



**HAL**  
open science

# Sous-algèbre commutative définie dans l'ensemble des matrices bisymétriques d'ordre $n$

Richard Riedel

► **To cite this version:**

Richard Riedel. Sous-algèbre commutative définie dans l'ensemble des matrices bisymétriques d'ordre  $n$ . 2010. hal-00473768v1

**HAL Id: hal-00473768**

**<https://hal.science/hal-00473768v1>**

Preprint submitted on 16 Apr 2010 (v1), last revised 5 Feb 2014 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**SOUS-ALGÈBRE COMMUTATIVE DÉFINIE DANS  
L'ENSEMBLE DES MATRICES BISYMÉTRIQUES  
D'ORDRE  $n$**

**PARTIE 2**

**CHAPITRES 5 - 6 - 7 - CONCLUSION**



## TABLE DES MATIÈRES

### PARTIE 2 : CHAPITRES 5 - 6 - 7 - CONCLUSION

<b>CHAPITRE 5</b>	<b>103</b>
<b>ÉTUDE DES MATRICES CARRÉES DE MATRICES DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>103</b>
5.1. Introduction	103
5.2. Étude des carrés des matrices $B_i$ , $1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	105
5.3. Étude des carrés des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	106
5.4. Traduction matricielle des relations entre les coefficients $A_i$ d'une matrice $A$ de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ et les coefficients $\alpha_i$ de la matrice $A^2$	116
5.5. Signature réduite du carré d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	119
5.6. Considérations concernant la Notation de la décomposition d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ dans la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	120
<b>ANNEXE 1 / CHAPITRE 5 - RACINES CARRÉES DE LA MATRICE NULLE</b>	<b>123</b>
<b>CHAPITRE 6</b>	<b>127</b>
<b>ÉTUDE DES PUISSANCES <math>2^k</math> (<math>k \in \mathbb{N}^*</math>) DES MATRICES DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> – LOIS GENERALES RELATIVES AUX PUISSANCES DE BOUCLAGE DES MATRICES DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>127</b>
6.1. Introduction	127
6.2. Étude relative à l'ordre pair : $n = 2\nu$ , $\nu \in \mathbb{N}^*$	127
6.3. Étude relative à l'ordre impair : $n = 2\nu + 1$ , $\nu \in \mathbb{N}^*$	131

<b>6.4. Étude des matrices</b>	<b>135</b>
<b>6.5. Étude des puissances de bouclage d'une matrice quelconque de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math></b>	<b>141</b>
<b>6.6. Autre formulation des Théorèmes 6-6, 6-7, 6-11 et 6-12</b>	<b>152</b>
<b>ANNEXE 1 / CHAPITRE 6</b>	<b>153</b>
<b>THÉORÈME FONDAMENTAL DES MATRICES CARRÉES À ÉLÉMENTS DANS <math>\mathbb{B}</math></b>	<b>153</b>
<b>CHAPITRE 7</b>	<b>155</b>
<b>MATRICES DE <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{B})</math> SYMÉTRIQUES / AUX AXES MÉDIANS – MATRICES DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})</math> SYMÉTRIQUES / AUX AXES MÉDIANS</b>	<b>155</b>
<b>7.1. Définitions, notations, propriétés générales</b>	<b>155</b>
<b>7.2. Propriétés générales de la multiplication matricielle mettant en jeu des matrices symétriques par rapport à un axe médian</b>	<b>160</b>
<b>7.3. Multiplication matricielle dans <math>\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})</math></b>	<b>161</b>
<b>7.4. Ensemble <math>\mathcal{BS}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})</math></b>	<b>163</b>
<b>7.5. Ensemble <math>\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})</math></b>	<b>165</b>
<b>CONCLUSION</b>	<b>177</b>
<b>RÉFLEXIONS SUR LES SEV COMMUTATIFS DE <math>\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})</math> – DÉFINITION DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{R})</math> ET DE <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{C})</math></b>	<b>177</b>
<b>1. B-SEV constitués de matrices bisymétriques commutatives</b>	<b>177</b>
<b>2. Définition de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{R})</math> et de <math>\mathcal{BSC}_n(\mathbb{C})</math></b>	<b>193</b>





## CHAPITRE 5

### Étude des matrices carrées de matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

#### 5.1. Introduction

Nous avons déjà été amenés à introduire dans le Chapitre 1 la matrice  $J_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Cette matrice fait partie de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  : il s'agit de la matrice  $B_n$ .

$$J_n = B_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_n.$$

Rappelons brièvement les propriétés de  $J_n = B_n$ .

1)  $J_n^2 = I_n$  et :  $J_n^{-1} = J_n$ .

2)  $J_n = {}^t J_n = J_n^t$ .

3) Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

$A \cdot J_n$  est la matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian vertical.

$J_n \cdot A$  est la matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian horizontal.

Désignons par  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , les  $n$  de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Comme les matrices  $B_i$  et  $B_{n-i+1}$  sont symétriques l'une de l'autre par rapport à leurs deux axes médians, on peut énoncer le théorème suivant.

**Théorème 5-1.**  $B_{n-i+1} = J_n \cdot B_i = B_i \cdot J_n$ ,  $\forall i = 1$  à  $n$ .

*Remarque :*

Pour  $n$  impair,  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , on a donc :  $B_{\nu+1} = J_n \cdot B_{\nu+1} = B_{\nu+1} \cdot J_n$ .

La matrice  $B_{\nu+1}$  ( $n$  impair,  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ) est sa propre symétrique par rapport à ses deux axes médians. C'est la seule matrice de la base canonique dans ce cas.

Exemples :

(Les matrices deux à deux symétriques par rapport aux axes médians ont été mises en regard).

$n = 5$

$B_1$

x				
	x			
		x		
			x	
				x

$B_5 = J_5 = J_5 B_1$

				x
			x	
		x		
	x			
x				



$B_2$ 

	x			
x		x		
	x		x	
		x		x
			x	

 $B_4 = J_5 B_2$ 

			x	
		x		x
	x		x	
x		x		
	x			

 $B_3 = J_5 B_3$ 

		x		
	x		x	
x		x		x
	x		x	
		x		

 $n = 6$  $B_1$ 

x					
	x				
		x			
			x		
				x	
					x

 $B_6 = J_6 = J_6 B_1$ 

x					
	x				
		x			
			x		
				x	
					x

 $B_2$ 

	x				
x		x			
	x		x		
		x		x	
			x		x
				x	

 $B_5 = J_6 B_2$ 

				x	
			x		x
		x		x	
	x		x		
x		x			
	x				

 $B_3$ 

		x			
	x		x		
x		x		x	
	x		x		x
		x		x	
			x		

 $B_4 = J_6 B_3$ 

			x		
		x		x	
	x		x		x
x		x		x	
	x		x		
		x			

## 5.2. Étude des carrés des matrices $B_i, 1 \leq i \leq n$ , de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$

**Théorème 5-2.**  $B_{n-i+1}^2 = B_i^2 \quad \forall i = 1 \text{ à } n.$

*Preuve :* Immédiate à partir du Théorème 5-1, en tenant compte du fait que :  $J_n^2 = I_n$ .

### 5.2.1. Ordre pair : $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$

**Théorème 5-3.**

$$B_1^2 = B_1$$

$$B_2^2 = B_1 + B_3$$

$$B_3^2 = B_1 + B_3 + B_5$$

...

$$B_i^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2i-3} + B_{2i-1} \quad (1 \leq i \leq \nu)$$

...

$$B_\nu^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-3} + B_{2\nu-1}.$$

*Preuve :*

Immédiate. C'est une conséquence directe du Théorème 3-9 du Chapitre 3, relatif au produit de 2 matrices de la base canonique  $B_i \cdot B_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ , dans le cas particulier où  $i = j$  (\*).

### 5.2.2. Ordre impair : $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$

**Théorème 5-4.**

$$B_1^2 = B_1$$

$$B_2^2 = B_1 + B_3$$

$$B_3^2 = B_1 + B_3 + B_5$$

...

$$B_i^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2i-3} + B_{2i-1} \quad (1 \leq i \leq \nu + 1)$$

...

$$B_\nu^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-3} + B_{2\nu-1}$$

$$B_{\nu+1}^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-1} + B_{2\nu+1}$$

*Preuve :*

Immédiate. Comme pour le cas d'un ordre pair (\*).

(\* *Note :* Rappelons que le produit de 2 matrices de la base canonique  $B_i \cdot B_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ , s'obtient par simple lecture de la ligne  $i$  de la matrice  $B_i$ . Dans cette ligne, les indices-colonnes des cases ayant la valeur 1 correspondent aux coordonnées non nulles dans la base canonique du produit  $B_i \cdot B_j$ .

### 5.3. Étude des carrés des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  s'écrit en toute généralité :

$$A = \sum_{i=1}^n a_i B_i,$$

où  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , représentent les  $n$  paramètres de la 1<sup>ère</sup> ligne de  $A$ , ou encore les composantes (ou « coordonnées ») de  $A$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Dès lors :

$$A^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i B_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 B_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i B_i^2 \quad (\text{puisque : } a_i \in \mathbb{B} \Rightarrow a_i^2 = a_i).$$

#### 5.3.1. Ordre pair : $n = 2\nu$ , $\nu \in \mathbb{N}^*$

Scindons le signe  $\sum$  en 2 tranches :

$$A^2 = \sum_{i=1}^n a_i B_i^2 = \sum_{i=1}^{\nu} a_i B_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{2\nu} a_i B_i^2.$$

D'après le Théorème 5-2 ci-dessus :  $\forall i = 1$  à  $\nu$ , pour  $j = 2\nu - i + 1$  :  $B_j^2 = B_i^2$ .

On en déduit :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (a_i + a_{2\nu-i+1}) B_i^2$$

Posons :

$$(\sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu-1} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = a_{\nu-1} + a_{\nu+2} \\ A_{\nu} = a_{\nu} + a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} A_i B_i^2$$

Appliquons les résultats du Théorème 5-3 ci-dessus :

$$B_1^2 = B_1$$

$$B_2^2 = B_1 + B_3$$

$$B_3^2 = B_1 + B_3 + B_5$$

$$\begin{aligned} \dots \\ \mathbf{B}_i^2 &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_5 + \dots + \mathbf{B}_{2i-3} + \mathbf{B}_{2i-1} \\ \dots \\ \mathbf{B}_{v-1}^2 &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_5 + \dots + \mathbf{B}_{2v-5} + \mathbf{B}_{2v-3} \\ \mathbf{B}_v^2 &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_5 + \dots + \mathbf{B}_{2v-3} + \mathbf{B}_{2v-1} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$(\sigma_2) \left\{ \begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \dots + \mathbf{A}_i + \dots + \mathbf{A}_{v-1} + \mathbf{A}_v) \mathbf{B}_1 \\ &\quad + (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \dots + \mathbf{A}_i + \dots + \mathbf{A}_{v-1} + \mathbf{A}_v) \mathbf{B}_3 \\ &\quad + (\mathbf{A}_3 + \dots + \mathbf{A}_i + \dots + \mathbf{A}_{v-1} + \mathbf{A}_v) \mathbf{B}_5 \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + (\mathbf{A}_i + \dots + \mathbf{A}_{v-1} + \mathbf{A}_v) \mathbf{B}_{2i-1} \\ &\quad \dots \\ &\quad + (\mathbf{A}_{v-1} + \mathbf{A}_v) \mathbf{B}_{2v-3} \\ &\quad + (\mathbf{A}_v) \mathbf{B}_{2v-1} \end{aligned} \right.$$

**Théorème 5-5.** Soit  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{B}_i$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbf{B})$ ,  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ).

Les composantes (ou « coordonnées ») de  $\mathbf{A}^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbf{B})$  sont données par les relations  $(\sigma_1)$  et  $(\sigma_2)$  ci-dessus. Toutes les composantes de  $\mathbf{A}^2$  relatives aux matrices  $\mathbf{B}_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

Remarques :

- 1) Pour  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), il existe  $\nu$  matrices  $\mathbf{B}_i$  d'indice  $i$  pair et  $\nu$  matrices  $\mathbf{B}_i$  d'indice  $i$  impair. Il n'existe donc au total « que »  $2^\nu$  matrices qui sont les carrés d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbf{B})$ ,  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ).
- 2) Le point final du Théorème 5-5 découle directement du Théorème 5-3.  
Comme les composantes de tous les  $\mathbf{B}_i^2$ ,  $1 \leq i \leq n$ , d'indice  $i$  pair sont nulles (cf. Théorème 5-3), il en est de même pour :  $\mathbf{A}^2 = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{B}_i^2$ .

Réciproque du Théorème 5-5

Soit  $\mathbf{U}$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbf{B})$ ,  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), dont toutes les composantes relatives aux matrices  $\mathbf{B}_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

$\mathbf{U}$  est de la forme :  $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \mathbf{B}_{2i-1}$ .

Montrons que cette matrice est le carré commun de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbf{B})$ .

Considérons en effet le système  $(\sigma_3)$  suivant, dérivé des relations  $(\sigma_2)$  :

$$(\sigma_3) \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_1 \\ \quad A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_2 \\ \quad \quad + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_3 \\ \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_i \\ \quad \quad \quad \quad \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_{\nu-1} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_\nu = \alpha_\nu \end{array} \right.$$

Ce système de  $\nu$  équations à  $\nu$  inconnues se résout sans peine de bas en haut.

On obtient ainsi :

$$(\sigma_4) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ A_3 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ \dots \\ A_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu \\ A_\nu = \alpha_\nu \end{array} \right.$$

Les  $\nu$  coefficients  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) étant ainsi déterminés, il convient maintenant de résoudre le système  $(\sigma_1)$  constitué de  $\nu$  équations aux  $2\nu$  inconnues  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 2\nu$ )

$$(\sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu-1} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = a_{\nu-1} + a_{\nu+2} \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Ainsi qu'on le constate, on peut, par exemple, fixer arbitrairement la valeur (0 ou 1) des inconnues  $a_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ). Celle des inconnues  $a_i$  ( $\nu+1 \leq i \leq 2\nu$ ) en découle alors immédiatement. Il y a donc  $2^\nu$  solutions distinctes.

Le théorème suivant en découle.

**Théorème 5-6** Soit  $U = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i B_{2i-1}$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), dont les composantes relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.  $U$  est alors le carré de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  dont les composantes (ou « coordonnées ») dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  sont données par les relations  $(\sigma_4)$  et  $(\sigma_1)$  ci-dessus.

*Remarque 1 :*

Nous démontrerons en Annexe du présent Chapitre le Théorème 5-6bis représentant une version plus élaborée du théorème ci-dessus. Celle-ci précisera le lien existant entre les  $2^\nu$  matrices racines carrées de  $U$ .

*Remarque 2 :*

Il existe,  $n$  étant pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ),  $2^{2\nu}$  matrices dans  $\mathcal{BSC}_n(B)$ . Chacune de ces matrices possède bien évidemment une matrice carrée. Nous avons établi qu'il n'existe « que »  $2^\nu$  matrices qui soient des carrés de matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ . (Ce sont celles dont les composantes dans la base canonique d'indice pair sont nulles).

Il n'est donc pas étonnant qu'une matrice carrée de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  soit dès lors le carré de  $\frac{2^{2\nu}}{2^\nu} = 2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ .

*Remarque 3 :*

Notons que,  $n$  étant pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), la matrice  $J_n = B_n = B_{2\nu}$  n'est le carré d'aucune matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ , sa seule composante non nulle dans la base canonique étant d'indice pair.

### 5.3.2. Ordre impair : $n = 2\nu + 1$ , $\nu \in \mathbb{N}$

(Note : en imposant  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , nous laissons provisoirement de côté le cas trivial :  $n = 1$ ).

Nous avons établi plus haut que :

$$A^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i B_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i B_i^2.$$

Scindons le signe  $\sum$  en 3 tranches, en isolant le terme central  $a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2$  :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} a_i B_i^2 + a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2 + \sum_{i=\nu+2}^{2\nu+1} a_i B_i^2.$$

D'après le Théorème 5-2 ci-dessus :  $\forall i = 1$  à  $\nu$ , pour  $j = 2\nu - i + 2$  :  $B_j^2 = B_i^2$ .

On en déduit :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (a_i + a_{2\nu-i+2}) B_i^2 + a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2$$

On constate que la différence essentielle, par rapport au cas où  $n$  est pair provient de l'existence du terme central :  $a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2$ .

Posons :

$$(\sigma_5) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} A_i B_i^2 + a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2$$

Appliquons les résultats du Théorème 5-4 ci-dessus :

$$B_1^2 = B_1$$

$$B_2^2 = B_1 + B_3$$

$$B_3^2 = B_1 + B_3 + B_5$$

...

$$B_i^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2i-3} + B_{2i-1} \quad (1 \leq i \leq \nu+1)$$

...

$$B_\nu^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-3} + B_{2\nu-1}$$

$$B_{\nu+1}^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-1} + B_{2\nu+1}$$

Il vient alors :

$$(\sigma_6) \left\{ \begin{array}{l} A^2 = (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1}) B_1 \\ \quad + (A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1}) B_3 \\ \quad + (A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1}) B_5 \\ \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + (A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1}) B_{2i-1} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + (A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1}) B_{2\nu-3} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + (A_\nu + A_{\nu+1}) B_{2\nu-1} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + (A_{\nu+1}) B_{2\nu+1} \end{array} \right.$$

**Théorème 5-7.** Soit  $A = \sum_{i=1}^n a_i B_i$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ).

Les composantes (ou « coordonnées ») de  $A^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  sont données par les relations  $(\sigma_5)$  et  $(\sigma_6)$  ci-dessus. Toutes les composantes de  $A^2$  relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

(Note : dans l'énoncé du Théorème 5-7, nous avons réintégré le cas trivial :  $n = 1$ ).

*Remarques :*

1) Pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), il existe  $\nu$  matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair et  $\nu + 1$  matrices  $B_i$  d'indice  $i$  impair. Il n'existe donc au total « que »  $2^{\nu+1}$  matrices qui sont les carrés d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ).

2) Le point final du Théorème 5-7 découle directement du Théorème 5-4.

Comme les composantes de tous les  $B_i^2$ ,  $1 \leq i \leq n$ , d'indice  $i$  pair sont nulles

(cf. Théorème 5-4), il en est de même pour :  $A^2 = \sum_{i=1}^n a_i B_i^2$ .

### Réciproque du Théorème 5-7

Soit  $U$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), dont toutes les composantes relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

$U$  est de la forme :  $U = \sum_{i=1}^{\nu+1} \alpha_i B_{2i-1}$ .

Montrons que cette matrice est le carré commun de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ .

Considérons en effet le système  $(\sigma_7)$  suivant, dérivé des relations  $(\sigma_6)$  :

$$(\sigma_7) \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_1 \\ A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_2 \\ \quad + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_3 \\ \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \qquad \qquad \qquad A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_i \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \dots \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad A_{\nu-1} + A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_{\nu-1} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad A_\nu + A_{\nu+1} = \alpha_\nu \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad A_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Ce système de  $\nu + 1$  équations à  $\nu + 1$  inconnues se résout sans peine de bas en haut.

On obtient ainsi :



$$(\sigma_8) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ A_3 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ \dots \\ A_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu \\ A_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1} \\ A_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Les  $\nu+1$  coefficients  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu+1$ ) étant ainsi déterminés, il convient maintenant de résoudre le système  $(\sigma_5)$ , constitué de  $\nu+1$  équations aux  $2\nu+1$  inconnues  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 2\nu+1$ ).

$$(\sigma_5) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Ainsi qu'on le constate,  $a_{\nu+1}$  est parfaitement déterminé, puisque :  $a_{\nu+1} = A_{\nu+1}$ . Par contre, on peut, par exemple, fixer arbitrairement la valeur (0 ou 1) des inconnues  $a_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ). Celle des inconnues  $a_i$  ( $\nu+1 \leq i \leq 2\nu$ ) en découle alors immédiatement. Il y a donc  $2^\nu$  solutions distinctes.

Le théorème suivant en découle.

**Théorème 5-8.** Soit  $U = \sum_{i=1}^{\nu+1} \alpha_i B_{2i-1}$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu+1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), dont les composantes relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.  $U$  est alors le carré de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont les composantes (ou « coordonnées ») dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont données par les relations  $(\sigma_8)$  et  $(\sigma_5)$  ci-dessus.

*Remarque 1 :*

Nous démontrerons en Annexe du présent Chapitre le Théorème 5-8bis représentant une version plus élaborée du théorème ci-dessus. Celle-ci précisera le lien existant entre les  $2^\nu$  matrices racines carrées de  $U$ .

*Remarque 2 :*

Il existe,  $n$  étant impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ),  $2^{2\nu+1}$  matrices dans  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Chacune de ces matrices possède bien évidemment une matrice carrée. Nous avons établi qu'il n'existe « que »  $2^{\nu+1}$  matrices qui soient des carrés de matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . (Ce sont celles dont les composantes dans la base canonique d'indice pair sont nulles).

Il n'est donc pas étonnant qu'une matrice carrée de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  soit dès lors le carré de  $\frac{2^{2\nu+1}}{2^{\nu+1}} = 2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque 3 :*

Pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), la matrice  $J_n = B_n = B_{2\nu+1}$  a une seule composante non nulle dans la base canonique et cette composante est d'indice impair. D'après ce qui précède,  $J_n$  est donc le carré de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , (ce qui, rappelons-le, n'est pas le cas pour de  $J_n$  pour  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ )).

Nous allons, à titre d'exercice, nous placer dans les cas :  $n = 5$  ( $\nu = 2$ ) et déterminer les  $2^2 = 4$  matrices de  $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$ , « racines carrées » de  $J_5$ .

Il s'agit donc de résoudre le système  $(\sigma_8)$  :

$$(\sigma_8) \quad \begin{cases} A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ A_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Or :  $J_5 = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_3 + \alpha_3 B_5$ , avec :  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  et  $\alpha_3 = 1$ .

$(\sigma_8)$  se résout instantanément. On obtient :

$$(\sigma_8) \quad \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 1 \\ A_3 = 1 \end{cases}$$

Reste à résoudre, pour  $n = 5$ , le système  $(\sigma_5)$  où les inconnues sont :  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  :

$$(\sigma_5) \quad \begin{cases} A_1 = a_1 + a_5 \\ A_2 = a_2 + a_4 \\ A_3 = a_3 \end{cases}$$

Il vient :

$$(\sigma_5) \quad \begin{cases} a_1 + a_5 = 0 \\ a_2 + a_4 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

En prenant  $a_1$  et  $a_2$  comme paramètres ( $a_1$  et  $a_2$  peuvent donc prendre une valeur quelconque dans  $B$ ), on aboutit à :

$$(\sigma_5) \quad \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 = \overline{1} \\ a_4 = \overline{a_2} \\ a_5 = a_1 \end{cases} \quad (\text{Rappelons que : } \overline{\overline{a_2}} = a_2 + 1).$$

Les 4 matrices de  $\mathcal{BSC}_5(B)$ , « racines carrées » de  $J_5$ , sont donc de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \overline{a_2} & 1 & \overline{a_2} & \overline{a_1} \\ a_2 & a_1 & 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \overline{a_2} & \overline{a_1} & 1 & \overline{a_1} & a_2 \\ a_1 & a_2 & 1 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Pour :  $a_1 = 0, a_2 = 0$ , on obtient :  $A_1 = B_3 + B_4$ ,

pour :  $a_1 = 1, a_2 = 0$ , on obtient :  $A_2 = B_1 + B_3 + B_4 + B_5$ ,

pour :  $a_1 = 0, a_2 = 1$ , on obtient :  $A_3 = B_2 + B_3$ ,

pour :  $a_1 = 1, a_2 = 1$ , on obtient :  $A_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_5$ .

### 5.3.3. Conclusion de l'étude des carrés des matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$

Nous allons résumer dans le Théorème 5-9 les résultats essentiels des Théorèmes 5-5, 5-6, 5.7 et 5.8 précédents, tout en les complétant.

**Théorème 5-9.** *Pour tout ordre  $n$  pair ou impair, une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  est le carré d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  si et seulement si ses composantes (ou « coordonnées ») d'indice pair dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  sont nulles.*

On peut donc écrire  $A^2$  sous la forme générale suivante :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} \alpha_i B_{2i-1} \quad (*)$$

(\*) Voir Considérations sur les Notations dans la Section 5.6 du présent chapitre.

L'ensemble noté  $\mathcal{BSC}_n^2(B)$  qui contient les carrés des matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ , constitue un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ .

- Pour  $n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ), la dimension de  $\mathcal{BSC}_n^2(B)$  est égal à  $\nu$ .

- Pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ), la dimension de  $\mathcal{BSC}_n^2(B)$  est égal à  $\nu + 1$ .

$\mathcal{BSC}_n^2(B)$  constitue une sous-algèbre commutative de l'algèbre commutative  $\mathcal{BSC}_n(B)$ .

*Preuve :*

Le dernier point de ce théorème est immédiat.

La 3<sup>ème</sup> loi de l'algèbre est bien évidemment la multiplication matricielle.

La somme et le produit de 2 matrices de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$  appartiennent à  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ . Cet ensemble est donc stable par l'addition et la multiplication matricielle.

La commutativité de la multiplication matricielle dérive de celle dans  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Rappelons (cf. Chapitre 2 - Théorème 2-2) l'ensemble des Relations ( $R_k$ ): ( $1 \leq k \leq \nu$ , si  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) et  $1 \leq k \leq \nu + 1$  si  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ )), définissant en toute généralité la matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  correspondant aux paramètres :  $[1,1]$ ,  $[1,2]$ ,  $[1,3]$ ,  $\dots$ ,  $[1, n-1]$ ,  $[1, n]$  :

$$[k, k] = [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1, 2k-1]$$

$$[k, k+1] = [1,2] + [1,4] + [1,6] + \dots + [1, 2k]$$

$$[k, k+2] = [1,3] + [1,5] + [1,7] + \dots + [1, 2k+1]$$

.....

$$[k, k+h] = [1, 1+h] + [1, 3+h] + [1, 5+h] + \dots + [1, 2k-1+h] \quad (*)$$

$$(0 \leq h \leq n-2k+1)$$

.....

$$[k, n-k] = [1, n-2k+1] + [1, n-2k+3] + [1, n-2k+5] + \dots + [1, n-1]$$

$$[k, n-k+1] = [1, n-2k+2] + [1, n-2k+4] + [1, n-2k+6] + \dots + [1, n]$$

Supposons que la matrice en question est le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , - autrement dit supposons que cette matrice appartient à  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ . D'après le Théorème 5-9, les paramètres correspondant aux composantes d'indice pair dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont nuls.

Donc :

$$[1,2] = [1,4] = \dots = [1, n-2] = [1, n] = 0, \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$[1,2] = [1,4] = \dots = [1, n-3] = [1, n-1] = 0, \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Il en découle que pour toutes les valeurs de  $k$  et de  $h$  (respectant les inégalités ci-dessus) :

$[k, k+h]$  n'est composé que de termes correspondant à des paramètres d'indice pair, lorsque  $h$  est impair.

Par suite, pour toutes les valeurs de  $k$  et de  $h$  (respectant les inégalités ci-dessus) :

$$[k, k+h] = 0 \text{ pour } h \text{ impair.}$$

En conséquence, dans une matrice de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$  :

- les éléments d'indices  $i$  impair,  $j$  pair, sont tous nuls
- les éléments d'indices  $i$  pair,  $j$  impair, sont tous nuls.

## 5.4. Traduction matricielle des relations entre les coefficients $A_i$ d'une matrice $A$ de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ et les coefficients $\alpha_i$ de la matrice $A^2$

### 5.4.1. Ordre pair : $n = 2\nu$ , $\nu \in \mathbb{N}^*$

Rappelons les relations  $(\sigma_3)$  établies au 5.3.1.

$$(\sigma_3) \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_1 \\ \quad A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_2 \\ \quad \quad A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_3 \\ \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad A_i + \dots + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_i \\ \quad \quad \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_{\nu-1} + A_\nu = \alpha_{\nu-1} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_\nu = \alpha_\nu \end{array} \right.$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \end{bmatrix} = T_\nu \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \end{bmatrix},$$

$$\text{où : } T_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $T_\nu$ , matrice de passage  $A_i (1 \leq i \leq \nu) \rightarrow \alpha_i (1 \leq i \leq \nu)$ , est une matrice triangulaire supérieure d'ordre  $\nu$  dont tous les éléments situés au-dessus de la 1<sup>ère</sup> diagonale sont égaux à 1.

$T_\nu$  est inversible.

Les relations inverses  $(\sigma_4)$  sont :

$$(\sigma_4) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ A_3 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ \dots \\ A_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \dots \\ A_{v-1} = \alpha_{v-1} + \alpha_v \\ A_v = \alpha_v \end{array} \right.$$

Ces dernières se traduisent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{v-1} \\ A_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{v-1} \\ \alpha_v \end{bmatrix} = T_v^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{v-1} \\ \alpha_v \end{bmatrix}$$

La matrice de passage  $\alpha_i (1 \leq i \leq v) \rightarrow A_i (1 \leq i \leq v)$  est évidemment la matrice  $T_v^{-1}$ .

Cette matrice est une matrice triangulaire supérieure nulle partout, à l'exception de la 1<sup>ère</sup> diagonale et de la 1<sup>ère</sup> sous-diagonale supérieure, dont tous les éléments valent 1.

*Remarque :*

Pour  $n = 2$  ( $v = 1$ ), on a :  $T_1 = T_1^{-1} = [1]$

#### 5.4.2. Ordre impair : $n = 2v + 1, v \in \mathbb{N}$

Rappelons les relations  $(\sigma_3')$  établies au 5.3.2.

$$(\sigma_3') \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{v-1} + A_v + A_{v+1} = \alpha_1 \\ A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{v-1} + A_v + A_{v+1} = \alpha_2 \\ A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{v-1} + A_v + A_{v+1} = \alpha_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_i + \dots + A_{v-1} + A_v + A_{v+1} = \alpha_i \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{v-1} + A_v + A_{v+1} = \alpha_{v-1} \\ A_v + A_{v+1} = \alpha_v \\ A_{v+1} = \alpha_{v+1} \end{array} \right.$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \\ \alpha_{\nu+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \\ A_{\nu+1} \end{bmatrix} = T_{\nu+1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \\ A_{\nu+1} \end{bmatrix},$$

Dans le cas  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ), on voit donc apparaître le même type de matrice que dans le cas  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), mais à l'ordre  $\nu + 1$  :

$$T_{\nu+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu + 1$ )  $\rightarrow \alpha_i$  ( $1 \leq i \leq \nu + 1$ ), est donc  $T_{\nu+1}$ .

Les relations inverses ( $\sigma_4$ ) sont :

$$(\sigma_4) \begin{cases} A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ A_3 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ \dots \\ A_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu \\ A_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1} \\ A_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} \end{cases}$$

Ces dernières se traduisent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \\ A_{\nu+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \\ \alpha_{\nu+1} \end{bmatrix} = T_{\nu+1}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \\ \alpha_{\nu+1} \end{bmatrix}$$

La matrice de passage  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq \nu+1$ )  $\rightarrow$   $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu+1$ ) est évidemment la matrice  $T_{\nu+1}^{-1}$ .

*Remarque :*

Pour  $n=1$  ( $\nu=0$ ), on a :  $T_1 = T_1^{-1} = [1]$

### 5.5. Signature réduite du carré d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Les paramètres d'indice pair de la signature (colonne ou ligne) d'une matrice  $A^2$ , carrée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , étant nuls, on peut songer à réduire la taille de la matrice-colonne ou de la matrice-ligne représentant cette signature  $y$  en éliminant les paramètres d'indice pair. On aboutit ce faisant à la notion de signature réduite d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ .

Le principal intérêt de la signature réduite d'une matrice  $A^2$  de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$ , est que cette dernière condense toute l'information utile contenue dans la signature simple  $|A^2|$  sous forme d'une matrice de dimension réduite *grosso modo* de moitié, puisque celle-ci passe de  $n$  à  $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ .

**Définition 5-10.** On appelle signature-colonne réduite d'une matrice  $A^2$ , carrée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , le vecteur-colonne de  $\mathcal{M}_{E\left(\frac{n+1}{2}\right), 1}(\mathbb{B})$  constitué des éléments d'indice impair de la signature-colonne de la matrice  $A^2$ .

On appelle signature-ligne réduite d'une matrice  $A^2$  carrée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  le vecteur-ligne de  $\mathcal{M}_{1, E\left(\frac{n+1}{2}\right)}(\mathbb{B})$  constitué des éléments d'indice impair de la signature-ligne de la matrice  $A^2$ .

*Note :* Par la suite, nous ne serons amenés à utiliser que la signature-colonne réduite d'une matrice  $A^2$ , carrée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .



**Notation 5-11.** Nous noterons la signature-colonne réduite d'une matrice  $A^2$ , carrée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ , sous la forme :  $\langle A^2 \rangle$ .

*Remarque 1 :*

Il est évidemment capital de ne considérer la signature-colonne réduite d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  que si l'on a établi que cette matrice est une matrice appartenant à  $\mathcal{BSC}_n^2(B)$ .

*Remarque 2 :*

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  telles que :  $A^2 = B^2$ .

$$A^2 = B^2 \Leftrightarrow \langle A^2 \rangle = \langle B^2 \rangle.$$

Par contre :  $\langle A^2 \rangle = \langle B^2 \rangle \not\Rightarrow |A| = |B|$ , ni donc :  $A = B$ .

Ceci provient du fait que les carrés de deux matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  peuvent être égaux, sans que ces deux matrices soient égales. (Rappelons en effet que toute matrice, carrée d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ , possède  $2^{\binom{n+1}{2}}$  « racines carrées »).

Exemple :

$$\text{Soient : } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2 \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [1]_2.$$

On a bien :  $A^2 = B^2 = O_2$  (et donc :  $\langle A^2 \rangle = \langle B^2 \rangle = [0]$ ).

Par contre :  $|A| \neq |B|$  et  $A \neq B$ .

## 5.6. Considérations concernant la Notation de la décomposition d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n^2(B)$ dans la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ .  $A^2$  appartient donc à  $\mathcal{BSC}_n^2(B)$ .

Nous avons vu que l'on peut écrire la matrice  $A^2$  sous la forme générale suivante :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \alpha_i B_{2i-1} \quad (\text{Notation I}).$$

Nous allons introduire le système de Notation II qui suit :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \alpha_{2i-1} B_{2i-1} \quad (\text{Notation II}).$$

Cette Notation II est équivalente à l'écriture « classique » :

$$A^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i, \text{ avec } \alpha_{i \text{ (i pair)}} = 0.$$

Dans les deux systèmes de Notation I et II n'apparaissent que les composantes ou « coordonnées » de  $A^2$  correspondant aux matrices d'indice impair de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

Dans le système de Notation I, les composantes de  $A^2$  sont indexées séquentiellement de 1 à  $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ . C'est le système de notation adopté jusqu'à présent.

Dans le système de Notation II, les composantes de  $A^2$  portent un indice impair égal à l'indice de la matrice correspondante de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . En fait, dans ce système de notation, il faut sous-entendre que l'on a :

$$\alpha_{2i} = 0, \quad (1 \leq i \leq E\left(\frac{n+1}{2}\right)).$$

La Notation I est celle qui est la mieux adaptée à l'étude matricielle des matrices de  $\mathcal{BSC}_n^2(\mathbb{B})$  lorsqu'on représente leur signature sous forme réduite.

En revanche, le système de Notation (II) est plus intéressant lorsqu'on considère la décomposition du carré  $A^2$  d'une matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . En effet, l'écriture (2) ci-dessus a le grand intérêt d'affecter la même valeur d'indice à une composante (ou « coordonnée ») de  $A^2$  dans la base canonique et à la matrice correspondante dans la base, ce qui n'est pas le cas de la Notation I.



## ANNEXE 1 / CHAPITRE 5 - RACINES CARRÉES DE LA MATRICE NULLE

Nous allons établir que la matrice nulle  $O_n$  possède  $2^\nu$  matrices racines carrées, pour  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) comme pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ).

Nous en déduisons une version plus élaborée des Théorèmes 5-6 et 5-8 précédemment énoncés.

Ordre pair :  $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

En tout généralité, pour  $n$  pair (cf. Section 5.3.1. ci-dessus) :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} A_i B_i^2, \text{ avec :}$$

$$(\sigma_1) \begin{cases} A_1 = a_1 + a_{2\nu} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu-1} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = a_{\nu-1} + a_{\nu+2} \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+1} \end{cases}$$

Dès lors :

$$A^2 = O_n \Leftrightarrow A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{2\nu} = a_1 \\ a_{2\nu-1} = a_2 \\ a_{2\nu-2} = a_3 \\ \dots \\ a_{2\nu-i+1} = a_i \\ \dots \\ a_{\nu+2} = a_{\nu-1} \\ a_{\nu+1} = a_\nu \end{cases}.$$

**Théorème 5-12.** Soit  $n$  pair :  $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

Les matrices racines carrées de la matrice  $O_n$  sont les  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  symétriques par rapport à leurs 2 axes médians (\*).

(\*) se reporter au Chapitre 7 consacré aux matrices symétriques par rapport à leurs 2 axes médians.

*Remarque :*

Bien entendu la matrice nulle  $O_n$  fait elle-même partie des matrices racines carrées de  $O_n$  : il s'agit de la matrice pour laquelle :  $a_i = 0$  ( $i = 1$  à  $n$ ).

Le Théorème 5-6 peut dès lors être complété comme suit (Point 2 ci-dessous).

**Théorème 5-6bis.** Soit  $U = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i B_{2i-1}$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), dont les composantes relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

- 1)  $U$  est alors le carré de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont les composantes (ou « coordonnées ») dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont données par les relations  $(\sigma_4)$  et  $(\sigma_1)$  ci-dessus.
- 2) On obtient l'ensemble des  $2^\nu$  matrices racines carrées de  $U$  en ajoutant à l'une quelconque d'entre elles les  $2^\nu$  matrices racines carrées de la matrice nulle  $O_n$ .

*Preuve du Point 2 :*

Soit  $\Omega_n$  l'une quelconque des  $2^\nu$  matrices racines carrées de la matrice nulle  $O_n$  et soit  $V$  l'une quelconque des  $2^\nu$  matrices racines carrées de la matrice  $U$ . Alors :

$$(V + \Omega_n)^2 = V^2 + \Omega_n^2 = U + O_n = U.$$

Par ailleurs, si  $V$  et  $V'$  désignent 2 matrices racines carrées de  $U$  :

$$V^2 = U \text{ et } V'^2 = U \Rightarrow (V + V')^2 = O_n \Rightarrow (V + V') \text{ est une racine carrée de } O_n.$$

Ordre impair :  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ .

En tout généralité, pour  $n$  impair (cf. Section 5.3.2. ci-dessus) :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{\nu} A_i B_i^2 + a_{\nu+1} B_{\nu+1}^2, \text{ avec :}$$

$$(\sigma_5) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Dès lors :

$$A^2 = O_n \Leftrightarrow A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{2\nu+1} = a_1 \\ a_{2\nu} = a_2 \\ a_{2\nu-1} = a_3 \\ \dots \\ a_{2\nu-i+2} = a_i \\ \dots \\ a_{\nu+2} = a_\nu \end{array} \right. \text{ ET } a_{\nu+1} = 0.$$

**Théorème 5-13.** Soit  $n$  impair :  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ .

Les matrices racines carrées de la matrice  $O_n$  sont les  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  symétriques par rapport à leurs 2 axes médians et dont l'élément central de la signature est nul (\*).

(\*) se reporter au Chapitre 7 consacré aux matrices symétriques par rapport à leurs 2 axes médians.

*Remarque :*

Bien entendu la matrice nulle  $O_n$  fait elle-même partie des matrices racines carrées de  $O_n$  : il s'agit de la matrice pour laquelle :  $a_i = 0$  ( $i = 1$  à  $n$ ).

Le Théorème 5-8 peut dès lors être complété comme suit (Point 2 ci-dessous).

**Théorème 5-8bis.** Soit  $U = \sum_{i=1}^{\nu+1} \alpha_i B_{2i-1}$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,

$\nu \in \mathbb{N}$ ), dont les composantes relatives aux matrices  $B_i$  d'indice  $i$  pair sont nulles.

- 1)  $U$  est alors le carré de  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  dont les composantes (ou « coordonnées ») dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont données par les relations  $(\sigma_8)$  et  $(\sigma_5)$  ci-dessus.
- 2) On obtient l'ensemble des  $2^\nu$  matrices racines carrées de  $U$  en ajoutant à l'une quelconque d'entre elles les  $2^\nu$  matrices racines carrées de la matrice nulle  $O_n$ .

*Preuve du Point 2 :*

Identique au cas  $n$  pair.



## CHAPITRE 6

### Étude des puissances $2^k$ ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ – Lois générales relatives aux puissances de bouclage des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

*Note préliminaire :*

Les notions de puissances de bouclage d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  (et plus généralement de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ ) apparaissant dans le présent chapitre, font référence au Théorème fondamental des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  dont l'énoncé figure en annexe du présent chapitre.

#### 6.1. Introduction

Cette étude s'appuie sur les résultats du Chapitre 5.

Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . (Nous écarterons initialement le cas trivial  $n = 1$  : rappelons que  $\mathcal{BSC}_1(\mathbb{B})$  ne renferme que les 2 matrices suivantes :  $[0]$  et  $[1]$ ).

Nous nous intéressons à la suite des puissances  $2^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) de la matrice  $A$  :  $A, A^2, A^4, A^8, \dots, A^{2^k}, \dots$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ).

Distinguons les cas  $n$  pair et  $n$  impair.

#### 6.2. Étude relative à l'ordre pair : $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$

Soit  $A = \sum_{i=1}^{2\nu} a_i B_i$  une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_{2\nu}(\mathbb{B})$ .

Nous savons (cf. système de Notation II - Section 5.6 du Chapitre 5) que l'on peut écrire  $A^2$  en toute généralité sous la forme :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{2\nu} \alpha_i B_i \quad (\text{avec : } \alpha_{i \text{ (i pair)}} = 0).$$

De la même façon,  $A^4$  étant le carré de la matrice  $A^2$ , s'écrira en toute généralité sous la forme :

$$A^4 = \sum_{i=1}^{2\nu} \alpha'_i B_i \quad (\text{avec : } \alpha'_{i \text{ (i pair)}} = 0).$$

Nous allons chercher à déterminer pour  $1 \leq i \leq 2\nu$  les composantes  $\alpha'_{i \text{ (i impair)}}$  de  $A^4$  en fonction des composantes  $\alpha_{i \text{ (i impair)}}$  de  $A^2$ .

Pour passer de  $A$  à  $A^2$ , nous avons été amené à introduire les  $\nu$  coefficients :  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_\nu$ , donnés par les relations  $(\sigma_1)$  (cf. Chapitre 5 - Section 5.3.1.) :



$$(\sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu-1} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1} = a_{\nu-1} + a_{\nu+2} \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

De la même façon, pour passer de  $A^2$  à  $A^4$ , nous allons introduire les  $\nu$  coefficients :  $A_1', A_2', A_3', \dots, A_i', \dots, A_\nu'$  suivants :

$$(\sigma_1') \left\{ \begin{array}{l} A_1' = \alpha_1 + \alpha_{2\nu} \\ A_2' = \alpha_2 + \alpha_{2\nu-1} \\ A_3' = \alpha_3 + \alpha_{2\nu-2} \\ \dots \\ A_i' = \alpha_i + \alpha_{2\nu-i+1} \\ \dots \\ A_{\nu-1}' = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu+2} \\ A_\nu' = \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Tenant compte de la nullité des coefficients  $\alpha_{i \text{ (i pair)}}$ , il vient :

$$\begin{array}{l} A_1' = \alpha_1 \\ A_2' = \alpha_{2\nu-1} \\ A_3' = \alpha_3 \\ A_4' = \alpha_{2\nu-3} \\ A_5' = \alpha_5 \\ A_6' = \alpha_{2\nu-5} \\ \dots \\ A_{2j}' = \alpha_{2\nu-2j+1} \\ A_{2j+1}' = \alpha_{2j+1} \\ \dots \end{array}$$

Pour calculer  $A_{\nu-2}', A_{\nu-1}', A_\nu'$ , il convient de distinguer 2 cas :

a)  $\nu = 2p$  soit :  $n = 4p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ). On obtient alors :

$$\begin{array}{l} A_{\nu-2}' = \alpha_{2p+3} \\ A_{\nu-1}' = \alpha_{2p-1} \\ A_\nu' = \alpha_{2p+1} \end{array}$$

Par ailleurs, à partir des relations  $(\sigma_3)$  du Chapitre 5 - Section 5.3.1., on déduit que :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1' &= A_1' + A_2' + A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_\nu' \\
 \alpha_3' &= A_2' + A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_\nu' \\
 \alpha_5' &= A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_\nu' \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 \alpha_{2\nu-3}' &= A_{\nu-1}' + A_\nu' \\
 \alpha_{2\nu-1}' &= A_\nu'
 \end{aligned}$$

Il découle de ce qui précède les expressions donnant les composantes  $\alpha_{2j-1}'$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ) de  $A^4$  en fonction des  $\alpha_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ) de  $A^2$ , sachant que dans ces expressions les termes entre crochets n'y figurent pas : ils sont à ignorer. On obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1' &= \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1} \\
 \alpha_3' &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1} \\
 \alpha_5' &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} [+ \alpha_{n-1}] \\
 \alpha_7' &= [\alpha_1 + \alpha_3] + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} [+ \alpha_{n-1}] \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 \alpha_{n-5}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} +] \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}] \\
 \alpha_{n-3}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} +] \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} [+ \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}] \\
 \alpha_{n-1}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1}] + \alpha_{2p+1} [+ \alpha_{2p+3} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}]
 \end{aligned}$$

Ces expressions se traduisent immédiatement sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} p-1 & p & p+1 & p+2 & p+3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
 \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_3' \\ \alpha_5' \\ \alpha_7' \\ \dots \\ \alpha_{n-5}' \\ \alpha_{n-3}' \\ \alpha_{n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = R_{(4p)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

La matrice  $R_{(4p)}$  qui apparaît ci-dessus est une matrice d'ordre  $\nu = 2p$ , appartenant donc à  $\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{B})$ .

Nous étudierons de façon plus approfondie les matrices de la forme  $R_{(4p)}$  dans la Section 6.4.1.

b)  $\nu = 2p + 1$  soit :  $n = 4p + 2$  ( $p \in \mathbb{N}$ ). On obtient alors :

$$\begin{aligned} A'_{\nu-2} &= \alpha_{2p-1} \\ A'_{\nu-1} &= \alpha_{2p+3} \\ A'_{\nu} &= \alpha_{2p+1} \end{aligned}$$

Par ailleurs, à partir des relations ( $\sigma_3$ ) du Chapitre 5 - Section 5.3.1., on déduit que :

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots + A'_{\nu-1} + A'_\nu \\ \alpha'_3 &= A'_2 + A'_3 + \dots + A'_{\nu-1} + A'_\nu \\ \alpha'_5 &= A'_3 + \dots + A'_{\nu-1} + A'_\nu \\ &\dots \dots \\ &\dots \dots \\ \alpha'_{2\nu-3} &= A'_{\nu-1} + A'_\nu \\ \alpha'_{2\nu-1} &= A'_\nu \end{aligned}$$

Il découle de ce qui précède les expressions donnant les composantes  $\alpha'_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ) de  $A^4$  en fonction des  $\alpha_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ) de  $A^2$ , sachant que dans ces expressions les termes entre crochets n'y figurent pas : ils sont à ignorer. On obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1} \\ \alpha'_3 &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1} \\ \alpha'_5 &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} [+ \alpha_{n-1}] \\ \alpha'_7 &= [\alpha_1 + \alpha_3] + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} [+ \alpha_{n-1}] \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha'_{n-5} &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots +] \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}] \\ \alpha'_{n-3} &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} +] \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}] \\ \alpha'_{n-1} &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} +] \alpha_{2p+1} [+ \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1}] \end{aligned}$$

Ces expressions se traduisent immédiatement sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{aligned} & \begin{array}{cccccc} p-1 & p & p+1 & p+2 & p+3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_3 \\ \alpha'_5 \\ \alpha'_7 \\ \dots \\ \alpha'_{n-5} \\ \alpha'_{n-3} \\ \alpha'_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{(4p+2)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice  $R_{(4p+2)}$  qui apparaît ci-dessus est une matrice d'ordre  $\nu = 2p + 1$ , appartenant donc à  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{B})$ .

Nous étudierons de façon plus approfondie les matrices de la forme  $R_{(4p)}$  dans la Section 6.4.1.

### 6.3. Étude relative à l'ordre impair : $n = 2\nu + 1$ , $\nu \in \mathbb{N}^*$

(Note : en imposant  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , nous laissons provisoirement de côté le cas trivial :  $n = 1$ ).

Soit  $A = \sum_{i=1}^{2\nu+1} a_i B_i$  une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_{2\nu+1}(\mathbb{B})$

Nous savons (cf. système de Notation II - Section 5.6 du Chapitre 5) que l'on peut écrire  $A^2$  en toute généralité sous la forme :

$$A^2 = \sum_{i=1}^{2\nu+1} \alpha_i B_i \quad (\text{avec : } \alpha_{i \text{ (i pair)}} = 0).$$

De la même façon,  $A^4$  étant le carré de la matrice  $A^2$ , va s'écrire en toute généralité sous la forme :

$$A^4 = \sum_{i=1}^{2\nu+1} \alpha'_i B_i \quad (\text{avec : } \alpha'_{i \text{ (i pair)}} = 0).$$

Nous allons chercher à déterminer pour  $1 \leq i \leq 2\nu + 1$  les composantes  $\alpha'_{i \text{ (i impair)}}$  de  $A^4$  en fonction des composantes  $\alpha_{i \text{ (i impair)}}$  de  $A^2$ .

Pour passer de  $A$  à  $A^2$ , nous avons été amené à introduire les  $\nu + 1$  coefficients :  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_\nu, A_{\nu+1}$  donnés par les relations  $(\sigma_5)$  (cf. Chapitre 5 - Section 5.3.2.) :

$$(\sigma_5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

De la même façon, pour passer de  $A^2$  à  $A^4$ , nous allons introduire les  $\nu + 1$  coefficients :  $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_i, \dots, A'_\nu, A'_{\nu+1}$  suivants :

$$(\sigma'_5) \left\{ \begin{array}{l} A'_1 = \alpha_1 + \alpha_{2v+1} \\ A'_2 = \alpha_2 + \alpha_{2v} \\ A'_3 = \alpha_3 + \alpha_{2v-1} \\ \dots \\ A'_i = \alpha_i + \alpha_{2v-i+2} \\ \dots \\ A'_v = \alpha_{v-1} + \alpha_{v+3} \\ A'_{v+1} = \alpha_{v+1} \end{array} \right.$$

Tenant compte de la nullité des coefficients  $\alpha_i$  ( $i$  pair), il vient :

$$\begin{array}{l} A'_1 = \alpha_1 + \alpha_{2v+1} \\ A'_2 = 0 \\ A'_3 = \alpha_3 + \alpha_{2v-1} \\ A'_4 = 0 \\ A'_5 = \alpha_5 + \alpha_{2v-3} \\ A'_6 = 0 \\ \dots \\ A'_{2j} = 0 \\ A'_{2j+1} = \alpha_{2j+1} + \alpha_{2v-2j+1} \\ \dots \end{array}$$

Pour calculer  $A'_{v-2}$ ,  $A'_{v-1}$ ,  $A'_v$ ,  $A'_{v+1}$ , il convient de distinguer 2 cas :

a)  $v = 2p$  soit :  $n = 4p + 1$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ). On obtient alors :

$$\begin{array}{l} A'_{v-2} = 0 \\ A'_{v-1} = \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+3} \\ A'_v = 0 \\ A'_{v+1} = \alpha_{2p+1} \end{array}$$

Par ailleurs, à partir des relations  $(\sigma_7)$  du Chapitre 5 - Section 5.3.2., on déduit que :

$$\begin{array}{l} \alpha'_1 = A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots + A'_{v-1} + A'_v + A'_{v+1} \\ \alpha'_3 = A'_2 + A'_3 + \dots + A'_{v-1} + A'_v + A'_{v+1} \\ \alpha'_5 = A'_3 + \dots + A'_{v-1} + A'_v + A'_{v+1} \\ \dots \\ \dots \\ \alpha'_{2v-3} = A'_{v-1} + A'_v + A'_{v+1} \\ \alpha'_{2v-1} = A'_v + A'_{v+1} \\ \alpha'_{2v+1} = A'_{v+1} \end{array}$$

Il découle de ce qui précède les expressions donnant les composantes  $\alpha'_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu+1$ ) de  $A^4$  en fonction des  $\alpha_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu+1$ ) de  $A^2$ , sachant que dans ces expressions les termes entre crochets n'y figurent pas : ils sont à ignorer. On obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
 \alpha'_1 &= \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n \\
 \alpha'_3 &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 \alpha'_5 &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 \alpha'_7 &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 &\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\
 \alpha'_{n-4} &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 \alpha'_{n-2} &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 \alpha'_n &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-3} + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n]
 \end{aligned}$$

Ces expressions se traduisent immédiatement sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} p-1 & p & p+1 & p+2 & p+3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
 \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_3 \\ \alpha'_5 \\ \alpha'_7 \\ \dots \\ \alpha'_{n-4} \\ \alpha'_{n-2} \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{(4p+1)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-4} \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_n \end{bmatrix}
 \end{array}$$

La matrice  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  qui apparaît ci-dessus est une matrice d'ordre  $\nu+1 = 2p+1$ , appartenant donc à  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{B})$ .

Nous étudierons de façon plus approfondie les matrices de la forme  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  dans la Section 6.4.2.

b)  $\nu = 2p+1$  soit :  $n = 4p+2$  ( $p \in \mathbb{N}$ ). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 A'_{\nu-2} &= \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+5} \\
 A'_{\nu-1} &= 0 \\
 A'_\nu &= \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} \\
 A'_{\nu+1} &= 0
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, à partir des relations ( $\sigma_7$ ) du Chapitre 5 - Section 5.3.2., on déduit que :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1' &= A_1' + A_2' + A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_{\nu}' + A_{\nu+1}' \\
 \alpha_3' &= A_2' + A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_{\nu}' + A_{\nu+1}' \\
 \alpha_5' &= A_3' + \dots + A_{\nu-1}' + A_{\nu}' + A_{\nu+1}' \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 \alpha_{2\nu-3}' &= A_{\nu-1}' + A_{\nu}' + A_{\nu+1}' \\
 \alpha_{2\nu-1}' &= A_{\nu}' + A_{\nu+1}' \\
 \alpha_{2\nu+1}' &= A_{\nu+1}'
 \end{aligned}$$

Il découle de ce qui précède les expressions donnant les composantes  $\alpha_{2j-1}'$  ( $1 \leq j \leq \nu+1$ ) de  $A^4$  en fonction des  $\alpha_{2j-1}$  ( $1 \leq j \leq \nu+1$ ) de  $A^2$ , sachant que dans ces expressions les termes entre crochets n'y figurent pas : ils sont à ignorer. On obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1' &= \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n \\
 \alpha_3' &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} [+ \alpha_n] \\
 \alpha_5' &= [\alpha_1 +] \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} [+ \alpha_n] \\
 \alpha_7' &= [\alpha_1 + \alpha_3] + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} [+ \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 &\dots \\
 \alpha_{n-5}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1}] + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 \alpha_{n-3}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1}] + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} [+ \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n] \\
 \alpha_{n-1}' &= [\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+5} + \dots + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-2} + \alpha_n]
 \end{aligned}$$

Ces expressions se traduisent immédiatement sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} p & p+1 & p+2 & p+3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
 \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_3' \\ \alpha_5' \\ \alpha_7' \\ \dots \\ \alpha_{n-4}' \\ \alpha_{n-2}' \\ \alpha_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-5} \\ \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{(4p+3)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \\ \dots \\ \alpha_{n-4} \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_n \end{bmatrix}
 \end{array}$$

La matrice  $\mathbf{R}_{(4p+3)}$  qui apparaît ci-dessus est une matrice d'ordre  $\nu+1 = 2p+2$ , appartenant donc à  $\mathcal{M}_{2p+2}(\mathbb{B})$ .

Nous étudierons de façon plus approfondie les matrices de la forme  $\mathbf{R}_{(4p+1)}$  dans la Section 6.4.2.

## 6.4. Étude des matrices $R_{(n)}$ ( $n = 4p, n = 4p + 1, n = 4p + 2, n = 4p + 3$ )

Nous avons mis en évidence, dans les Sections 6.2. et 6.3., 4 types de matrices :

$R_{(4p)}$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) correspondant à  $n = 4p$ .

$R_{(4p)}$  est une matrice d'ordre  $2p$  et appartient donc à  $\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{B})$ .

$R_{(4p+1)}$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) correspondant à  $n = 4p + 1$ .

( $p \in \mathbb{N}^*$  toujours pour écarter provisoirement le cas trivial :  $n = 1$ ).

$R_{(4p+1)}$  est une matrice d'ordre  $2p + 1$  et appartient donc à  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{B})$ .

$R_{(4p+2)}$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) correspondant à  $n = 4p + 2$ .

$R_{(4p+2)}$  est une matrice d'ordre  $2p + 1$  et appartient donc à  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{B})$ .

$R_{(4p+3)}$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) correspondant à  $n = 4p + 3$ .

$R_{(4p+3)}$  est une matrice d'ordre  $2p + 2$  et appartient donc à  $\mathcal{M}_{2p+2}(\mathbb{B})$ .

Nous allons classer ces matrices en deux catégories correspondant au cas  $n$  pair et au cas  $n$  impair.

### 6.4.1. $n$ pair : $R_{(4p)}$ ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) et $R_{(4p+2)}$ ( $p \in \mathbb{N}$ )

Rappelons que l'on a  $n = 2\nu$  et donc :

- pour  $R_{(4p)}$  :  $\nu = 2p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ),
- pour  $R_{(4p+2)}$  :  $\nu = 2p + 1$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).

Conformément à la Section 6.2., la structure des matrices  $R_{(4p)}$  et  $R_{(4p+2)}$  obéit au schéma suivant :

1<sup>ère</sup> colonne (de haut en bas) : 1 « 1 » suivi de  $(\nu - 1)$  « 0 »,  
 $\nu$ <sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 2 « 1 » suivi de  $(\nu - 2)$  « 0 »,  
2<sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 3 « 1 » suivi de  $(\nu - 3)$  « 0 »,  
 $(\nu - 1)$ <sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 4 « 1 » suivi de  $(\nu - 4)$  « 0 »,  
3<sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 5 « 1 » suivi de  $(\nu - 5)$  « 0 »,  
 $(\nu - 2)$ <sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 6 « 1 » suivi de  $(\nu - 6)$  « 0 »,  
etc.

La construction se poursuit, colonne par colonne, alternativement à gauche et à droite, jusqu'à l'axe médian vertical de la matrice.

Pour  $R_{(4p)}$  et pour  $R_{(4p+2)}$  la colonne  $(p + 1)$  est constituée entièrement de « 1 ».

Pour les matrices  $R_{(4p)}$ , l'axe médian vertical passe entre les colonnes  $p$  et  $(p + 1)$ , tandis que pour les matrices  $R_{(4p+2)}$ , l'axe médian vertical est porté par la colonne  $(p + 1)$ .



Exemples :

$R_{(2)}$  - matrice de type  $n = 4p + 2$ , avec  $p = 0$ . Elle est d'ordre 1.

$$R_{(2)} = [1]$$

$R_{(4)}$  - matrice de type  $n = 4p$ , avec  $p = 1$ . Elle est d'ordre 2.

$$R_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_{(6)}$  - matrice de type  $n = 4p + 2$ , avec  $p = 2$ . Elle est d'ordre 3.

$$R_{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(8)}$  - matrice de type  $n = 4p$ , avec  $p = 2$ . Elle est d'ordre 4.

$$R_{(8)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(10)}$  - matrice de type  $n = 4p + 2$ , avec  $p = 2$ . Elle est d'ordre 5.

$$R_{(10)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Théorème 6-1.**  $\forall p \in \mathbb{N}^* : \det(R_{(4p)}) = 1 \Leftrightarrow R_{(4p)}$  inversible

$\forall p \in \mathbb{N} : \det(R_{(4p+2)}) = 1 \Leftrightarrow R_{(4p+2)}$  inversible.

*Preuve :*

Se référer à la structure générale des matrices  $R_{(4p)}$  et  $R_{(4p+2)}$  : il suffit de développer le déterminant associé à la matrice concernée par rapport à sa dernière ligne, puis le déterminant d'ordre inférieur obtenu par rapport à sa dernière ligne, et de poursuivre ainsi de suite, jusqu'à obtenir un déterminant d'ordre 1 qui vaut 1.

On peut aussi remarquer que l'on peut réarranger les colonnes du déterminant de  $R_{(4p)}$  et  $R_{(4p+2)}$  de façon à obtenir une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale principale est formée de chiffres 1.

**Théorème 6-2.** *Pour toute matrice  $R_{(n)}$ ,  $n$  pair, il existe un entier minimal  $\rho(n) \in \mathbb{N}^*$  tel que :*

$$R_{(n)}^{\rho(n)} = I_{\frac{n}{2}}.$$

$\rho(n)$  est la puissance de bouclage (supérieure) de la matrice inversible  $R_{(n)}$ ,  $n$  pair.

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème Fondamental des matrices carrées à éléments dans  $B$  (cf. Annexe du présent chapitre) correspondant au cas des matrices inversibles.

Exemples :

$$\underline{n=2} : \quad R_{(2)}^1 = I_1 \quad \Rightarrow \quad \rho(2) = 1.$$

$$\underline{n=4} : \quad R_{(4)}^2 = I_2 \quad \Rightarrow \quad \rho(4) = 2.$$

$$\underline{n=6} : \quad R_{(6)}^3 = I_3 \quad \Rightarrow \quad \rho(6) = 3.$$

$$\underline{n=8} : \quad R_{(8)}^3 = I_4 \quad \Rightarrow \quad \rho(8) = 3.$$

$$\underline{n=10} : \quad R_{(10)}^5 = I_5 \quad \Rightarrow \quad \rho(10) = 5.$$

$$\underline{n=12} : \quad R_{(12)}^6 = I_6 \quad \Rightarrow \quad \rho(12) = 6.$$

$$\underline{n=14} : \quad R_{(14)}^4 = I_7 \quad \Rightarrow \quad \rho(14) = 4.$$

$$\underline{n=16} : \quad R_{(16)}^4 = I_8 \quad \Rightarrow \quad \rho(16) = 4.$$

**6.4.2.  $n$  impair** :  $R_{(4p+1)}$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) et  $R_{(4p+3)}$  ( $p \in \mathbb{N}$ )  
 ( $p \in \mathbb{N}^*$  pour  $R_{(4p+1)}$  pour écarter provisoirement le cas trivial  $n = 1$ ).

Rappelons que l'on a  $n = 2\nu + 1$  et donc :

- pour  $R_{(4p+1)}$  :  $\nu = 2p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ),
- pour  $R_{(4p+3)}$  :  $\nu = 2p + 1$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).

Conformément à la Section 6.3., la structure des matrices  $R_{(4p+1)}$  et  $R_{(4p+3)}$  obéit au schéma suivant :

1<sup>ère</sup> colonne (de haut en bas) : 1 « 1 » suivi de  $\nu$  « 0 »,  
 ( $\nu + 1$ )<sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 1 « 1 » suivi de  $\nu$  « 0 »,  
 2<sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 3 « 1 » suivi de  $(\nu - 2)$  « 0 »,  
 $\nu$ <sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 3 « 1 » suivi de  $(\nu - 2)$  « 0 »,  
 3<sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 5 « 1 » suivi de  $(\nu - 4)$  « 0 »,  
 ( $\nu - 2$ )<sup>ème</sup> colonne (de haut en bas) : 5 « 1 » suivi de  $(\nu - 4)$  « 0 »,  
 etc.

La construction se poursuit ainsi, colonne par colonne, alternativement à gauche et à droite, jusqu'à l'axe médian vertical de la matrice.

La construction s'arrête pour les matrices  $R_{(4p+1)}$  lorsqu'on atteint la colonne ( $p + 1$ ) entièrement constituée de « 1 » et pour les matrices  $R_{(4p+3)}$  lorsqu'on atteint les colonnes ( $p + 1$ ) et ( $p + 2$ ) constituées de  $\nu$  « 1 » suivis de 1 « 0 ». Pour ce type de matrices, la dernière ligne est donc nulle.

Pour les matrices  $R_{(4p+1)}$ , l'axe médian vertical est porté par la colonne ( $p + 1$ ) tandis que pour les matrices  $R_{(4p+3)}$ , l'axe médian vertical passe entre les colonnes ( $p + 1$ ) et ( $p + 2$ ).

*Remarque :*

Les matrices de type  $R_{(4p+1)}$  et  $R_{(4p+3)}$  sont symétriques par rapport à leur axe médian vertical (contrairement aux matrices de type  $R_{(4p)}$  et  $R_{(4p+2)}$ ).

Exemples :

$R_{(1)}$  - matrice de type  $n = 4p + 1$ , avec  $p = 0$ . Elle est d'ordre 1.

(Nous rétablissons ici le cas trivial  $n = 1$ ).

$$R_{(1)} = [1]$$

$R_{(3)}$  - matrice de type  $n = 4p + 3$ , avec  $p = 0$ . Elle est d'ordre 2.

$$R_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(5)}$  - matrice de type  $n = 4p + 1$ , avec  $p = 1$ . Elle est d'ordre 3.

$$R_{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(7)}$  - matrice de type  $n = 4p + 3$ , avec  $p = 1$ . Elle est d'ordre 4.

$$R_{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(9)}$  - matrice de type  $n = 4p + 1$ , avec  $p = 2$ . Elle est d'ordre 5.

$$R_{(9)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_{(11)}$  - matrice de type  $n = 4p + 3$ , avec  $p = 2$ . Elle est d'ordre 6.

$$R_{(11)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Théorème 6-3.**  $\forall p \in \mathbb{N}^* : \det(R_{(4p+1)}) = 0 \Leftrightarrow R_{(4p+1)}$  non inversible (\*)

$\forall p \in \mathbb{N} : \det(R_{(4p+3)}) = 0 \Leftrightarrow R_{(4p+3)}$  non inversible.

(\*) pour  $p = 0$ ,  $R_{(4p+1)} = R_{(1)}$  et l'on a :  $\det(R_{(1)}) = 1 \Leftrightarrow R_{(1)}$  inversible.

*Preuve :*

Se référer à la structure générale des matrices  $R_{(4p+1)}$  et  $R_{(4p+3)}$  : il suffit de remarquer que dès que leur ordre est supérieur à 1, ces matrices possèdent (au moins) 2 colonnes identiques. Le déterminant correspondant est donc nul.

(\*) *Remarque :*

Nous avons, tout au cours de l'étude des matrices  $R_{(4p+1)}$ , écarté le cas  $p = 0$  correspondant à :  $R_{(1)} = [1]$ . Cette matrice est tout à fait exceptionnelle en ce sens qu'elle est la seule matrice inversible du type  $R_{(4p+1)}$ .

**Théorème 6-4.** Pour toute matrice  $R_{(n)}$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), il existe un couple d'entiers minimal  $(\rho_1(n), \rho_2(n))$ ,  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$ , avec :  $\rho_2(n) > \rho_1(n)$ , tel que :

$$R_{(n)}^{\rho_2(n)} = R_{(n)}^{\rho_1(n)}.$$

$\rho_1(n)$  et  $\rho_2(n)$  sont les puissances de bouclage (inférieure et supérieure de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ )).

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème Fondamental des matrices carrées à éléments dans  $\mathbb{B}$  (cf. Annexe du présent chapitre) correspondant au cas des matrices non inversibles.

Exemples :

$$\underline{n=3} : \quad R_{(3)}^2 = R_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1(3) = 1, \rho_2(3) = 2.$$

On en déduit :  $R_{(3)}^k = R_{(3)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\underline{n=5} : \quad R_{(5)}^2 = R_{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1(5) = 1, \rho_2(5) = 2.$$

On en déduit :  $R_{(5)}^k = R_{(5)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\underline{n=7} : \quad R_{(7)}^3 = R_{(7)}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1(7) = 2, \rho_2(7) = 3.$$

On en déduit :  $R_{(7)}^k = R_{(7)}^2$ ,  $\forall k \geq 2$ .

$$\underline{n=9} : \quad R_{(9)}^3 = R_{(9)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1(9) = 1, \rho_2(9) = 3.$$

On en déduit :  $R_{(9)}^{2k+1} = R_{(9)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

$$\underline{n=11} : \quad \mathbf{R}_{(11)}^3 = \mathbf{R}_{(11)}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1(11) = 2, \rho_2(11) = 3.$$

On en déduit :  $\mathbf{R}_{(11)}^k = \mathbf{R}_{(11)}^2, \forall k \geq 2$ .

$$\underline{n=13} : \quad \mathbf{R}_{(13)}^4 = \mathbf{R}_{(13)} \Rightarrow \rho_1(13) = 1, \rho_2(13) = 4.$$

On en déduit :  $\mathbf{R}_{(13)}^{3k+1} = \mathbf{R}_{(13)}, \forall k \in \mathbb{N}$ .

$$\underline{n=15} : \quad \mathbf{R}_{(15)}^4 = \mathbf{R}_{(15)}^3 \Rightarrow \rho_1(15) = 3, \rho_2(15) = 4.$$

On en déduit :  $\mathbf{R}_{(15)}^k = \mathbf{R}_{(15)}^3, \forall k \geq 3$ .

## 6.5. Étude des puissances de bouclage d'une matrice quelconque de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

### 6.5.1. $n$ pair

Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair. (On vérifiera que tout ce qui suit s'applique lorsque  $A = O_n$ ).

Soit  $\langle A^2 \rangle$  la signature réduite de  $A^2$ .

(Nous ne préciserons plus qu'il s'agit de la signature-colonne réduite de  $A^2$ , dans la mesure où nous ne ferons appel qu'à celle-ci).

On peut écrire la succession d'égalités :

$$\begin{aligned} \langle A^4 \rangle &= \mathbf{R}_{(n)} \langle A^2 \rangle \quad (\text{par définition même de la matrice } \mathbf{R}_{(n)}). \\ \langle A^8 \rangle &= \mathbf{R}_{(n)} \langle A^4 \rangle \\ \langle A^{16} \rangle &= \mathbf{R}_{(n)} \langle A^8 \rangle \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On aboutit ainsi, par récurrence immédiate, au théorème suivant.

**Théorème 6-5.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}), n \text{ pair, et } \forall i \in \mathbb{N} : \langle A^{2^{i+1}} \rangle = \mathbf{R}_{(n)}^i \langle A^2 \rangle.$

*Remarque :*

La relation ci-dessus reste en effet trivialement vraie pour  $i = 0$ .

Comme  $n$  est pair, nous sommes dans un cas de figure où la matrice  $R_{(n)}$  est inversible.

Soit donc  $\rho(n) \in \mathbb{N}^*$  la puissance de bouclage de  $R_{(n)}$  (cf. Théorème 6-2) On a donc :

$$R_{(n)}^{\rho(n)} = I_{\frac{n}{2}}.$$

En faisant  $i = k(n)$  dans le Théorème 6-5 ci-dessus, il vient :

$$\langle A^{2^{\rho(n)+1}} \rangle = R_{(n)}^{\rho(n)} \langle A^2 \rangle = I_{\frac{n}{2}} \langle A^2 \rangle = \langle A^2 \rangle$$

Les signatures réduites de  $A^{2^{\rho(n)+1}}$  et de  $A^2$  étant égales, ces matrices sont égales (cf. Remarque 2 de la Section 5.5. du Chapitre 5).

On peut donc énoncer le théorème suivant.

**Théorème 6-6.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair :  $A^{2^{\rho(n)+1}} = A^2$ , où  $\rho(n)$  désigne la puissance de bouclage de la matrice inversible  $R_{(n)}$ .

Plaçons-nous maintenant dans le cas où  $A$  est inversible.

**Théorème 6-7.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair :  $A^{2^{\rho(n)+1}-2} = I_n$ , où  $\rho(n)$  désigne la puissance de bouclage de la matrice inversible  $R_{(n)}$ .

*Preuve :* Immédiate.

**Théorème 6-8.** Le couple d'entiers minimal  $(k_1, k_2)$  constitué par les puissances de bouclage d'une matrice non inversible de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, est tel que :

$$k_1 = 1 \text{ ou } 2 \quad \text{et} \quad k_1 < k_2 \leq 2^{\rho(n)+1}$$

où  $\rho(n)$  désigne la puissance de bouclage de la matrice inversible  $R_{(n)}$ .

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 6-6 ci-dessus.

**Théorème 6-9.** La puissance de bouclage  $k_2$  d'une matrice inversible de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, est telle que :  $k_2$  divise  $\Omega(n) = 2^{\rho(n)+1} - 2$ .

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 6-7 ci-dessus.

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ ,  $n$  pair, et  $k_2$  sa puissance de bouclage supérieure. On a donc :  $A^{k_2} = I_n$ .

Par ailleurs, d'après le Théorème 6-7, on a également :  $A^{\Omega(n)} = I_n$

Clairement :  $k_2 \leq \Omega(n)$ , sinon  $k_2$  ne serait pas la puissance de bouclage minimale de  $A$ .

Soit  $q$  et  $r$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $\Omega(n)$  par  $k_2$ .

On a donc :  $\Omega(n) = q k_2 + r$ , avec  $0 \leq r < k_2$ .

Nous allons montrer que nécessairement :  $r = 0$ .

En effet :  $A^{\Omega(n)} = I_n \Leftrightarrow A^{q k_2 + r} = I_n \Leftrightarrow (A^{k_2})^q \cdot A^r = I_n$

Comme :  $A^{k_2} = I_n$ , on a :  $(A^{k_2})^q = I_n$ . On en déduit que :  $A^r = I_n$ .

Si  $r \neq 0$ , comme  $r < k_2$ , la précédente relation établirait que  $k_2$  ne serait pas la puissance de bouclage minimale de  $A$ . Contradiction. Donc  $r = 0$ .

*Remarques :*

1. Le Théorème 6-6 est général : il énonce une propriété commune à toutes les matrices inversibles et non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  pair.
2. Le Théorème 6-8 énonce une propriété commune à toutes les matrices non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  pair.
3. Les Théorèmes 6-7 et 6-9 énoncent une propriété commune à toutes les matrices inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  pair.
4. Une matrice particulière de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  pair, peut fort bien avoir des puissances de bouclage inférieures aux exposants apparaissant dans le Théorème 6-6 (ou dans le Théorème 6-7 si cette matrice est inversible). Nous dirons, dans ce cas, que la matrice concernée « fait mieux » que la loi générale. Néanmoins, quand tel est le cas, cette matrice vérifie aussi la relation définie par le Théorème 6-6 (ou par le Théorème 6-7 si cette matrice est inversible). Il n'y a donc aucune contradiction entre « faire mieux » que la loi générale et, pour autant, respecter la loi générale.

Exemple 1 :

La matrice  $I_n$ ,  $n$  pair, vérifie :  $I_n^1 = I_n$ . Sa puissance de bouclage vaut donc 1.

$I_n$  vérifie aussi :  $I_n^{2^{\rho(n)+1}} = I_n$ , conformément au Théorème 6-7 (\*).

Exemple 2 :

La matrice  $J_n$ ,  $n$  pair, vérifie :  $J_n^2 = I_n$ . Sa puissance de bouclage vaut donc 2.

$J_n$  vérifie aussi :  $J_n^{2^{\rho(n)+1}} = I_n$ , conformément au Théorème 6-7 (\*).

(\*) *Remarque* :  $\rho(n) \geq 1 \Rightarrow \rho(n) + 1 \geq 2 \Rightarrow 2^{\rho(n)+1} - 2 \geq 2$ .

5. Hormis le cas très particulier de la matrice nulle, matrice pour laquelle :  $O_n^2 = O_n$ , je n'ai pas trouvé de matrice  $A$  non inversible de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  pair, ayant pour puissances de bouclage  $(1, k_2)$ , c. à d. telle que l'on ait :  $A^{k_2} = A$ . Il serait intéressant d'établir s'il existe, hormis la matrice nulle, des matrices non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  pair, telles que  $k_1 = 1$ .



Étude pour  $n = 2, n = 4, n = 6, n = 8, n = 10, n = 12, n = 14, n = 16$

$n = 2$  : Nous avons démontré que :  $\rho(2) = 1$ . Donc :  $2^{\rho(2)+1} = 4$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_2(B)$  vérifie la relation :

$$A^4 = A^2$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_2(B)$  vérifie la relation :

$$A^2 = I_2$$

$n = 4$  : Nous avons démontré que :  $\rho(4) = 2$ . Donc :  $2^{\rho(4)+1} = 8$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_4(B)$  vérifie la relation :

$$A^8 = A^2$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_4(B)$  vérifie la relation :

$$A^6 = I_4$$

$n = 6$  : Nous avons démontré que :  $\rho(6) = 3$ . Donc :  $2^{\rho(6)+1} = 16$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_6(B)$  vérifie la relation :

$$A^{16} = A^2$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_6(B)$  vérifie la relation :

$$A^{14} = I_6$$

$n = 8$  : Nous avons démontré que :  $\rho(8) = 3$ . Donc  $2^{\rho(8)+1} = 16$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_8(B)$  vérifie la relation :

$$A^{16} = A^2$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_8(B)$  vérifie la relation :

$$A^{14} = I_8$$

$n = 10$  : Nous avons démontré que :  $\rho(10) = 5$ . Donc :  $2^{\rho(10)+1} = 64$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{10}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{64} = A^2$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{10}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{62} = I_{10}$$

$n = 12$  : Nous avons démontré que :  $\rho(12) = 6$ . Donc :  $2^{\rho(12)+1} = 128$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{12}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{128} = A^2$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{12}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{126} = I_{12}$$

$n = 14$  : Nous avons démontré que :  $\rho(14) = 4$ . Donc :  $2^{\rho(14)+1} = 32$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{14}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{32} = A^2$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{14}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{30} = I_{14}$$

$n = 16$  : Nous avons démontré que :  $\rho(16) = 4$ . Donc :  $2^{\rho(16)+1} = 32$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{16}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{32} = A^2$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{16}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{30} = I_{16}$$

### 6.5.2. $n$ impair

Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair.  $n$  pair. (On vérifiera que tout ce qui suit s'applique pour  $A = O_n$ ).

Soit  $\|A^2\|$  la signature réduite de  $A$ .

On peut écrire la succession d'égalités :

$$\begin{aligned} \langle A^4 \rangle &= R_{(n)} \langle A^2 \rangle \quad (\text{par définition même de la matrice } R_{(n)}). \\ \langle A^8 \rangle &= R_{(n)} \langle A^4 \rangle \\ \langle A^{16} \rangle &= R_{(n)} \langle A^8 \rangle \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On aboutit ainsi, par récurrence immédiate, au théorème suivant.

**Théorème 6-10.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair et  $\forall i \in \mathbb{N} : \langle A^{2^{i+1}} \rangle = R_{(n)}^i \langle A^2 \rangle$ .

*Remarque :*

La relation ci-dessus s'applique pour  $n = 1$  et reste trivialement vraie pour  $i = 0$ .

Nous allons écarter dans le raisonnement qui suit le cas particulier  $n = 1$  dans la mesure où la matrice  $R_{(1)}$  est inversible.

Comme  $n$  est impair ( $n \neq 1$ ), nous sommes donc dans un cas de figure où la matrice  $R_{(n)}$  est non inversible.

Soit donc  $(\rho_1(n), \rho_2(n))$ ,  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$ , avec :  $\rho_2(n) > \rho_1(n)$ , le couple d'entiers minimal correspondant aux puissances de bouclage de  $R_{(n)}$  (cf. Théorème 6-4 de la Section 6.4.2.).

On a donc :  $R_{(n)}^{\rho_2(n)} = R_{(n)}^{\rho_1(n)}$ .

Par suite :  $R_{(n)}^{\rho_2(n)} \langle A^2 \rangle = R_{(n)}^{\rho_1(n)} \langle A^2 \rangle$

Le Théorème 6-10 ci-dessus entraîne :  $\langle A^{2^{\rho_2(n)+1}} \rangle = \langle A^{2^{\rho_1(n)+1}} \rangle$ .

Les signatures réduites de  $A^{2^{\rho_2(n)+1}}$  et de  $A^{2^{\rho_1(n)+1}}$  étant égales, ces matrices sont égales (cf. Remarque 2 de la Section 5.5. du Chapitre 5).

On peut donc énoncer le théorème suivant.

**Théorème 6-11.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ):  $A^{2^{\rho_2(n)+1}} = A^{2^{\rho_1(n)+1}}$ , où  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  désignent les puissances de bouclage de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ .

Plaçons-nous maintenant dans le cas où  $A$  est inversible.

**Théorème 6-12.**  $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ):  $A^{2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1}} = I_n$ , où  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  désignent les puissances de bouclage de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ .

*Preuve :* Immédiate.

**Théorème 6-13.** Le couple minimal  $(k_1, k_2)$  constituant les puissances de bouclage d'une matrice non inversible de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), est tel que :

$$0 < k_1 \leq 2^{\rho_1(n)+1} \quad \text{et} \quad k_1 < k_2 \leq 2^{\rho_2(n)+1}$$

où  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  désignent les puissances de bouclage de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ .

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 6-11 ci-dessus.

**Théorème 6-14.** La puissance minimale de bouclage  $k_2$  d'une matrice inversible de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), est telle que :

$$k_2 \text{ divise } 2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1}$$

où  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  désignent les puissances de bouclage de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ .

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 6-12 ci-dessus.

Démonstration identique à celle du Théorème 6-9.

*Remarques :*

1. Le Théorème 6-11 est général : il énonce une propriété commune à toutes les matrices inversibles et non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ).
2. Le Théorème 6-13 énonce une propriété commune à toutes les matrices non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ).
3. Les Théorèmes 6-12 et 6-14 énoncent une propriété commune à toutes les matrices inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ).

4. Une matrice particulière de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), peut fort bien avoir des puissances de bouclage inférieures aux exposants apparaissant dans le Théorème 6-11 (ou dans le Théorème 6-12 si cette matrice est inversible). Nous dirons, dans ce cas, que la matrice concernée « fait mieux » que la loi générale. Néanmoins, quand tel est le cas, cette matrice vérifie aussi la relation définie par le Théorème 6-11 (ou par le Théorème 6-12 si cette matrice est inversible).

Il n'y a donc aucune contradiction entre « faire mieux » que la loi générale et, pour autant, respecter la loi générale.

Exemple 1 :

La matrice  $I_n$ ,  $n$  impair, vérifie :  $I_n^1 = I_n$ . Sa puissance de bouclage vaut donc 1.

$I_n$  vérifie aussi :  $I_n^{2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1}} = I_n$ , conformément au Théorème 6-12 (\*).

Exemple 2 :

La matrice  $J_n$ ,  $n$  impair, vérifie :  $J_n^2 = I_n$ . Sa puissance de bouclage vaut donc 2.

$J_n$  vérifie aussi :  $J_n^{2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1}} = I_n$ , conformément au Théorème 6-12 (\*).

(\* *Remarque :*

Notons que :  $\rho_2(n) \geq \rho_1(n) + 1 \Rightarrow \rho_2(n) + 1 \geq \rho_1(n) + 2 \Rightarrow$   
 $2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1} \geq 2^{\rho_1(n)+2} - 2^{\rho_1(n)+1}$ , et comme :  $\rho_1(n) \geq 1$ ,  
 $2^{\rho_2(n)+1} - 2^{\rho_1(n)+1} \geq 2^3 - 2^2 = 4$ .

Exemple 3 :

$n$  étant impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), intéressons-nous à la matrice particulière  $B_{\nu+1}$  de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ . Cette matrice a deux axes de symétrie médians, horizontal et vertical. Ceci entraîne clairement que  $B_{\nu+1}$  est non inversible.

On a :

$$B_{\nu+1}^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-3} + B_{2\nu-1} + B_{2\nu+1} = \sum_{i=0}^{\nu} B_{2i+1} \quad (\nu+1 \text{ termes})$$

et :

$$B_{\nu+1}^4 = B_1^2 + B_3^2 + B_5^2 + \dots + B_{2\nu-3}^2 + B_{2\nu-1}^2 + B_{2\nu+1}^2 = \sum_{i=0}^{\nu} B_{2i+1}^2 \quad (\nu+1 \text{ termes}).$$

Par ailleurs :  $B_1^2 = B_{2\nu+1}^2$ ,  $B_3^2 = B_{2\nu-1}^2$ ,  $B_5^2 = B_{2\nu-3}^2$ , ... etc.

La valeur de  $B_{\nu+1}^4$  dépend de l'existence ou non d'un terme médian dans la somme

$\sum_{i=0}^{\nu} B_{2i+1}^2$ , ce qui nous amène à distinguer 2 cas, suivant le cas où  $\nu$  est pair ou impair.

- Si  $n = 4p + 1$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  (soit :  $\nu = 2p$ ) :  $B_{\nu+1}^4 = B_{\nu+1}^2$  (a).

- Si  $n = 4p + 3$ ,  $p \in \mathbb{N}$  (soit :  $\nu = 2p + 1$ ) :  $B_{\nu+1}^4 = O_n$  (b).

Or, d'après le Théorème 6-11 ci-dessus, on a :

$\forall A \in \mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair :  $A^{2^{\rho_2(n)+1}} = A^{2^{\rho_1(n)+1}}$  (où  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$  et  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  désignent les puissances de bouclage de la matrice non inversible  $R_{(n)}$ ).

Or :  $\rho_1(n) \geq 1 \Rightarrow \rho_1(n) + 1 \geq 2 \Rightarrow 2^{\rho_1(n)+1} \geq 4$

$\rho_2(n) \geq 2 \Rightarrow \rho_2(n) + 1 \geq 3 \Rightarrow 2^{\rho_2(n)+1} \geq 8$ .

On constate que les relations (a) ou (b) ci-dessus sont donc bien compatibles avec la

loi générale :  $A^{2^{\rho_2(n)+1}} = A^{2^{\rho_1(n)+1}}$ .

6. Hormis le cas très particulier de la matrice nulle, matrice pour laquelle :  $O_n^2 = O_n$ , je n'ai pas trouvé de matrice  $A$  non inversible de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), ayant pour puissances de bouclage  $(1, k_2)$ , c. à d. telle que l'on ait :  $A^{k_2} = A$ .

Il serait intéressant d'établir s'il existe, hormis la matrice nulle, des matrices non inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), telles que  $k_1 = 1$ .

Etude pour  $n = 1, n = 3, n = 5, n = 7, n = 9, n = 11, n = 13, n = 15$

$n = 1$  : Nous avons été amené à écarter de l'étude générale le cas particulier  $n = 1$ . La raison de cette mise à l'écart tient au fait, comme nous l'avons déjà dit, que la matrice  $R(1) = [1]$  est la seule matrice  $R_{(n)}$ ,  $n$  impair, qui soit inversible.

Il est vrai qu'il n'y a pas vraiment lieu d'établir une loi générale pour un ensemble ne contenant que deux matrices :  $O_1 = [0]$  et  $I_1 = [1]$ . S'il fallait en énoncer une, en posant  $A = O_1 = [0]$  ou  $A = I_1 = [1]$ , il est facile de constater qu'elles vérifient toutes deux la relation :  $A^2 = A$ .

$n = 3$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(3) = 1, \rho_2(3) = 2$ .

Donc :  $2^{\rho_1(3)+1} = 4$  et  $2^{\rho_2(3)+1} = 8$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_3(B)$  vérifie la relation :

$$A^8 = A^4$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_3(B)$  vérifie la relation :

$$A^4 = I_3$$

$n = 5$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(5) = 1, \rho_2(5) = 2$ .

Donc :  $2^{\rho_1(5)+1} = 4$  et  $2^{\rho_2(5)+1} = 8$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_5(B)$  vérifie la relation :

$$A^8 = A^4$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_5(B)$  vérifie la relation :

$$A^4 = I_5$$

$n = 7$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(7) = 2, \rho_2(7) = 3$ .

Donc :  $2^{\rho_1(7)+1} = 8$  et  $2^{\rho_2(7)+1} = 16$ . En conséquence :

Toute matrice A, inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_7(B)$  vérifie la relation :

$$A^{16} = A^8$$

Toute matrice A inversible de  $\mathcal{BSC}_7(B)$  vérifie la relation :

$$A^8 = I_7$$

$n = 9$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(9) = 1$ ,  $\rho_2(9) = 3$ .

Donc :  $2^{\rho_1(9)+1} = 4$  et  $2^{\rho_2(9)+1} = 16$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_9(B)$  vérifie la relation :

$$A^{16} = A^4$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_9(B)$  vérifie la relation :

$$A^{12} = I_9$$

$n = 11$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(11) = 2$ ,  $\rho_2(11) = 3$ .

Donc :  $2^{\rho_1(11)+1} = 8$  et  $2^{\rho_2(11)+1} = 16$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{11}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{16} = A^8$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{11}(B)$  vérifie la relation :

$$A^8 = I_{11}$$

$n = 13$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(13) = 1$ ,  $\rho_2(13) = 4$ .

Donc :  $2^{\rho_1(13)+1} = 4$  et  $2^{\rho_2(13)+1} = 32$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{13}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{32} = A^4$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{13}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{28} = I_{13}$$

$n = 15$  : Nous avons démontré que :  $\rho_1(15) = 3$ ,  $\rho_2(15) = 4$ .

Donc :  $2^{\rho_1(15)+1} = 16$  et  $2^{\rho_2(15)+1} = 32$ . En conséquence :

Toute matrice  $A$ , inversible ou non, de  $\mathcal{BSC}_{15}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{32} = A^{16}$$

Toute matrice  $A$  inversible de  $\mathcal{BSC}_{15}(B)$  vérifie la relation :

$$A^{16} = I_{15}$$



## 6.6. Autre formulation des Théorèmes 6-6, 6-7, 6-11 et 6-12

Nous allons énoncer, sous une forme strictement équivalente et en les regroupant, les Théorèmes 6-6, 6-7, 6-11 et 6-12 précédemment établis.

### **Théorème 6-15.**

Désignons par  $\rho(n)$  la puissance de bouclage de la matrice inversible  $R_{(n)}$ ,  $n$  pair.

Toutes les matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  pair, ont comme polynôme annulateur commun le polynôme de  $B[X] : X^{2^{\rho(n)+1}} - X^2$ .

Toutes les matrices inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  pair, ont comme polynôme annulateur commun le polynôme de  $B[X] : X^{2^{\rho(n)+1}-2} - 1$ .

Désignons par  $\rho_1(n) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho_2(n) \in \mathbb{N}^*$  les puissances de bouclage de la matrice inversible  $R_{(n)}$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ).

Toutes les matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), ont comme polynôme annulateur commun le polynôme de  $B[X] : X^{2^{\rho_2(n)+1}} - X^{2^{\rho_1(n)+1}}$ .

Toutes les matrices inversibles de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  impair ( $n \neq 1$ ), ont comme polynôme annulateur commun le polynôme de  $B[X] : X^{2^{\rho_2(n)+1}-2^{\rho_1(n)+1}} - 1$ .

### *Remarques*

L'existence d'un polynôme annulateur commun à toutes les matrices de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ ,  $n$  pair ou  $n$  impair, n'a rien de surprenant. On peut en effet affirmer que, beaucoup plus généralement, toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(B)$ , admettent un polynôme annulateur commun (et de ce fait une infinité de polynômes annulateurs communs puisque tout polynôme multiple d'un polynôme annulateur est lui aussi un polynôme annulateur).

La démonstration de cette proposition est immédiate : toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(B)$  a comme polynôme annulateur  $\chi_A$ , le polynôme caractéristique de  $A$ .

Soit alors :  $\Pi = \text{ppcm} \{ \chi_A, A \in \mathcal{M}_n(B) \}$ .

$\Pi$  est clairement un polynôme annulateur commun à toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(B)$ .

## ANNEXE 1 / CHAPITRE 6

### THÉORÈME FONDAMENTAL DES MATRICES CARRÉES À ÉLÉMENTS DANS $\mathcal{B}$

**Théorème Fondamental et Définitions associées** Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ .

- 1) Il existe une infinité de couples d'entiers  $(\xi_1, \xi_2) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)$ ,  $\xi_2 > \xi_1$ , tels que :

$$A^{\xi_2} = A^{\xi_1}$$

Désignons par  $\{\xi_1\}$  l'ensemble des entiers de  $\mathbb{N}$  figurant à gauche dans l'ensemble des couples  $(\xi_1, \xi_2)$  définis ci-dessus, et par  $\{\xi_2\}$  l'ensemble des entiers de  $\mathbb{N}^*$  figurant à droite dans l'ensemble des couples  $(\xi_1, \xi_2)$  définis ci-dessus.

- 2) Si l'on désigne par  $k_1$  le plus petit élément de l'ensemble  $\{\xi_1\}$ , il existe une infinité d'entiers  $\xi_2 \in \mathbb{N}$ , avec  $\xi_2 > k_1$ , tels que :

$$A^{\xi_2} = A^{k_1}$$

- 3) Si l'on désigne par  $k_2$  le plus petit élément de l'ensemble  $\{\xi_2\}$ , il existe un couple d'entiers unique  $(k_1, k_2) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)$ ,  $k_2 > k_1$ , tel que :

$$A^{k_2} = A^{k_1}$$

On appelle ce couple d'entiers  $(k_1, k_2) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)$ ,  $k_2 > k_1$ , le couple d'entiers minimal réalisant l'égalité :  $A^{k_2} = A^{k_1}$ .

- 4) Si  $A$  est inversible, alors :  $k_1 = 0$ . Dans ce cas :  $\exists k_2 \in \mathbb{N}^*$ , unique minimal, tel que :

$$A^{k_2} = I_n \quad (I_n \text{ désigne la matrice-unité de } \mathcal{M}_n(\mathcal{B})).$$

On a alors :  $A^{-1} = A^{k_2-1}$ .

Si  $A$  est non inversible, alors :  $k_1 \in \mathbb{N}^*$  c. à d.  $k_1 > 0$ .

- 5) Les entiers  $k_1$  et  $k_2$  ainsi définis sont dénommés puissances de bouclage, inférieure et supérieure, relatives à la matrice  $A$ .

La puissance de bouclage inférieure  $k_1$  d'une matrice  $A$  inversible étant nulle, sa puissance de bouclage supérieure  $k_2$  sera fréquemment désignée comme étant la puissance de bouclage de la matrice  $A$ .

*Remarque :* La démonstration de ce de ce théorème n'est pas très difficile. Elle est essentiellement fondée sur le fait que  $\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$  est un ensemble de cardinal fini.

Une version plus élaborée du Théorème Fondamental des matrices carrées à éléments dans  $\mathcal{B}$  apporte des précisions concernant les matrices non inversibles. Il énonce en particulier l'inégalité suivante :  $k_1 \leq r(A) + 1 \leq n$ , où  $r(A)$  désigne le rang de  $A$ . Ce point fera l'objet d'une publication ultérieure.



## CHAPITRE 7

### Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ symétriques par rapport aux axes médians – Matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ symétriques par rapport aux axes médians

#### 7.1. Définitions, notations, propriétés générales

Note : Dans tout le présent chapitre :  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition 7-1.** Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ).

On appelle matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian vertical la matrice  $A' = [a'_{ij}]$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ) obtenue en opérant une symétrie des éléments de  $A$  par rapport à son axe médian vertical.

On a donc, par définition même :  $\forall i = 1 \text{ à } n, \forall j = 1 \text{ à } p : a'_{ij} = a_{i, p-j+1}$ .

*Remarques :*

Si  $p$  est pair ( $p = 2\pi, \pi \in \mathbb{N}^*$ ) l'axe médian vertical de  $A$  (ainsi que celui de  $A'$ ) passe entre les  $\pi^{\text{ème}}$  et  $(\pi+1)^{\text{ème}}$  colonnes de  $A$  (et de  $A'$ ).

Si  $p$  est impair ( $p = 2\pi + 1, \pi \in \mathbb{N}$ ) l'axe médian vertical de  $A$  (ainsi que celui de  $A'$ ) se confond avec la  $(\pi+1)^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  (et de  $A'$ ).

**Définition 7-2.** Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ).

On appelle matrice symétrique de  $A$  par rapport à son axe médian horizontal la matrice  $A'' = [a''_{ij}]$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ) obtenue en opérant une symétrie des éléments de  $A$  par rapport à son axe médian horizontal.

On a donc, par définition même :  $\forall i = 1 \text{ à } n, \forall j = 1 \text{ à } p : a''_{ij} = a_{n-i+1, j}$ .

*Remarques :*

Si  $n$  est pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ) l'axe médian horizontal de  $A$  (ainsi que celui de  $A''$ ) passe entre les  $\nu^{\text{ème}}$  et  $(\nu+1)^{\text{ème}}$  lignes de  $A$  (et de  $A''$ ).

Si  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ) l'axe médian horizontal de  $A$  (ainsi que celui de  $A''$ ) se confond avec la  $(\nu+1)^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  (et de  $A''$ ).

Exemple :

Soit  $A$  la matrice générale de  $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{B})$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}. \text{ On a alors :}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}.$$

**Définition 7-3.** Soit  $A = [a_{i,j}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ).

$A$  est dite symétrique par rapport à son axe médian vertical, si elle est égale à sa matrice symétrique par rapport à son axe médian vertical.

On a alors :  $\forall i = 1 \text{ à } n, \forall j = 1 \text{ à } p : a_{i,j} = a_{i,p-j+1}$  (v).

On dira aussi que la matrice  $A$  présente une symétrie médiane d'axe vertical, ou, en abrégé, que la matrice  $A$  est « smav ».

**Définition 7-4.** Soit  $A = [a_{i,j}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ).

$A$  est dite symétrique par rapport à son axe médian horizontal, si elle est égale à sa matrice symétrique par rapport à son axe médian horizontal.

On a alors :  $\forall i = 1 \text{ à } n, \forall j = 1 \text{ à } p : a_{i,j} = a_{n-i+1,j}$  (h).

On dira aussi que la matrice  $A$  présente une symétrie médiane d'axe horizontal, ou, en abrégé, que la matrice  $A$  est « smah ».

**Définition 7-5.** Soit  $A = [a_{i,j}]$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ).

$A$  est dite symétrique par rapport à ses deux axes médians (vertical et horizontal), si elle est à la fois égale à sa matrice symétrique par rapport à son axe médian vertical et à sa matrice symétrique par rapport à son axe médian horizontal.

Les éléments  $a_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ) de  $A$  satisfont alors simultanément aux relations (v) et (h) ci-dessus.

On dira aussi que la matrice  $A$  présente une double symétrie médiane ou, en abrégé, que la matrice  $A$  est « sm ».

*Remarques :*

Toutes ces définitions demeurent valables si

- $p = 1$ , c. à d. si  $A$  est une matrice-colonne (notons qu'elle est alors *ipso facto* smav),
- $n = 1$ , c. à d. si  $A$  est une matrice-ligne (notons qu'elle est alors *ipso facto* smah),
- $n = p$ , c. à d. si  $A$  est une matrice carrée.

*Note :*

Dans le cas particulier  $n = p = 1$ , les deux matrices de  $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{B})$ , à savoir  $[0]_1$  et  $[1]_1$ , sont smav, smah et donc sm.

**Définitions 7-6.** Nous désignerons par :

$\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices smav de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ ,

$\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices smah de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ ,

$\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices sm de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Toutes ces notations demeurent valables pour les matrices-colonnes ( $p = 1$ ), les matrices-lignes ( $n = 1$ ) et les matrices carrées ( $n = p$ ).

**Théorème 7-7.**

$\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}$  (B),  $\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}$  (B) et  $\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}$  (B) sont des sev de  $\mathcal{M}_{n,p}$  (B).

$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}$  (B)) =  $n\pi$ , si  $p$  est pair ( $p = 2\pi$ ,  $\pi \in \mathbb{N}^*$ ),

$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}$  (B)) =  $n(\pi+1)$ , si  $p$  est impair ( $p = 2\pi+1$ ,  $\pi \in \mathbb{N}$ ).

$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}$  (B)) =  $\nu p$ , si  $n$  est pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ),

$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}$  (B)) =  $(\nu+1)p$ , si  $n$  est impair ( $n = 2\nu+1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ).

$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}$  (B)) =  $\nu\pi$ , si  $n$  et  $p$  pairs,

$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}$  (B)) =  $\nu(\pi+1)$ , si  $n$  pair,  $p$  impair,

$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}$  (B)) =  $(\nu+1)\pi$ , si  $n$  impair,  $p$  pair,

$\dim(\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}$  (B)) =  $(\nu+1)(\pi+1)$ , si  $n$  et  $p$  impairs.

En particulier, s'agissant des matrices carrées d'ordre  $n$  (si donc :  $n = p \in \mathbb{N}^*$ ) :

$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AV}$  (B)) =  $2\nu^2$ , si  $n$  est pair,

$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AV}$  (B)) =  $2\nu(\nu+1)$ , si  $n$  est impair,

$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AH}$  (B)) =  $2\nu^2$ , si  $n$  est pair,

$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AH}$  (B)) =  $2\nu(\nu+1)$ , si  $n$  est impair,

$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}$  (B)) =  $\nu^2$ , si  $n$  est pair,

$\dim(\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}$  (B)) =  $(\nu+1)^2$ , si  $n$  est impair.

*Preuve* : immédiate.

*Remarques* :

Comme toute matrice-colonne est smav, on a :  $\mathcal{M}_{n,1}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}$  (B) =  $\mathcal{M}_{n,1}/\mathcal{SM}$  (B).

Comme toute matrice-ligne est smah, on a :  $\mathcal{M}_{1,p}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}$  (B) =  $\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{SM}$  (B).

Exemples :

1) Comme indiqué antérieurement, les matrices  $[0]_1$  et  $[1]_1$ , sont smav, smah et donc sm.

Plus généralement, la matrice nulle  $O_{n,p}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ) est smav, smah et donc sm.

En revanche la matrice-unité  $I_n$  d'ordre  $n$  (pour  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) n'est ni smav, ni smah, ni *a fortiori* sm,

2) Dans tout ce qui suit les lettres minuscules désignent des éléments de B.

$$\begin{bmatrix} a & b & b & a \\ a' & b' & b' & a' \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}$$
 (B),

$$\begin{bmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ b & b' & b'' & b''' \\ a & a' & a'' & a''' \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}$$
 (B),

$$\begin{bmatrix} a & b & c & c & b & a \\ a' & b' & c' & c' & b' & a' \\ a & b & c & c & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,6}/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}/\mathcal{SM}(\mathbb{B}), \quad [a \ b \ c \ b \ a] \in \mathcal{M}_{1,5}/\mathcal{SM}(\mathbb{B}) \quad (*).$$

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B}), \quad \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B}), \quad \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2/\mathcal{SM}(\mathbb{B}).$$

$$\begin{bmatrix} a & b & a \\ a' & b' & a' \\ a & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3/\mathcal{SM}(\mathbb{B}), \quad \begin{bmatrix} a & b & b & a \\ a' & b' & b' & a' \\ a' & b' & b' & a' \\ a & b & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4/\mathcal{SM}(\mathbb{B}).$$

(\*) Rappelons que toute matrice-colonne est *ipso facto* smav et que toute matrice-ligne est *ipso facto* smah.

### Matrice $J_n$

Nous avons déjà introduit (cf. Chapitres 1 et 4) la matrice  $J_n$  d'ordre  $n$ .

**Définition 7-8.**  $J_n = [g_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ) est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) dont les seuls éléments non nuls sont ceux de la  $2^{\text{ème}}$  diagonale :

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_n.$$

On a donc :  $g_{ij} = 1$  si  $i + j = n + 1$  et  $g_{ij} = 0$  si  $i + j \neq n + 1$ .

*Remarque 1 :*

$J_n$  est symétrique ou encore 1-symétrique ( $J_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ ) ou encore 1- $\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ ),

$J_n$  est 2-symétrique ( $J_n \in 2\text{-}\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ ),

$J_n$  est bisymétrique ( $J_n \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ ).

De plus :  $J_n \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Rappelons que  $J_n = B_n$  (où  $\{B_i\}, 1 \leq i \leq n$ , désigne la « base canonique » de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ).

*Remarque 2 :*

Pas plus que  $J_n$ , la matrice  $J_n$  n'est ni smav, ni smah, ni *a fortiori* sm,  $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ .

Cependant la matrice  $J_n$  joue un rôle important dans l'étude des matrices admettant une symétrie par rapport à l'un de ses axes médians.

Se reporter au Chapitre 1 et au début du Chapitre 4 pour un rappel des principales propriétés de la matrice  $J_n$ .

**Théorème 7-9.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ .

- (1)  $A \in \mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(\mathbb{B}) \Leftrightarrow A \cdot J_n = A$ .
- (2)  $A \in \mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(\mathbb{B}) \Leftrightarrow J_n \cdot A = A$ .
- (3)  $A \in \mathcal{M}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Leftrightarrow A \cdot J_n = J_n \cdot A = A$ .

*Preuve :*

Démontrons le Point (1). Posons :

$$A = [a_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

$$J_n = [g_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

$$P = A \cdot J_n = [p_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n).$$

$$\text{On a donc : } p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} g_{kj}.$$

Concernant  $J_n$  :  $g_{kj} = 1$  pour  $k+j = n+1$ ,  $g_{kj} = 0$  pour  $k+j \neq n+1$ .

Le seul terme non nul dans le signe  $\sum$  ci-dessus correspond donc à  $k = n-j+1$ .

$$\text{Par suite : } p_{ij} = a_{i, n-j+1}.$$

$$\text{Or : } A \cdot J_n = A \Rightarrow a_{i, n-j+1} = a_{ij}.$$

Il en découle que  $A$  est smav (cf. Définition 7-3).

La réciproque est immédiate.

Démontrons le Point (2). Posons :

$$A = [a_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

$$J_n = [g_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

$$Q = J_n \cdot A = [q_{ij}] \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n).$$

$$\text{On a donc : } q_{ij} = \sum_{k=1}^n g_{ik} a_{kj}.$$

Concernant  $J_n$  :  $g_{ik} = 1$  pour  $i+k = n+1$ ,  $g_{ik} = 0$  pour  $i+k \neq n+1$ .

Le seul terme non nul dans le signe  $\sum$  ci-dessus correspond donc à  $k = n-i+1$ .

$$\text{Par suite : } q_{ij} = a_{n-i+1, j}.$$

$$\text{Comme : } J_n \cdot A = A \Rightarrow a_{n-i+1, j} = a_{ij}.$$

Il en découle que  $A$  est smah (cf. Définition 7-4).

La réciproque est immédiate.

Le Point (3) découle directement des Points (1) et (2) ci-dessus.



**Théorème 7-10.** *Le déterminant de toute matrice de  $\mathcal{M}_n/SMAV$  (B), le déterminant de toute matrice de  $\mathcal{M}_n/SMA\mathcal{H}$  (B) et le déterminant de toute matrice de  $\mathcal{M}_n/S\mathcal{M}$  (B), d'ordre  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ , est nul. Toutes ces matrices sont donc non-inversibles.*

*Pour  $n = 1$  :  $\det ([ 0 ]_1) = 0$ , mais  $\det ([ 1 ]_1) = 1$ .*

*Note :* La matrice  $[ 1 ]_1$  est donc la seule matrice symétrique par rapport à ses axes médians dont le déterminant n'est pas nul.

*Preuve :*

Pour  $n \geq 2$ , toutes ces matrices ont, par définition même, deux de leurs lignes ou deux de leur colonnes égales, ce qui suffit à entraîner la nullité de leur déterminant.

## 7.2. Propriétés générales de la multiplication matricielle mettant en jeu des matrices symétriques par rapport à un axe médian

Cette section ne prétend pas mener à bien une étude exhaustive de la multiplication matricielle de matrices symétriques par rapport à l'un de leurs axes médians. Nous nous limiterons dans ce qui suit aux seules matrices carrées d'ordre  $n$  et nous nous contenterons de mettre en avant quelques propriétés significatives.

L'une de ces propriétés est que la symétrie par rapport à un axe médian est « propagée » par la multiplication matricielle. Lorsque l'on multiplie une matrice de  $\mathcal{M}_n$  (B) quelconque (ne présentant donc aucune propriété de symétrie par rapport à un axe médian) et une matrice de  $\mathcal{M}_n/SMAV$  (B) ou de  $\mathcal{M}_n/SMA\mathcal{H}$  (B), la matrice-produit résultant d'une telle multiplication (sous réserve que celle-ci soit effectuée dans l'ordre adéquat) est une matrice appartenant à  $\mathcal{M}_n/SMAV$  (B) ou de  $\mathcal{M}_n/SMA\mathcal{H}$  (B).

C'est ce que résument les théorèmes qui suivent.

**Théorème 7-11.**  $A \in \mathcal{M}_n/SMAV$  (B) et  $B \in \mathcal{M}_n$  (B)  $\Rightarrow BA \in \mathcal{M}_n/SMAV$  (B).

*Preuve :*

$A \in \mathcal{M}_n/SMAV$  (B)  $\Leftrightarrow A \cdot J_n = A$  (Cf. Point (1) du Théorème 7-9 ci-dessus).

Donc :  $BA = BA \cdot J_n$  et donc :  $BA \in \mathcal{M}_n/SMAV$  (B).

**Théorème 7-12.**  $A \in \mathcal{M}_n/SMA\mathcal{H}$  (B) et  $B \in \mathcal{M}_n$  (B)  $\Rightarrow AB \in \mathcal{M}_n/SMA\mathcal{H}$  (B).

*Preuve :*

$A \in \mathcal{M}_n/SMA\mathcal{H}$  (B)  $\Leftrightarrow J_n \cdot A = A$  (Cf. Point (2) du Théorème 7-9 ci-dessus).

Donc :  $AB = J_n \cdot AB$  et donc :  $AB \in \mathcal{M}_n/SMA\mathcal{H}$  (B).

**Théorème 7-13.**

$A \in \mathcal{M}_n/S\mathcal{M}$  (B) et  $B \in \mathcal{M}_n$  (B)  $\Rightarrow BA \in \mathcal{M}_n/SMAV$  (B) et  $AB \in \mathcal{M}_n/SMA\mathcal{H}$  (B).

*Si de plus  $AB = BA$  (autrement dit, si le produit  $AB$  est commutatif) :  $AB \in \mathcal{M}_n/S\mathcal{M}$  (B).*

*Preuve :*

$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B) \Rightarrow A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(B) \Rightarrow BA \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AV}(B)$  (cf. Théorème 7-11).

$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B) \Rightarrow A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(B) \Rightarrow BA \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}\mathcal{AH}(B)$  (cf. Théorème 7-12).

Enfin, si  $AB = BA$ , sachant que  $J_n \cdot A = A$  (puisque  $A$  est smah) et que  $A \cdot J_n = A$  (puisque  $A$  est smah) :  $J_n \cdot AB = AB = BA = BA \cdot J_n = AB \cdot J_n$ .

Le Point (3) du Théorème 7-9 permet de conclure que  $AB \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$ .

### 7.3. Multiplication matricielle dans $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$

Concernant les matrices de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$ ,  $n$  impair, il est commode d'utiliser la terminologie suivante.

**Définitions 7-14.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$ ,  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ).

$\forall i = 1$  à  $2\nu + 1$ , l'élément  $a_{i, \nu+1}$  de  $A$  sera dénommé élément central de la ligne  $i$ .

$\forall j = 1$  à  $2\nu + 1$ , l'élément  $a_{\nu+1, j}$  de  $A$  sera dénommé élément central de la colonne  $j$ .

La ligne  $\nu + 1$  sera dénommée ligne centrale de  $A$  : elle renferme tous les éléments centraux des  $2\nu + 1$  colonnes de  $A$ .

La colonne  $\nu + 1$  sera dénommée colonne centrale de  $A$  : elle renferme tous les éléments centraux des  $2\nu + 1$  lignes de  $A$ .

L'élément  $a_{\nu+1, \nu+1}$  situé à l'intersection de la ligne centrale et de la colonne centrale de  $A$  sera dénommé élément central de  $A$ .

Désignons comme d'habitude par  $O_n$  la matrice nulle d'ordre  $n$ .

**Théorème 7-15 - Théorème du produit de matrices de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$ .**

(1)  $A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$ ,  $B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$ ,  $n$  pair  $\Rightarrow A \cdot B = O_n$ .

(2)  $A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$ ,  $B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$ ,  $n$  impair  $\Rightarrow A \cdot B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$ .

Dans ce dernier cas ( $n$  impair), l'élément générique  $c_{i, j}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ) de la matrice  $C = A \cdot B$  vaut :  $c_{i, j} = a_{i, \nu+1} b_{\nu+1, j}$ .

(Les éléments de  $C = A \cdot B$  ne font intervenir que les éléments centraux des lignes de  $A$  et les éléments centraux des colonnes de  $B$ ).

De plus, si tous les éléments centraux des lignes de  $A$  ou si tous les éléments centraux des colonnes de  $B$  sont nuls, alors :  $A \cdot B = O_n$ .

*Preuve :*

Point (1) :  $n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ).

Soient :  $A = [a_{i, j}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu, 1 \leq j \leq 2\nu$ ),  $B = [b_{i, j}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu, 1 \leq j \leq 2\nu$ ).

Posons :  $C = A \cdot B = [c_{i, j}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu, 1 \leq j \leq 2\nu$ ).

On a :  $c_{i, j} = \sum_{k=1}^{2\nu} a_{i, k} b_{k, j} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{i, k} b_{k, j} + \sum_{k=\nu+1}^{2\nu} a_{i, k} b_{k, j}$ .

$$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \text{ smav} \Rightarrow a_{ik} = a_{i \ 2\nu-k+1} \quad (\text{cf. Définition 7-3}).$$

$$B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow B \text{ smah} \Rightarrow b_{kj} = b_{2\nu-k+1 \ j} \quad (\text{cf. Définition 7-4}).$$

$$\text{Et donc : } c_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=\nu+1}^{2\nu} a_{i \ 2\nu-k+1} b_{2\nu-k+1 \ j}.$$

Dans le 2<sup>ème</sup> signe  $\sum$ , procédons au changement d'indice  $k' = \nu - k + 1$ . Il vient :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k'=1}^{\nu} a_{i \ k'} b_{k' \ j} = 0.$$

Le Point (1) est donc démontré.

Point (2) :  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ).

Soient :  $A = [a_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu + 1, 1 \leq j \leq 2\nu + 1$ ),  $B = [b_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu + 1, 1 \leq j \leq 2\nu + 1$ ).

Posons :  $C = A \cdot B = [c_{ij}]$  ( $1 \leq i \leq 2\nu + 1, 1 \leq j \leq 2\nu + 1$ ).

$$\text{On a : } c_{ij} = \sum_{k=1}^{2\nu+1} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + a_{i \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j} + \sum_{k=\nu+2}^{2\nu+1} a_{ik} b_{kj}.$$

$$A \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow A \text{ smav} \Rightarrow a_{ik} = a_{i \ 2\nu-k+2} \quad (\text{cf. Définition 7-3}).$$

$$B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \Rightarrow B \text{ smah} \Rightarrow b_{kj} = b_{2\nu-k+2 \ j} \quad (\text{cf. Définition 7-4}).$$

$$\text{Et donc : } c_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + a_{i \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j} + \sum_{k=\nu+2}^{2\nu+1} a_{i \ 2\nu-k+2} b_{2\nu-k+2 \ j}.$$

Dans le 2<sup>ème</sup> signe  $\sum$ , procédons au changement d'indice  $k' = \nu - k + 2$ . Il vient :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + a_{i \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j} + \sum_{k'=1}^{\nu} a_{i \ k'} b_{k' \ j} = a_{i \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j}.$$

Cette relation fournit l'élément « générique » de la matrice produit  $A \cdot B$ . On constate bien que les éléments de  $A \cdot B$  ne font intervenir que les éléments centraux des lignes de  $A$  et les éléments centraux des colonnes de  $B$ .

Si tous les éléments centraux des lignes de  $A$  ou si tous les éléments centraux des colonnes de  $B$  sont nuls (\*), c.-à-d. si :  $a_{i \ \nu+1} = 0$  ( $1 \leq i \leq 2\nu + 1$ ), ou si :  $b_{\nu+1 \ j} = 0$  ( $1 \leq j \leq 2\nu + 1$ ), alors :  $c_{ij} = 0$  ( $1 \leq i \leq 2\nu + 1, 1 \leq j \leq 2\nu + 1$ ), et donc :  $A \cdot B = O_n$ .

Reste à démontrer que le produit  $A \cdot B$  est symétrique par rapport à ses 2 axes médians. Il s'agit donc d'établir, pour  $1 \leq i \leq 2\nu + 1$  et  $1 \leq j \leq 2\nu + 1$ , les égalités suivantes :

$$c_{ij} = c_{2\nu-i+2 \ j} \quad \text{et} \quad c_{ij} = c_{i \ 2\nu-j+2}.$$

$$c_{2\nu-i+2 \ j} = a_{2\nu-i+2 \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j}, \text{ et comme } A \text{ est smah : } a_{2\nu-i+2 \ \nu+1} = a_{i \ \nu+1}.$$

Donc :  $c_{2\nu-i+2 \ j} = a_{i \ \nu+1} b_{\nu+1 \ j} = c_{ij}$ . On en conclut que  $C = A \cdot B$  est smah.

Calcul similaire pour démontrer que :  $c_{ij} = c_{i \ 2\nu-j+2}$  et donc que  $C = A \cdot B$  est smav.

Finalement :  $A \cdot B \in \mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

Le Point (2) est donc démontré.

(\*) *Note :*

Il s'agit là d'une condition suffisante, mais non nécessaire. Il faut et il suffit en effet, pour que l'élément  $c_{ij}$  soit nul, que l'un ou l'autre de ses facteurs ( $a_{i \ \nu+1}$  ou  $b_{\nu+1 \ j}$ ) soit nul.

Exemples :

$n = 3$

$$\begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ a & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' & a' \\ c' & d' & c' \\ a' & b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc' & bd' & bc' \\ dc' & dd' & dc' \\ bc' & bd' & bc' \end{bmatrix}$$

$n = 5$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & b & a \\ d & f & g & f & d \\ e & h & i & h & e \\ d & f & g & f & d \\ a & b & c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' & c' & b' & a' \\ d' & f' & g' & f' & d' \\ e' & h' & i' & h' & e' \\ d' & f' & g' & f' & d' \\ a' & b' & c' & b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ce' & ch' & ci' & ch' & ce' \\ ge' & gh' & gi' & gh' & ge' \\ ie' & ih' & ii' & ih' & ie' \\ ge' & gh' & gi' & gh' & ge' \\ ce' & ch' & ci' & ch' & ce' \end{bmatrix}$$

Comme nous l'avons démontré, n'interviennent dans les éléments de la matrice produit que les éléments centraux des lignes de la matrice de gauche et les éléments centraux des colonnes de la matrice de droite.

Il est également clair, dans le cas  $n = 5$  par exemple, que si  $c = g = i = 0$  ou si  $e' = h' = i' = 0$ , alors la matrice produit résultante est nulle.

Le théorème qui suit est une conséquence directe du Théorème 7-15 qui précède.

**Théorème 7-16.**

(1)  $A \in \mathcal{M}_n/\mathcal{SM}(B)$ ,  $n$  pair,  $\Rightarrow A^k = O_n$ ,  $\forall k \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ .

(2)  $A \in \mathcal{M}_n/\mathcal{SM}(B)$ ,  $n$  impair,  $\Rightarrow A^k \in \mathcal{M}_n/\mathcal{SM}(B)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

De plus, si tous les éléments centraux des lignes de  $A$  ou si tous les éléments centraux des colonnes de  $A$  sont nuls, alors :  $A^k = O_n$ ,  $\forall k \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ .

*Preuve :* Immédiate.

#### 7.4. Ensemble $\mathcal{BS}_n/\mathcal{SM}(B)$

**Théorème 7-17.** Soit  $A$  une matrice symétrique - ou encore 1-symétrique - ( $A \in \mathcal{S}_n(B)$  ou  $1\text{-}\mathcal{S}_n(B)$ ). Si  $A$  est smav (resp : smah), alors elle est automatiquement smah (resp : smav) et donc automatiquement bisymétrique et sm.

Soit  $A$  une matrice 2-symétrique ( $A \in 2\text{-}\mathcal{S}_n(B)$ ). Si  $A$  est smav (resp : smah), alors elle est automatiquement smah (resp : smav) et donc automatiquement bisymétrique et sm.

*Preuve :*

Ceci résulte du fait que la 1-transposition ou la 2-transposition transforme une symétrie verticale en une symétrie horizontale et *vice versa*.

**Définition 7-18.** Nous désignerons par  $\mathcal{BS}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices d'ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) tout à la fois bisymétriques et symétriques par rapport à leurs axes médians.

*Remarque concernant les notations :*

Les ensembles que l'on pourrait noter  $1-S_n/\mathcal{SM}\mathcal{H}(\mathbb{B})$ ,  $1-S_n/\mathcal{SM}\mathcal{V}(\mathbb{B})$ ,  $1-S_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,  $2-S_n/\mathcal{SM}\mathcal{H}(\mathbb{B})$ ,  $2-S_n/\mathcal{SM}\mathcal{V}(\mathbb{B})$ ,  $2-S_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ , ainsi que les ensembles  $\mathcal{BS}_n/\mathcal{SM}\mathcal{H}(\mathbb{B})$ ,  $\mathcal{BS}_n/\mathcal{SM}\mathcal{V}(\mathbb{B})$ , ne seront jamais désignés sous cette forme. Ils se confondent tous avec l'ensemble  $\mathcal{BS}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

Exemples :

$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BS}_1/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BS}_2/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BS}_3/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & b & a \\ b & c & c & b \\ b & c & c & b \\ a & b & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BS}_4/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & c & b & a \\ b & d & e & d & b \\ c & e & f & e & c \\ b & d & e & d & b \\ a & b & c & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BS}_5/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

**Théorème 7-19.** L'ensemble  $\mathcal{BS}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  est un sev de l'ensemble  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

- si  $n$  est pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) :  $\dim(\mathcal{BS}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ ,
- si  $n$  est impair ( $n = 2\nu+1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ) :  $\dim(\mathcal{BS}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ .

*Preuve :*

Ces résultats découlent de ceux établissant la dimension de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , en prenant en compte la propriété de symétrie par rapport aux axes médians. (Cf. Théorème 1-23 du Chapitre 1).

## 7.5. Ensemble $\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$

### 7.5.1. Propriétés générales

**Définition 7-20.** Nous désignerons par  $\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  l'ensemble des matrices d'ordre  $n$  de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  qui sont symétriques par rapport à leurs axes médians.

Exemples :

$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BSC}_1/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BSC}_2/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & a \\ b & 0 & b \\ a & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BSC}_3/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & b & a \\ b & a+b & a+b & b \\ b & a+b & a+b & b \\ a & b & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BSC}_4/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

$\begin{bmatrix} a & b & c & b & a \\ b & a+c & 0 & a+c & b \\ c & 0 & c & 0 & c \\ b & a+c & 0 & a+c & b \\ a & b & c & b & a \end{bmatrix}$  est la matrice « générique » de  $\mathcal{BSC}_5/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

**Théorème 7-21.** L'ensemble  $\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  est un sev de l'ensemble  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

- si  $n$  est pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) :  $\dim(\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \nu$ ,

- si  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ) :  $\dim(\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})) = \nu + 1$ .

*Preuve :* Immédiate.

*Remarque :*

Lorsque  $n$  est impair, il existe des matrices non nulles de  $\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  qui sont le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Ceci résulte des Théorèmes 5-7 et 5-8 du Chapitre 5.

Exemple :  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{BSC}_3/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  et  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

En revanche, lorsque  $n$  est pair, une matrice non nulle de  $\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(B)$  ne peut jamais être le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ . Ceci résulte directement des Théorèmes 5-5 et 5-6 du Chapitre 5. En effet, la symétrie par rapport aux axes médians impose l'existence dans la signature d'une telle matrice d'au moins un élément non nul d'indice pair.

**Théorème 7-22.** *Une matrice  $A$  de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  appartient à  $\mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(B)$  si et seulement si sa signature (ligne ou colonne) admet une symétrie d'axe médian, autrement dit si et seulement si :*

- sa signature-ligne  $\overline{A}$  est smav (c. à d.  $\overline{A} \in \mathcal{M}_{1,n}/\mathcal{SM}\mathcal{AV}(B)$ ),

ou si :

- sa signature-colonne  $|A|$  est smah (c. à d.  $|A| \in \mathcal{M}_{n,1}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(B)$ ).

*Preuve :*

Raisonnons sur la signature-colonne.

L'implication :  $A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(B) \Rightarrow |A|$  est smah est évidente.

En effet :  $A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(B) \Rightarrow A$  est smah.

Par suite, tout vecteur-colonne de  $A$  est smah, en particulier le 1<sup>er</sup> vecteur-colonne qui n'est autre que  $|A|$ .

Démontrons la réciproque.

Par hypothèse,  $|A|$  est smah (c. à d.  $|A| \in \mathcal{M}_{n,1}/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(B)$ ).

Nous allons montrer qu'il en découle que tout vecteur-colonne  $C_{i_0}$  ( $\forall i_0 = 1 \text{ à } n$ ) de  $A$  est smah.

Désignons, comme d'habitude, par  $\{B_i\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ .

D'après le Théorème 3-10 du Chapitre 3, le produit de la matrice  $A$  par  $B_{i_0}$  est la matrice de  $\mathcal{BSC}_n(B)$  dont la signature-colonne est égale à  $C_{i_0}$ .

On a donc :  $|AB_{i_0}| = C_{i_0}$ .

Or :  $A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}(B) \Rightarrow A \in \mathcal{BSC}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(B)$ .

La matrice  $B_{i_0}$  ne présente, en règle générale, pas de propriété de symétrie par rapport à un axe médian (elle n'est, en toute généralité, ni smav ni smah).

Mais le Théorème 7-12 ci-dessus permet de conclure que le produit  $AB_{i_0}$  appartient à  $\mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(B)$ .

La *partie directe* du présent Théorème 7-22, démontrée plus haut, permet maintenant de conclure :

$AB_{i_0} \in \mathcal{M}_n/\mathcal{SM}\mathcal{AH}(B) \Rightarrow |AB_{i_0}|$  est smah.

On en déduit que la matrice-colonne  $C_{i_0}$  ( $\forall i_0 = 1 \text{ à } n$ ) est smah.

Le Théorème 7-22 est donc ainsi démontré.





$$C_{\nu+1} = \begin{bmatrix} c(1) \\ c(2) \\ c(3) \\ \cdot \\ c(\nu-1) \\ c(\nu) \\ c(\nu+1) \\ c(\nu) \\ c(\nu-1) \\ \cdot \\ c(3) \\ c(2) \\ c(1) \end{bmatrix} .$$

Introduisons maintenant les coefficients  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu+1$ ) définis dans la Section 5.3.2. du Chapitre 5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{array} \right.$$

Distinguons à ce stade les cas  $\nu$  pair et  $\nu$  impair.

Cas 1 -  $\nu$  pair :  $\nu = 2 \nu'$  ( $\nu' \in \mathbb{N}$ ), c. à d.  $n = 4\nu'+1$ .

Distinguons les éléments de  $C_{\nu+1}$  d'indice impair et ceux d'indice pair. On a :

$$\begin{array}{l} c(1) = A_{\nu+1} \\ c(3) = A_{\nu-1} + A_{\nu+1} \\ c(5) = A_{\nu-3} + A_{\nu-1} + A_{\nu+1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ c(\nu-1) = A_3 + \dots + A_{\nu-3} + A_{\nu-1} + A_{\nu+1} \\ c(\nu+1) = A_1 + A_3 + \dots + A_{\nu-3} + A_{\nu-1} + A_{\nu+1} \end{array}$$

et :

$$\begin{aligned}
 c(2) &= &&&&&&&&&&&&& A_\nu \\
 c(4) &= &&&&&&&&&& A_{\nu-2} &+ & A_\nu \\
 c(6) &= &&&&&&&&& A_{\nu-4} &+ & A_{\nu-2} &+ & A_\nu \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 c(\nu-2) &= &&& A_4 &+ & \dots &+ & A_{\nu-4} &+ & A_{\nu-2} &+ & A_\nu \\
 c(\nu) &= & A_2 &+ & A_4 &+ & \dots &+ & A_{\nu-4} &+ & A_{\nu-2} &+ & A_\nu
 \end{aligned}$$

Comme  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM} (B) : |A|$  est smah et  $\overline{A}$  est smav (cf. Théorème 7-22). Donc :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_{2\nu+1} \\
 a_2 &= a_{2\nu} \\
 a_3 &= a_{2\nu-1} \\
 \dots & \dots \dots \\
 a_i &= a_{2\nu-i+2} \\
 \dots & \dots \dots \\
 a_\nu &= a_{\nu+2}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que tous les coefficients  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) sont nuls.

Par conséquent :  $c(\text{indice impair}) = A_{\nu+1} = a_{\nu+1}$  et  $c(\text{indice pair}) = 0$ .

Mais comme, par hypothèse, l'élément central de la signature de  $A$  est nul :  $a_{\nu+1} = 0$ .

On en conclut que :  $c(i) = 0$ ,  $1 \leq i \leq \nu+1$ .

Le lemme est donc bien établi pour  $n = 4\nu'+1$  ( $\nu' \in \mathbb{N}$ ).

Cas 2 -  $\nu$  impair :  $\nu = 2\nu'+1$  ( $\nu' \in \mathbb{N}$ ), c. à d.  $n = 4\nu'+3$ .

Distinguons à nouveau les éléments de  $C_{\nu+1}$  d'indice impair et ceux d'indice pair. On a :

$$\begin{aligned}
 c(1) &= &&&&&&&&&&&&& A_{\nu+1} \\
 c(3) &= &&&&&&&&&& A_{\nu-1} &+ & A_{\nu+1} \\
 c(5) &= &&&&&&&&& A_{\nu-3} &+ & A_{\nu-1} &+ & A_{\nu+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 c(\nu-2) &= &&& A_4 &+ & \dots &+ & A_{\nu-3} &+ & A_{\nu-1} &+ & A_{\nu+1} \\
 c(\nu) &= & A_2 &+ & A_4 &+ & \dots &+ & A_{\nu-3} &+ & A_{\nu-1} &+ & A_{\nu+1}
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 c(2) &= &&&&&&&&&&&&& A_\nu \\
 c(4) &= &&&&&&&&&& A_{\nu-2} &+ & A_\nu \\
 c(6) &= &&&&&&&&& A_{\nu-4} &+ & A_{\nu-2} &+ & A_\nu \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 c(\nu-2) &= &&& A_3 &+ & \dots &+ & A_{\nu-4} &+ & A_{\nu-2} &+ & A_\nu \\
 c(\nu) &= & A_1 &+ & A_3 &+ & \dots &+ & A_{\nu-4} &+ & A_{\nu-2} &+ & A_\nu
 \end{aligned}$$

Comme  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(B)$  :  $|A|$  est smah et  $\overline{A}$  est smav (cf. Théorème 7-22). Donc :

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{2\nu+1} \\ a_2 &= a_{2\nu} \\ a_3 &= a_{2\nu-1} \\ \dots &\dots \dots \\ a_i &= a_{2\nu-i+2} \\ \dots &\dots \dots \\ a_\nu &= a_{\nu+2} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que tous les coefficients  $A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) sont nuls.

Par conséquent :  $c$  (indice impair) =  $A_{\nu+1} = a_{\nu+1}$  et  $c$  (indice pair) = 0.

Mais comme, par hypothèse, l'élément central de la signature de  $A$  est nul :  $a_{\nu+1} = 0$ .

On en conclut que :  $c(i) = 0$ ,  $1 \leq i \leq \nu + 1$ .

Le lemme est donc bien établi pour  $n = 4\nu'+3$  ( $\nu' \in \mathbb{N}$ ).

Finalement le lemme est bien démontré pour tout  $n$  impair.

**Théorème 7-24 - Théorème du produit de matrices de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(B)$  (Version 1).**

- (1)  $n$  pair :  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(B)$ ,  $B \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(B) \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .  
 (2)  $n$  impair :  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(B)$ ,  $B \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(B) \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(B)$ .

*Dans ce dernier cas ( $n$  impair), l'élément générique  $c_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) de la matrice  $C = A \cdot B = B \cdot A$  vaut :  $c_{ij} = a_{i\nu+1} b_{\nu+1j}$ .*

*(Les éléments de  $A \cdot B$  ne font intervenir que les éléments centraux des lignes et/ou colonnes de  $A$  et de  $B$ ).*

*De plus, si l'élément central de la signature de  $A$  est nul ou si l'élément central de la signature de  $B$  est nul, alors :  $A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .*

*Preuve :*

Ce théorème est la transposition du Théorème 7-15 (Théorème du produit de matrices de  $\mathcal{M}_n / \mathcal{SM}(B)$ ) dans le cas particulier de matrices de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(B)$ . La commutativité du produit en découle :  $A \cdot B = B \cdot A$ .

La spécificité du Théorème 7-24 réside dans la dernière proposition : lorsque  $n$  est impair, il suffit que l'élément central de la signature de  $A$  soit nul ou que l'élément central de la signature de  $B$  soit nul, pour que le produit  $A \cdot B = B \cdot A$  soit nul.

Ce dernier point est une conséquence directe du Lemme 7-23 précédemment démontré. Supposons que l'élément central de la signature de  $A$  soit nul. Le Lemme 7-23 permet alors d'affirmer que tous les éléments de la colonne centrale (et de la ligne centrale) de  $A$  sont nuls. Le Théorème 7-15 permet dès lors de conclure que :  $A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .

Le Théorème 7-25 qui suit reformule le Théorème 7-24 de façon différente, un peu plus restrictive toutefois :

**Théorème 7-25 - Théorème du produit de matrices de  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B)$  (Version 2)**

- (1)  $n$  pair :  $A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B), B \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B) \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .  
 (2)  $n$  impair :  $A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B), B \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B)$  ET élément central de  $|A|$   
 (et donc de  $\overline{A}$ ) nul OU élément central de  $|B|$  (et donc de  $\overline{B}$ ) nul  
 $\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .

**Théorème 7-26 - Théorème du carré des matrices de  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B)$**

Soit  $A \in \mathcal{BSE}_n(B), n$  pair :  $A^2 = O_n \Leftrightarrow A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B)$ .

Soit  $A \in \mathcal{BSE}_n(B), n$  impair :  $A^2 = O_n \Leftrightarrow A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B)$  ET  
 élément central de  $|A|$  et de  $\overline{A} = 0$ .

Ce théorème énonce une condition nécessaire et suffisante pour que le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSE}_n(B)$  soit nul. Il affirme que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit que cette matrice soit symétrique par rapport à ses axes médians, et que, si  $n$  est impair, l'élément central de sa signature soit nul.

*Preuve :*

L'implication dans le sens suivant :

$A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B), n$  pair  $\Rightarrow A^2 = O_n$ ,

$A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B), n$  impair, et élément central de  $|A|$  et de  $\overline{A} = 0 \Rightarrow A^2 = O_n$ ,

résulte directement du Théorème 7-25 qui précède (en y faisant :  $B = A$ ).

Nous allons fournir une démonstration du Théorème 7-26, qui établit simultanément les 2 sens des équivalences énoncées.

Nous ferons appel à certains résultats obtenus dans la Section 5.4. du Chapitre 5 (consacré à l'étude des carrés des matrices de  $\mathcal{BSE}_n(B)$ ).

Cas 1 -  $n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ).

Introduisons les coefficients  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) représentant les coordonnées impaires de  $A^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n(B)$ . (Rappelons que les coordonnées paires de  $A^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSE}_n(B)$  sont toutes nulles).

$$A^2 = O_n \Leftrightarrow |A^2| = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu).$$

Par ailleurs, la matrice de passage  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ )  $\rightarrow A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) est la matrice  $T_\nu^{-1}$  suivante (cf. Section 5.4.1) :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{v-1} \\ A_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{v-1} \\ \alpha_v \end{bmatrix} = T_v^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{v-1} \\ \alpha_v \end{bmatrix}$$

Or  $T_v^{-1}$  est inversible. Dès lors :  $\alpha_i = 0$  ( $1 \leq i \leq v$ )  $\Leftrightarrow A_i = 0$  ( $1 \leq i \leq v$ ).

Rappelons que l'on a (cf. Section 5.3.1.) :

$$\begin{cases} A_1 = a_1 + a_{2v} \\ A_2 = a_2 + a_{2v-1} \\ A_3 = a_3 + a_{2v-2} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2v-i+1} \\ \dots \\ A_{v-1} = a_{v-1} + a_{v+2} \\ A_v = a_v + a_{v+1} \end{cases}$$

De ce fait :

$$A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq v) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_{2v} \\ a_2 = a_{2v-1} \\ a_3 = a_{2v-2} \\ \dots \\ a_i = a_{2v-i+1} \\ \dots \\ a_{v-1} = a_{v+2} \\ a_v = a_{v+1} \end{cases} \Leftrightarrow |A| \text{ smah (et donc } \overline{A} \text{ smav)}.$$

Le Théorème 7-22 permet maintenant de conclure :

$$|A| \text{ smah (et donc } \overline{A} \text{ smav)} \Leftrightarrow A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(B).$$

Cas 2 -  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$ ).

Introduisons les coefficients  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ) représentant les coordonnées impaires de  $A^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . (Rappelons que les coordonnées paires de  $A^2$  dans la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  sont toutes nulles).

$$A^2 = O_n \Leftrightarrow |A^2| = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu + 1).$$

Par ailleurs, la matrice de passage  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq \nu + 1$ )  $\rightarrow A_i$  ( $1 \leq i \leq \nu + 1$ ) est évidemment la matrice  $T_{\nu+1}^{-1}$  suivante (cf. Section 5.4.2.) :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ A_{\nu-1} \\ A_\nu \\ A_{\nu+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \\ \alpha_{\nu+1} \end{bmatrix} = T_{\nu+1}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_i \\ \cdot \\ \alpha_{\nu-1} \\ \alpha_\nu \\ \alpha_{\nu+1} \end{bmatrix}$$

Or  $T_{\nu+1}^{-1}$  est inversible. Dès lors :

$$\alpha_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu + 1) \Leftrightarrow A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu + 1).$$

Rappelons que l'on a (cf. Section 5.3.2.) :

$$\begin{cases} A_1 = a_1 + a_{2\nu+1} \\ A_2 = a_2 + a_{2\nu} \\ A_3 = a_3 + a_{2\nu-1} \\ \dots \\ A_i = a_i + a_{2\nu-i+2} \\ \dots \\ A_\nu = a_\nu + a_{\nu+2} \\ A_{\nu+1} = a_{\nu+1} \end{cases}$$

De ce fait :

$$A_i = 0 \quad (1 \leq i \leq \nu+1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_{2\nu+1} \\ a_2 = a_{2\nu} \\ a_3 = a_{2\nu-1} \\ a_i = a_{2\nu-i+2} \\ a_\nu = a_{\nu+2} \\ a_{\nu+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| \text{ smh (et donc } \overline{A} \text{ smv)} \\ \text{ET l'élément central } a_{\nu+1} \\ \text{de } |A| \text{ (et donc de } \overline{A}) \text{ est nul.} \end{cases}$$

Le Théorème 7-22 permet maintenant de conclure, puisqu'en effet :

$$\left. \begin{array}{l} |A| \text{ smah (et donc } \overline{A} \text{ smav)} \\ \text{ET} \\ \text{élément central } a_{\nu+1} \text{ de } |A| \text{ et de } \overline{A} \\ \text{nul} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B}) \\ \text{ET} \\ \text{élément central } a_{\nu+1} \text{ de } |A| \text{ et de } \overline{A} \\ \text{nul} \end{array} \right.$$

Le Théorème 7-26 (Théorème du carré des matrices de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ) est ainsi démontré pour tout  $n$  pair ou impair.

### 7.5.3. Ensemble $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$

Les résultats précédents nous invitent à introduire l'ensemble  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  suivant.

**Définition 7-27.** L'ensemble  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  est défini comme suit :

Pour  $n$  pair :  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) = \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

Pour  $n$  impair :  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) \subset \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ , et :

$A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  si et seulement si :  $A \in \mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ET

élément central de  $|A|$  et de  $\overline{A} = 0$ .

Autrement dit :

- pour  $n$  pair,  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  se confond avec  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ ,
- pour  $n$  impair,  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$ , constitué des matrices dont l'élément central de la signature est nul.

**Théorème 7-28.** Soit  $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

$\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{BSC}_n / \mathcal{SM}(\mathbb{B})$  de dimension égale à  $\nu$ .

*Preuve :* Immédiate.

*Remarque :*

Pour  $n = 1$ ,  $\mathcal{BSE}_1/\mathcal{SM}^*(B)$  se compose de la seule matrice nulle  $[0]_1$ .

L'introduction de l'ensemble  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(B)$  permet de reformuler le Théorème 7-25 (Version 2) sous la forme suivante :

**Théorème 7-29 - Théorème du produit de matrices de  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B)$  (Version 2).**

(1)  $n$  pair :  $A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B)$ ,  $B \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B)$ ,  $\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .

(2)  $n$  impair :  $A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B)$ ,  $B \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(B)$  OU  $A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(B)$ ,  
 $B \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B) \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = O_n$ .

*Remarque :*

Bien noter, dans le cas  $n$  impair, qu'il suffit que l'une des 2 matrices intervenant dans la multiplication appartienne à  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(B)$ , pour que le produit résultant soit nul.

De même, le Théorème 7-26 peut se reformuler comme suit :

**Théorème 7-30 - Théorème du carré des matrices de  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(B)$ .**

Soit  $A \in \mathcal{BSE}_n(B)$ ,  $n$  pair OU  $n$  impair :  $A^2 = O_n \Leftrightarrow A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(B)$ .

#### 7.5.4. Relation d'équivalence « modulo $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(B)$ »

**Définition 7-31.** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux matrices de  $\mathcal{BSE}_n(B)$ ,  $n$  pair ou  $n$  impair.

Nous dirons que  $A_1$  et  $A_2$  sont équivalentes modulo  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(B)$  si leur somme  $A_1 + A_2$  (et donc leur différence  $A_1 - A_2$ ) appartient à  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(B)$ .

On écrira alors :  $A_1 \equiv A_2 \text{ mod. } \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(B)$ .

*Remarque :*

La relation ci-dessus est clairement une relation d'équivalence

**Théorème 7-32.** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux matrices de  $\mathcal{BSE}_n(B)$ ,  $n$  pair ou  $n$  impair.

$$A_1 \equiv A_2 \text{ mod. } \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(B) \Leftrightarrow A_1^2 = A_2^2.$$

*Preuve :*

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 7-30 ci-dessus.



### 7.5.5. Ensemble $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$

**Définition 7-32.**  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  désigne le complémentaire de  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  dans  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$ .

-  $n$  pair :  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B}) = \emptyset$

-  $n$  impair :  $A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  si et seulement si :  $A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ET

élément central de  $|A|$  et de  $\overline{A} = 1$ .

*Remarques :*

- 1)  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B}) = \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) \cup \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$
- 2)  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) \cap \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B}) = \emptyset$
- 3) Les ensembles  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  et  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  sont adjacents
- 4) L'ensemble  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  n'est pas un espace vectoriel :
  - il ne contient pas la matrice nulle  $O_n$ ,
  - si  $A_1 \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  et  $A_2 \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$ , alors :  
 $A_1 + A_2 \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$  (et non  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$ ).

$n$  étant supposé impair, posons :  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ).

Introduisons la base canonique  $\{B_i\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Rappelons que la matrice  $B_{\nu+1}$  est la seule matrice de cette base ayant un double symétrie médiane et que :  $B_{\nu+1}^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-1} + B_{2\nu+1}$  (cf. Section 5.3.2 du Chapitre 5).

**Théorème 7-33.** Toute matrice  $A$  de  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  peut s'écrire sous la forme canonique suivante :  $A = A' + B_{\nu+1}$ , avec  $A' \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(\mathbb{B})$ .

*Preuve :* Immédiate.

**Théorème 7-34.** Soit  $A \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^{**}(\mathbb{B})$  ( $n$  impair). On a :

$$A^2 = B_{\nu+1}^2 = B_1 + B_3 + B_5 + \dots + B_{2\nu-1} + B_{2\nu+1}.$$

*Preuve :*

$$A^2 = (A' + B_{\nu+1})^2 = A'^2 + B_{\nu+1}^2.$$

Or :  $A' \in \mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}^*(\mathbb{B}) \Rightarrow A'^2 = O_n$ .

*Remarque :*

Le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ( $n$  pair) est toujours égal à  $O_n$ .

Le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSE}_n/\mathcal{SM}(\mathbb{B})$  ( $n$  impair) est égal à  $O_n$  ou à  $B_{\nu+1}^2$ , suivant que l'élément central de sa signature vaut 0 ou 1.

## CONCLUSION

### Réflexions sur les SEV commutatifs (\*) de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ - Définition de $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$

Ce chapitre renferme un certain nombre de réflexions pouvant servir de base à de nouvelles investigations portant sur les sous-espaces-vectoriels (sev) commutatifs (\*) de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

(\*) La commutativité dont il s'agit concerne bien entendu la multiplication matricielle.

Bien entendu, les pistes évoquées ci-après ne prétendent pas constituer un catalogue exhaustif des études que l'on pourrait mener à leur sujet.

Nous concluons ce chapitre en définissant les ensembles  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ .

*Convention, terminologie et notation associée :*

Pour alléger l'écriture, nous dirons une fois pour toutes dans ce chapitre qu'un sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ , ou de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , ou de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , possède la propriété «  $\mathcal{BSE}$  » ( $\mathcal{BS}$  pour « bisymétrie »,  $\mathcal{C}$  pour « commutativité »), si ce sev est constitué de matrices bisymétriques (autrement dit s'il s'agit d'un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , ou de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{R})$ , ou de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{C})$ ) et s'il est stable pour la multiplication matricielle. Nous avons vu qu'il s'agit là d'une condition nécessaire et suffisante entraînant la commutativité de toutes les matrices composant un tel sev.

Un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , ou de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{R})$ , ou de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{C})$ , doté de la propriété  $\mathcal{BSE}$ , sera dénommé « sev de type  $\mathcal{BSE}$  ». Nous le noterons d'une manière générale  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ , ou  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{R})$ , ou  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{C})$ ,  $d$  représentant la dimension du sev concerné.

### 1. B-SEV constitués de matrices bisymétriques commutatives

Nous avons mis en évidence dans le Chapitre 2 de cette étude l'espace vectoriel  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , qui possède la propriété  $\mathcal{BSE}$  et qui est de dimension  $n$ .

Rappelons que  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B}) = \text{Vect}(\mathbb{B}_i), 1 \leq i \leq n$ , (les matrices  $\mathbb{B}_i$  étant celles définies dans la Section 2.3. du Chapitre 2).

Nous aborderons ci-après (sans les traiter à fond) les questions suivantes :

**Q1 :** Existe-t-il des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , distincts de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$  ?

**Q2 :** S'il en existe et s'ils sont de dimension  $d$  inférieure à  $n$ , sont-ils alors nécessairement des sev de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  ?

**Q3 :** Existe-t-il des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ , de dimension  $d$  égale à  $n$ , distincts de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  ? En existe-t-il pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ?

**Q4 :** Existe-t-il des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ , pour toute dimension  $d$  inférieure à  $n$  ?

**Q5 :** Existe-t-il des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ , de dimension  $d$  supérieure à  $n$  ?

**Q6 :** S'il en existe, incluent-ils alors nécessairement  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  ?

**Q7 :** S'il en existe, quelle est (en fonction de l'ordre  $n$ ) la dimension maximale d'un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$  ?

### Questions Q1 - Q2 - Q3 (1<sup>ère</sup> partie)

Nous allons établir l'existence de sev  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , de type  $\mathcal{BSE}$ , distincts de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

- Nous allons tout d'abord fournir 2 exemples de sev de type  $\mathcal{BSE}$  qui sont des sev de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSE}_n^{(1)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d = 1$ )

$\mathcal{BSE}_n^{(1)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n) = \{O_n, I_n\}$ , déjà mentionné dans la Section 2.1. du Chapitre 2.

*Note :* Pour  $n = 1$ , on retrouve  $\mathcal{BSE}_1(\mathbb{B})$ . Pour  $n > 1$ ,  $\mathcal{BSE}_n^{(1)}(\mathbb{B}) \subset \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSE}_n^{(2)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d = 2$ )

$\mathcal{BSE}_n^{(2)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n, J_n) = \{O_n, I_n, J_n, I_n + J_n\}$ .

La table de multiplication ci-dessous prouve que  $\mathcal{BSE}_n^{(2)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n, J_n)$  possède bien la propriété  $\mathcal{BSE}$ .

	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$I_n + J_n$
$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$
$I_n$	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$I_n + J_n$
$J_n$	$O_n$	$J_n$	$I_n$	$I_n + J_n$
$I_n + J_n$	$O_n$	$I_n + J_n$	$I_n + J_n$	$O_n$

*Note :* Pour  $n = 2$ , on retrouve  $\mathcal{BSE}_2(\mathbb{B})$ . Pour  $n > 2$ ,  $\mathcal{BSE}_n^{(2)}(\mathbb{B}) \subset \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

□ Nous allons maintenant nous attacher à fournir des exemples de sev de type  $\mathcal{BSC}$ , qui ne sont pas des sev de  $\mathcal{BSC}_n(B)$ .

Ordre  $n$  impair  $\geq 3$  ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSC}_n^{(3)}(B)$  (dimension  $d = 3$ )

Introduisons la matrice  $K_n$  ayant la structure suivante :

$$K_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} .$$

Cette matrice a tous ses éléments nuls sauf celui d'indices  $(\nu + 1, \nu + 1)$ .

Clairement :  $K_n \in \mathcal{BS}_n(B)$ , mais :  $K_n \notin \mathcal{BSC}_n(B)$ .

On vérifie sans peine que,  $n$  étant impair :  $K_n^2 = K_n$ .

Considérons  $\mathcal{E}_n^{(3)}(B) = \text{Vect}(I_n, J_n, K_n)$ , qui est un sev de dimension 3.

$\mathcal{E}_n^{(3)}(B)$  possède la propriété  $\mathcal{BSC}$ , comme le prouve la table de multiplication ci-dessous.

	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$K_n$
$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$
$I_n$	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$K_n$
$J_n$	$O_n$	$J_n$	$I_n$	$K_n$
$K_n$	$O_n$	$K_n$	$K_n$	$K_n$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(3)}(B)$  sous la forme  $\mathcal{BSC}_n^{(3)}(B)$ .

Comme  $K_n \notin \mathcal{BSC}_n(B)$  :  $\mathcal{BSC}_n^{(3)}(B) \not\subset \mathcal{BSC}_n(B)$ .

*Remarque :*

Pour  $n = 3$ ,  $\mathcal{BSC}_3^{(3)}(B)$  est un sev possédant la propriété  $\mathcal{BSC}$ , de dimension égale à 3, comme  $\mathcal{BSC}_3(B)$ . Pour autant,  $\mathcal{BSC}_3^{(3)}(B)$  est distinct de  $\mathcal{BSC}_3(B)$ . La réponse à la 1<sup>ère</sup> partie de la question **Q3** est donc positive.

Ordre  $n$  impair  $\geq 3$  ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSC}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d = 3$ )

Introduisons la matrice  $1_n$  dont tous les éléments sont égaux à 1 :

$$1_n = \begin{bmatrix} 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \end{bmatrix}.$$

Clairement :  $1_n \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , mais :  $1_n \notin \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

On vérifie sans peine que,  $n$  étant impair :  $1_n^2 = 1_n$ .

Considérons maintenant  $\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n, J_n, 1_n)$ , qui est un sev de dimension 3.

$\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  possède la propriété  $\mathcal{BSC}$ , comme le prouve la table de multiplication ci-dessous.

	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$1_n$
$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$
$I_n$	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$1_n$
$J_n$	$O_n$	$J_n$	$I_n$	$1_n$
$1_n$	$O_n$	$1_n$	$1_n$	$1_n$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(3)}(\mathbb{B})$  sous la forme  $\mathcal{BSC}_n^{(3)}(\mathbb{B})$ .

Comme  $1_n \notin \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  :  $\mathcal{BSC}_n^{(3)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Pour  $n = 3$ , comme dans l'exemple précédent,  $\mathcal{BSC}_3^{(3)}(\mathbb{B})$  est un sev de dimension égale à 3, possédant la propriété  $\mathcal{BSC}$ . Pour autant,  $\mathcal{BSC}_3^{(3)}(\mathbb{B})$  est distinct de  $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$ .

Pour  $n = 3$ , nous avons ainsi mis en évidence 3 sev distincts de dimension égale à 3, possédant la propriété  $\mathcal{BSC}$  :

$$\text{Vect}(B_1 = I_1, B_2 = N_2, B_3 = J_3) = \mathcal{BSC}_3(\mathbb{B}),$$

$$\text{Vect}(I_3, J_3, K_3) = \mathcal{BSC}_3^{(3)}(\mathbb{B}) \text{ de l'exemple précédent,}$$

$$\text{Vect}(I_3, J_3, 1_3) = \mathcal{BSC}_3^{(3)}(\mathbb{B}) \text{ de l'exemple ci-dessus.}$$

Ordre  $n$  impair  $\geq 5$  ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSC}_n^{(4)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d = 4$ )

Introduisons la matrices  $H_n$  ayant la structure suivante :

$$H_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}.$$

$H_n$  a tous ses éléments nuls sauf ceux de la colonne  $\nu + 1$  et de la ligne  $\nu + 1$ .

Clairement :  $H_n \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ , mais :  $H_n \notin \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

On vérifie sans peine que :  $H_n^2 = 1_n$  et que :  $H_n \cdot 1_n = 1_n \cdot H_n = 1_n$ .

Considérons  $\mathcal{E}_n^{(4)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_n, J_n, H_n, 1_n)$ , sev de dimension 4.

*Remarque :*

Nous avons posé comme hypothèse :  $n \geq 5$ . Pour  $n = 3$ , les 4 matrices  $I_n, J_n, H_n, 1_n$  sont en effet liées, puisque :  $I_n + J_n + H_n = 1_n$ .

Replaçons-nous dans l'hypothèse  $n \geq 5$ .

$\mathcal{E}_n^{(4)}(\mathbb{B})$  possède la propriété  $\mathcal{BSC}$ , comme le prouve la table de multiplication ci-dessous.

	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$H_n$	$1_n$
$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$
$I_n$	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$H_n$	$1_n$
$J_n$	$O_n$	$J_n$	$I_n$	$H_n$	$1_n$
$H_n$	$O_n$	$H_n$	$H_n$	$1_n$	$1_n$
$1_n$	$O_n$	$1_n$	$1_n$	$1_n$	$1_n$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(4)}(\mathbb{B})$  sous la forme  $\mathcal{BSC}_n^{(4)}(\mathbb{B})$ .

Comme  $H_n \notin \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  et  $1_n \notin \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  :  $\mathcal{BSC}_n^{(4)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Pour  $n$  impair ( $n \geq 5$ ),  $\text{Vect}(I_n)$ ,  $\text{Vect}(I_n, J_n)$ ,  $\text{Vect}(I_n, J_n, 1_n)$ ,  $\text{Vect}(I_n, J_n, H_n, 1_n)$  sont de sev de  $\mathcal{BS}_n(B)$  de dimension respective 1, 2, 3 et 4, possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ . Ils sont « imbriqués » comme l'indiquent les inclusions ci-dessous :

$$\text{Vect}(I_n) \subset \text{Vect}(I_n, J_n) \subset (\text{Vect}(I_n, J_n, 1_n) \subset \text{Vect}(I_n, J_n, H_n, 1_n)).$$

$\text{Vect}(I_n)$  et  $\text{Vect}(I_n, J_n)$  sont des sev de  $\mathcal{BSE}_n(B)$ , tandis que  $(\text{Vect}(I_n, J_n, 1_n)$  et  $\text{Vect}(I_n, J_n, H_n, 1_n)$  ne le sont pas.

Ordre  $n$  pair  $\geq 4$  ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSE}_n^{(3)}(B)$  (dimension  $d = 3$ )

Introduisons, comme plus haut, la matrice  $1_n$  dont tous les éléments sont égaux à 1 :

$$1_n = \begin{bmatrix} 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \end{bmatrix}.$$

Clairement :  $1_n \in \mathcal{BS}_n(B)$ , mais :  $1_n \notin \mathcal{BSE}_n(B)$ .

On vérifie sans peine que,  $n$  étant pair :  $1_n^2 = O_n$ .

Considérons  $\mathcal{E}_n^{(3)}(B) = \text{Vect}(I_n, J_n, 1_n)$ , sev de dimension 3.

$\mathcal{E}_n^{(3)}(B)$  possède la propriété  $\mathcal{BJE}$ , comme le prouve la table de multiplication ci-dessous.

	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$1_n$
$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$	$O_n$
$I_n$	$O_n$	$I_n$	$J_n$	$1_n$
$J_n$	$O_n$	$J_n$	$I_n$	$1_n$
$1_n$	$O_n$	$1_n$	$1_n$	$O_n$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(3)}(B)$  sous la forme  $\mathcal{BSE}_n^{(3)}(B)$ .

Comme  $1_n \notin \mathcal{BSE}_n(B)$  :  $\mathcal{BSE}_n^{(3)}(B) \not\subset \mathcal{BSE}_n(B)$ .

Bien d'autres exemples sont envisageables, mais ceux mentionnés ci-dessus suffisent à répondre aux questions **Q1 - Q2 - Q3 (1<sup>ère</sup> partie)** :

**Q1** : Il existe des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  distincts de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ .

**Q2** : Lorsque ces sev sont de dimension inférieure à  $n$ , ils ne sont pas nécessairement des sev de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

**Q3 (1<sup>ère</sup> partie)** : Il existe des sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSE}$ , de dimension égale à  $n$ , distincts de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ . Nous l'avons établi pour  $n = 3$ , nous démontrerons ci-dessous qu'il en existe pour tout  $n \geq 3$ .

### Questions Q4 - Q3 (2<sup>ème</sup> partie)

Ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d \leq n$ )

Nous nous proposons de démontrer qu'il existe, pour tout ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout entier positif  $d \leq n$ , au moins 1 sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de type  $\mathcal{BSE}$  et de dimension  $d$ . Nous supposons  $d > 1$ , le cas  $d = 1$  ayant déjà été traité.

Nous élaborerons divers exemples de tels sev, correspondant à diverses « stratégies de construction ». Nous verrons que pour tout  $n$ , pair ou impair, et pour tout entier  $d$  positif,  $d \leq n$ , une méthode de construction est toujours envisageable.

Nous continuerons à noter en toute généralité  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  de tels sev.

*Exemple 1* : Nous supposons ici  $n$  et  $d$  de même parité ( $d < n$ ), c.-à-d.  $n$  et  $d$  simultanément pairs ou impairs.

Posons alors  $\delta \in \mathbb{N}^*$ , tel que :  $n = d + 2\delta$ . (Comme  $d < n$  :  $\delta > 0$ ).

Considérons  $\mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$ .

A toute matrice  $A_d \in \mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$ , on peut associer la matrice  $A_n(\delta)$  d'ordre  $n$ , décomposée en blocs comme suit :

$$A_n(\delta) = \begin{bmatrix} O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \\ O_{d\delta} & A_d & O_{d\delta} \\ O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \end{bmatrix}.$$

$O_\delta$  désigne la matrice nulle d'ordre  $\delta$ ,  $O_{\delta d}$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{\delta, d}(\mathbb{B})$ ,  $O_{d\delta}$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{d, \delta}(\mathbb{B})$ .

Sauf dans le cas particulier  $A_d = O_d$ , on a :  $A_n(\delta) \notin \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

Soit  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  l'ensemble constitué par les matrices  $A_n(\delta)$ ,  $A_d \in \mathcal{BSE}_d(\mathbb{B})$ .



Considérons 2 matrices quelconques  $A_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$  et  $B_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , distinctes ou non. On a donc :

$$A_n(\delta) = \begin{bmatrix} O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \\ O_{d\delta} & A_d & O_{d\delta} \\ O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \end{bmatrix}; \quad B_n(\delta) = \begin{bmatrix} O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \\ O_{d\delta} & B_d & O_{d\delta} \\ O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \end{bmatrix}.$$

$$A_n(\delta) \cdot B_n(\delta) = \begin{bmatrix} O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \\ O_{d\delta} & A_d \cdot B_d & O_{d\delta} \\ O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \end{bmatrix} \text{ (produit par blocs).}$$

Comme :  $A_d \cdot B_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ ,  $A_n(\delta) \cdot B_n(\delta) \in \mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

$\mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , qui possède la propriété  $\mathcal{BSC}$ , transmet cette propriété à  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

Par ailleurs, il est clair que  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  est un sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de dimension  $d$ .

Si l'on désigne en effet par  $B_{di}$  ( $1 \leq i \leq d$ ) les  $d$  matrices de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , la base canonique de  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  est constituée des  $d$  matrices  $B_{ni}^{(d)}$  ( $1 \leq i \leq d$ ) d'ordre  $n$  :

$$B_{ni}^{(d)} = \begin{bmatrix} O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \\ O_{d\delta} & B_{di} & O_{d\delta} \\ O_\delta & O_{\delta d} & O_\delta \end{bmatrix}, \quad (1 \leq i \leq d).$$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  sous la forme  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

Enfin, il est clair que :  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Exemple 2 :*

Nous supposons que  $n$  n'est pas premier. Soit  $d$  un diviseur de  $n$  ( $d \neq 1$ ,  $d \neq n$ ). Autrement dit, nous supposons que :  $n = qd$  ( $1 < d < n$ ,  $1 < q < n$ ).

Considérons  $\mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ .

A toute matrice  $A_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , on peut associer la matrice  $A_n(d)$  d'ordre  $n$  ayant la structure par blocs ( $q \times q$  blocs) suivante :

$$A_n(d) = \begin{bmatrix} A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \end{bmatrix}.$$

Désignons par  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  l'ensemble des matrices  $A_n(d)$ .

Il est clair que  $A_n(d)$  est bisymétrique. Donc :  $\mathcal{E}_n^{(d)} \subset \mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

*Note :*  $O_n \in \mathcal{E}_n^{(d)}$  (on obtient  $O_n$  en posant  $A_d = O_d$ ), mais  $I_n \notin \mathcal{E}_n^{(d)}$ .

Considérons 2 matrices quelconques  $A_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$  et  $B_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , distinctes ou non. On a donc :

$$A_n(d) = \begin{bmatrix} A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d & \dots & A_d & \dots & A_d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_n(d) = \begin{bmatrix} B_d & \dots & B_d & \dots & B_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_d & \dots & B_d & \dots & B_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_d & \dots & B_d & \dots & B_d \end{bmatrix}.$$

Cas 1 :  $q$  pair

On a :  $A_n(d) \cdot B_n(d) = B_n(d) \cdot A_n(d) = O_n$ .

Le produit  $A_n(d) \cdot B_n(d)$  est commutatif.

Cas 2 :  $q$  impair.

On a cette fois :

$$A_n(d) \cdot B_n(d) = \begin{bmatrix} A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d & \dots & A_d \cdot B_d \end{bmatrix} \quad (\text{produit par blocs}).$$

Comme :  $A_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$  et  $B_d \in \mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , le produit  $A_d \cdot B_d$  est commutatif.

Par suite :

$$A_n(d) \cdot B_n(d) = B_n(d) \cdot A_n(d).$$

Dans les 2 cas ( $n$  pair ou impair),  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  possède ainsi la propriété  $\mathcal{BSC}$ .

Par ailleurs, il est clair que  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  est de dimension  $d$  ( $n$  pair ou impair).

Si l'on désigne en effet par  $\mathbf{B}_{di}$  ( $1 \leq i \leq d$ ) les  $d$  matrices de la base canonique de  $\mathcal{BSC}_d(\mathbb{B})$ , la base canonique de  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  est constituée des  $d$  matrices  $\mathbf{B}_{ni}^{(d)}$  ( $1 \leq i \leq d$ ) d'ordre  $n$  :

$$\mathbf{B}_{ni}^{(d)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} & \cdots & \mathbf{B}_{di} \end{bmatrix}, (1 \leq i \leq d).$$

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  sous la forme  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

Par ailleurs, comme  $\mathbf{I}_n \notin \mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ , il est clair que :  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Exemple 3 :*  $n$  (pair ou impair),  $1 \leq d \leq \mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ . Nous supposons  $n \geq 2$ .

Introduisons les matrices  $\mathbf{U}_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq \mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)$  de la forme suivante :

$$\mathbf{U}_{ni} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{col } i & \text{col } (n-i+1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}_n \end{array}.$$

Ces matrices sont bisymétriques. Elles ont tous leurs éléments nuls, sauf ceux d'indices  $(i, i)$ ,  $(i, n-i+1)$ ,  $(n-i+1, i)$ ,  $(n-i+1, n-i+1)$ .

Si  $n$  est pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), il existe  $\nu$  matrices  $\mathbf{U}_{ni}$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ).

Si  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), il existe  $\nu + 1$  matrices  $\mathbf{U}_{ni}$  ( $1 \leq i \leq \nu + 1$ ). (Notons que, pour  $n$  impair, la matrice  $\mathbf{U}_{n, \nu+1}$  n'est autre que la matrice  $\mathbf{K}_n$  déjà introduite plus haut).

On vérifie sans peine que :

$U_{ni} \cdot U_{nj} = O_n$  pour tout  $i$  et tout  $j$ , sauf lorsque  $n$  est impair ( $n = 2\nu + 1$ ), pour  $i = j = \nu + 1$ . Dans ce dernier cas en effet :  $U_{n\nu+1} \cdot U_{n\nu+1} = U_{n\nu+1}^2 = U_{n\nu+1}$ .

Si l'on choisit alors  $d$  matrices  $U_{ni}$  quelconques correspondant aux indices  $i_1, i_2, \dots, i_d$ , (compris entre 1 et  $\nu$  si  $n$  est pair, et compris entre 1 et  $\nu + 1$  si  $n$  est impair), le système  $U_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ , est libre.

Si l'on pose  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(U_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_d\})$ , on constate que  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  possède la propriété **BSE** et constitue un sev de dimension  $d$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  sous la forme  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

On constate aussi que ( $n \geq 3$ ) :  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

*Cas particulier :  $d = \nu$*

A titre d'illustration, nous allons créer, en nous basant sur cette approche, pour  $n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ), un sev  $\mathcal{BSE}_n^{(\nu)}(\mathbb{B})$  de dimension  $d = \nu$ , constitué par les  $2^\nu$  matrices de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_\nu & a_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_\nu & a_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & 0 \\ a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \end{bmatrix}_n.$$

A dépend donc des  $d = \nu$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  ( $a_i \in \mathbb{B}, 1 \leq i \leq \nu$ ).

*Cas particulier :  $d = \nu + 1$*

De même, il est possible de créer, pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}^*$ ), un sev  $\mathcal{BSE}_n^{(\nu+1)}(\mathbb{B})$  de dimension  $d = \nu + 1$ , constitué par les  $2^{\nu+1}$  matrices de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot & a_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{\nu+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot & a_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & \cdot & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \end{bmatrix}_n.$$

A dépend donc des  $d = \nu + 1$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_{\nu+1}$  ( $a_i \in \mathbb{B}$ ,  $1 \leq i \leq \nu + 1$ ).

*Exemple 4 :*  $n$  (pair ou impair),  $1 \leq d \leq n$ . Nous supposons  $n \geq 3$ .

Introduisons les matrices  $I_{ni}$  et  $J_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq \mathbb{E}\left(\frac{n}{2}\right)$ , de la forme suivante :

$$I_{ni} = \begin{matrix} & \text{col } i & \text{col } (n-i+1) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}_n \end{matrix}, \quad J_{ni} = \begin{matrix} & \text{col } i & \text{col } (n-i+1) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}_n \end{matrix}.$$

Ces matrices sont bisymétriques. Les matrices  $I_{ni}$  ont tous leurs éléments nuls, sauf ceux d'indices  $(i, i)$  et  $(n-i+1, n-i+1)$ . Les matrices  $J_{ni}$  ont tous leurs éléments nuls, sauf ceux d'indices  $(i, n-i+1)$  et  $(n-i+1, i)$ .

Que  $n$  soit pair ou impair ( $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ) ou  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ ), puisque  $n \geq 3$ ), il existe  $\nu$  matrices  $I_{ni}$  et  $\nu$  matrices  $J_{ni}$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ).

Pour  $n$  impair, il convient d'ajouter aux matrices  $I_{ni}$  et  $J_{ni}$  ainsi définies, la matrice  $K_n$  déjà introduite plus haut, et dont on rappelle la structure :

$$K_n = \begin{array}{c} \text{col } (\nu + 1) \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \end{array} .$$

*Remarque :*

Désignons par  $I_n$  la matrice-unité d'ordre  $n$  et par  $J_n$  la matrice définie dans la Section 1.2. du Chapitre 1.

$$\text{Pour } n \text{ pair } (n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : I_n = \sum_{i=1}^{\nu} I_{ni} \text{ et } J_n = \sum_{i=1}^{\nu} J_{ni} .$$

$$\text{Pour } n \text{ impair } (n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}^*) : I_n = \sum_{i=1}^{\nu} I_{ni} + K_n \text{ et } J_n = \sum_{i=1}^{\nu} J_{ni} + K_n .$$

On vérifie sans peine que :

$$I_{ni} \cdot I_{nj} = O_n, \text{ pour tout } i \text{ et tout } j \ (i \neq j) \text{ et } I_{ni}^2 = I_{ni} .$$

$$J_{ni} \cdot J_{nj} = O_n, \text{ pour tout } i \text{ et tout } j \ (i \neq j) \text{ et } J_{ni}^2 = I_{ni} .$$

$$I_{ni} \cdot J_{nj} = J_{nj} \cdot I_{ni} = O_n, \text{ pour tout } i \text{ et tout } j \ (i \neq j) \text{ et } I_{ni} \cdot J_{ni} = J_{ni} \cdot I_{ni} = J_{ni} .$$

De plus, pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}^*$ ) :

$$I_{ni} \cdot K_n = K_n \cdot I_{ni} = O_n \text{ et } J_{ni} \cdot K_n = K_n \cdot J_{ni} = O_n .$$

$$K_n^2 = K_n .$$

Soit  $d$  un entier quelconque,  $1 \leq d \leq n$ .

$n$  pair ( $n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ )

Fixons  $d_1$  ( $0 \leq d_1 \leq \nu$ ) et  $d_2$  ( $0 \leq d_2 \leq \nu$ ), tels que :  $d = d_1 + d_2$ , ce qui est toujours possible.

Si l'on choisit alors  $d_1$  matrices  $I_{ni}$  quelconques correspondant aux indices  $i_1, i_2, \dots, i_{d_1}$ , et  $d_2$  matrices  $J_{ni}$  quelconques correspondant aux indices  $i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}$ , le système  $I_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{d_1}\} \cup J_{ni}, i \in \{i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}\}$  est libre.

Partant de là, nous pouvons définir :  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{d_1}\} \cup J_{ni}, i \in \{i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}\})$ .  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  possède la propriété  $\mathcal{BSE}$  et constitue un sev de dimension  $d$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  sous la forme  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

Par ailleurs, il est clair que :  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

$n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}^*$ )

Fixons  $d_1$  ( $0 \leq d_1 \leq \nu$ ),  $d_2$  ( $0 \leq d_2 \leq \nu$ ) et  $\varepsilon = 0$  ou  $1$ , tels que :  $d = d_1 + d_2 + \varepsilon$ , ce qui est toujours possible.

Si l'on choisit alors  $d_1$  matrices  $I_{ni}$  quelconques correspondant aux indices  $i_1, i_2, \dots, i_{d_1}$ ,  $d_2$  matrices  $J_{ni}$  quelconques correspondant aux indices  $i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}$ , auxquelles on adjoint, si  $\varepsilon = 1$ , la matrice  $K_n$ , le système  $I_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{d_1}\} \cup J_{ni}, i \in \{i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}\} \cup \varepsilon K_n$  (\*) est libre.

(\*) Ecriture symbolique : si  $\varepsilon = 1$ ,  $K_n$  figure dans le système, si  $\varepsilon = 0$ ,  $K_n$  n'y figure pas.

Partant de là, nous pouvons définir :  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B}) = \text{Vect}(I_{ni}, i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{d_1}\} \cup J_{ni}, i \in \{i'_1, i'_2, \dots, i'_{d_2}\} \cup \varepsilon K_n)$ .  $\mathcal{E}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  possède la propriété  $\mathcal{BSE}$  et constitue un sev de dimension  $d$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Nous pouvons donc légitimement noter  $\mathcal{E}_n^{(d)}$  sous la forme  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ .

Par ailleurs, il est clair que :  $\mathcal{BSE}_n^{(d)}(\mathbb{B}) \not\subset \mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ .

*Cas particulier :  $d = n$*

A titre d'illustration, nous allons créer, en nous basant sur cette approche, pour  $n$  pair ( $n = 2\nu, \mathbb{N}^* - \{1\}$ ), un sev  $\mathcal{BSE}_n^{(n)}(\mathbb{B})$  de dimension  $d = n$ , distinct de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ , constitué par les  $2^n$  matrices de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & b_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_\nu & b_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_\nu & a_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & b_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \end{bmatrix}_n .$$

A dépend donc des  $d = n$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  ( $a_i \in \mathbb{B}$ ,  $1 \leq i \leq \nu$ ) et  $b_1, b_2, \dots, b_\nu$  ( $b_i \in \mathbb{B}$ ,  $1 \leq i \leq \nu$ ).

De même, il est possible de créer, pour  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}^*$ ), un sev  $\mathcal{BSC}_n^{(n)}(\mathbb{B})$  de dimension  $d = n$ , distinct de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , constitué par les  $2^n$  matrices de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & b_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & 0 & 0 & \cdot & b_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_\nu & 0 & \cdot & b_\nu & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & c_{\nu+1} & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & b_\nu & 0 & \cdot & a_\nu & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & b_i & \cdot & 0 & 0 & \cdot & a_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a_1 \end{bmatrix}_n ,$$

A dépend donc des  $d = n$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_\nu$  ( $a_i \in \mathbb{B}$ ,  $1 \leq i \leq \nu$ ),  $b_1, b_2, \dots, b_\nu$  ( $b_i \in \mathbb{B}$ ,  $1 \leq i \leq \nu$ ) et  $c_{\nu+1} \in \mathbb{B}$ .

Par ailleurs, il est clair que ( $n$  pair ou impair) :  $\mathcal{BSC}_n^{(n)}(\mathbb{B}) \neq \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .



Les exemples qui précèdent, et tout particulièrement l'Exemple 4, permettent de répondre à la question **Q4** et à la 2<sup>ème</sup> partie de la question **Q3**.

**Q4 :** Pour tout entier positif  $d \leq n$ , il existe des ensembles  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ , qui sont des sev de dimension  $d$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  et qui possèdent la propriété  $\mathcal{BSC}$ .

**Q3 (2<sup>ème</sup> partie) :** Pour  $d = n \geq 3$ , il existe au moins un ensemble  $\mathcal{BSC}_n^{(n)}(\mathbb{B})$  distinct de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ .

*Remarque :*

Considérons (pour  $n$  pair ou impair,  $n \geq 3$ ) les matrices bisymétriques dont tous les éléments sont nuls, sauf éventuellement ceux constituant le cadre de niveau 1 de ces matrices (cf. Section 1.3.4.1. du Chapitre 1).

Ces matrices sont donc de la forme générale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1} \\ a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

A dépend donc de  $n$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_i \in \mathbb{B}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ).

On démontre aisément que l'ensemble des matrices A constitue un sev  $\mathcal{S}$  de dimension  $d = n$  de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ .

Cependant, le sev  $\mathcal{S}$  ne possède pas la propriété  $\mathcal{BSC}$ , comme nous allons le prouver pour  $n = 3$ , par exemple.

Pour  $n = 3$  en effet, la base canonique du sev  $\mathcal{S}$  est constituée des 3 matrices suivantes :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Mais : } B_1 \cdot B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{tandis que : } B_2 \cdot B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En conclusion :  $B_1 \cdot B_2 \neq B_2 \cdot B_1$ .

Le produit de 2 matrices quelconques de  $\mathcal{S}$  n'est donc pas commutatif. (Les matrices-produits  $B_1 \cdot B_2$  et  $B_2 \cdot B_1$  ne font d'ailleurs pas partie de  $\mathcal{S}$  :  $\mathcal{S}$  n'est pas stable pour la multiplication matricielle).

Le sev  $\mathcal{S}$  considéré n'est donc pas de type  $\mathcal{BSC}$ .

### Questions Q5 - Q6 - Q7

Ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) - Sev de type  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  (dimension  $d > n$ )

**Q5** est une question ouverte. Il est vraisemblable, (mais il s'agit là d'une conjecture) qu'il n'existe pas de sev de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$  possédant la propriété  $\mathcal{BSC}$ , de dimension  $d > n$  (\*).

Concernant **Q6**, la réponse apparaît négative. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un sev noté  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$ , de dimension  $d > n$ , possédant la propriété  $\mathcal{BSC}$  et incluant  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  n'appartenant pas à  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Le produit de  $A$  par toute matrice de  $\mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  (et *a fortiori* par toute matrice de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ) est donc commutatif. Or la matrice  $N_n = B_1 + B_2$  appartient à  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Le produit de  $A$  par la matrice  $N_n$  est donc commutatif. Mais, par construction même de  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ , cet ensemble renferme toutes les matrices commutant avec  $N_n$ . Donc  $A$  appartient à  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ . Contradiction. En conclusion, l'inclusion stricte  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \subset \mathcal{BSC}_n^{(d)}(\mathbb{B})$  est impossible.

Bien entendu, si la conjecture liée à **Q5** est exacte, la question **Q7** est sans objet. En revanche, si cette conjecture est fautive, la question **Q7** prend alors une importance primordiale.

(\*) *Note* : Un théorème d'Issai Schur établit que le nombre  $N(n)$  de matrices commutatives,

d'ordre  $n$ , linéairement indépendantes, est donné par la formule  $N(n) = \left[ \frac{n^2}{4} \right] + 1$ ,

où  $[ ]$  désigne la partie entière du nombre considéré. On a donc :  $N(n) = \nu^2 + 1$  pour  $n = 2\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) et  $N(n) = \nu(\nu + 1) + 1$  pour  $n = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ). Mais les matrices considérées ici sont quelconques et non strictement bisymétriques.

## 2. Définition de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{C})$

Dans toute cette étude, nous avons raisonné sur des matrices à éléments dans  $\mathbb{B}$ .

Ceci nous amène à nous poser la question suivante :

**Q8** : Existe-t-il des ensembles équivalents au sev  $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$  si l'on prend pour corps de base l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou l'ensemble  $\mathbb{C}$  ?

La réponse à **Q8** est positive. Il est aisé de construire, pour tout ordre  $n$ , des matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou dans  $\mathbb{C}$ ), calquées sur celles à valeurs dans  $B$ .

Considérons en effet les matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , qui sont à valeurs dans  $B$ , et remplaçons-y les éléments ayant la valeur 0 dans  $B$  par des éléments ayant la valeur 0 dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$  (élément neutre de l'addition dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ ), et les éléments ayant la valeur 1 dans  $B$  par des éléments ayant la valeur 1 dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$  (élément neutre de la multiplication dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ ).

Après cette substitution, les matrices obtenues continuent à respecter les Relations  $(R_k)$  ( $1 \leq k \leq \nu$ , si  $n$  pair ( $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) et  $1 \leq k \leq \nu + 1$ , si  $n$  impair ( $n = 2\nu + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ )) énoncées dans le Théorème 2-2 du Chapitre 2.

Pour tout  $n$  entier, le système obtenu  $\{B_{ni}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est libre (même démonstration que celle du Chapitre 2). De plus, les matrices  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ainsi définies, ont les mêmes propriétés générales (\*) que leurs équivalentes à valeurs dans  $B$ . En particulier, les règles de multiplication entre ces matrices sont les mêmes.

Si l'on pose alors :

$\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$ , (ensemble des combinaisons linéaires, à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , des  $n$  matrices  $B_{ni}$  ainsi définies),

$\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C}) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$ , (ensemble des combinaisons linéaires, à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , des  $n$  matrices  $B_{ni}$  ainsi définies),

les ensembles obtenus sont des sev respectivement de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{R})$  et de  $\mathcal{BS}_n(\mathbb{C})$ , qui possèdent la propriété  $\mathcal{BSE}$ .

Les notions de signature (colonne et ligne) s'étendent aux matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ . Il s'ensuit que les propriétés générales (\*) de ces matrices sont les mêmes que celles des matrices de  $\mathcal{BSE}_n(B)$ .

(\*) *Remarques :*

Il existe toutefois des différences majeures entre les matrices de  $\mathcal{BSE}_n(B)$  et les matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ . Citons-en 2.

- 1) Première différence : les matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$  ne sont évidemment pas soumises au Théorème Fondamental des matrices à éléments dans  $B$  (cf. Annexe 1 du Chapitre 6).
- 2) Deuxième différence : la théorie des carrés des matrices de  $\mathcal{BSE}_n(B)$ , telle qu'exposée au Chapitre 5, est inapplicable aux matrices de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ . En particulier, le carré d'une matrice de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$  ou de  $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$  n'a pas de composantes (ou coordonnées) paires systématiquement nulles dans la base canonique  $B_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .