } p : a'_{ij} = a_{i, p-j+1}$ .

*Remarques :*

Si  $p$  est pair ( $p = 2\pi, \pi \in \mathbb{N}^*$ ) l'axe médian vertical de  $A$  (ainsi que celui de  $A'$ ) passe entre les  $\pi^{\text{ème}}$  et  $(\pi+1)^{\text{ème}}$  colonnes de  $A$  (et de  $A'$ ).

Si  $p$  est impair ( $p = 2\pi + 1, \pi \in \mathbb{N}$ ) l'axe médian vertical de  $A$  (ainsi que celui de  $A'$ ) se confond avec la  $(\pi+1)^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  (et de  $A'$ ).

**Définition 7-2.** Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ).

On appelle matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian horizontal la matrice  $A'' = [a''_{ij}]$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ) obtenue en opérant une symétrie des éléments de  $A$  par rapport à son axe médian horizontal.

On a donc, par définition même :  $\forall i = 1 \text{ à } n, \forall j = 1 \text{ à } p : a''_{ij} = a_{n-i+1, j}$ .

*Remarques :*

Si  $n$  est pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ) l'axe médian horizontal de  $A$  (ainsi que celui de  $A''$ ) passe entre les  $\nu^{\text{ème}}$  et  $(\nu+1)^{\text{ème}}$  lignes de  $A$  (et de  $A''$ ).

Si  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ) l'axe médian horizontal de  $A$  (ainsi que celui de  $A''$ ) se confond avec la  $(\nu+1)^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  (et de  $A''$ ).

*Exemple :*

Soit  $A$  la matrice générale de  $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{B})$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}. \text{ On a alors :}$$



$$A' = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}.$$

**Définition 7-3.** Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ).

$A$  est dite symétrique par rapport à son axe médian vertical, si elle est égale à sa matrice symétrique par rapport à son axe médian vertical.

On a alors :  $\forall i = 1 \text{ à } n, \forall j = 1 \text{ à } p : a_{ij} = a_{i \ p-j+1}$  (v).

On dira aussi que la matrice  $A$  présente une symétrie médiane d'axe vertical, ou, en abrégé, que la matrice  $A$  est « smav ».

**Définition 7-4.** Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ).

$A$  est dite symétrique par rapport à son axe médian horizontal, si elle est égale à sa matrice symétrique par rapport à son axe médian horizontal.

On a alors :  $\forall i = 1 \text{ à } n, \forall j = 1 \text{ à } p : a_{ij} = a_{n-i+1 \ j}$  (h).

On dira aussi que la matrice  $A$  présente une symétrie médiane d'axe horizontal, ou, en abrégé, que la matrice  $A$  est « smah ».

**Définition 7-5.** Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ).

$A$  est dite symétrique par rapport à ses deux axes médians (vertical et horizontal), si elle est à la fois égale à sa matrice symétrique par rapport à son axe médian vertical et à sa matrice symétrique par rapport à son axe médian horizontal.

Les éléments  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ) de  $A$  satisfont alors simultanément aux relations (v) et (h) ci-dessus.

On dira aussi que la matrice  $A$  présente une double symétrie médiane ou, en abrégé, que la matrice  $A$  est « sm ».

*Remarques :*

Toutes ces définitions demeurent valables si :

- $p = 1$ , c. à d. si  $A$  est une matrice-colonne (notons qu'elle est alors *ipso facto* smav),
- $n = 1$ , c. à d. si  $A$  est une matrice-ligne (notons qu'elle est alors *ipso facto* smah),
- $n = p$ , c. à d. si  $A$  est une matrice carrée.

*Note :* Dans le cas particulier  $n = p = 1$ , les deux matrices de  $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{B})$ , à savoir  $[0]_1$  et  $[1]_1$ , sont smav, smah et donc sm.

**Définitions 7-6.** Nous désignerons par :

$\mathcal{M}_{n,p}/\text{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices smav de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ ,

$\mathcal{M}_{n,p}/\text{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices smah de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ ,

$\mathcal{M}_{n,p}/\text{SM}(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices sm de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Toutes ces notations demeurent valables pour les matrices-colonnes ( $p = 1$ ), les matrices-lignes ( $n = 1$ ) et les matrices carrées ( $n = p$ ).

**Théorème 7-7.**

$\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  sont des sev de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ .

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})) = n\pi, \text{ si } p \text{ est pair } (p = 2\pi, \pi \in \mathbb{N}^*),$$

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})) = n(\pi+1), \text{ si } p \text{ est impair } (p = 2\pi+1, \pi \in \mathbb{N}).$$

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})) = \nu p, \text{ si } n \text{ est pair } (n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*),$$

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})) = (\nu+1)p, \text{ si } n \text{ est impair } (n = 2\nu+1, \nu \in \mathbb{N}).$$

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \nu\pi, \text{ si } n \text{ et } p \text{ pairs,}$$

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \nu(\pi+1), \text{ si } n \text{ pair, } p \text{ impair,}$$

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = (\nu+1)\pi, \text{ si } n \text{ impair, } p \text{ pair,}$$

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = (\nu+1)(\pi+1), \text{ si } n \text{ et } p \text{ impairs.}$$

En particulier, s'agissant des matrices carrées d'ordre  $n$  (si donc :  $n = p \in \mathbb{N}^*$ ) :

$$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})) = 2\nu^2, \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})) = 2\nu(\nu+1), \text{ si } n \text{ est impair,}$$

$$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})) = 2\nu^2, \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})) = 2\nu(\nu+1), \text{ si } n \text{ est impair,}$$

$$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \nu^2, \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = (\nu+1)^2, \text{ si } n \text{ est impair.}$$

*Preuve* : immédiate.

*Remarques* :

Comme toute matrice-colonne est smav, on a :  $\mathcal{M}_{n,1}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B}) = \mathcal{M}_{n,1}/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

Comme toute matrice-ligne est smah, on a :  $\mathcal{M}_{1,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B}) = \mathcal{M}_{1,p}/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

*Exemples* :

1) Comme indiqué antérieurement, les matrices  $[0]_1$  et  $[1]_1$ , sont smav, smah et donc sm.

Plus généralement, la matrice nulle  $O_{n,p}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*$ ) est smav, smah et donc sm.

n revanche la matrice-unité  $I_n$  d'ordre  $n$  (pour  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) n'est ni smav, ni smah, ni a fortiori sm,

2) Dans tout ce qui suit les lettres minuscules désignent des éléments de  $\mathbb{B}$ .

$$\begin{bmatrix} a & b & b & a \\ a' & b' & b' & a' \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B}),$$

$$\begin{bmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ b & b' & b'' & b''' \\ a & a' & a'' & a''' \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B}),$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & c & b & a \\ a' & b' & c' & c' & b' & a' \\ a & b & c & c & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,6}/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}/\mathcal{SM}(\mathbb{B}), \quad [a \ b \ c \ b \ a] \in \mathcal{M}_{1,5}/\mathcal{SM}(\mathbb{B}) \quad (*).$$

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2/\mathcal{SMav}(\mathbb{B}), \quad \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2/\mathcal{SMaH}(\mathbb{B}), \quad \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2/\mathcal{SM}(\mathbb{B}).$$

$$\begin{bmatrix} a & b & a \\ a' & b' & a' \\ a & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3/\mathcal{SM}(\mathbb{B}), \quad \begin{bmatrix} a & b & b & a \\ a' & b' & b' & a' \\ a' & b' & b' & a' \\ a & b & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4/\mathcal{SM}(\mathbb{B}).$$

(\*) Rappelons que toute matrice-colonne est *ipso facto* smav et que toute matrice-ligne est *ipso facto* smah.

### Matrice $J_n$

Nous avons déjà introduit (cf. Chapitres 1 page 11) la matrice  $J_n$  d'ordre  $n$ .

**Définition 7-8.**  $J_n = [g_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ) est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) dont les seuls éléments non nuls sont ceux de la 2<sup>ème</sup> diagonale :

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_n.$$

On a donc :  $g_{ij} = 1$  si  $i + j = n + 1$  et  $g_{ij} = 0$  si  $i + j \neq n + 1$ .

*Remarque 1 :*

$J_n$  est symétrique ou encore 1-symétrique ( $J_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ ) ou encore 1- $\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ ),

$J_n$  est 2-symétrique ( $J_n \in 2\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ ),

$J_n$  est bisymétrique ( $J_n \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ ).

De plus :  $J_n \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Rappelons que  $J_n = B_{n,n}$  (où  $\{B_{n,i}\}, 1 \leq i \leq n$ , désigne la « base canonique » de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ).

*Remarque 2 :*

Pas plus que  $I_n$ , la matrice  $J_n$  n'est ni smav, ni smah, ni *a fortiori* sm,  $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ .

Cependant la matrice  $J_n$  joue un rôle important dans l'étude des matrices admettant une symétrie par rapport à l'un de ses axes médians.

Se reporter au Chapitre 1 (page 11) et au début du Chapitre 5 (page 169) pour un rappel des principales propriétés de la matrice  $J_n$ .

**Théorème 7-9.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

$$(1) A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SMaV}(\mathbb{B}) \Leftrightarrow A \cdot J_n = A.$$

$$(2) A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SMaH}(\mathbb{B}) \Leftrightarrow J_n \cdot A = A.$$

$$(3) A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Leftrightarrow A \cdot J_n = J_n \cdot A = A.$$

*Preuve :*

Démontrons le Point (1). Posons :

$$A = [a_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

$$J_n = [g_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

$$P = A \cdot J_n = [p_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n).$$

$$\text{On a donc : } p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} g_{kj}.$$

Concernant  $J_n$  :  $g_{kj} = 1$  pour  $k + j = n + 1$ ,  $g_{kj} = 0$  pour  $k + j \neq n + 1$ .

Le seul terme non nul dans le signe  $\sum$  ci-dessus correspond donc à  $k = n - j + 1$ .

Par suite :  $p_{ij} = a_{i, n-j+1}$ .

$$\text{Or : } A \cdot J_n = A \Rightarrow a_{i, n-j+1} = a_{ij}.$$

Il en découle que A est smav (cf. Définition 7-3).

La réciproque est immédiate.

Démontrons le Point (2). Posons :

$$A = [a_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

$$J_n = [g_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

$$Q = J_n \cdot A = [q_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n).$$

$$\text{On a donc : } q_{ij} = \sum_{k=1}^n g_{ik} a_{kj}.$$

Concernant  $J_n$  :  $g_{ik} = 1$  pour  $i + k = n + 1$ ,  $g_{ik} = 0$  pour  $i + k \neq n + 1$ .

Le seul terme non nul dans le signe  $\sum$  ci-dessus correspond donc à  $k = n - i + 1$ .

Par suite :  $q_{ij} = a_{n-i+1, j}$ .

$$\text{Comme : } J_n \cdot A = A \Rightarrow a_{n-i+1, j} = a_{ij}.$$

Il en découle que A est smah (cf. Définition 7-4).

La réciproque est immédiate.

Le Point (3) découle directement des Points (1) et (2) ci-dessus.

**Théorème 7-10.** *Le déterminant de toute matrice de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$ , le déterminant de toute matrice de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$  et le déterminant de toute matrice de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ , d'ordre  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ , est nul. Toutes ces matrices sont donc non-inversibles.*

*Pour  $n = 1$  :  $\det([0]_1) = 0$ , mais  $\det([1]_1) = 1$ .*

*Note :* La matrice  $[1]_1$  est donc la seule matrice symétrique par rapport à ses axes médians dont le déterminant n'est pas nul.

*Preuve :*

Pour  $n \geq 2$ , toutes ces matrices ont, par définition même, deux de leurs lignes ou deux de leur colonnes égales, ce qui suffit à entraîner la nullité de leur déterminant.

## 7.2. Propriétés générales de la multiplication matricielle mettant en jeu des matrices symétriques par rapport à un axe médian

Cette section ne prétend pas mener à bien une étude exhaustive de la multiplication matricielle de matrices symétriques par rapport à l'un de leurs axes médians. Nous nous limiterons dans ce qui suit aux seules matrices carrées d'ordre  $n$  et nous nous contenterons de mettre en avant quelques propriétés significatives.

L'une de ces propriétés est que la symétrie par rapport à un axe médian est « propagée » par la multiplication matricielle. Lorsque l'on multiplie une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  quelconque (ne présentant donc aucune propriété de symétrie par rapport à un axe médian) et une matrice de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$  ou de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$ , la matrice-produit résultant d'une telle multiplication (sous réserve que celle-ci soit effectuée dans l'ordre adéquat) est une matrice appartenant à  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$  ou de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$ .

C'est ce que résument les théorèmes qui suivent.

**Théorème 7-11.**  $A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow BA \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$ .

*Preuve :*

$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B}) \Leftrightarrow A \cdot J_n = A$  (Cf. Point (1) du Théorème 7-9).

Donc :  $BA = BA \cdot J_n$  et donc :  $BA \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$ .

**Théorème 7-12.**  $A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow AB \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$ .

*Preuve :*

$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B}) \Leftrightarrow J_n \cdot A = A$  (Cf. Point (2) du Théorème 7-9).

Donc :  $AB = J_n \cdot AB$  et donc :  $AB \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$ .

**Théorème 7-13.**

$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow BA \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$  et  $AB \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$ .

*Si de plus  $AB = BA$  (autrement dit, si le produit  $AB$  est commutatif) :  $AB \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .*

*Preuve :*

$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B}) \Rightarrow BA \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$  (cf. Théorème 7-11).

$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B}) \Rightarrow BA \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$  (cf. Théorème 7-12).

Enfin, si  $AB = BA$ , sachant que  $J_n \cdot A = A$  (puisque  $A$  est smah) et que  $A \cdot J_n = A$  (puisque  $A$  est smah) :  $J_n \cdot AB = AB = BA = BA \cdot J_n = AB \cdot J_n$ .

Le Point (3) du Théorème 7-9 permet de conclure que  $AB \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

### 7.3. Multiplication matricielle dans $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$

Concernant les matrices de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair, il est commode d'utiliser la terminologie suivante.

**Définition 7-14.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ).

$\forall i = 1$  à  $2\nu + 1$ , l'élément  $a_{i, \nu+1}$  de  $A$  sera dénommé élément central de la ligne  $i$ .

$\forall j = 1$  à  $2\nu + 1$ , l'élément  $a_{\nu+1, j}$  de  $A$  sera dénommé élément central de la colonne  $j$ .

La ligne  $\nu + 1$  sera dénommée ligne centrale de  $A$  : elle renferme tous les éléments centraux des  $2\nu + 1$  colonnes de  $A$ .

La colonne  $\nu + 1$  sera dénommée colonne centrale de  $A$  : elle renferme tous les éléments centraux des  $2\nu + 1$  lignes de  $A$ .

L'élément  $a_{\nu+1, \nu+1}$  situé à l'intersection de la ligne centrale et de la colonne centrale de  $A$  sera dénommé élément central de  $A$ .

Désignons comme d'habitude par  $O_n$  la matrice nulle d'ordre  $n$ .

**Théorème 7-15 - Théorème du produit de matrices de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .**

(1)  $A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair  $\Rightarrow A \cdot B = O_n$ .

(2)  $A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair  $\Rightarrow A \cdot B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

Dans ce dernier cas ( $n$  impair), l'élément générique  $c_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ) de la matrice  $C = A \cdot B$  vaut :  $c_{ij} = a_{i, \nu+1} b_{\nu+1, j}$ .

(Les éléments de  $C = A \cdot B$  ne font intervenir que les éléments centraux des lignes de  $A$  et les éléments centraux des colonnes de  $B$ ).

De plus, si tous les éléments centraux des lignes de  $A$  ou si tous les éléments centraux des colonnes de  $B$  sont nuls, alors :  $A \cdot B = O_n$ .

*Preuve :*

Point (1) :  $n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ).

Soient :  $A = [a_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu, 1 \leq j \leq 2\nu$ ),  $B = [b_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu, 1 \leq j \leq 2\nu$ ).

Posons :  $C = A \cdot B = [c_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu, 1 \leq j \leq 2\nu$ ).

On a :  $c_{ij} = \sum_{k=1}^{2\nu} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=\nu+1}^{2\nu} a_{ik} b_{kj}$ .

$$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \text{ smav} \Rightarrow a_{ik} = a_{i \ 2\nu-k+1} \quad (\text{cf. Définition 7-3}).$$

$$B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow B \text{ smah} \Rightarrow b_{kj} = b_{2\nu-k+1 \ j} \quad (\text{cf. Définition 7-4}).$$

$$\text{Et donc : } c_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=\nu+1}^{2\nu} a_{i \ 2\nu-k+1} b_{2\nu-k+1 \ j}.$$

Dans le 2<sup>ème</sup> signe  $\sum$ , procédons au changement d'indice  $k' = \nu - k + 1$ . Il vient :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k'=1}^{\nu} a_{i \ k'} b_{k' \ j} = 0.$$

Le Point (1) est donc démontré.

Point (2) :  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathcal{N}$ ).

Soient :  $A = [a_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu + 1, 1 \leq j \leq 2\nu + 1$ ),  $B = [b_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu + 1, 1 \leq j \leq 2\nu + 1$ ).

Posons :  $C = A \cdot B = [c_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu + 1, 1 \leq j \leq 2\nu + 1$ ).

$$\text{On a : } c_{ij} = \sum_{k=1}^{2\nu+1} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + a_{i \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j} + \sum_{k=\nu+2}^{2\nu+1} a_{ik} b_{kj}.$$

$$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \text{ smav} \Rightarrow a_{ik} = a_{i \ 2\nu-k+2} \quad (\text{cf. Définition 7-3}).$$

$$B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow B \text{ smah} \Rightarrow b_{kj} = b_{2\nu-k+2 \ j} \quad (\text{cf. Définition 7-4}).$$

$$\text{Et donc : } c_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + a_{i \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j} + \sum_{k=\nu+2}^{2\nu+1} a_{i \ 2\nu-k+2} b_{2\nu-k+2 \ j}.$$

Dans le 2<sup>ème</sup> signe  $\sum$ , procédons au changement d'indice  $k' = \nu - k + 2$ . Il vient :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + a_{i \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j} + \sum_{k'=1}^{\nu} a_{i \ k'} b_{k' \ j} = a_{i \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j}.$$

Cette relation fournit l'élément « générique » de la matrice produit  $A \cdot B$ . On constate bien que les éléments de  $A \cdot B$  ne font intervenir que les éléments centraux des lignes de  $A$  et les éléments centraux des colonnes de  $B$ ).

Si tous les éléments centraux des lignes de  $A$  ou si tous les éléments centraux des colonnes de  $B$  sont nuls (\*), c.-à-d. si :  $a_{i \ \nu+1} = 0$  ( $1 \leq i \leq 2\nu + 1$ ), ou si :  $b_{\nu+1 \ j} = 0$  ( $1 \leq j \leq 2\nu + 1$ ),

alors :  $c_{ij} = 0$  ( $1 \leq i \leq 2\nu + 1, 1 \leq j \leq 2\nu + 1$ ), et donc :  $A \cdot B = O_n$ .

Reste à démontrer que le produit  $A \cdot B$  est symétrique par rapport à ses 2 axes médians. Il s'agit donc d'établir, pour  $1 \leq i \leq 2\nu + 1$  et  $1 \leq j \leq 2\nu + 1$ , les égalités suivantes :

$$c_{ij} = c_{2\nu-i+2 \ j} \quad \text{et} \quad c_{ij} = c_{i \ 2\nu-j+2}.$$

$$c_{2\nu-i+2 \ j} = a_{2\nu-i+2 \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j}, \text{ et comme } A \text{ est smah : } a_{2\nu-i+2 \ \nu+1} = a_{i \ \nu+1}.$$

Donc :  $c_{2\nu-i+2 \ j} = a_{i \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j} = c_{ij}$ . On en conclut que  $C = A \cdot B$  est smah.

Calcul similaire pour démontrer que :  $c_{ij} = c_{i \ 2\nu-j+2}$  et donc que  $C = A \cdot B$  est smav.

Finalement :  $A \cdot B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

Le Point (2) est donc démontré.

(\*) *Note :*

Il s'agit là d'une condition suffisante, mais non nécessaire. Il faut et il suffit en effet, pour que l'élément  $c_{ij}$  soit nul, que l'un ou l'autre de ses facteurs ( $a_{i \ \nu+1}$  ou  $b_{\nu+1 \ j}$ ) soit nul.

*Exemples :*

$n = 3$

$$\begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ a & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' & a' \\ c' & d' & c' \\ a' & b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc' & bd' & bc' \\ dc' & dd' & dc' \\ bc' & bd' & bc' \end{bmatrix}$$

$n = 5$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & b & a \\ d & f & g & f & d \\ e & h & i & h & e \\ d & f & g & f & d \\ a & b & c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' & c' & b' & a' \\ d' & f' & g' & f' & d' \\ e' & h' & i' & h' & e' \\ d' & f' & g' & f' & d' \\ a' & b' & c' & b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ce' & ch' & ci' & ch' & ce' \\ ge' & gh' & gi' & gh' & ge' \\ ie' & ih' & ii' & ih' & ie' \\ ge' & gh' & gi' & gh' & ge' \\ ce' & ch' & ci' & ch' & ce' \end{bmatrix}$$

Comme nous l'avons démontré, n'interviennent dans les éléments de la matrice produit que les éléments centraux des lignes de la matrice de gauche et les éléments centraux des colonnes de la matrice de droite.

Il est également clair, dans le cas  $n = 5$  par exemple, que si  $c = g = i = 0$  ou si  $e' = h' = i' = 0$ , alors la matrice produit résultante est nulle.

Le théorème qui suit est une conséquence directe du Théorème 7-15 qui précède.

**Théorème 7-16.**

(1)  $A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair,  $\Rightarrow A^k = O_n$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

(2)  $A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair,  $\Rightarrow A^k \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

*De plus, si tous les éléments centraux des lignes de A ou si tous les éléments centraux des colonnes de A sont nuls, alors :  $A^k = O_n$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .*

*Preuve :* Immédiate.

**7.4. Ensemble  $\mathcal{BS}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$**

**Théorème 7-17.** *Soit A une matrice symétrique - ou encore 1-symétrique - ( $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B})$  ou  $1\text{-}\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ ). Si A est smav (resp : smah), alors elle est smah (resp : smav) et donc bisymétrique et sm.*

*Soit A une matrice 2-symétrique ( $A \in 2\text{-}\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ ). Si A est smav (resp : smah), alors elle est smah (resp : smav) et donc bisymétrique et sm.*

*Preuve :*

Ceci résulte du fait que la 1-transposition ou la 2-transposition transforme une symétrie verticale en une symétrie horizontale et *vice versa*.



**Définition 7-18.** Nous désignerons par  $\mathcal{BS}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices d'ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) tout à la fois bisymétriques et symétriques par rapport à leurs axes médians.

*Remarque concernant les notations :*

Les ensembles que l'on pourrait noter  $1-S_n / \mathcal{SM}\mathcal{H}(\mathbb{B})$ ,  $1-S_n / \mathcal{SM}\mathcal{V}(\mathbb{B})$ ,  $1-S_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $2-S_n / \mathcal{SM}\mathcal{H}(\mathbb{B})$ ,  $2-S_n / \mathcal{SM}\mathcal{V}(\mathbb{B})$ ,  $2-S_n / \mathcal{SM}$ , ainsi que les ensembles  $\mathcal{BS}_n / \mathcal{SM}\mathcal{H}(\mathbb{B})$ ,  $\mathcal{BS}_n / \mathcal{SM}\mathcal{V}(\mathbb{B})$ , ne seront jamais désignés sous cette forme. Ils se confondent tous avec l'ensemble  $\mathcal{BS}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

*Exemples :*

$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BS}_1 / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BS}_2 / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BS}_3 / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & b & a \\ b & c & c & b \\ b & c & c & b \\ a & b & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BS}_4 / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & c & b & a \\ b & d & e & d & b \\ c & e & f & e & c \\ b & d & e & d & b \\ a & b & c & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BS}_5 / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

**Théorème 7-19.** L'ensemble  $\mathcal{BS}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  est un sev de l'ensemble  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

- si  $n$  est pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) :  $\dim(\mathcal{BS}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ ,

- si  $n$  est impair ( $n = 2\nu+1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ) :  $\dim(\mathcal{BS}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ .

*Preuve :*

Ces résultats découlent de ceux établissant la dimension de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , en prenant en compte la propriété de symétrie par rapport aux axes médians. (Cf. Théorème 1-23 du Chapitre 1).

## 7.5. Ensemble $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$

### 7.5.1. Propriétés générales

**Définition 7-20.** Nous désignerons par  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices d'ordre  $n$  de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  qui sont symétriques par rapport à leurs axes médians.

Exemples :

$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BSE}_1/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BSE}_2/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & a \\ b & 0 & b \\ a & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BSE}_3/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & b & a \\ b & a+b & a+b & b \\ b & a+b & a+b & b \\ a & b & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BSE}_4/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & c & b & a \\ b & a+c & 0 & a+c & b \\ c & 0 & c & 0 & c \\ b & a+c & 0 & a+c & b \\ a & b & c & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BSE}_5/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

**Théorème 7-21.** L'ensemble  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  est un sev de l'ensemble  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

- si  $n$  est pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) :  $\dim(\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \nu$ ,

- si  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) :  $\dim(\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \nu + 1$ .

Preuve : Immédiate.

Remarque :

Lorsque  $n$  est impair, il existe des matrices non nulles de  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  qui sont le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ . Ceci résulte des Théorèmes 5-7 et 5-8 du Chapitre 5.

Exemple :  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{BSE}_3/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  et  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

En revanche, lorsque  $n$  est pair, une matrice non nulle de  $\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ne peut jamais être le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Ceci résulte directement des Théorèmes 5-5 et 5-6 du Chapitre 5. En effet, la symétrie par rapport aux axes médians impose l'existence dans la signature d'une telle matrice d'au moins un élément non nul d'indice pair.

**Théorème 7-22.** *Une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  appartient à  $\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  si et seulement si sa signature (ligne ou colonne) admet une symétrie d'axe médian, autrement dit si et seulement si :*

- sa signature-ligne  $\overline{A}$  est smav (c. à d.  $\overline{A} \in \mathcal{M}_{1,n}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$ ),

ou si :

sa signature-colonne  $|A|$  est smah (c. à d.  $|A| \in \mathcal{M}_{n,1}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$ ).

*Preuve :*

Raisonnons sur la signature-colonne.

L'implication :  $A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow |A|$  est smah est évidente.

En effet :  $A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A$  est smah.

Par suite, tout vecteur-colonne de  $A$  est smah, en particulier le 1<sup>er</sup> vecteur-colonne qui n'est autre que  $|A|$ .

Démontrons la réciproque.

Par hypothèse,  $|A|$  est smah (c. à d.  $|A| \in \mathcal{M}_{n,1}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$ ).

Nous allons montrer qu'il en découle que tout vecteur-colonne  $C_{i_0}$  ( $\forall i_0 = 1 \text{ à } n$ ) de  $A$  est smah.

Désignons, comme d'habitude, par  $\{B_i\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

D'après le Théorème 3-10 du Chapitre 3, le produit de la matrice  $A$  par  $B_{i_0}$  est la matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont la signature-colonne est égale à  $C_{i_0}$ .

On a donc :  $|AB_{i_0}| = C_{i_0}$ .

Or :  $A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$ .

La matrice  $B_{i_0}$  ne présente, en règle générale, pas de propriété de symétrie par rapport à un axe médian (elle n'est, en toute généralité, ni smav ni smah).

Mais le Théorème 7-12 ci-dessus permet de conclure que le produit  $AB_{i_0}$  appartient à  $\mathcal{M}_{n,1}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$ .

La *partie directe* du présent Théorème 7-22, démontrée plus haut, permet maintenant de conclure :

$AB_{i_0} \in \mathcal{M}_{n,1}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B}) \Rightarrow |AB_{i_0}|$  est smah.

On en déduit que la matrice-colonne  $C_{i_0}$  ( $\forall i_0 = 1 \text{ à } n$ ) est smah.

Le Théorème 7-22 est donc ainsi démontré.



Comme  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  :  $|A|$  est smah et  $\overline{A}$  est smav (cf. Théorème 7-22).

On a donc :  $\forall i, 1 \leq i \leq \nu, a_{2\nu-i+2} = a_i$ .

Il en résulte que  $C_{\nu+1}$  est smah.

Ecrivons les éléments de  $C_{\nu+1}$  sous la forme suivante, qui met en évidence le caractère smah de  $C_{\nu+1}$  :

$$C_{\nu+1} = \begin{bmatrix} c(1) \\ c(2) \\ c(3) \\ \cdot \\ c(\nu-1) \\ c(\nu) \\ c(\nu+1) \\ c(\nu) \\ c(\nu-1) \\ \cdot \\ c(3) \\ c(2) \\ c(1) \end{bmatrix}.$$

Introduisons maintenant les coefficients  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu+1$ ) définis dans la Section 5.3.2. du Chapitre 5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Distinguons à ce stade les cas  $\nu$  pair et  $\nu$  impair.

Cas 1  $\nu$  pair :  $\nu = 2\nu'$  ( $\nu' \in \mathbb{N}$ ), c. à d.  $n = 4\nu'+1$ .

Distinguons les éléments de  $C_{\nu+1}$  d'indice impair et ceux d'indice pair.

On a :

$$\begin{aligned}
 c(1) &= &&&&&&&&&&&&& A_{\nu+1} \\
 c(3) &= &&&&&&&&& A_{\nu-1} &+ & A_{\nu+1} \\
 c(5) &= &&&&&&& A_{\nu-3} &+ & A_{\nu-1} &+ & A_{\nu+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 c(\nu-1) &= &&& A_3 &+ & \dots &+ & A_{\nu-3} &+ & A_{\nu-1} &+ & A_{\nu+1} \\
 c(\nu+1) &= & A_1 &+ & A_3 &+ & \dots &+ & A_{\nu-3} &+ & A_{\nu-1} &+ & A_{\nu+1}
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 c(2) &= &&&&&&&&&&&& A_{\nu} \\
 c(4) &= &&&&&&&&& A_{\nu-2} &+ & A_{\nu} \\
 c(6) &= &&&&&& A_{\nu-4} &+ & A_{\nu-2} &+ & A_{\nu} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 c(\nu-2) &= &&& A_4 &+ & \dots &+ & A_{\nu-4} &+ & A_{\nu-2} &+ & A_{\nu} \\
 c(\nu) &= & A_2 &+ & A_4 &+ & \dots &+ & A_{\nu-4} &+ & A_{\nu-2} &+ & A_{\nu}
 \end{aligned}$$

Comme  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) : |A|$  est smah et  $\overline{A}$  est smav (cf. Théorème 7-22). Donc :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_{2\nu+1} \\
 a_2 &= a_{2\nu} \\
 a_3 &= a_{2\nu-1} \\
 \dots & \dots \dots \\
 a_i &= a_{2\nu-i+2} \\
 \dots & \dots \dots \\
 a_{\nu} &= a_{\nu+2}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que tous les coefficients  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) sont nuls.

Par conséquent :  $c(\text{indice impair}) = A_{\nu+1} = a_{\nu+1}$  et  $c(\text{indice pair}) = 0$ .

Mais comme, par hypothèse, l'élément central de la signature de  $A$  est nul :  $a_{\nu+1} = 0$ .

On en conclut que :  $c(i) = 0, 1 \leq i \leq \nu+1$ .

Le lemme est donc bien établi pour  $n = 4\nu'+1$  ( $\nu' \in \mathbb{N}^*$ ).

Cas 2  $\nu$  impair :  $\nu = 2\nu'+1$  ( $\nu' \in \mathbb{N}$ ), c. à d.  $n = 4\nu'+3$ .

Distinguons à nouveau les éléments de  $C_{\nu+1}$  d'indice impair et ceux d'indice pair.

On a :

$$\begin{aligned}
 c(1) &= &&&&&&&&&&&&&&&& A_{\nu+1} \\
 c(3) &= &&&&&&&&&&&&&& A_{\nu-1} &+& A_{\nu+1} \\
 c(5) &= &&&&&&&&&& A_{\nu-3} &+& A_{\nu-1} &+& A_{\nu+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 c(\nu-2) &= &&&& A_4 &+& \dots &+& A_{\nu-3} &+& A_{\nu-1} &+& A_{\nu+1} \\
 c(\nu) &= & A_2 &+& A_4 &+& \dots &+& A_{\nu-3} &+& A_{\nu-1} &+& A_{\nu+1}
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 c(2) &= &&&&&&&&&&&&&&&& A_{\nu} \\
 c(4) &= &&&&&&&&&&&&& A_{\nu-2} &+& A_{\nu} \\
 c(6) &= &&&&&&&&& A_{\nu-4} &+& A_{\nu-2} &+& A_{\nu} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 c(\nu-2) &= &&& A_3 &+& \dots &+& A_{\nu-4} &+& A_{\nu-2} &+& A_{\nu} \\
 c(\nu) &= & A_1 &+& A_3 &+& \dots &+& A_{\nu-4} &+& A_{\nu-2} &+& A_{\nu}
 \end{aligned}$$

Comme  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  :  $|A|$  est smah et  $\overline{A}$  est smav (cf. Théorème 7-22). Donc :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_{2\nu+1} \\
 a_2 &= a_{2\nu} \\
 a_3 &= a_{2\nu-1} \\
 \dots & \dots & \dots \\
 a_i &= a_{2\nu-i+2} \\
 \dots & \dots & \dots \\
 a_{\nu} &= a_{\nu+2}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que tous les coefficients  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) sont nuls.

Par conséquent :  $c(\text{indice impair}) = A_{\nu+1} = a_{\nu+1}$  et  $c(\text{indice pair}) = 0$ .

Mais comme, par hypothèse, l'élément central de la signature de  $A$  est nul :  $a_{\nu+1} = 0$ .

On en conclut que :  $c(i) = 0$ ,  $1 \leq i \leq \nu+1$ .

Le lemme est donc bien établi pour  $n = 4\nu'+3$  ( $\nu' \in \mathbb{N}$ ).

Finalement le lemme est bien démontré pour tout  $n$  impair.

*Preuve 2 :*

Soit  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu+1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ).

D'après le Théorème 3-15 du Chapitre 3, l'ensemble des coefficients de la matrice  $A$  satisfait à la Relation des Voisins Immédiats (RVI).

Raisonnons sur les lignes.

L'élément central de  $\overline{A}$  (c.-à-d. de la 1<sup>ère</sup> ligne de  $A$ ) est nul.

La RVI appliquée à cet élément central de la 1<sup>ère</sup> ligne de  $A$ , - en tenant compte de ce que  $A$  est smav -, entraîne immédiatement que l'élément central de 2<sup>ème</sup> ligne de  $A$  est nul.

La RVI appliquée à l'élément central de 2<sup>ème</sup> ligne de  $A$ , - toujours en tenant compte de ce que  $A$  est smav -, entraîne immédiatement que l'élément central de 3<sup>ème</sup> ligne de  $A$  est nul.

et ainsi de suite.

Par une récurrence immédiate, on en déduit que tous les éléments centraux des  $n$  lignes de  $A$  sont nuls.

En raison de la bisymétrie de  $A$ , tous les éléments centraux des  $n$  colonnes de  $A$  sont nuls.

**Théorème 7-24 - Théorème du produit de matrices de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  (Version 1).**

(1)  $n$  pair :  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}), B \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = O_n.$

(2)  $n$  impair :  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}), B \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$   
 $\in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}).$

*Dans ce dernier cas ( $n$  impair), l'élément générique  $c_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ) de la matrice  $C = A \cdot B = B \cdot A$  vaut :  $c_{ij} = a_{i_{v+1}} b_{v+1 j}$ . (Les éléments de  $A \cdot B$  ne font intervenir que les éléments centraux des lignes et/ou colonnes de  $A$  et de  $B$ ).*

*De plus, si l'élément central de la signature de  $A$  est nul ou si l'élément central de la signature de  $B$  est nul, alors :  $A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .*

*Preuve :*

Ce théorème est la transposition du Théorème 7-15 (Théorème du produit de matrices de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ) dans le cas particulier de matrices de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ . La commutativité du produit en découle :  $A \cdot B = B \cdot A$ .

La spécificité du Théorème 7-24 réside dans la dernière proposition : lorsque  $n$  est impair, il suffit que l'élément central de la signature de  $A$  soit nul ou que l'élément central de la signature de  $B$  soit nul, pour que le produit  $A \cdot B = B \cdot A$  soit nul.

Ce dernier point est une conséquence directe du Lemme 7-23 précédemment démontré. Supposons que l'élément central de la signature de  $A$  soit nul. Le Lemme 7-23 permet alors d'affirmer que tous les éléments de la colonne centrale (et de la ligne centrale) de  $A$  sont nuls. Le Théorème 7-15 permet dès lors de conclure que :  $A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .

Le Théorème 7-25 qui suit reformule le Théorème 7-24 de façon différente, un peu plus restrictive toutefois :

**Théorème 7-25 - Théorème du produit de matrices de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  (Version 2).**

(1)  $n$  pair :  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}), B \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = O_n.$

(2)  $n$  impair :  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}), B \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ET élément central de  $|A|$   
 (et donc de  $\overline{A}$ ) nul OU élément central de  $|B|$  (et donc de  $\overline{B}$ ) nul  
 $\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = O_n.$



**Théorème 7-26 - Théorème du carré des matrices de  $\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .**

Soit  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair :  $A^2 = O_n \Leftrightarrow A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

Soit  $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair :  $A^2 = O_n \Leftrightarrow A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ET

élément central de  $|A|$  et de  $\overline{A} = 0$ .

Ce théorème énonce une condition nécessaire et suffisante pour que le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  soit nul. Il affirme que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit que cette matrice soit symétrique par rapport à ses axes médians, et qu'en outre, si  $n$  est impair, l'élément central de sa signature soit nul.

*Preuve :*

L'implication dans le sens suivant :

$A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair  $\Rightarrow A^2 = O_n$ ,

$A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair, et élément central de  $|A|$  et de  $\overline{A} = 0 \Rightarrow A^2 = O_n$ ,  
résulte directement du Théorème 7-25 qui précède (en y faisant :  $B = A$ ).

Nous allons fournir une démonstration du Théorème 7-26, qui établit simultanément les 2 sens des équivalences énoncées.

Nous ferons appel à certains résultats obtenus dans la Section 5.4. du Chapitre 5 (consacré à l'étude des carrés des matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ).

Cas 1  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ).

Introduisons les coefficients  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) représentant les coordonnées impaires de  $A^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . (Rappelons que les coordonnées paires de  $A^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont toutes nulles).

$A^2 = O_n \Leftrightarrow |A^2| = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ).

Par ailleurs, la matrice de passage  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ )  $\rightarrow A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) est la matrice  $T_\nu^{-1}$  suivante (cf. Section 5.4.1) :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} = T_\nu^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \end{bmatrix}$$

Or  $T_{\nu}^{-1}$  est inversible. Dès lors :  $\alpha_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu) \Leftrightarrow A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu)$ .

Rappelons que l'on a (cf. Section 5.3.1.) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu-1} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = a_{\nu-1} + a_{\nu+2} \\ A_{\nu} = a_{\nu} + a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

De ce fait :

$$A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_{2\nu} \\ a_2 = a_{2\nu-1} \\ a_3 = a_{2\nu-2} \\ \dots \\ a_i = a_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ a_{\nu-1} = a_{\nu+2} \\ a_{\nu} = a_{\nu+1} \end{array} \right. \Leftrightarrow |A| \text{ smah (et donc } \overline{A} \text{ smav)}.$$

Le Théorème 7-22 permet maintenant de conclure :

$$|A| \text{ smah (et donc } \overline{A} \text{ smav)} \Leftrightarrow A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}).$$

Cas 2  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ).

Introduisons les coefficients  $\alpha_i \quad (1 \leq i \leq \nu)$  représentant les coordonnées impaires de  $A^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . (Rappelons que les coordonnées paires de  $A^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont toutes nulles).

$$A^2 = O_n \Leftrightarrow |A^2| = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu+1).$$

Par ailleurs, la matrice de passage  $\alpha_i \quad (1 \leq i \leq \nu+1) \rightarrow A_i \quad (1 \leq i \leq \nu+1)$  est évidemment la matrice  $T_{\nu+1}^{-1}$  suivante (cf. Section 5.4.2.) :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{v-1} \\ A_v \\ A_{v+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{v-1} \\ \alpha_v \\ \alpha_{v+1} \end{bmatrix} = T_{v+1}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{v-1} \\ \alpha_v \\ \alpha_{v+1} \end{bmatrix}$$

Or  $T_{v+1}^{-1}$  est inversible. Dès lors :

$$\alpha_i = 0 \quad (1 \leq i \leq v+1) \Leftrightarrow A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq v+1).$$

Rappelons que l'on a (cf. Section 5.3.2.) :

$$\begin{cases} A_1 = a_1 + a_{2v+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2v} \\ A_3 = a_3 + a_{2v-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2v-i+2} \\ \dots \\ A_v = a_v + a_{v+2} \\ A_{v+1} = a_{v+1} \end{cases}$$

De ce fait :

$$A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq v+1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_{2v+1} \\ a_2 = a_{2v} \\ a_3 = a_{2v-1} \\ \dots \\ a_i = a_{2v-i+2} \\ \dots \\ a_v = a_{v+2} \\ a_{v+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| \text{ smh (et donc } \overline{A} \text{ smv)} \\ \text{ET l'élément central } a_{v+1} \\ \text{de } |A| \text{ (et donc de } \overline{A}) \text{ est nul.} \end{cases}$$

Le Théorème 7-22 permet maintenant de conclure, puisqu'en effet :

$$\left. \begin{array}{l} |A| \text{ smah (et donc } \overline{A} \text{ smav)} \\ \text{ET} \\ \text{élément central } a_{\nu+1} \text{ de } |A| \text{ et de } \overline{A} \\ \text{nul} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \\ \text{ET} \\ \text{élément central } a_{\nu+1} \text{ de } |A| \text{ et de } \overline{A} \\ \text{nul} \end{array} \right.$$

Le Théorème 7-26 (Théorème du carré des matrices de  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ) est ainsi démontré pour tout  $n$  pair ou impair.

### 7.5.3. Ensemble $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$

Les résultats précédents nous invitent à introduire l'ensemble  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  suivant.

**Définition 7-27.** L'ensemble  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  est défini comme suit :

Pour  $n$  pair :  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) = \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

Pour  $n$  impair :  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) \subset \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ , et :

$A \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  si et seulement si :  $A \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ET

élément central de  $|A|$  et de  $\overline{A} = 0$ .

Autrement dit :

- pour  $n$  pair,  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  se confond avec  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,
- pour  $n$  impair,  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ , constitué des matrices dont l'élément central de la signature est nul.

**Théorème 7-28.** Soit  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

$\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  de dimension égale à  $\nu$ .

*Preuve :* Immédiate.

*Remarque :*

Pour  $n = 1$ ,  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  se compose de la seule matrice nulle  $[0]_1$ .

L'introduction de l'ensemble  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  permet de reformuler le Théorème 7-25 (Version 2) sous la forme suivante :

**Théorème 7-29 - Théorème du produit de matrices de  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  (Version 2).**

(1)  $n$  pair :  $A \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $B \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .

(2)  $n$  impair :  $A \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $B \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$   
 OU  
 $A \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$ ,  $B \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  }  $\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .

*Remarque :*

Bien noter, dans le cas  $n$  impair, qu'il suffit que l'une des 2 matrices intervenant dans la multiplication appartienne à  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$ , pour que le produit résultant soit nul.

De même, le Théorème 7-26 peut se reformuler comme suit :

**Théorème 7-30 - Théorème du carré des matrices de  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .**

Soit  $A \in \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair OU  $n$  impair :  $A^2 = O_n \Leftrightarrow A \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$ .

#### 7.5.4. Relation d'équivalence « modulo $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$ »

**Définition 7-31.** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair ou  $n$  impair.

Nous dirons que  $A_1$  et  $A_2$  sont équivalentes modulo  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  si leur somme  $A_1 + A_2$  (et donc leur différence  $A_1 - A_2$ ) appartient à  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$ .

On écrira alors :  $A_1 \equiv A_2 \text{ mod. } \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

La relation ci-dessus est clairement une relation d'équivalence

**Théorème 7-32.** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair ou  $n$  impair.

$$A_1 \equiv A_2 \text{ mod. } \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) \Leftrightarrow A_1^2 = A_2^2.$$

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 7-30 ci-dessus.

#### 7.5.5. Ensemble $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$

**Définition 7-33.**  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  désigne le complémentaire de  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  dans  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

-  $n$  pair :  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B}) = \emptyset$

-  $n$  impair :  $A \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  si et seulement si :  $A \in \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ET

élément central de  $|A|$  et de  $\overline{A} = 1$ .

*Remarques :*

1)  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) = \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) \cup \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$

2)  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) \cap \mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B}) = \emptyset$

3) Les ensembles  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  sont adjacents

4) L'ensemble  $\mathcal{BSE}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  n'est pas un espace vectoriel :

- il ne contient pas la matrice nulle  $O_n$ ,
- si  $A_1 \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  et  $A_2 \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$ , alors :  
 $A_1 + A_2 \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  (et non à  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$ ).

$n$  étant supposé impair, posons :  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ).

Introduisons la base canonique  $\{B_i\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Rappelons que la matrice  $B_{\nu+1}$  est la seule matrice de cette base ayant un double symétrie médiane et que :  $B_{\nu+1}^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-1} + B_{2\nu+1}$  (cf. Section 5.3.2 du Chapitre 5).

**Théorème 7-34.** *Toute matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  peut s'écrire sous la forme canonique suivante :  $A = A' + B_{\nu+1}$ , avec  $A' \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$ .*

*Preuve :* Immédiate.

**Théorème 7-35.** *Soit  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  ( $n$  impair). On a :*

$$A^2 = B_{\nu+1}^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-1} + B_{2\nu+1}.$$

*Preuve :*

$$A^2 = (A' + B_{\nu+1})^2 = A'^2 + B_{\nu+1}^2.$$

$$\text{Or : } A' \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) \Rightarrow A'^2 = O_n.$$

*Remarque :*

Le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ( $n$  pair) est toujours égal à  $O_n$ .

Le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ( $n$  impair) est égal à  $O_n$  ou à  $B_{\nu+1}^2$ , suivant que l'élément central de sa signature vaut 0 ou 1.



## CONCLUSION

### Réflexions sur les SEV commutatifs de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ – Définition de $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$

Ce chapitre renferme un certain nombre de réflexions pouvant servir de base à de nouvelles investigations portant sur les sous-espaces-vectoriels (sev) commutatifs (\*) de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

(\*) La commutativité dont il s'agit concerne évidemment la multiplication matricielle.

Bien entendu, les pistes évoquées ci-après ne prétendent pas constituer un catalogue exhaustif des études que l'on pourrait mener à leur sujet.

Nous concluons ce chapitre en définissant les ensembles  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ .

*Convention, terminologie et notation associée :*

Pour alléger l'écriture, nous dirons une fois pour toutes dans ce chapitre qu'un sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , ou de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , ou de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , possède la propriété  $\mathcal{BSE}$  ( $\mathcal{BS}$  pour « bisymétrie »,  $\mathcal{C}$  pour « commutativité ») si ce sev est constitué de matrices bisymétriques (autrement dit s'il s'agit d'un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , ou de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{R})$ , ou de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{C})$ ) et s'il est stable pour la multiplication matricielle. Nous avons vu qu'il s'agit là d'une condition nécessaire et suffisante entraînant la commutativité de toutes les matrices composant un tel sev.

Un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , ou de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{R})$ , ou de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{C})$ , doté de la propriété  $\mathcal{BSE}$ , sera dénommé « sev de type  $\mathcal{BSE}$  ». Nous le noterons d'une manière générale  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ , ou  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{R})$ , ou  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{C})$ ,  $d$  représentant la dimension du sev concerné.

#### 1. $\mathbb{B}$ -SEV constitués de matrices bisymétriques commutantes

Nous avons mis en évidence dans le Chapitre 2 de cette étude l'espace vectoriel  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , qui possède la propriété  $\mathcal{BSE}$  et qui est de dimension  $n$ . Nous continuerons à noter cet ensemble sous la forme  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , en réservant l'écriture  $\mathcal{BSE}_n^{(n)}(\mathbb{B})$  à tous les autres ensembles possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$  et de dimension  $n$ , s'il en existe.

Nous aborderons ci-après (sans les traiter à fond) les questions suivantes :

**Q1 :** Existe-t-il des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , distincts de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$  ?



**Q2 :** S'il en existe et s'ils sont de dimension  $d < n$ , sont-ils alors nécessairement des sev de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  ?

**Q3 :** Existe-t-il des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ , de dimension  $d = n$ , distincts de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  ? En existe-t-il pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ?

**Q4 :** Existe-t-il des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ , pour toute dimension  $d < n$  ?

**Q5 :** Existe-t-il des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ , de dimension  $d > n$  ?

**Q6 :** S'il en existe, incluent-ils alors nécessairement  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  ?

**Q7 :** S'il en existe, quelle est (en fonction de l'ordre  $n$ ) la dimension maximale d'un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$  ?

### Questions Q1 - Q2 - Q3 (1<sup>ère</sup> partie)

Nous allons établir l'existence de sev  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de type  $\mathcal{BSE}$ , distincts de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

□ Nous allons tout d'abord fournir 2 exemples de sev de type  $\mathcal{BSE}$  qui sont des sev de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSE}_n^{(1)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d = 1$ )

$\mathcal{BSE}_n^{(1)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n) = \{O_n, I_n\}$ , déjà mentionné dans la Section 2.1. du Chapitre 2.

*Note :* Pour  $n = 1$ , on retrouve  $\mathcal{BSE}_1(\mathbb{B})$ . Pour  $n > 1$ ,  $\mathcal{BSE}_n^{(1)}(\mathbb{B}) \subset \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSE}_n^{(2)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d = 2$ )

$\mathcal{BSE}_n^{(2)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n, J_n) = \{O_n, I_n, J_n, I_n + J_n\}$ .

La table de multiplication ci-dessous prouve que  $\mathcal{BSE}_n^{(2)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n, J_n)$  possède bien la propriété  $\mathcal{BSE}$ .

	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$I_n + J_n$
$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$
$I_n$	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$I_n + J_n$
$J_n$	$O_n$	$J_n$	$I_n$	$I_n + J_n$
$I_n + J_n$	$O_n$	$I_n + J_n$	$I_n + J_n$	$O_n$

*Note :* Pour  $n = 2$ , on retrouve  $\mathcal{BSE}_2(\mathbb{B})$ . Pour  $n > 2$ ,  $\mathcal{BSE}_n^{(2)}(\mathbb{B}) \subset \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

□ Nous allons maintenant nous attacher à fournir des exemples de sev de type  $\mathcal{BSE}$ , qui ne sont pas des sev de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Ordre  $n$  impair  $\geq 3$  ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSE}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d = 3$ )

Introduisons la matrice  $K_n$  ayant la structure suivante :

$$K_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} .$$

Cette matrice a tous ses éléments nuls sauf celui d'indices  $(\nu + 1, \nu + 1)$ .

Clairement :  $K_n \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , mais :  $K_n \notin \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

On vérifie sans peine que,  $n$  étant impair :  $K_n^2 = K_n$ .

Considérons  $\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n, J_n, K_n)$ , qui est un sev de dimension 3.

$\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  possède la propriété  $\mathcal{BSE}$ , comme le prouve la table de multiplication ci-dessous.

	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$K_n$
$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$
$I_n$	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$K_n$
$J_n$	$O_n$	$J_n$	$I_n$	$K_n$
$K_n$	$O_n$	$K_n$	$K_n$	$K_n$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  sous la forme  $\mathcal{BSE}_n^{(3)}(\mathbb{B})$ .

Comme  $K_n \notin \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  :  $\mathcal{BSE}_n^{(3)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Pour  $n = 3$ ,  $\mathcal{BSE}_3^{(3)}(\mathbb{B})$  est un sev possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ , de dimension égale à 3, comme  $\mathcal{BSE}_3(\mathbb{B})$ . Pour autant,  $\mathcal{BSE}_3^{(3)}(\mathbb{B})$  est distinct de  $\mathcal{BSE}_3(\mathbb{B})$ . La réponse à la 1<sup>ère</sup> partie de la question **Q3** est donc positive.

Ordre  $n$  impair  $\geq 3$  ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSC}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d = 3$ )

Introduisons la matrice  $1_n$  dont tous les éléments sont égaux à 1 :

$$1_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

Clairement :  $1_n \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , mais :  $1_n \notin \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

On vérifie sans peine que,  $n$  étant impair :  $1_n^2 = 1_n$ .

Considérons maintenant  $\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n, J_n, 1_n)$ , qui est un sev de dimension 3.

$\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  possède la propriété  $\mathcal{BSC}$ , comme le prouve la table de multiplication ci-dessous.

	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$1_n$
$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$
$I_n$	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$1_n$
$J_n$	$O_n$	$J_n$	$I_n$	$1_n$
$1_n$	$O_n$	$1_n$	$1_n$	$1_n$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  sous la forme  $\mathcal{BSC}_n^{(3)}(\mathbb{B})$ .

Comme  $1_n \notin \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  :  $\mathcal{BSC}_n^{(3)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Pour  $n = 3$ , comme dans l'exemple précédent,  $\mathcal{BSC}_3^{(3)}(\mathbb{B})$  est un sev de dimension égale à 3, possédant la propriété  $\mathcal{BSC}$ . Pour autant,  $\mathcal{BSC}_3^{(3)}(\mathbb{B})$  est distinct de  $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$ .

Pour  $n = 3$ , nous avons ainsi mis en évidence 3 sev distincts de dimension égale à 3, possédant la propriété  $\mathcal{BSC}$  :

$$\text{Vect}(B_1 = I_1, B_2 = N_2, B_3 = J_3) = \mathcal{BSC}_3(\mathbb{B}),$$

$$\text{Vect}(I_3, J_3, K_3) = \mathcal{BSC}_3^{(3)}(\mathbb{B}) \text{ de l'exemple page 249,}$$

$$\text{Vect}(I_3, J_3, 1_3) = \mathcal{BSC}_3^{(3)}(\mathbb{B}) \text{ de l'exemple ci-dessus.}$$

Ordre  $n$  impair  $\geq 5$  ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSC}_n^{(4)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d = 4$ )

Introduisons la matrices  $H_n$  ayant la structure suivante :

$$H_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}.$$

$H_n$  a tous ses éléments nuls sauf ceux de la colonne  $\nu + 1$  et de la ligne  $\nu + 1$ .

Clairement :  $H_n \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , mais :  $H_n \notin \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

On vérifie sans peine que :  $H_n^2 = 1_n$  et que :  $H_n \cdot 1_n = 1_n \cdot H_n = 1_n$ .

Considérons  $\mathcal{E}_n^{(4)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n, J_n, H_n, 1_n)$ , sev de dimension 4.

*Remarque :*

Nous avons posé comme hypothèse :  $n \geq 5$ . Pour  $n = 3$ , les 4 matrices  $I_n, J_n, H_n, 1_n$  sont en effet liées, puisque :  $I_n + J_n + H_n = 1_n$ .

Replaçons-nous dans l'hypothèse  $n \geq 5$ .

$\mathcal{E}_n^{(4)}(\mathbb{B})$  possède la propriété  $\mathcal{BSC}$ , comme le prouve la table de multiplication ci-dessous.

	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$H_n$	$1_n$
$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$
$I_n$	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$H_n$	$1_n$
$J_n$	$O_n$	$J_n$	$I_n$	$H_n$	$1_n$
$H_n$	$O_n$	$H_n$	$H_n$	$1_n$	$1_n$
$1_n$	$O_n$	$1_n$	$1_n$	$1_n$	$1_n$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(4)}(\mathbb{B})$  sous la forme  $\mathcal{BSC}_n^{(4)}(\mathbb{B})$ .

Comme  $H_n \notin \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  et  $1_n \notin \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  :  $\mathcal{BSC}_n^{(4)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Pour  $n$  impair ( $n \geq 5$ ),  $\text{Vect}(I_n)$ ,  $\text{Vect}(I_n, J_n)$ ,  $\text{Vect}(I_n, J_n, 1_n)$ ,  $\text{Vect}(I_n, J_n, H_n, 1_n)$  sont de sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de dimension respective 1, 2, 3 et 4, possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ . Ils sont « imbriqués » comme l'indiquent les inclusions ci-dessous :

$$\text{Vect}(I_n) \subset \text{Vect}(I_n, J_n) \subset (\text{Vect}(I_n, J_n, 1_n) \subset \text{Vect}(I_n, J_n, H_n, 1_n)).$$

$\text{Vect}(I_n)$  et  $\text{Vect}(I_n, J_n)$  sont des sev de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , tandis que  $\text{Vect}(I_n, J_n, 1_n)$  et  $\text{Vect}(I_n, J_n, H_n, 1_n)$  ne le sont pas.

Ordre  $n$  pair  $\geq 4$  ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSE}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d = 3$ )

Introduisons, comme plus haut, la matrice  $1_n$  dont tous les éléments sont égaux à 1 :

$$1_n = \begin{bmatrix} 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \end{bmatrix}.$$

Clairement :  $1_n \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , mais :  $1_n \notin \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

On vérifie sans peine que,  $n$  étant pair :  $1_n^2 = O_n$ .

Considérons  $\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n, J_n, 1_n)$ , sev de dimension 3.

$\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  possède la propriété  $\mathcal{BJE}$ , comme le prouve la table de multiplication ci-dessous.

	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$1_n$
$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$
$I_n$	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$1_n$
$J_n$	$O_n$	$J_n$	$I_n$	$1_n$
$1_n$	$O_n$	$1_n$	$1_n$	$O_n$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  sous la forme  $\mathcal{BSE}_n^{(3)}(\mathbb{B})$ .

Comme  $1_n \notin \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  :  $\mathcal{BSE}_n^{(3)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Bien d'autres exemples sont envisageables, mais ceux mentionnés ci-dessus suffisent à répondre aux questions **Q1 - Q2 - Q3 (1<sup>ère</sup> partie)** :

**Q1** : Il existe des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  distincts de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ .

**Q2** : Lorsque ces sev sont de dimension inférieure à  $n$ , ils ne sont pas nécessairement des sev de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

**Q3 (1<sup>ère</sup> partie)** : Il existe des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ , de dimension égale à  $n$ , distincts de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ . Nous l'avons établi pour  $n = 3$ , nous démontrerons ci-dessous qu'il en existe pour tout  $n \geq 3$ .

### Questions Q4 - Q3 (2<sup>ème</sup> partie)

Ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d \leq n$ )

Nous nous proposons de démontrer qu'il existe, pour tout ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout entier positif  $d \leq n$ , au moins 1 sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de type  $\mathcal{BSE}$  et de dimension  $d$ . Nous supposons  $d > 1$ , le cas  $d = 1$  ayant déjà été traité.

Nous élaborerons divers exemples de tels sev, correspondant à diverses « stratégies de construction ». Nous verrons que pour tout  $n$ , pair ou impair, et pour tout entier  $d$  positif,  $d \leq n$ , une méthode de construction est toujours envisageable.

Nous continuerons à noter en toute généralité  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  de tels sev.

*Exemple 1* : Nous supposons ici  $n$  et  $d$  de même parité ( $d < n$ ), c.-à-d.  $n$  et  $d$  simultanément pairs ou impairs.

Posons alors  $\delta \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $n = d + 2\delta$ . (Comme  $d < n$  :  $\delta > 0$ ).

Considérons  $\mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$ .

A toute matrice  $A_d \in \mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$ , on peut associer la matrice  $A_n(\delta)$  d'ordre  $n$ , décomposée en blocs comme suit :

$$A_n(\delta) = \begin{bmatrix} O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \\ O_{d\delta} & A_d & O_{d\delta} \\ O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \end{bmatrix}.$$

$O_\delta$  désigne la matrice nulle d'ordre  $\delta$ ,  $O_{\delta d}$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{\delta, d}(\mathbb{B})$ ,  $O_{d\delta}$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{d, \delta}(\mathbb{B})$ .

Sauf dans le cas particulier  $A_d = O_d$ , on a :  $A_n(\delta) \notin \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Soit  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  l'ensemble constitué par les matrices  $A_n(\delta)$ ,  $A_d \in \mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$ .

Considérons 2 matrices quelconques  $A_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$  et  $B_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , distinctes ou non. On a donc :

$$A_n(\delta) = \begin{bmatrix} O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \\ O_{d\delta} & A_d & O_{d\delta} \\ O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \end{bmatrix}; \quad B_n(\delta) = \begin{bmatrix} O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \\ O_{d\delta} & B_d & O_{d\delta} \\ O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \end{bmatrix}.$$

$$A_n(\delta) \cdot B_n(\delta) = \begin{bmatrix} O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \\ O_{d\delta} & A_d \cdot B_d & O_{d\delta} \\ O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \end{bmatrix} \text{ (produit par blocs).}$$

Comme :  $A_d \cdot B_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ ,  $A_n(\delta) \cdot B_n(\delta) \in \mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

$\mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , qui possède la propriété  $\mathcal{BSC}$ , transmet cette propriété à  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

Par ailleurs, il est clair que  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  est un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de dimension  $d$ .

Si l'on désigne en effet par  $B_{di}$  ( $1 \leq i \leq d$ ) les  $d$  matrices de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , la base canonique de  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  est constituée des  $d$  matrices  $B_{ni}^{(d)}$  ( $1 \leq i \leq d$ ) d'ordre  $n$  :

$$B_{ni}^{(d)} = \begin{bmatrix} O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \\ O_{d\delta} & B_{di} & O_{d\delta} \\ O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \end{bmatrix}, \quad (1 \leq i \leq d).$$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  sous la forme  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

Enfin, il est clair que :  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Exemple 2 :*

Nous supposons que  $n$  n'est pas premier. Soit  $d$  un diviseur de  $n$  ( $d \neq 1$ ,  $d \neq n$ ). Autrement dit, nous supposons que :  $n = qd$  ( $1 < d < n$ ,  $1 < q < n$ ).

Considérons  $\mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ .

A toute matrice  $A_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , on peut associer la matrice  $A_n(d)$  d'ordre  $n$  ayant la structure par blocs ( $q \times q$  blocs) suivante :

$$A_n(d) = \begin{bmatrix} A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \end{bmatrix}.$$

Désignons par  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  l'ensemble des matrices  $A_n(d)$ .

Il est clair que  $A_n(d)$  est bisymétrique. Donc :  $\mathcal{E}_n^{(d)} \subset \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

*Note :*  $O_n \in \mathcal{E}_n^{(d)}$  (on obtient  $O_n$  en posant  $A_d = O_d$ ), mais  $I_n \notin \mathcal{E}_n^{(d)}$ .

Considérons 2 matrices quelconques  $A_d \in \mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$  et  $B_d \in \mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$ , distinctes ou non. On a donc :

$$A_n(d) = \begin{bmatrix} A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_n(d) = \begin{bmatrix} B_d & \dots & B_d & \dots & B_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_d & \dots & B_d & \dots & B_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_d & \dots & B_d & \dots & B_d \end{bmatrix}.$$

Cas 1 :  $q$  pair

On a :  $A_n(d) \cdot B_n(d) = B_n(d) \cdot A_n(d) = O_n$ .

Le produit  $A_n(d) \cdot B_n(d)$  est commutatif.

Cas 2 :  $q$  impair.

On a cette fois :

$$A_n(d) \cdot B_n(d) = \begin{bmatrix} A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d \end{bmatrix} \quad (\text{produit par blocs}).$$

Comme :  $A_d \in \mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$  et  $B_d \in \mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$ , le produit  $A_d \cdot B_d$  est commutatif.

Par suite :

$$A_n(d) \cdot B_n(d) = B_n(d) \cdot A_n(d).$$

Dans les 2 cas ( $n$  pair ou impair),  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  possède ainsi la propriété  $\mathcal{BSE}$ .

Par ailleurs, il est clair que  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  est de dimension  $d$  ( $n$  pair ou impair).



Si l'on désigne en effet par  $\mathbf{B}_{di}$  ( $1 \leq i \leq d$ ) les  $d$  matrices de la base canonique de  $\mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$ , la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  est constituée des  $d$  matrices  $\mathbf{B}_{ni}^{(d)}$  ( $1 \leq i \leq d$ ) d'ordre  $n$  :

$$\mathbf{B}_{ni}^{(d)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} \end{bmatrix}, (1 \leq i \leq d).$$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  sous la forme  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

Par ailleurs, comme  $\mathbf{I}_n \notin \mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ , il est clair que :  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B}) \subsetneq \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

*Exemple 3 :*  $n$  (pair ou impair),  $1 \leq d \leq \mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ . Nous supposons  $n \geq 2$ .

Introduisons les matrices  $\mathbf{U}_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq \mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)$  de la forme suivante :

$$\mathbf{U}_{ni} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{col } i & \text{col } (n-i+1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}_n \end{array}.$$

Ces matrices sont bisymétriques. Elles ont tous leurs éléments nuls, sauf ceux d'indices  $(i, i)$ ,  $(i, n-i+1)$ ,  $(n-i+1, i)$ ,  $(n-i+1, n-i+1)$ .

Si  $n$  est pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), il existe  $\nu$  matrices  $\mathbf{U}_{ni}$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ).

Si  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), il existe  $\nu + 1$  matrices  $\mathbf{U}_{ni}$  ( $1 \leq i \leq \nu + 1$ ). (Notons que, pour  $n$  impair, la matrice  $\mathbf{U}_{n, \nu+1}$  n'est autre que la matrice  $\mathbf{K}_n$  déjà introduite plus haut).

On vérifie sans peine que :

$U_{ni} \cdot U_{nj} = O_n$  pour tout  $i$  et tout  $j$ , sauf lorsque  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1$ ), pour  $i = j = \nu + 1$ . Dans ce dernier cas en effet :  $U_{n\nu+1} \cdot U_{n\nu+1} = U_{n\nu+1}^2 = U_{n\nu+1}$ .

Si l'on choisit alors  $d$  matrices  $U_{ni}$  quelconques correspondant aux indices  $i_1, i_2, \dots, i_d$ , (compris entre 1 et  $\nu$  si  $n$  est pair, et compris entre 1 et  $\nu + 1$  si  $n$  est impair), le système  $U_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ , est libre.

Si l'on pose  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(U_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_d\})$ , on constate que  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  possède la propriété  $\mathcal{BSE}$  et constitue un sev de dimension  $d$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  sous la forme  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

On constate aussi que ( $n \geq 3$ ) :  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

*Cas particulier :  $d = \nu$*

A titre d'illustration, nous allons créer, en nous basant sur cette approche, pour  $n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ), un sev  $\mathcal{BSE}_n^{(\nu)}(\mathbb{B})$  de dimension  $d = \nu$ , constitué par les  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_\nu & a_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_\nu & a_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & 0 \\ a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \end{bmatrix}_n.$$

A dépend donc des  $d = \nu$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  ( $a_i \in \mathbb{B}, 1 \leq i \leq \nu$ ).

*Cas particulier :  $d = \nu + 1$*

Il est de même possible de créer, pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}^*$ ), un sev  $\mathcal{BSE}_n^{(\nu+1)}(\mathbb{B})$  de dimension  $d = \nu + 1$ , constitué par les  $2^{\nu+1}$  matrices de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot & a_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{\nu+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot & a_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & \cdot & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \end{bmatrix}_n.$$

A dépend donc des  $d = \nu + 1$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_{\nu+1}$  ( $a_i \in \mathbb{B}$ ,  $1 \leq i \leq \nu + 1$ ).

*Exemple 4 :*  $n$  (pair ou impair),  $1 \leq d \leq n$ . Nous supposons  $n \geq 3$ .

Introduisons les matrices  $I_{ni}$  et  $J_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq E\left(\frac{n}{2}\right)$ , de la forme suivante :

$$I_{ni} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{col } i & \text{col } (n-i+1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}_n \end{array}, \quad J_{ni} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{col } i & \text{col } (n-i+1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}_n \end{array}.$$

Ces matrices sont bisymétriques. Les matrices  $I_{ni}$  ont tous leurs éléments nuls, sauf ceux d'indices  $(i, i)$  et  $(n-i+1, n-i+1)$ . Les matrices  $J_{ni}$  ont tous leurs éléments nuls, sauf ceux d'indices  $(i, n-i+1)$  et  $(n-i+1, i)$ .

Que  $n$  soit pair ou impair ( $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) ou  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), puisque  $n \geq 3$ ), il existe  $\nu$  matrices  $I_{ni}$  et  $\nu$  matrices  $J_{ni}$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ).

Pour  $n$  impair, il convient d'adjoindre aux matrices  $I_{ni}$  et  $J_{ni}$  ainsi définies, la matrice  $K_n$  déjà introduite plus haut, et dont on rappelle la structure :

$$K_n = \begin{array}{c} \text{col } (\nu + 1) \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \end{array} .$$

*Remarque :*

Désignons par  $I_n$  la matrice-unité d'ordre  $n$  et par  $J_n$  la matrice définie dans la Section 1.2. du Chapitre 1.

Pour  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) :  $I_n = \sum_{i=1}^{\nu} I_{ni}$  et  $J_n = \sum_{i=1}^{\nu} J_{ni}$ .

Pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) :  $I_n = \sum_{i=1}^{\nu} I_{ni} + K_n$  et  $J_n = \sum_{i=1}^{\nu} J_{ni} + K_n$ .

On vérifie sans peine que :

$$I_{ni} \cdot I_{nj} = O_n, \text{ pour tout } i \text{ et tout } j (i \neq j) \text{ et } I_{ni}^2 = I_{ni}.$$

$$J_{ni} \cdot J_{nj} = O_n, \text{ pour tout } i \text{ et tout } j (i \neq j) \text{ et } J_{ni}^2 = I_{ni}.$$

$$I_{ni} \cdot J_{nj} = J_{nj} \cdot I_{ni} = O_n, \text{ pour tout } i \text{ et tout } j (i \neq j) \text{ et } I_{ni} \cdot J_{ni} = J_{ni} \cdot I_{ni} = J_{ni}.$$

De plus, pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) :

$$I_{ni} \cdot K_n = K_n \cdot I_{ni} = O_n \text{ et } J_{ni} \cdot K_n = K_n \cdot J_{ni} = O_n.$$

$$K_n^2 = K_n.$$

Soit  $d$  un entier quelconque,  $1 \leq d \leq n$ .

$n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ )

Fixons  $d_1$  ( $0 \leq d_1 \leq \nu$ ) et  $d_2$  ( $0 \leq d_2 \leq \nu$ ), tels que :  $d = d_1 + d_2$ , ce qui est toujours possible.

Si l'on choisit alors  $d_1$  matrices  $I_{ni}$  quelconques correspondant aux indices  $i_1, i_2, \dots, i_{d_1}$ , et  $d_2$  matrices  $J_{ni}$  quelconques correspondant aux indices  $i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}$ , le système  $I_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{d_1}\} \cup J_{ni}, i \in \{i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}\}$  est libre.

Partant de là, nous pouvons définir :  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{d_1}\} \cup J_{ni}, i \in \{i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}\})$ .  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  possède la propriété **BSE** et constitue un sev de dimension  $d$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  sous la forme  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

Par ailleurs, il est clair que :  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B}) \subsetneq \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

$n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}^*$ )

Fixons  $d_1$  ( $0 \leq d_1 \leq \nu$ ),  $d_2$  ( $0 \leq d_2 \leq \nu$ ) et  $\varepsilon = 0$  ou  $1$ , tels que :  $d = d_1 + d_2 + \varepsilon$ , ce qui est toujours possible.

Si l'on choisit alors  $d_1$  matrices  $I_{ni}$  quelconques correspondant aux indices  $i_1, i_2, \dots, i_{d_1}$ ,  $d_2$  matrices  $J_{ni}$  quelconques correspondant aux indices  $i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}$ , auxquelles on adjoint, si  $\varepsilon = 1$ , la matrice  $K_n$ , le système  $I_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{d_1}\} \cup J_{ni}, i \in \{i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}\} \cup \varepsilon K_n$  (\*) est libre.

(\*) Ecriture symbolique : si  $\varepsilon = 1$ ,  $K_n$  figure dans le système, si  $\varepsilon = 0$ ,  $K_n$  n'y figure pas.

Partant de là, nous pouvons définir :  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{d_1}\} \cup J_{ni}, i \in \{i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}\} \cup \varepsilon K_n)$ .  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  possède la propriété **BSE** et constitue un sev de dimension  $d$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  sous la forme  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

Par ailleurs, il est clair que :  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B}) \subsetneq \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

*Cas particulier :  $d = n$*

A titre d'illustration, nous allons créer, en nous basant sur cette approche, pour  $n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ), un sev  $\mathcal{BSE}_n^{(n)}(\mathbb{B})$  de dimension  $d = n$ , distinct de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , constitué par les  $2^n$  matrices de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & b_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_\nu & b_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_\nu & a_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & b_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \end{bmatrix}_n .$$

A dépend donc des  $d = n$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  ( $a_i \in \mathbb{B}, 1 \leq i \leq \nu$ ) et  $b_1, b_2, \dots, b_\nu$  ( $b_i \in \mathbb{B}, 1 \leq i \leq \nu$ ).

De même, il est possible de créer, pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}^*$ ), un sev  $\mathcal{BSC}_n^{(n)}(\mathbb{B})$  de dimension  $d = n$ , distinct de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , constitué par les  $2^n$  matrices de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & b_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & b_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_\nu & 0 & b_\nu & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & c_{\nu+1} & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & b_\nu & 0 & a_\nu & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & b_i & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \end{bmatrix}_n ,$$

A dépend donc des  $d = n$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  ( $a_i \in \mathbb{B}, 1 \leq i \leq \nu$ ),  $b_1, b_2, \dots, b_\nu$  ( $b_i \in \mathbb{B}, 1 \leq i \leq \nu$ ) et  $c_{\nu+1} \in \mathbb{B}$ .

Par ailleurs, il est clair que ( $n$  pair ou impair) :  $\mathcal{BSC}_n^{(n)}(\mathbb{B}) \neq \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Les exemples qui précèdent, et tout particulièrement l'Exemple 4, permettent de répondre à la question **Q4** et à la 2<sup>ème</sup> partie de la question **Q3**.

**Q4 :** Pour tout entier positif  $d \leq n$ , il existe des ensembles  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ , qui sont des sev de dimension  $d$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  et qui possèdent la propriété  $\mathcal{BSC}$ .

**Q3 (2<sup>ème</sup> partie) :** Pour  $d = n \geq 3$ , il existe au moins un ensemble  $\mathcal{BSC}_n^{(n)}(\mathbb{B})$  distinct de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Considérons (pour  $n$  pair ou impair,  $n \geq 3$ ) les matrices bisymétriques dont tous les éléments sont nuls, sauf éventuellement ceux constituant le cadre de niveau 1 de ces matrices (cf. Section 1.3.4.1. du Chapitre 1).

Ces matrices sont donc de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1} \\ a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

A dépend donc de  $n$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_i \in \mathbb{B}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ).

On démontre aisément que l'ensemble des matrices A constitue un sev  $\mathcal{S}$  de dimension  $d = n$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Cependant, le sev  $\mathcal{S}$  ne possède pas la propriété  $\mathcal{BSC}$  dès que  $n \geq 3$ , comme nous allons le prouver pour  $n = 3$ , par exemple.

Pour  $n = 3$  en effet, la base canonique du sev  $\mathcal{S}$  est constituée des 3 matrices suivantes :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Mais : } B_1 \cdot B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{tandis que : } B_2 \cdot B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En conclusion :  $B_1 \cdot B_2 \neq B_2 \cdot B_1$ .

Le produit de 2 matrices quelconques de  $\mathcal{S}$  n'est donc pas commutatif. (Les matrices-produits  $B_1 \cdot B_2$  et  $B_2 \cdot B_1$  ne font d'ailleurs pas partie de  $\mathcal{S}$  :  $\mathcal{S}$  n'est pas stable pour la multiplication matricielle).

Le sev  $\mathcal{S}$  considéré n'est donc pas de type  $\mathcal{BSE}$ .

### Questions Q5 - Q6 - Q7

Ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d > n$ )

**Q5** est une question ouverte. Il est vraisemblable, (mais il s'agit là d'une conjecture) qu'il n'existe pas de sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ , de dimension  $d > n$  (\*).

(\*) *Note* : Un théorème d'Issai Schur établit que le nombre  $N(n)$  de matrices commutatives, d'ordre  $n$ , linéairement indépendantes, est donné par la formule :

$$N(n) = E \left[ \frac{n^2}{4} \right] + 1, \text{ où } E [ ] \text{ désigne la partie entière du nombre considéré.}$$

On a donc :  $N(n) = \nu^2 + 1$  pour  $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) et  $N(n) = \nu(\nu + 1) + 1 = \nu^2 + \nu + 1$  pour  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ). Mais les matrices considérées ici sont quelconques et non strictement bisymétriques.

Concernant **Q6**, la réponse est négative. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  noté  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ , de dimension  $d > n$ , possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$  et incluant  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ . Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  n'appartenant pas à  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ . Le produit de  $A$  par toute matrice de  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  (et *a fortiori* par toute matrice de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ ) est donc commutatif. Or la matrice  $N_n = B_2$  appartient à  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ . Le produit de  $A$  par la matrice  $N_n$  est donc commutatif. Mais  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  renferme toutes les matrices commutant avec  $N_n$  (cf. Théorème 2-5 du Chapitre 2).  $A$  appartient donc à  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ . Contradiction.

En conclusion, l'inclusion stricte  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) \subset \mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  est impossible.

La Question **Q7** porte sur la dimension maximale, en fonction de  $n$ , d'un sev de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ . Bien entendu, si la conjecture liée à **Q5** est exacte, la question **Q7** est sans objet, cette dimension maximale étant alors égale à  $n$ . En revanche, si cette conjecture est fautive, la question **Q7** prend alors une importance primordiale.

\*  
\* \*



## 2. Définition de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{C})$

Dans toute cette étude, nous avons raisonné sur des matrices à éléments dans  $\mathbb{B} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Ceci nous amène à nous poser la question suivante :

**Q8** : Existe-t-il des ensembles équivalents au sev  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  si l'on prend pour corps de base l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou l'ensemble  $\mathbb{C}$  ?

La réponse à **Q8** est positive. Il est aisé de construire, pour tout ordre  $n$ , des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou dans  $\mathbb{C}$ ), calquées sur celles à valeurs dans  $\mathbb{B}$ .

Considérons en effet les matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , à valeurs dans  $\mathbb{B}$ , et remplaçons-y les éléments ayant la valeur 0 dans  $\mathbb{B}$  par des éléments ayant la valeur 0 dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$  (élément neutre de l'addition dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ ) et les éléments ayant la valeur 1 dans  $\mathbb{B}$  par des éléments ayant la valeur 1 dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$  (élément neutre de la multiplication dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ ).

Après cette substitution, les matrices obtenues continuent à respecter les Relations  $(R_k)$  énoncées dans le Théorème 2-5 du Chapitre 2, ainsi que les Relations des Voisins Immédiats  $(RVI_{jk})$  énoncées dans le Théorème 3-15 du Chapitre 3.

Pour tout  $n$  entier, le système obtenu  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est libre (même démonstration que celle du Chapitre 2). De plus, les matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ainsi définies, ont les mêmes propriétés générales que leurs équivalentes à valeurs dans  $\mathbb{B}$ .

En particulier, les règles de multiplication entre ces matrices sont les mêmes.

Posons alors :

$\mathcal{BSC}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$ , (ensemble des combinaisons linéaires, à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , des  $n$  matrices  $B_{ni}$  ainsi définies),

$\mathcal{BSC}_n(\mathbb{C}) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$ , (ensemble des combinaisons linéaires, à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , des  $n$  matrices  $B_{ni}$  ainsi définies).

Les ensembles obtenus sont des sev respectivement de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{R})$  et de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{C})$ , qui possèdent la propriété  $\mathcal{BSC}$ .

Les notions de signature (colonne et ligne) s'étendent aux matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ . Il s'ensuit que les propriétés générales de ces matrices sont les mêmes que celles des matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Si l'on pose :  $N_n = B_{n,2}$  (la matrice  $N_n$  ayant ses coefficients à valeur respectivement dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ ), et si l'on désigne par  $\text{Com}(N_n)$  le commutant de  $N_n$ , on a, comme lorsque le corps de base est  $\mathbb{B}$  :

$$\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R}) = \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{R}) = \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

$$\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C}) = \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{BS}_n(\mathbb{C}) = \text{Com}(N_n) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

*Remarques :*

Il existe toutefois des différences majeures entre les matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  et les matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ . Citons-en deux.

- 1) Première différence : les matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$  ne sont évidemment pas soumises au Théorème Fondamental des matrices à éléments dans  $\mathbb{B}$  (cf. Annexe du Chapitre 6).
- 2) Deuxième différence : la théorie des carrés des matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , telle qu'exposée au Chapitre 5, est inapplicable aux matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ . En particulier, le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$  n'a pas de composantes (ou coordonnées) paires systématiquement nulles dans la base canonique  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .