

**SOUS-ALGÈBRE COMMUTATIVE DÉFINIE DANS
L'ENSEMBLE DES MATRICES BISYMÉTRIQUES
D'ORDRE n**

PARTIE 1

CHAPITRES 1 - 2 - 3 - 4

Introduction

\mathbb{R} désigne le corps des réels. \mathbb{C} désigne le corps des nombres complexes.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le corps fini constitué des 2 seuls éléments notés 0 et 1. Pour alléger les notations à venir, nous poserons systématiquement : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{B}$.

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n , à éléments dans \mathbb{B} . $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ renfermant les matrices carrées bisymétriques d'ordre n .

L'objectif de cette étude est d'établir l'existence d'un \mathbb{B} -sous-espace vectoriel de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$, dénommé $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$, de dimension égale à n et dans lequel le produit matriciel est commutatif. Nous démontrerons ainsi que $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ est une \mathbb{B} -algèbre commutative, la 2^{ème} loi interne étant la multiplication matricielle.

Nous définirons la base canonique de $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$.

L'étude mettra en lumière de nombreuses propriétés spécifiques aux matrices de $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$.

La conclusion de cette étude démontrera l'existence d'autres sous-espaces vectoriels de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ dont le produit matriciel est commutatif, mais de dimension inférieure à n . Elle fournira aussi la définition de $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$, et donnera des indications relatives à la transposition de certaines propriétés de $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ vers $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$.

Note :

Les résultats de la présente étude sont issus de travaux effectués dans le cadre de la résolution d'un problème qui fera l'objet d'une publication ultérieure.

Abstract

\mathbb{R} is the field of the reals. \mathbb{C} is the field of the complex numbers.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is the finite field, consisting of 2 elements denoted by 0 and 1. In order to simplify forthcoming notations, we will systematically write : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{B}$.

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ are respectively the set of the $n \times p$ matrices (n rows, p columns) and the set of the $n \times n$ square matrices with elements belonging to \mathbb{B} . $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ désignates the subspace of $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ consisting of $n \times n$ bisymmetrical matrices.

The purpose of this paper is to demonstrate the existence of an n -dimensional \mathbb{B} -vector subspace of $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$, called $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$, where the product of matrices is commutative. We will consequently prove that $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ is a commutative \mathbb{B} -algebra, the 2nd internal law being the product of matrices.

We will define the canonical basis of $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$.

This paper will also highlight numerous properties specific to the matrices belonging to $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$.

The conclusion of this document will prove the existence of other \mathbb{B} -vector sub-spaces of $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$, where the product of matrices is commutative, but with a dimension lower than n . It will also provide the definition of the $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$ and $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$ vector-spaces, as well as indications about the transposition of certain properties of $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{B})$ to $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{R})$ and $\mathcal{BSE}_n(\mathbb{C})$.

Note :

The present results derive from works dedicated to the resolution of a specific problem which will be published later on.

TABLE DES MATIÈRES

PARTIE 1 : CHAPITRES 1 - 2 - 3 - 4

INTRODUCTION

ABSTRACT

CHAPITRE 1	9
MATRICES SYMETRIQUES – MATRICES 2-SYMETRIQUES – MATRICES BISYMETRIQUES	9
1.1. Matrices symétriques	9
1.2. Matrices 2-symétriques	10
1.3. Matrices bisymétriques	13
CHAPITRE 2	25
MATRICES BISYMETRIQUES COMMUTATIVES – ESPACE VECTORIEL $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	25
2.1. Introduction	25
2.2. Étude des cas $n = 1$ à 6	27
2.3. Matrices bisymétriques commutatives d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ - Espace vectoriel $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ - Base canonique B_{n_i} ($1 \leq i \leq n$) de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	41
2.4. Schéma représentant les inclusions : $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \subseteq \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$	60

CHAPITRE 3	61
SIGNATURE-COLONNE ET SIGNATURE-LIGNE D'UNE MATRICE DE $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ – ISOMORPHISMES ENTRE $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ ET $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ET ENTRE $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ ET $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ – PRODUIT DE MATRICES DE $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	61
3.1. Signature-colonne et signature-ligne d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	61
3.2. Isomorphismes entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ et entre $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	61
3.3. Transformation d'un système affine associé à une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ en équation matricielle	65
3.4. Produit $B_i \cdot B_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$	66
3.5. Produit d'une matrice quelconque de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ par une matrice de la base canonique $B_i, 1 \leq i \leq n$	72
3.6. Produit de 2 matrices quelconques de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	89
CHAPITRE 4	91
DETERMINANT DES MATRICES $B_i, 1 \leq i \leq n$, DE LA BASE CANONIQUE DE $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	91
4.1. Introduction	91
4.2. Tableau donnant les déterminants des matrices $B_i, 1 \leq i \leq 16$, de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	92
4.3. Théorème du déterminant des matrices $B_i, 1 \leq i \leq n$, de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$	93
ANNEXE 1 / CHAPITRE 4 - DÉTERMINANT D'UNE MATRICE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$	95

CHAPITRE 1

Matrices symétriques – Matrices 2-symétriques – Matrices bisymétriques

1.1. Matrices symétriques (Rappels de notions classiques).

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \dots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Définition 1-1. On appelle matrice transposée de la matrice A , la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ obtenue à partir de A par symétrie par rapport à sa 1^{ère} diagonale $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n-1\ n-1}, a_{nn})$. Elle est notée tA .

tA s'écrit donc :

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n-1\ 1} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n-1\ 2} & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1\ n-1} & a_{2\ n-1} & \dots & a_{n-1\ n-1} & a_{n\ n-1} \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1\ n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Définition 1-2. Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ est dite symétrique si et seulement si : ${}^tA = A$.

Définition 1-3. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans \mathbb{B} .

Théorème 1-4. $\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque :

Le produit de 2 matrices symétriques d'ordre supérieur à $n \geq 2$ peut ne pas être symétrique.

Exemple : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Théorème 1-5. $\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{B}))^2 : AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \Leftrightarrow AB = BA$.

Autrement dit : le produit de 2 matrices symétriques est symétrique si et seulement si ce produit est commutatif.

Théorème 1-6. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$.

Théorème 1-7. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow {}^t A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ et $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Terminologie et notations

En raison des notions introduites dans la suite de cette étude, nous substituerons désormais à la terminologie classique la terminologie suivante.

Nous dénommerons 1-transposée de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ la matrice dite transposée en terminologie classique. Nous la noterons classiquement : ${}^t A$.

Nous dirons qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ est 1-symétrique si elle est symétrique en terminologie classique. (autrement dit si ${}^t A = A$).

Nous noterons désormais 1- $\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ l'ensemble classiquement noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans \mathbb{B} .

1.2. Matrices 2-symétriques

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Définition 1-8. On appelle matrice 2-transposée de la matrice A , la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ obtenue à partir de A par symétrie par rapport à sa 2^{ème} diagonale $(a_{1n}, a_{2\ n-1}, \dots, a_{n-1\ 2}, a_{n1})$. Elle est notée A^t .

A^t s'écrit donc :

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{nn} & a_{n-1\ n} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ a_{n\ n-1} & a_{n-1\ n-1} & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{1\ n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{22} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n-1\ 1} & \cdots & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Définition 1-9. Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ est dite 2-symétrique si et seulement si : $A^t = A$.

Définition 1-10. On note 2- $\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ l'ensemble des matrices 2-symétriques d'ordre n à coefficients dans \mathbb{B} .

Théorème 1-11. $2-S_n(B)$ est un sev de $\mathcal{M}_n(B)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Théorème 1-12. $\forall (A,B) \in (2-S_n(B))^2 : AB \in 2-S_n(B) \Leftrightarrow AB = BA$.

Autrement dit : le produit de 2 matrices 2-symétriques est 2-symétrique si et seulement si ce produit est commutatif.

Théorème 1-13. $A \in 2-S_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B) \Rightarrow A^{-1} \in 2-S_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B)$.

Matrices I_n et J_n

I_n désigne la matrice-unité d'ordre n , élément neutre de la multiplication matricielle.

I_n est à la fois 1-symétrique et 2-symétrique : $I_n = {}^t I_n = I_n^t$.

Considérons une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(B)$. Elle possède un axe médian horizontal et un axe médian vertical.

Si n est pair ($n = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$), l'axe médian vertical (resp. horizontal) passe entre les colonnes (resp. lignes) ν et $\nu+1$.

Si n est impair ($n = 2\nu+1$, $\nu \in \mathbb{N}$), l'axe médian vertical (resp. horizontal) passe par le milieu de la colonne (resp. ligne) $\nu+1$. Nous dénommerons colonne centrale (resp. ligne centrale) cette colonne (resp. ligne) $\nu+1$.

Les notions de colonne centrale (resp. ligne centrale) n'ont de sens que si n est impair.

Nous dénommerons « centre » d'une matrice le point situé à l'intersection de ses deux axes médians. Ce « centre » ne coïncide avec un élément de la dite matrice que si n est impair. Cet élément, dont les indices sont $(\nu+1, \nu+1)$, sera alors dénommé élément central de la matrice.

Soit J_n la matrice dont les seuls éléments non nuls sont ceux de la 2^{ème} diagonale :

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_n.$$

J_n représente ainsi la matrice symétrique de la matrice I_n par rapport aux axes médians ainsi définis.

Énumérons quelques propriétés de J_n :

1) On a : $J_n^2 = I_n$ et donc : $J_n^{-1} = J_n$.

2) J_n est à la fois 1-symétrique et 2-symétrique : $J_n = {}^t J_n = J_n^t$.

3) Soit $A = [a_{ij}]$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

On vérifie aisément que :

$$A \cdot J_n = \begin{bmatrix} a_{1n} & \dots & a_{11} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{nn} & \dots & a_{n1} \end{bmatrix}, \quad J_n \cdot A = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}, \quad J_n \cdot A \cdot J_n = \begin{bmatrix} a_{nn} & \dots & a_{n1} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & \dots & a_{11} \end{bmatrix}.$$

En conclusion :

$A \cdot J_n$ est la matrice symétrique de A par rapport à son axe médian vertical.

$J_n \cdot A$ est la matrice symétrique de A par rapport à son axe médian horizontal.

$J_n \cdot A \cdot J_n$ est la matrice symétrique de A par rapport à son centre.

Théorème 1-14. $A^t = J_n \cdot {}^t A \cdot J_n = {}^t (J_n \cdot A \cdot J_n)$.

Remarque :

Les égalités ci-dessus permettent de se passer de la notation A^t en lui substituant la notation $J_n \cdot {}^t A \cdot J_n$ ou ${}^t (J_n \cdot A \cdot J_n)$.

Théorème 1-15. Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ est dite 2-symétrique si et seulement si :

$${}^t A = J_n \cdot A \cdot J_n.$$

Preuve : Les preuves des Théorèmes 1-14 et 1-15 sont immédiates.

Remarque :

D'une manière générale, tous les résultats applicables aux matrices 1-symétriques s'appliquent de la même façon aux matrices 2-symétriques.

Citons-en deux, faisant l'objet des Théorèmes 1-16 et 1-17.

Théorème 1-16. $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

Remarque :

Ce théorème est l'équivalent du théorème classique relatif aux matrices 1-symétriques : ${}^t(AB) = {}^t B \cdot {}^t A$.

Preuve :

Démontrons ce théorème en utilisant les équivalences du Théorème 1-14.

$$\begin{aligned} (AB)^t &= J_n \cdot {}^t(AB) \cdot J_n = J_n \cdot {}^t B \cdot {}^t A \cdot J_n = (J_n \cdot {}^t B \cdot J_n) \cdot (J_n \cdot {}^t A \cdot J_n) \text{ puisque : } J_n^2 = I_n \\ &= B^t \cdot A^t. \end{aligned}$$

Théorème 1-17. $A \in 2\text{-}\mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A^t \in 2\text{-}\mathcal{S}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$ et $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Preuve :

Démontrons ce théorème en utilisant l'équivalence suivante du Théorème 1-14.

$$A^t = J_n \cdot {}^t A \cdot J_n.$$

Comme ${}^t A \in \mathcal{S}_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B)$ et que $J_n \in \mathcal{S}_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B)$, il en est de même de $J_n \cdot {}^t A \cdot J_n$ et donc de A^t . Donc $(A^t)^{-1}$ existe.

D'autre part, en appliquant l'équivalence ci-dessus à la matrice A^{-1} :

$$(A^{-1})^t = J_n \cdot {}^t(A^{-1}) \cdot J_n = J_n \cdot ({}^t A)^{-1} \cdot J_n = (J_n \cdot {}^t A \cdot J_n)^{-1} = (A^t)^{-1}.$$

Enfinement : $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Théorème 1-18. $({}^t A)^t = {}^t(A^t) = J_n \cdot A \cdot J_n$

Remarque :

$({}^t A)^t$ est la matrice 2-transposée de la matrice 1-transposée de A .

${}^t(A^t)$ est la matrice 1-transposée de la matrice 2-transposée de A .

Le Théorème 1-18 affirme que ces 2 matrices sont égales.

Preuve :

Partons de l'égalité établie au Théorème 1-14 : $A^t = J_n \cdot {}^t A \cdot J_n$.

Appliquons cette égalité à la matrice ${}^t A$. Il vient : $({}^t A)^t = J_n \cdot {}^t({}^t A) \cdot J_n = J_n \cdot A \cdot J_n$.

Par ailleurs : ${}^t(A^t) = {}^t(J_n \cdot {}^t A \cdot J_n) = {}^t J_n \cdot {}^t({}^t A) \cdot {}^t J_n = J_n \cdot A \cdot J_n$.

Enfinement : $({}^t A)^t = {}^t(A^t) = J_n \cdot A \cdot J_n$.

Définition et Notation 1-19. Nous noterons sous la forme ${}^t A^t$ les matrices $({}^t A)^t$ et ${}^t(A^t)$ qui sont égales. On a donc : ${}^t A^t = ({}^t A)^t = {}^t(A^t) = J_n \cdot A \cdot J_n$.

1.3. Matrices bisymétriques

1.3.1. Définitions

Définition et Théorème 1-20. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(B)$ est dite bisymétrique si elle est à la fois 1-symétrique et 2-symétrique. On a donc par définition : ${}^t A = A^t = A$. Il s'ensuit que : ${}^t A^t = A$.

Preuve : ${}^t A^t = ({}^t A)^t = A^t = A$.

Définition 1-21. On note $\mathcal{BS}_n(B)$ l'ensemble des matrices bisymétriques d'ordre n à coefficients dans B .

Définition 1-22. Nous dénommerons paramètres d'une matrice bisymétrique d'ordre n les éléments de cette matrice dont les indices (i, j) vérifiant les inégalités suivantes :

- (1) $1 \leq i \leq E\left(\frac{n+1}{2}\right)$, inégalité qui se dédouble en 2 cas, selon que n est pair ou impair :
- si $n = 2\nu$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$) : $1 \leq i \leq \nu$, - si $n = 2\nu + 1$ ($\nu \in \mathbb{N}$) : $1 \leq i \leq \nu + 1$,
- (2) pour i fixé : $i \leq j \leq n - i + 1$.

Nous dénommerons zone principale d'une matrice bisymétrique l'ensemble de ses paramètres.

(Cette zone correspond graphiquement au domaine grisé des Figures 1-a et 1-b ci-après).

Nous dénommerons zone secondaire d'une matrice bisymétrique l'ensemble de ses autres éléments. (Cette zone correspond graphiquement au domaine non grisé des Figures 1-a et 1-b ci-après).

Figure 1-a : $n = 2\nu$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$)

1 2 ν $\nu+1$ $n-1$ n

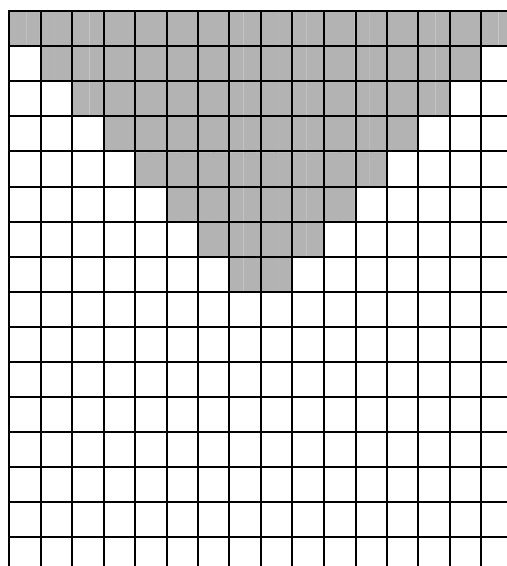
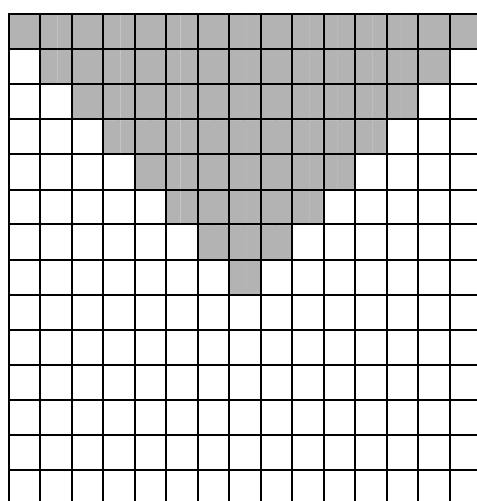


Figure 1-b : $n = 2\nu + 1$

. $n-1$ n



($\nu \in \mathbb{N}$)

1 2 $\nu+1$

Note : Par commodité, les matrices bisymétriques concernées sont représentées ici sous la forme d'un tableau carré constitué de $n \times n$ cases).

Remarque :

Il est clair qu'une 1-transposition de la zone principale fournit la moitié supérieure gauche de la matrice bisymétrique concernée et que la 2-transposition de cette dernière fournit l'intégralité de la matrice bisymétrique concernée.

L'ensemble des paramètres d'une matrice bisymétrique définit donc parfaitement la dite matrice.

Théorème 1-23. $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$, un sev de $1\text{-}\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$ et un sev de $2\text{-}\mathcal{S}_n(\mathbb{B})$.

- si n est impair ($n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$) : $\dim(\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})) = (\nu + 1)^2$,

- si n est pair ($n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$) : $\dim(\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})) = \nu(\nu + 1)$.

Preuve :

Le calcul de la dimension de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ se fait par simple dénombrement des paramètres.

On observera qu'il y a (avec $n \geq 2$ et $1 \leq i \leq \nu$) : $(n - 2i + 2)$ paramètres dans la ligne i .

De plus : - si n est pair ($n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$) : il y a 2 paramètres dans la ligne ν ,

- si n est impair ($n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$) : il y a 1 paramètre dans la ligne $\nu + 1$.

Partant de là, les résultats ci-dessus sont immédiats.

1.3.2. Exemples de matrices bisymétriques

$$\underline{n=1} : A = [a], \quad a \in \mathbb{B}; \quad \dim(\mathcal{BS}_1(\mathbb{B})) = 1.$$

$$\underline{n=2} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{B}^2; \quad \dim(\mathcal{BS}_2(\mathbb{B})) = 2.$$

$$\underline{n=3} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{bmatrix}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{B}^4; \quad \dim(\mathcal{BS}_3(\mathbb{B})) = 4.$$

$$\underline{n=4} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \quad (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{B}^6; \quad \dim(\mathcal{BS}_4(\mathbb{B})) = 6.$$

$$\underline{n=5} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & f & g & h & d \\ c & g & i & g & c \\ d & h & g & f & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, \quad (a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{B}^9; \quad \dim(\mathcal{BS}_5(\mathbb{B})) = 9.$$

$n = 6$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & g & h & i & j & e \\ c & h & k & l & i & d \\ d & i & l & k & h & c \\ e & j & i & h & g & b \\ f & e & d & c & b & a \end{bmatrix}, \quad (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l) \in \mathbb{B}^{12}; \quad \dim(\mathcal{BS}_6(\mathbb{B})) = 12.$$

1.3.3. Propriétés des matrices bisymétriques

Remarque 1 :

Le produit de 2 matrices non-bisymétriques peut être bisymétrique. Tel est le cas si le produit obtenu est la matrice nulle, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le cas suivant aboutit, lui, à une matrice-produit bisymétrique non nulle.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est non-bisymétrique, tandis que } A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est bisymétrique.}$$

Remarque 2 :

A l'inverse, pour $n \geq 3$, le produit de 2 matrices bisymétriques peut ne pas être bisymétrique.

$$\text{Exemple : } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Toutefois, comme pour les matrices 1-symétriques et 2-symétriques, on a la condition nécessaire et suffisante suivante.

Théorème 1-24. $\forall (A, B) \in (\mathcal{BS}_n(\mathbb{B}))^2 : AB \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \Leftrightarrow AB = BA$. Autrement dit : le produit de 2 matrices bisymétriques est bisymétrique si et seulement si ce produit est commutatif.

Remarque :

Comme pour les matrices 1-symétriques et 2-symétriques inversibles, on a le théorème qui suit, relatif aux matrices bisymétriques inversibles.

Théorème 1-25. $A \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{BS}_n(\mathbb{B}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{B})$.

1.3.4. Structure générale d'une matrice bisymétrique

1.3.4.1. Sous-matrices centrales et cadres d'une matrice carrée

Définitions 1-26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ et soit k un entier tel que :

- $0 \leq k \leq \nu - 1$, si $n = 2\nu$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$),
- $0 \leq k \leq \nu$, si $n = 2\nu + 1$ ($\nu \in \mathbb{N}$).

On appelle sous-matrice centrale de niveau k de A (en abrégé : smc de niveau k , ou plus simplement : smc- k) la sous-matrice obtenue en supprimant de A ses k premières lignes, ses k dernières lignes, ses k premières colonnes et ses k dernières colonnes. La smc de niveau k de A est donc une matrice d'ordre $(n - 2k)$.

Note : La smc de niveau 0 (smc-0) de A est donc la matrice A elle-même.

Nous conviendrons que, pour $k > \nu - 1$, si $n = 2\nu$, et, pour $k > \nu$, si $n = 2\nu + 1$:
smc de niveau k de $A = \emptyset$.

On appelle cadre de niveau $(k + 1)$ de A (ou plus simplement : cadre- $(k + 1)$ de A) l'ensemble obtenu en privant la smc de niveau k de A de la smc de niveau $(k + 1)$ de A .

Remarques :

- 1) Si $n = 2\nu$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$), la matrice A compte ν smc (en comptant la smc 0 qui se confond avec A) et ν cadres.

A noter que le cadre de niveau ν de A se confond avec sa smc de niveau $(\nu - 1)$. Il s'agit d'une matrice d'ordre 2.

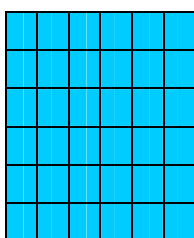
- 2) Si $n = 2\nu + 1$ ($\nu \in \mathbb{N}$), la matrice A compte $(\nu + 1)$ smc (en comptant la smc 0 qui se confond avec A) et $(\nu + 1)$ cadres.

A noter que le cadre de niveau $(\nu + 1)$ de A se confond avec sa smc de niveau ν . Il s'agit d'une matrice d'ordre 1 qui se confond avec la case centrale de la matrice, d'indices $(\nu + 1, \nu + 1)$.

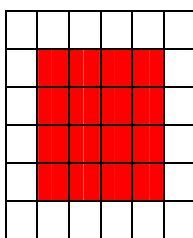
- 3) Le cadre de niveau $(k + 1)$ de A peut aussi se définir comme le cadre de niveau 1 de la smc de niveau k de A .

Exemples :

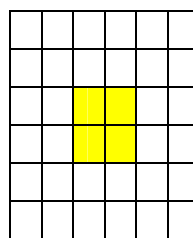
Les exemples ci-dessous illustrent toutes les notions précédentes pour les ordres $n = 6$ et $n = 7$.

 $n = 6$ 

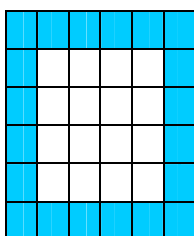
smc-0

 $n = 6$ 

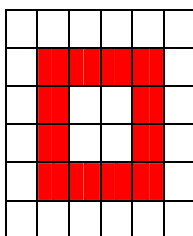
smc-1

 $n = 6$ 

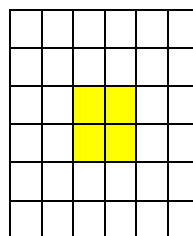
smc-2



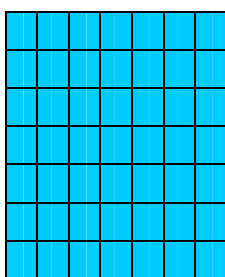
cadre-1



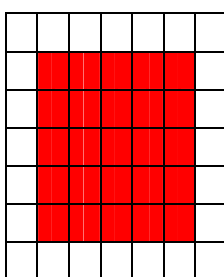
cadre-2



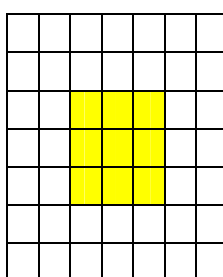
cadre-3

 $n = 7$ 

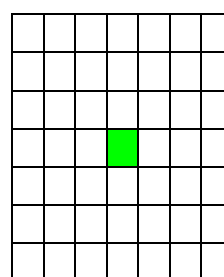
smc-0

 $n = 7$ 

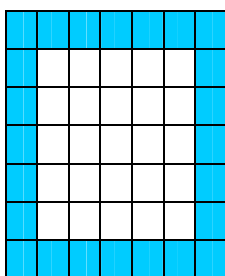
smc-1

 $n = 7$ 

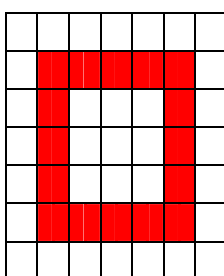
smc-2

 $n = 7$ 

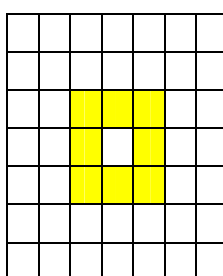
smc-3



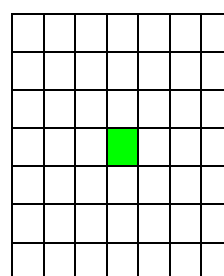
cadre-1



cadre-2



cadre-3



cadre-4

1.3.4.2. Positionnement des paramètres dans une matrice bisymétrique

Notation et Définitions 1-27. L'élément d'indices (i, j) de la zone principale d'une matrice de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ constitue un paramètre de cette matrice (cf. **Définitions 1-22**). Nous noterons ce paramètre sous la forme abrégée: $[i, j]$ (*).

Le 1^{er} indice i est dénommé niveau du paramètre.

Le 2^{ème} indice j est dénommé numéro d'ordre du paramètre à l'intérieur du niveau i .

(*) Rappel :

Rappelons que $[i, j]$ est égal à l'élément d'indices (i, j) de cette matrice, sous réserve que celui-ci fasse partie de la zone principale de la matrice.

Rappelons que les indices de la zone principale vérifient la double inégalité :

$$1 \leq i \leq E\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad \text{et} \quad i \leq j \leq n - i + 1$$

ou encore :

- $1 \leq i \leq \nu$, si $n = 2\nu$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$),
- $1 \leq i \leq \nu + 1$, si $n = 2\nu + 1$ ($\nu \in \mathbb{N}$).

Remarque :

Il convient de noter que tous les paramètres de niveau i d'une matrice bisymétrique sont positionnés dans le cadre de niveau i de cette matrice.

Exemples :

Les exemples $n = 6$ et $n = 7$ ci-dessous illustrent la disposition des paramètres des matrices bisymétriques d'ordre $n = 6$ et $n = 7$ dans la zone principale (en grisé) et dans la zone secondaire de ces matrices.

La disposition des paramètres dans la zone principale répond à la définition ci-dessus.

La disposition des paramètres dans la zone secondaire est obtenue par 1-transposition de la zone principale. Cette opération fournit la moitié supérieure gauche de la matrice bisymétrique concernée. La 2-transposition de cette dernière fournit ensuite l'intégralité de la matrice bisymétrique concernée.

$n = 6$

[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]
[1,2]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]	[1,5]
[1,3]	[2,3]	[3,3]	[3,4]	[2,4]	[1,4]
[1,4]	[2,4]	[3,4]	[3,3]	[2,3]	[1,3]
[1,5]	[2,5]	[2,4]	[2,3]	[2,2]	[1,2]
[1,6]	[1,4]	[1,5]	[1,3]	[1,2]	[1,1]

 $n = 7$

[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]
[1,2]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]	[2,6]	[1,6]
[1,3]	[2,3]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[2,5]	[1,5]
[1,4]	[2,4]	[3,4]	[4,4]	[2,4]	[2,4]	[1,4]
[1,5]	[2,5]	[3,5]	[3,4]	[3,3]	[2,3]	[1,3]
[1,6]	[2,6]	[2,5]	[2,4]	[2,3]	[2,2]	[1,2]
[1,7]	[1,6]	[1,5]	[1,4]	[1,3]	[1,2]	[1,1]

1.3.4.3. Structure générale d'une matrice bisymétrique d'ordre n

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathcal{BS}_n(B)$.

Nous allons définir la structure générale de A en procédant à l'étude de ses cadres successifs de niveau 1 à ν si $n = 2\nu$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$), et de niveau 1 à $\nu + 1$ si $n = 2\nu + 1$ ($\nu \in \mathbb{N}$).

On suppose dans les schémas qui suivent n assez grand ($n \geq 6$ pour fixer les idées) de manière qu'il existe un cadre de niveau 2 ainsi qu'un cadre de niveau $i > 2$. On suppose aussi $i < \nu$ de manière que $n - i + 1 > i$. L'adaptation de ces schémas aux matrices d'ordre $n < 6$ ne pose aucune difficulté particulière.

Cadre 1 : Par définition : $[1,1] = a_{11}, [1,2] = a_{12}, \dots, [1,i] = a_{1i}, \dots,$
 $[1, n-i+1] = a_{1, n-i+1}, \dots, [1, n-1] = a_{1, n-1}, [1, n] = a_{1n}.$

[1,1]	[1,2]	...	[1, i]	...	[1, n-i+1]	...	[1, n-1]	[1, n]
[1,2]								[1, n-1]
...								...
[1, i]								[1, n-i+1]
...								...
[1, n-i+1]								[1, i]
...								...
[1, n-1]								[1,2]
[1, n]	[1, n-1]	...	[1, n-i+1]	...	[1, i]	...	[1,2]	[1,1]

Cadre 2 : Par définition : $[2,2] = a_{22}, \dots, [2,i] = a_{2i}, \dots,$
 $[2, n-i+1] = a_{2, n-i+1}, \dots, [2, n-1] = a_{2, n-1} .$

$[2, 2]$...	$[2, i]$...	$[2, n-i+1]$...	$[2, n-1]$
...						...
$[2, i]$						$[2, n-i+1]$
...						...
$[2, n-i+1]$						$[2, i]$
...						...
$[2, n-1]$...	$[2, n-i+1]$...	$[2, i]$...	$[2, 2]$

Cadre i : Par définition : $[i, i] = a_{ii}, \dots, [i, n-i+1] = a_{i, n-i+1} .$

$[i, i]$...	$[i, n-i+1]$
...		...
$[i, n-i+1]$		$[i, i]$

Enfin, concernant les cases centrales de la matrice, 2 cas sont à distinguer, selon que n est pair ou impair.

n pair : $n = 2\nu$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$)

Cadre ν : Par définition : $[\nu, \nu] = a_{\nu \nu}$, $[\nu, \nu+1] = a_{\nu \nu+1}$.

$[\nu, \nu]$	$[\nu, \nu+1]$
$[\nu, \nu+1]$	$[\nu, \nu]$

n impair : $n = 2\nu+1$ ($\nu \in \mathbb{N}$)

Cadre $\nu+1$: Par définition : $[\nu+1, \nu+1] = a_{\nu+1 \nu+1}$.

$[\nu+1, \nu+1]$

La structure générale d'une matrice bisymétrique s'obtient en imbriquant les cadres de niveaux successifs précédemment définis.

La Figure suivante donne un aperçu de cette structure, sachant que la partie centrale de la matrice a été sciemment laissée en blanc : il faut y insérer le cadre de niveau ν ci-dessus si n est pair et la cadre de niveau $(\nu+1)$ ci-dessus si n est impair.

$[1, 1]$	$[1, 2]$		$[1, i]$	\dots	$[1, n-i+1]$	\dots	$[1, n-1]$	$[1, n]$
$[1, 2]$	$[2, 2]$		$[2, i]$	\dots	$[2, n-i+1]$	\dots	$[2, n-1]$	$[1, n-1]$
\dots	\dots						\dots	
$[1, i]$	$[2, i]$		$[i, i]$	\dots	$[i, n-i+1]$		$[2, n-i+1]$	$[1, n-i+1]$
\dots	\dots		\dots		\dots		\dots	\dots
$[1, n-i+1]$	$[2, n-i+1]$		$[i, n-i+1]$	\dots	$[i, i]$		$[2, i]$	$[1, i]$
\dots	\dots						\dots	\dots
$[1, n-1]$	$[2, n-1]$		$[2, n-i+1]$	\dots	$[2, i]$	\dots	$[2, 2]$	$[1, 2]$
$[1, n]$	$[1, n-1]$		$[1, n-i+1]$		$[1, i]$	\dots	$[1, 2]$	$[1, 1]$

Terminons en explicitant ci-dessous la structure de la ligne i :

$$[1, i][2, i] \dots [i-1, i][i, i][i, i+1] \dots [i, n-i][i, n-i+1][i-1, n-i+1] \dots [2, n-i+1][1, n-i+1]$$

qui compte bien n éléments.

Structure identique pour la colonne i (mêmes éléments dans le même ordre, mais dans le sens vertical).

CHAPITRE 2

Matrices bisymétriques commutatives – Espace vectoriel $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

2.1. Introduction

$\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ désigne l'ensemble des matrices bisymétriques d'ordre n à coefficients dans \mathbb{B} . O_n désigne la matrice nulle d'ordre n . I_n désigne la matrice-unité d'ordre n .

Nous avons établi que le produit de 2 matrices bisymétriques n'est pas nécessairement bisymétrique mais que ce produit est bisymétrique si et seulement s'il est commutatif. (Cf. Théorème 1-24 du Chapitre 1).

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'existence de sous-espaces vectoriels (sev) de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ stables par la multiplication, c.-à-d. tels que le produit de 2 quelconques de leurs matrices leur appartiennent (autrement dit encore, tels que la matrice-produit résultante soit bisymétrique).

Compte tenu de la condition nécessaire et suffisante rappelée ci-dessus, il revient au même de rechercher les sev de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ stables par la multiplication ou les sev de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ tels que le produit de 2 quelconques de leurs matrices soit commutatif.

Nous noterons \mathcal{BSC} (\mathcal{BS} = bisymétrique, \mathcal{C} = commutatif) un tel sev, et nous verrons ci-après qu'il en existe à tout ordre n . Nous dirons que \mathcal{BSC} est commutatif (*) et que les matrices éléments de \mathcal{BSC} commutent entre elles ou encore qu'elles sont commutatives (*).

(*) Nous sous-entendons dorénavant que la propriété de commutativité dont il s'agit concerne la multiplication matricielle.

Pour $n = 1$, $\mathcal{BSC} = \mathcal{BS}_1(\mathbb{B})$ convient. De même pour $n = 2$, $\mathcal{BSC} = \mathcal{BS}_2(\mathbb{B})$ convient.

Par contre, pour $n = 3$, nécessairement : $\mathcal{BSC} \neq \mathcal{BS}_3(\mathbb{B})$ (cf. exemple de la Remarque 2 de la Section 1.3.3. du Chapitre 1). Par suite, pour $n \geq 3$, on a nécessairement l'inclusion stricte : $\mathcal{BSC} \subset \mathcal{BS}_3(\mathbb{B})$.

En fait, l'existence d'au moins un sev \mathcal{BSC} de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ (à un ordre n quelconque), stable par la multiplication (ou commutatif - ce qui revient au même) est facile à établir. Le sev $\mathcal{BSC} = \{O_n, I_n\}$, de dimension 1, répond aux critères fixés, comme on le vérifie sans peine.

Bien entendu, \mathcal{BSC} , en tant que sev, contient toujours la matrice nulle O_n . Le produit de O_n par toute matrice A de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ est d'ailleurs bien commutatif. Nous pouvons également toujours inclure dans \mathcal{BSC} la matrice-unité I_n , puisque le produit de I_n par toute matrice A de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ est toujours commutatif.

De plus, \mathcal{BSC} étant un sev, si \mathcal{BSC} contient les matrices A et B, \mathcal{BSC} contient toute matrice représentant une combinaison linéaire de A et de B, de la forme $\alpha A + \beta B$, $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{B})^2$.

Pour mener à bien la construction d'un sev \mathcal{BSC} non trivial, nous allons introduire une *matrice de référence* et nous choisirons comme matrice de référence la matrice N_n de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ définie comme suit :

$$N_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_n .$$

(N_n est nulle partout, à l'exception des 2 sous-diagonales parallèles à la diagonale principale, constituées d'éléments égaux à 1).

Ceci nous amène à la 1^{ère} définition de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$:

Définition 2-1 - 1^{ère} Définition du sev $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$. $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ est le commutant de la matrice N_n de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$.

Il est clair que les matrices O_n , I_n et N_n figureront dans $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$, puisque les produits $N_n \cdot O_n$, $N_n \cdot I_n$ et $N_n \cdot N_n$ sont commutatifs.

Nous démontrerons que l'ensemble $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ obtenu répond bien au problème posé. Il faudra pour cela démontrer que $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ est un sev de $\mathcal{BS}_n(\mathbb{B})$ et que ce sev est globalement stable pour la multiplication, autrement dit que le produit de 2 matrices quelconques A et A' de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ - et non plus seulement le produit $A \cdot N_n$ - est bisymétrique.

Ceci suffira, comme nous l'avons dit, à assurer la commutativité de l'ensemble des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

Nous démontrerons également que la dimension de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ est égale à n .

Nous commencerons par étudier les cas correspondant à $n = 1$ à 5 en suivant le schéma indiqué ci-dessus.

Pour $n = 6$, nous adopterons une approche légèrement différente, en nous appuyant sur les résultats obtenus au cours de l'étude des cas $n = 1$ à 5.

Cette approche préfigurera le traitement du cas général $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

2.2. Étude des cas $n = 1$ à 6

$n = 1$

$\mathcal{M}_1(B) = \mathcal{BS}_1(B)$ ne contient que 2 matrices $I_1 = [1]$ et $O_1 = [0]$. Dans ce cas particulier : $N_1 = O_1$ et on vérifie sans peine que les produits : $I_1 \cdot I_1 = I_1$, $I_1 \cdot O_1 = O_1$, $O_1 \cdot I_1 = O_1$ et $O_1 \cdot O_1 = O_1$, sont et commutatifs.

Donc : $\mathcal{BSE}_1(B) = \mathcal{BS}_1(B) = \mathcal{M}_1(B)$ et $\dim(\mathcal{BSE}_1(B)) = 1$.

Posons : $B_{11} = I_1$. (Le 1^{er} indice de B correspond à l'ordre $n = 1$, le 2^{ème} à un numéro de séquence).

La « base canonique » de $\mathcal{BSE}_1(B)$ est constituée de la seule matrice $B_{11} = I_1$.

Toute matrice A de $\mathcal{BSE}_1(B)$ s'écrit sous la forme $A = a B_{11}$, avec $a \in B$.

En conclusion : $\mathcal{BSE}_1(B) = \text{Vect}(B_{11})$.

$n = 2$

$\mathcal{M}_2(B) = \mathcal{BS}_2(B)$ et : $N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = J_2$.

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $(a, b) \in B^2$, une matrice quelconque de $\mathcal{BS}_2(B)$.

$A \cdot N_2 = \begin{bmatrix} b & a \\ a & b \end{bmatrix}$ est bisymétrique, sans conditions particulières sur a et b .

On peut d'ailleurs vérifier directement que si l'on se donne 2 matrices A et A' quelconques de $\mathcal{BS}_2(B)$:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ et $A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{bmatrix}$, $(a, b) \in B^2$, $(a', b') \in B^2$, alors la matrice- produit :

$A \cdot A' = \begin{bmatrix} aa' + bb' & ab' + b'a \\ ab' + ba' & aa' + bb' \end{bmatrix}$ est bisymétrique, sans conditions particulières portant sur a, b, a', b' .

Donc : $\mathcal{BSE}_2(B) = \mathcal{BS}_2(B) = \mathcal{M}_2(B)$ et $\dim(\mathcal{BSE}_2(B)) = 2$.

Posons : $B_{21} = I_2$ et $B_{22} = J_2 = N_2$.

(Le 1^{er} indice de B correspond à l'ordre $n = 2$, le 2^{ème} à un numéro de séquence).

La « base canonique » de $\mathcal{BSE}_2(B)$ est constituée des matrices $B_{21} = I_2$ et $B_{22} = J_2 = N_2$.

Toute matrice A de $\mathcal{BSE}_2(B)$ s'écrit sous la forme $A = a B_{21} + b B_{22}$ avec $(a, b) \in B^2$.

En conclusion : $\mathcal{BSE}_2(B) = \text{Vect}(B_{21}, B_{22})$

$n = 3$

Soit $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$ un ensemble contenant au départ la seule matrice : $N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{B}^4$ une matrice quelconque de $\mathcal{BS}_3(\mathbb{B})$.

Cherchons à quelles conditions la matrice produit $A \cdot N_3$ est bisymétrique.

$$A \cdot N_3 = \begin{bmatrix} b & a+c & b \\ d & 0 & d \\ b & a+c & b \end{bmatrix}$$

On voit donc qu'en règle générale, $A \cdot N_3$ n'est pas bisymétrique.

Cependant $A \cdot N_3$ est bisymétrique si et seulement si la condition suivante (C_3) est remplie :

$$(C_3) \quad d = a + c$$

Remarque :

Le produit $N_3 \cdot A$ est le 1-transposé de $A \cdot N_3$. En effet : ${}^t(N_3 \cdot A) = {}^t A \cdot {}^t N_3 = A \cdot N_3$.

Si l'on avait formé le produit $N_3 \cdot A$ (au lieu de $A \cdot N_3$) et si l'on avait cherché à quelles conditions $N_3 \cdot A$ est bisymétrique, on aurait retrouvé la même condition (C_3) : $d = a + c$.

De même, si l'on avait cherché à quelles conditions le produit $A \cdot N_3$ est commutatif, donc à quelles conditions : $A \cdot N_3 = N_3 \cdot A$, on aurait à nouveau retrouvé la même condition (C_3) : $d = a + c$.

Lorsque la condition (C_3) est remplie, A prend la forme générale suivante :

$$(F_3) \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

Réciproquement, on vérifie aisément que le produit de toute matrice A de la forme (F_3) par la matrice N_3 est bisymétrique.

En conclusion, $A \cdot N_3$ est bisymétrique si et seulement si A est de la forme (F_3) ci-dessus.

Intégrons maintenant dans $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$ l'ensemble des matrices A de la forme (F_3).

(Il convient de noter que la matrice N_3 , initialement introduite dans $\mathcal{BSC}_3(\mathbb{B})$, correspond à la matrice A pour laquelle : $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$).

Considérons les 3 matrices :

$$\mathbf{B}_{31} = \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_{32} = \mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_{33} = \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Le 1^{er} indice de \mathbf{B} correspond à l'ordre $n = 3$, le 2^{ème} à un numéro de séquence).

Ces matrices appartiennent à $\mathcal{BSC}_3(\mathbf{B})$, comme on le vérifie aisément :

- \mathbf{B}_{31} correspond aux valeurs : $a = 1, b = 0, c = 0$,
- \mathbf{B}_{32} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 1, c = 0$,
- \mathbf{B}_{33} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 0, c = 1$.

De plus, le système $\{\mathbf{B}_{31}, \mathbf{B}_{32}, \mathbf{B}_{33}\}$ est un système générateur de $\mathcal{BSC}_3(\mathbf{B})$, puisque toute matrice \mathbf{A} de $\mathcal{BSC}_3(\mathbf{B})$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{A} = a \mathbf{B}_{31} + b \mathbf{B}_{32} + c \mathbf{B}_{33}.$$

Montrons que le système $\{\mathbf{B}_{31}, \mathbf{B}_{32}, \mathbf{B}_{33}\}$ est libre.

La combinaison linéaire $\mathbf{C} = a \mathbf{B}_{31} + b \mathbf{B}_{32} + c \mathbf{B}_{33}$ est une matrice $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ ($1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$) de $\mathcal{BSC}_3(\mathbf{B})$.

Par suite : $a \mathbf{B}_{31} + b \mathbf{B}_{32} + c \mathbf{B}_{33} = \mathbf{O}_3 \Leftrightarrow c_{ij} = 0$ pour : $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$.

Or : $c_{11} = a, c_{12} = b, c_{13} = c$, donc :

$$a \mathbf{B}_{31} + b \mathbf{B}_{32} + c \mathbf{B}_{33} = \mathbf{O}_3 \Rightarrow a = 0, b = 0, c = 0.$$

Le système $\{\mathbf{B}_{31}, \mathbf{B}_{32}, \mathbf{B}_{33}\}$ est donc libre.

En conclusion, le système $\{\mathbf{B}_{31}, \mathbf{B}_{32}, \mathbf{B}_{33}\}$, libre et générateur, est une base de $\mathcal{BSC}_3(\mathbf{B})$.

Nous dirons que $\{\mathbf{B}_{31}, \mathbf{B}_{32}, \mathbf{B}_{33}\}$ est la « base canonique » de $\mathcal{BSC}_3(\mathbf{B})$.

On a donc : $\mathcal{BSC}_3(\mathbf{B}) = \text{Vect}(\mathbf{B}_{31}, \mathbf{B}_{32}, \mathbf{B}_{33})$.

Il convient maintenant de montrer que le produit de 2 matrices quelconques \mathbf{A} et \mathbf{A}' de $\mathcal{BSC}_3(\mathbf{B})$ est commutatif.

Commençons par montrer que tel est bien le cas pour les matrices de la base canonique de $\mathcal{BSC}_3(\mathbf{B})$, autrement dit que : $\mathbf{B}_{3i} \cdot \mathbf{B}_{3j} = \mathbf{B}_{3j} \cdot \mathbf{B}_{3i}$, pour : $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$.

Remarque :

Pour $i = 2$, comme $\mathbf{B}_{32} = \mathbf{N}_3$, nous sommes assurés par construction même de $\mathcal{BSC}_3(\mathbf{B})$, que : $\mathbf{B}_{32} \cdot \mathbf{B}_{3j} = \mathbf{B}_{3j} \cdot \mathbf{B}_{32}$, $1 \leq j \leq 3$.

Table de multiplication $B_{3i} \cdot B_{3j} = B_{3j} \cdot B_{3i}$ ($1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$)
--

(Par commodité d'écriture, le 1^{er} indice de B relatif à l'ordre $n = 3$ a été omis dans le tableau ci-dessous).

	B_1	B_2	B_3
B_1	B_1	B_2	B_3
B_2	B_2	$B_1 + B_3$	B_2
B_3	B_3	B_2	B_1

Les matrices de la base canonique de $\mathcal{BSC}_3(B)$ sont donc bien commutatives.

Comme : $A = a B_{31} + b B_{32} + c B_{33}$ et comme : $A' = a' B_{31} + b' B_{32} + c' B_{33}$,
le produit $A \cdot A' = (a B_{31} + b B_{32} + c B_{33}) (a' B_{31} + b' B_{32} + c' B_{33})$ est commutatif,
puisque tous les produits $B_{3i} \cdot B_{3j} = B_{3j} \cdot B_{3i}$, ($1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$) le sont.

En conclusion : $\mathcal{BSC}_3(B) = \text{Vect}(B_{31}, B_{32}, B_{33})$ est un sev de $\mathcal{BS}_3(B)$ de dimension 3,
constitué de matrices bisymétriques commutatives incluant N_3 .

$n = 4$

Soit $\mathcal{BSC}_4(B)$ un ensemble contenant au départ la seule matrice : $N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$, $(a, b, c, d, e, f) \in B^6$ une matrice quelconque de $\mathcal{BS}_4(B)$.

Cherchons à quelles conditions la matrice produit $A \cdot N_4$ est bisymétrique.

$$A \cdot N_4 = \begin{bmatrix} b & a+c & b+d & c \\ e & b+f & c+e & f \\ f & c+e & b+f & e \\ c & b+d & a+c & b \end{bmatrix}$$

On voit donc qu'en règle générale, $A \cdot N_4$ n'est pas bisymétrique.

Cependant $A \cdot N_4$ est bisymétrique si et seulement si les conditions suivantes (C_4) sont remplies :

$$(C_4) \quad e = a + c \quad \text{et} \quad f = b + d$$

Remarque :

Comme dans le cas $n = 3$, on aurait aussi pu former le produit $N_4 \cdot A$ (au lieu de $A \cdot N_4$) et rechercher à quelles conditions ce produit est bisymétrique. On aurait retrouvé les mêmes conditions (C_4) . De même, si l'on avait cherché les conditions dans lesquelles le produit $A \cdot N_4$ est commutatif, on aurait à nouveau retrouvé les mêmes conditions (C_4) .

Lorsque les conditions (C_4) sont remplies, A prend la forme générale suivante :

$$(F_4) \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a+c & b+d & c \\ c & b+d & a+c & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

Réciproquement, on vérifie aisément que le produit de toute matrice A de la forme (F_4) par la matrice N_4 est bisymétrique.

En conclusion, $A \cdot N_4$ est bisymétrique si et seulement si A est de la forme (F_4) ci-dessus.

Intégrons maintenant dans $\mathcal{BSC}_4(B)$ l'ensemble des matrices A de la forme (F_4) .

(Il convient de noter que la matrice N_4 , initialement introduite dans $\mathcal{BSC}_4(B)$, correspond à la matrice A pour laquelle : $a = 0, b = 1, c = 0, d = 0$).

Considérons les 4 matrices :

$$B_{41} = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B_{42} = N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$B_{44} = J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Le 1^{er} indice de B correspond à l'ordre $n = 4$, le 2^{ème} à un numéro de séquence).

Ces matrices appartiennent à $\mathcal{BSC}_4(B)$, comme on le vérifie aisément :

- B_{41} correspond aux valeurs : $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$,
- B_{42} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 1, c = 0, d = 0$,
- B_{43} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 0, c = 1, d = 0$,
- B_{44} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 0, c = 0, d = 1$.

De plus, le système $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$ est un système générateur de $\mathcal{BSC}_4(B)$, puisque toute matrice A de $\mathcal{BSC}_4(B)$ s'écrit sous la forme :

$$A = a B_{41} + b B_{42} + c B_{43} + d B_{44}.$$

Montrons que le système $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$ est libre.

La combinaison linéaire : $C = a B_{41} + b B_{42} + c B_{43} + d B_{44}$ est une matrice $C = [c_{ij}]$ ($1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 4$) de $\mathcal{BSC}_4(B)$.

Par suite :

$$a B_{41} + b B_{42} + c B_{43} + d B_{44} = O_4 \Leftrightarrow c_{ij} = 0 \text{ pour : } 1 \leq i \leq 4 \text{ et } 1 \leq j \leq 4.$$

Or : $c_{11} = a, c_{12} = b, c_{13} = c, c_{14} = d$ donc :

$$a B_{41} + b B_{42} + c B_{43} + d B_{44} = O_4 \Rightarrow a = 0, b = 0, c = 0, d = 0.$$

Le système $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$ est donc libre.

En conclusion, le système $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$, libre et générateur, est une base de $\mathcal{BSC}_4(B)$.

Nous dirons que $\{B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}\}$ est la « base canonique » de $\mathcal{BSC}_4(B)$.

On a donc : $\mathcal{BSC}_4(B) = \text{Vect}(B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44})$.

Il convient maintenant de montrer que le produit de 2 matrices quelconques A et A' de $\mathcal{BSC}_4(B)$ est commutatif.

Commençons par montrer que tel est bien le cas pour les matrices de la base canonique de $\mathcal{BSC}_4(B)$, autrement dit que : $B_{4i} \cdot B_{4j} = B_{4j} \cdot B_{4i}$, pour : $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 4$.

Pour $i = 2$, comme $B_{42} = N_4$, nous sommes assurés par construction même de $\mathcal{BSC}_4(B)$, que : $B_{42} \cdot B_{4j} = B_{4j} \cdot B_{42}$, $1 \leq j \leq 4$.

Table de multiplication $B_{4i} \cdot B_{4j} = B_{4j} \cdot B_{4i}$ ($1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 4$)
--

(Par commodité d'écriture, le 1^{er} indice de B relatif à l'ordre $n = 4$ a été omis dans le tableau ci-dessous).

	B_1	B_2	B_3	B_4
B_1	B_1	B_2	B_3	B_4
B_2	B_2	$B_1 + B_3$	$B_2 + B_4$	B_3
B_3	B_3	$B_2 + B_4$	$B_1 + B_3$	B_2
B_4	B_4	B_3	B_2	B_1

Les matrices de la base canonique de $\mathcal{BSC}_4(B)$ sont donc bien commutatives.

Comme : $A = a B_{41} + b B_{42} + c B_{43} + d B_{44}$

et comme : $A' = a' B_{41} + b' B_{42} + c' B_{43} + d' B_{44}$, le produit :

$A \cdot A' = (a B_{41} + b B_{42} + c B_{43} + d B_{44}) (a' B_{41} + b' B_{42} + c' B_{43} + d' B_{44})$ est commutatif, puisque tous les produits $B_{4i} \cdot B_{4j} = B_{4j} \cdot B_{4i}$ ($1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 4$) le sont.

En conclusion : $\mathcal{BSC}_4(B) = \text{Vect}(B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44})$ est un sev de $\mathcal{BS}_4(B)$ de dimension 4, constitué de matrices bisymétriques commutatives incluant N_4 .

$n = 5$

Soit $\mathcal{BSC}_5(B)$ un ensemble contenant au départ la seule matrice : $N_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & f & g & h & d \\ c & g & i & g & c \\ d & h & g & f & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}$, $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in B^9$ une matrice quelconque de

$\mathcal{BS}_5(B)$.

Cherchons à quelles conditions la matrice produit $A \cdot N_5$ est bisymétrique.

$$A \cdot N_5 = \begin{bmatrix} b & a+c & b+d & e+c & d \\ f & b+g & f+h & d+g & h \\ g & c+i & 0 & c+i & g \\ h & d+g & f+h & b+g & f \\ d & e+c & b+d & a+c & b \end{bmatrix}$$

On voit donc qu'en règle générale, $A \cdot N_5$ n'est pas bisymétrique.

Cependant $A \cdot N_5$ est bisymétrique si et seulement si les conditions suivantes (C_5) sont remplies :

$$(C_5) \quad f = a+c, \quad g = b+d, \quad h = c+e, \quad i = a+c+e$$

Remarque :

Comme dans les cas $n = 3$ et $n = 4$, on aurait aussi pu former le produit $N_5 \cdot A$ (au lieu de $A \cdot N_5$) et rechercher à quelles conditions ce produit est bisymétrique. On aurait retrouvé les mêmes conditions (C_5) . De même, si l'on avait cherché les conditions dans lesquelles le produit $A \cdot N_5$ est commutatif, on aurait à nouveau retrouvé les mêmes conditions (C_5) .

Lorsque les conditions (C_5) sont remplies, A prend la forme générale suivante :

$$(F_5) \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a+c & b+d & c+e & d \\ c & b+d & a+c+e & b+d & c \\ d & c+e & b+d & a+c & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}$$

Réciproquement, on vérifie aisément que le produit de toute matrice A de la forme (F_5) par la matrice N_5 est bisymétrique.

En conclusion, $A \cdot N_5$ est bisymétrique si et seulement si A est de la forme (F_5) ci-dessus.

Intégrons maintenant dans $\mathcal{BSC}_5(B)$ l'ensemble des matrices A de la forme (F_5) .

(Il convient de noter que la matrice N_5 , initialement introduite dans $\mathcal{BSC}_5(B)$, correspond à la matrice A pour laquelle : $a = 0, b = 1, c = 0, d = 0, e = 0$).

Considérons les 5 matrices :

$$\begin{aligned} B_{51} = I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; B_{52} = N_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; B_{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \\ B_{54} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; B_{55} = J_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

(Le 1^{er} indice de B correspond à l'ordre $n = 5$, le 2^{ème} à un numéro de séquence).

Ces matrices appartiennent à $\mathcal{BSC}_5(B)$, comme on le vérifie aisément :

- B_{51} correspond aux valeurs : $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0$,
- B_{52} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 1, c = 0, d = 0, e = 0$,
- B_{53} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 0, c = 1, d = 0, e = 0$,
- B_{54} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 0, c = 0, d = 1, e = 0$,
- B_{55} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 0, c = 0, d = 1, e = 1$.

De plus, le système $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$ est un système générateur de $\mathcal{BSC}_5(B)$, puisque toute matrice A de $\mathcal{BSC}_5(B)$ s'écrit sous la forme :

$$A = a B_{51} + b B_{52} + c B_{53} + d B_{54} + e B_{55} .$$

Montrons que le système $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$ est libre.

La combinaison linéaire : $C = a B_{51} + b B_{52} + c B_{53} + d B_{54} + e B_{55}$ est une matrice $C = [c_{ij}]$ ($1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 5$) de $\mathcal{BSC}_5(B)$.

Par suite :

$$a B_{51} + b B_{52} + c B_{53} + d B_{54} + e B_{55} = O_5 \Leftrightarrow c_{ij} = 0 \text{ pour : } 1 \leq i \leq 5 \text{ et } 1 \leq j \leq 5 .$$

Or : $c_{11} = a, c_{12} = b, c_{13} = c, c_{14} = d, c_{15} = e$ donc :

$$a B_{51} + b B_{52} + c B_{53} + d B_{54} + e B_{55} = O_5 \Rightarrow a = 0, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0 .$$

Le système $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$ est donc libre.

En conclusion, le système $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$, libre et générateur, est une base de $\mathcal{BSC}_5(B)$.

Nous dirons que $\{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}\}$ est la « base canonique » de $\mathcal{BSC}_5(B)$.

On a donc : $\mathcal{BSC}_5(B) = \text{Vect}(B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55})$.

Il convient maintenant de montrer que le produit de 2 matrices quelconques A et A' de $\mathcal{BSC}_5(B)$ est commutatif.

Commençons par montrer que tel est bien le cas pour les matrices de la base canonique de $\mathcal{BSC}_5(B)$, autrement dit que : $B_{5i} \cdot B_{5j} = B_{5j} \cdot B_{5i}$, pour : $1 \leq i \leq 5$ et $1 \leq j \leq 5$.

Pour $i = 2$, comme $B_{52} = N_5$, nous sommes assurés par construction même de $\mathcal{BSC}_5(B)$, que : $B_{52} \cdot B_{5j} = B_{5j} \cdot B_{52}$, $1 \leq j \leq 5$.

Table de multiplication $B_{5i} \cdot B_{5j} = B_{5j} \cdot B_{5i}$ ($1 \leq i \leq 5$ et $1 \leq j \leq 5$)

(Par commodité d'écriture, le 1^{er} indice de B relatif à l'ordre $n = 5$ a été omis dans le tableau ci-dessous).

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
B_1	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
B_2	B_2	$B_1 + B_3$	$B_2 + B_4$	$B_3 + B_5$	B_4
B_3	B_3	$B_2 + B_4$	$B_1 + B_3 + B_5$	$B_2 + B_4$	B_3
B_4	B_4	$B_3 + B_5$	$B_2 + B_4$	$B_1 + B_3$	B_2
B_5	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1

Les matrices de la base canonique de $\mathcal{BSC}_5(B)$ sont donc bien commutatives.

Comme : $A = aB_{51} + bB_{52} + cB_{53} + dB_{54} + eB_{55}$

et comme : $A' = a'B_{51} + b'B_{52} + c'B_{53} + d'B_{54} + e'B_{55}$, le produit :

$A \cdot A' = (aB_{51} + bB_{52} + cB_{53} + dB_{54} + eB_{55})(a'B_{51} + b'B_{52} + c'B_{53} + d'B_{54} + e'B_{55})$
est commutatif, puisque tous les produits $B_{5i} \cdot B_{5j} = B_{5j} \cdot B_{5i}$ ($1 \leq i \leq 5$ et $1 \leq j \leq 5$) le sont.

En conclusion : $\mathcal{BSC}_5(B) = \text{Vect}(B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55})$ est un sev de $\mathcal{BS}_5(B)$ de dimension 5, constitué de matrices bisymétriques commutatives, incluant N_5 .

$n = 6$

Nous allons procéder différemment des cas précédemment étudiés $n = 1$ à 5.

Cet exemple préfigurerait en fait l'approche adoptée dans la section suivante traitant le cas général $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous prédéfinirons $\mathcal{BSC}_6(B)$ comme un sous-ensemble particulier de $\mathcal{BS}_6(B)$. Puis nous établirons que $\mathcal{BSC}_6(B)$ est en fait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{BS}_6(B)$ de dimension 6. Nous démontrerons ensuite que le produit de toutes les matrices de $\mathcal{BSC}_6(B)$ avec la matrice N_6 est commutatif. Nous établirons enfin que le produit de deux matrices quelconques de $\mathcal{BSC}_6(B)$ est commutatif (propriété de commutativité de $\mathcal{BSC}_6(B)$).

Nous poserons par définition que $\mathcal{BSC}_6(B)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{BS}_6(B)$ constitué des matrices de la forme générale :

$$(F_6) \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a+c & b+d & c+e & d+f & e \\ c & b+d & a+c+e & b+d+f & c+e & d \\ d & c+e & b+d+f & a+c+e & b+d & c \\ e & d+f & c+e & b+d & a+c & b \\ f & e & d & c & b & a \end{bmatrix}$$

Considérons les 6 matrices :

$$B_{61} = I_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_{62} = N_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{63} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \mathbf{B}_{64} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{B}_{65} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \mathbf{B}_{66} = \mathbf{J}_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(Le 1^{er} indice de \mathbf{B} correspond à l'ordre $n = 6$, le 2^{ème} à un numéro de séquence).

Ces matrices appartiennent bien à $\mathcal{BSC}_6(\mathbf{B})$, comme on le vérifie aisément :

- \mathbf{B}_{61} correspond aux valeurs : $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0$,
- \mathbf{B}_{62} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 1, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0$,
- \mathbf{B}_{63} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 0, c = 1, d = 0, e = 0, f = 0$,
- \mathbf{B}_{64} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 0, c = 0, d = 1, e = 0, f = 0$,
- \mathbf{B}_{65} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 0, c = 0, d = 1, e = 1, f = 0$,
- \mathbf{B}_{66} correspond aux valeurs : $a = 0, b = 0, c = 0, d = 1, e = 0, f = 1$.

Moyennant l'introduction de ces matrices, la matrice générale de $\mathcal{BSC}_6(\mathbf{B})$ ayant la forme (\mathbf{F}_6) ci-dessus s'écrit comme suit :

$$a\mathbf{B}_{61} + b\mathbf{B}_{62} + c\mathbf{B}_{63} + d\mathbf{B}_{64} + e\mathbf{B}_{65} + f\mathbf{B}_{66}.$$

Le système $\{\mathbf{B}_{61}, \mathbf{B}_{62}, \mathbf{B}_{63}, \mathbf{B}_{64}, \mathbf{B}_{65}, \mathbf{B}_{66}\}$ est donc un système générateur de $\mathcal{BSC}_6(\mathbf{B})$,

Montrons que le système $\{\mathbf{B}_{61}, \mathbf{B}_{62}, \mathbf{B}_{63}, \mathbf{B}_{64}, \mathbf{B}_{65}, \mathbf{B}_{66}\}$ est libre.

La combinaison linéaire : $\mathbf{C} = a\mathbf{B}_{61} + b\mathbf{B}_{62} + c\mathbf{B}_{63} + d\mathbf{B}_{64} + e\mathbf{B}_{65} + f\mathbf{B}_{66}$ est une matrice $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ ($1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6$) de $\mathcal{BSC}_6(\mathbf{B})$.

Par suite :

$$a\mathbf{B}_{61} + b\mathbf{B}_{62} + c\mathbf{B}_{63} + d\mathbf{B}_{64} + e\mathbf{B}_{65} + f\mathbf{B}_{66} = \mathbf{O}_6 \Leftrightarrow c_{ij} = 0 \text{ pour } : 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6.$$

Or : $c_{11} = a, c_{12} = b, c_{13} = c, c_{14} = d, c_{15} = e, c_{16} = f$ donc :

$$a\mathbf{B}_{61} + b\mathbf{B}_{62} + c\mathbf{B}_{63} + d\mathbf{B}_{64} + e\mathbf{B}_{65} + f\mathbf{B}_{66} = \mathbf{O}_6 \Rightarrow a = 0, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0.$$

Le système $\{\mathbf{B}_{61}, \mathbf{B}_{62}, \mathbf{B}_{63}, \mathbf{B}_{64}, \mathbf{B}_{65}, \mathbf{B}_{66}\}$ est donc libre.

En conclusion, le système $\{B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}\}$, libre et générateur, est une base de $\mathcal{BSC}_6(B)$.

Nous dirons que $\{B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}\}$ est la « base canonique » de $\mathcal{BSC}_6(B)$.

On a donc : $\mathcal{BSC}_6(B) = \text{Vect}(B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66})$.

Soit maintenant :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & g & h & i & j & e \\ c & h & k & l & i & d \\ d & i & l & k & h & c \\ e & j & i & h & g & b \\ f & e & d & c & b & a \end{bmatrix}, (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l) \in B^{12}$$

une matrice donnée quelconque de $\mathcal{BS}_6(B)$.

Soit :

$$N_6 = B_{62} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cherchons à quelles conditions la matrice produit $A \cdot N_6$ est bisymétrique.

$$A \cdot N_6 = \begin{bmatrix} b & a+c & b+d & c+e & d+f & e \\ g & b+h & g+i & h+j & i+e & j \\ h & c+k & h+l & k+i & l+d & i \\ i & d+l & i+k & l+h & k+c & h \\ j & e+i & j+h & i+g & h+b & g \\ e & f+d & e+c & d+b & c+a & b \end{bmatrix}$$

On voit donc qu'en règle générale, $A \cdot N_6$ n'est pas bisymétrique.

Cependant $A \cdot N_6$ est bisymétrique si les conditions suivantes (C_6) sont remplies :

$$(C_6) \quad g = a+c, \quad h = b+d, \quad i = c+e, \quad j = d+f, \quad c+k = g+i, \quad d+l = h+j$$

soit encore :

$$(C_6) \quad g = a+c, \quad h = b+d, \quad i = c+e, \quad j = d+f, \quad k = a+c+e, \quad l = b+d+f$$

Lorsque les conditions (C_6) sont remplies, A prend la forme générale suivante :

$$(F_6) \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a+c & b+d & c+e & d+f & e \\ c & b+d & a+c+e & b+d+f & c+e & d \\ d & c+e & b+d+f & a+c+e & b+d & c \\ e & d+f & c+e & b+d & a+c & b \\ f & e & d & c & b & a \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, on vérifie aisément que le produit de toute matrice A de la forme (F_6) par la matrice N_6 est bisymétrique.

En conclusion, $A \cdot N_6$ est bisymétrique si et seulement si la matrice A est de la forme (F_6) ci-dessus.

Remarque :

Comme dans les cas $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$, on aurait aussi pu former le produit $N_6 \cdot A$ (au lieu de $A \cdot N_6$) et rechercher à quelles conditions ce produit est bisymétrique. De même, on aurait pu chercher à déterminer les conditions dans lesquelles le produit $A \cdot N_6$ est commutatif. Dans les deux cas, on aurait conclu de la même façon A doit être de la forme (F_6) ci-dessus.

En conclusion, $A \cdot N_6$ est bisymétrique (ou : $N_6 \cdot A$ est bisymétrique, ou : $A \cdot N_6$ est commutatif), si et seulement si :

A appartient à $\mathcal{BSC}_6(B) = \text{Vect}(B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66})$.

Il convient maintenant de montrer que le produit de 2 matrices quelconques A et A' de $\mathcal{BSC}_6(B)$ est commutatif.

Commençons par montrer que tel est bien le cas pour les matrices de la base canonique de $\mathcal{BSC}_6(B)$, autrement dit que : $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$, pour : $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$.

Pour $i = 2$, comme $B_{62} = N_6$, nous sommes assurés par construction même de $\mathcal{BSC}_6(B)$, que : $B_{62} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{62}$, $1 \leq j \leq 6$.

Dans les exemples précédents, $n = 1$ à 5 , nous nous sommes contentés de calculer la table de multiplication $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$ pour : $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$, et de constater la commutativité de chacun de ces produits. Cherchons une démonstration extrapolable à un ordre n quelconque.

Montrons d'abord que $B_{6i} \cdot B_{6j}$ ($1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$) $\in \mathcal{BSC}_6(B)$.

Ce dernier point n'est pas acquis puisque le produit de 2 matrices bisymétriques n'est pas nécessairement bisymétrique.

Pour ce faire, nous allons démontrer que le produit de la matrice $(B_{6i} \cdot B_{6j})$ et de la matrice $B_{62} = N_6$ est commutatif, c'est-à-dire que :

$$(B_{6i} \cdot B_{6j}) \cdot B_{62} = B_{6i} \cdot (B_{6j} \cdot B_{62})$$

Or $B_{6j} \cdot B_{62}$ est commutatif, donc :

$$(B_{6i} \cdot B_{6j}) \cdot B_{62} = B_{6i} \cdot (B_{6j} \cdot B_{62}) = B_{6i} \cdot (B_{62} \cdot B_{6j}) = (B_{6i} \cdot B_{62}) \cdot B_{6j}$$

$B_{6i} \cdot B_{62}$ est commutatif, donc :

$$(B_{6i} \cdot B_{62}) \cdot B_{6j} = (B_{62} \cdot B_{6i}) \cdot B_{6j} = B_{62} \cdot (B_{6i} \cdot B_{6j})$$

Donc le produit de la matrice $(B_{6i} \cdot B_{6j})$ et de la matrice $B_{62} = N_6$ est bien commutatif.

Comme seules les matrices bisymétriques appartenant à $\mathcal{BSC}_6(B)$ commutent avec $B_{62} = N_6$, on en conclut que :

$$B_{6i} \cdot B_{6j} \quad (1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6) \in \mathcal{BSC}_6(B) = \text{Vect}(B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}).$$

De ce fait la matrice produit $B_{6i} \cdot B_{6j}$ est bisymétrique.

Or, si le produit $B_{6i} \cdot B_{6j}$ est bisymétrique, alors c'est qu'il est commutatif. Donc $B_{6i} \cdot B_{6j}$ est commutatif.

Redémontrons ce dernier point :

$B_{6i} \cdot B_{6j}$ étant bisymétrique, $B_{6i} \cdot B_{6j}$ est symétrique. Donc :

$$B_{6i} \cdot B_{6j} = {}^t(B_{6i} \cdot B_{6j}) = {}^t B_{6j} \cdot {}^t B_{6i} = B_{6j} \cdot B_{6i}$$

La commutativité du produit $B_{6i} \cdot B_{6j}$ est donc bien établie.

Les matrices de la base canonique de $\mathcal{BSC}_6(B)$ sont donc bien commutatives.

Bien entendu, ce résultat suffit à établir la commutativité de tout produit de matrices $A \cdot A'$,

$$\forall A \in \mathcal{BSC}_6(B) = \text{Vect}(B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}),$$

$$\forall A' \in \mathcal{BSC}_6(B) = \text{Vect}(B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}).$$

En effet, comme : $A = aB_{61} + bB_{62} + cB_{63} + dB_{64} + eB_{65} + fB_{66}$

et comme : $A' = a'B_{61} + b'B_{62} + c'B_{63} + d'B_{64} + e'B_{65} + f'B_{66}$, le produit :

$A \cdot A' = (aB_{61} + bB_{62} + cB_{63} + dB_{64} + eB_{65} + fB_{66}) (a'B_{61} + b'B_{62} + c'B_{63} + d'B_{64} + e'B_{65} + f'B_{66})$ est commutatif, puisque tous les produits $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$ ($1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$) le sont.

Ci-après la table de multiplication $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$ pour : $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$.

La lecture de ce tableau montre également que le produit $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$ ($1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$) est commutatif.

Table de multiplication $B_{6i} \cdot B_{6j} = B_{6j} \cdot B_{6i}$ ($1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$)

(Par commodité d'écriture, le 1^{er} indice de B relatif à l'ordre $n = 6$ a été omis dans le tableau ci-dessous).

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
B_1	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
B_2	B_2	$B_1 + B_3$	$B_2 + B_4$	$B_3 + B_5$	$B_4 + B_6$	B_5
B_3	B_3	$B_2 + B_4$	$B_1 + B_3 + B_5$	$B_2 + B_4 + B_6$	$B_3 + B_5$	B_4
B_4	B_4	$B_3 + B_5$	$B_2 + B_4 + B_6$	$B_1 + B_3 + B_5$	$B_2 + B_4$	B_3
B_5	B_5	$B_4 + B_6$	$B_3 + B_5$	$B_2 + B_4$	$B_1 + B_3$	B_2
B_6	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1

En conclusion : $\mathcal{BSC}_6(B) = \text{Vect}(B_{61}, B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66})$ est un sev de $\mathcal{BS}_6(B)$ de dimension 6, constitué de matrices bisymétriques commutatives, incluant N_6 .

2.3. Matrices bisymétriques commutatives d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ - Espace vectoriel $\mathcal{BSC}_n(B)$ - Base canonique B_{ni} ($1 \leq i \leq n$) de $\mathcal{BSC}_n(B)$

L'étude des cas particuliers précédents $n = 1$ à 6 a permis de mettre en lumière l'existence, pour chacun de ces ordres, de matrices bisymétriques commutant toutes par la multiplication avec une matrice de référence, la matrice N_n . Nous avons établi que l'ensemble de ces matrices commutaient alors toutes entre elles et qu'elles constituaient un sous-espace vectoriel (sev) de $\mathcal{BS}_n(B)$, que nous avons dénommé $\mathcal{BSC}_n(B)$. Nous avons également défini la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$.

Il s'agit maintenant d'extrapoler les résultats obtenus pour les cas $n = 1$ à 6 . L'étude qui suit traite donc du cas général $n \in \mathbb{N}^*$. Sa logique s'inspire du cas $n = 6$.

Nous prédéfinirons donc $\mathcal{BSC}_n(B)$ comme un sous-ensemble particulier de $\mathcal{BS}_n(B)$. Puis nous établirons que $\mathcal{BSC}_n(B)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{BS}_n(B)$ de dimension n . Nous démontrerons ensuite que le produit de toutes les matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$ par la matrice N_n est commutatif. Nous établirons enfin que le produit de deux matrices quelconques de $\mathcal{BSC}_n(B)$ est commutatif.

Nous poserons, par définition, que $\mathcal{BSC}_n(B)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{BS}_n(B)$ constitué des matrices dont les paramètres (notés $[i, j]$) sont les suivants :

Note : Nous supposons $n > 6$ (les cas $n = 1$ à 6 ayant déjà été traités), de manière qu'il existe des paramètres de niveau 1 à 3 au moins.

(R₁):

$$\begin{aligned} [1,1] &\in \mathbb{B}, \text{ quelconque,} \\ [1,2] &\in \mathbb{B}, \text{ quelconque,} \\ &\dots \\ [1,i] &\in \mathbb{B}, \text{ quelconque,} \\ &\dots \\ [1,n-1] &\in \mathbb{B}, \text{ quelconque,} \\ [1,n] &\in \mathbb{B}, \text{ quelconque,} \end{aligned}$$

(R₂):

$$\begin{aligned} [2,2] &= [1,1] + [1,3] \\ [2,3] &= [1,2] + [1,4] \\ &\dots \\ [2,i] &= [1,i-1] + [1,i+1] \\ &\dots \\ [2,n-2] &= [1,n-3] + [1,n-1] \\ [2,n-1] &= [1,n-2] + [1,n] \end{aligned}$$

(R₃):

$$\begin{aligned} [3,2] &= [1,1] + [1,3] + [1,5] \\ [3,3] &= [1,2] + [1,4] + [1,6] \\ &\dots \\ [3,i] &= [1,i-2] + [1,i] + [1,i+2] \\ &\dots \\ [3,n-3] &= [1,n-5] + [1,n-3] + [1,n-1] \\ [3,n-2] &= [1,n-4] + [1,n-2] + [1,n] \end{aligned}$$

(R_k):

($1 \leq k \leq \nu$, si n pair ($n = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$) et $1 \leq k \leq \nu + 1$ si n impair ($n = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{N}$)).

$$\begin{aligned} [k, k] &= [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1,2k-1] \\ [k, k+1] &= [1,2] + [1,4] + [1,6] + \dots + [1,2k] \\ [k, k+2] &= [1,3] + [1,5] + [1,7] + \dots + [1,2k+1] \\ &\dots \\ [k, k+h] &= [1,1+h] + [1,3+h] + [1,5+h] + \dots + [1,2k-1+h] \quad (*) \\ &(0 \leq h \leq n-2k+1) \\ &\dots \\ [k, n-k] &= [1,n-2k+1] + [1,n-2k+3] + [1,n-2k+5] + \dots + [1,n-1] \\ [k, n-k+1] &= [1,n-2k+2] + [1,n-2k+4] + [1,n-2k+6] + \dots + [1,n] \end{aligned}$$

(*) soit aussi, en effectuant le changement d'indices : $i = k+h$ ($k \leq i \leq n-k+1$) :

$$[k, i] = [1,i-k+1] + [1,i-k+3] + [1,i-k+5] + \dots + [1,i+k-1].$$

.

Enfin :

- pour n pair ($n = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$) :

(\mathbf{R}_ν):

$$[\nu, \nu] = [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1, n-1] \quad (\nu \text{ termes})$$

$$[\nu, \nu+1] = [1,2] + [1,4] + [1,6] + \dots + [1, n] \quad (\nu \text{ termes})$$

- pour n impair ($n = 2\nu+1$, $\nu \in \mathbb{N}$) :

($\mathbf{R}_{\nu+1}$):

$$[\nu+1, \nu+1] = [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1, n] \quad (\nu+1 \text{ termes})$$

Remarque :

Il est clair que les paramètres de cette matrice bisymétrique ne dépendent que des n paramètres constituant sa 1^{ère} ligne : $[1,1]$, $[1,2]$, \dots , $[1,i]$, \dots , $[1, n-1]$, $[1, n]$.

La matrice générale de \mathcal{BSC}_n (B) a donc la structure suivante :

$$\begin{bmatrix} [1,1] & [1,2] & [1,3] & \dots & [1, n-2] & [1, n-1] & [1, n] \\ [1,2] & [1,1]+[1,3] & [1,2]+[1,4] & \dots & [1, n-3]+[1, n-1] & [1, n-2]+[1, n] & [1, n-1] \\ [1,3] & [1,2]+[1,4] & [1,1]+[1,3]+[1,5] & \dots & [1, n-4]+[1, n-2]+[1, n] & [1, n-3]+[1, n-1] & [1, n-2] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1, n-2] & [1, n-3]+[1, n-1] & [1, n-4]+[1, n-2]+[1, n] & \dots & [1,1]+[1,3]+[1,5] & [1,2]+[1,4] & [1,3] \\ [1, n-1] & [1, n-2]+[1, n] & [1, n-3]+[1, n-1] & \dots & [1,2]+[1,4] & [1,1]+[1,3] & [1,2] \\ [1, n] & [1, n-1] & [1, n-2] & \dots & [1,3] & [1,2] & [1,1] \end{bmatrix}$$

Cette structure extrapole les structures des matrices de \mathcal{BSC}_n (B) mises en évidence pour $n = 1$ à 6.

Introduisons maintenant les n matrices \mathbf{B}_{ni} ($1 \leq i \leq n$) définies comme suit.

\mathbf{B}_{ni} est la matrice de \mathcal{BSC}_n (B) telle que : $[1, j] = 0$ si $j \neq i$ et $[1, i] = 1$.

Remarque : Le 1^{er} indice de \mathbf{B}_{ni} correspond à l'ordre n , le 2^{ème} à un numéro de séquence.

$$B_{n \ n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; B_{n \ n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Remarque :

Notons les identités suivantes : $B_{n1} = I_n$; $B_{n2} = N_n$; $B_{nn} = J_n$.

Moyennant l'introduction de ces matrices, la matrice générale de $\mathcal{BSC}_n(B)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$[1,1] B_{n1} + [1,2] B_{n2} + \dots + [1,i] B_{ni} + \dots + [1,n-1] B_{n \ n-1} + [1,n] B_{nn}$$

soit encore :

$$\sum_{i=1}^n [1,i] B_{ni}$$

Ceci prouve que le système $\{B_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$, est générateur de $\mathcal{BSC}_n(B)$.

Démontrons que le système $\{B_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ est libre.

La combinaison linéaire :

$$C = [1,1] B_{n1} + [1,2] B_{n2} + \dots + [1,i] B_{ni} + \dots + [1,n-1] B_{n \ n-1} + [1,n] B_{nn}$$

est une matrice $C = [c_{ij}]$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) de $\mathcal{BSC}_n(B)$.

Par suite :

$$C = [1,1] B_{n1} + [1,2] B_{n2} + \dots + [1,i] B_{ni} + \dots + [1,n-1] B_{n \ n-1} + [1,n] B_{nn} = O_n$$

$$\Leftrightarrow c_{ij} = 0, \text{ pour } : 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n.$$

Or : $c_{11} = [1,1], c_{12} = [1,2], \dots, c_{1i} = [1,i], \dots, c_{1 \ n-1} = [1, n-1], c_{1n} = [1, n]$, donc :

$$C = [1,1] B_{n1} + [1,2] B_{n2} + \dots + [1,i] B_{ni} + \dots + [1,n-1] B_{n \ n-1} + [1,n] B_{nn} = O_n$$

$$\Rightarrow [1,1] = 0, [1,2] = 0, \dots, [1,i] = 0, \dots, [1, n-1] = 0, [1, n] = 0.$$

Le système $\{B_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$, est donc libre.

Le système $\{B_{ni}\}, 1 \leq i \leq n$, libre et générateur, est une base de $\mathcal{BSC}_n(B)$.

Il est dénommé : base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$.

On a donc : $\mathcal{BSC}_n(B) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$.

$\mathcal{BSC}_n(B)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{BS}_n(B)$, de dimension n .

Nous allons maintenant démontrer qu'une matrice A quelconque de $\mathcal{BS}_n(B)$ commute avec $N_n = B_{n2}$, si et seulement si A appartient à $\mathcal{BSC}_n(B)$.

Nous nous intéresserons tout d'abord au produit d'une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(B)$ par $N_n = B_{n2}$. Considérons à cet effet une matrice $A = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_i \ \dots \ C_{n-1} \ C_n]$ quelconque de $\mathcal{M}_n(B)$, écriture dans laquelle les $C_i, 1 \leq i \leq n$, désignent les colonnes de la matrice A .

$$\text{Soit } N_n = B_{n2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a :

$$A \cdot N_n = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_i \ \dots \ C_{n-1} \ C_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc :

$$A \cdot N_n = [C_2 \quad C_1 + C_3 \quad \dots \quad C_{i-1} + C_{i+1} \quad \dots \quad C_{n-2} + C_n \quad C_{n-1}] \quad (1).$$

Appliquons (1) au cas particulier où A est une matrice quelconque de \mathcal{BS}_n (B).

D'après la Section 1.3.4.3. du Chapitre 1, A se présente alors sous la forme générale suivante :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} C_1 & C_2 & \dots & C_i & \dots & C_{n-1} & C_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} [1,1] & [1,2] & \cdot & [1,i] & \cdot & [1,n-1] & [1,n] \\ [1,2] & [2,2] & \cdot & [2,i] & \cdot & [2,n-1] & [1,n-1] \\ [1,3] & [2,3] & \cdot & [3,i] & \cdot & [2,n-2] & [1,n-2] \\ [1,4] & [2,4] & \cdot & [4,i] & \cdot & [2,n-3] & [1,n-3] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1,i] & [2,i] & \cdot & [i,i] & \cdot & [2,n-i+1] & [1,n-i+1] \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,i+1] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,i+2] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,i+3] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,n-i-2] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,n-i-1] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [i,n-i] & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1,n-i+1] & [2,n-i+1] & \cdot & [i,n-i+1] & \cdot & [2,i] & [1,i] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1,n-3] & [2,n-3] & \cdot & [4,n-i+1] & \cdot & [2,4] & [1,4] \\ [1,n-2] & [2,n-2] & \cdot & [3,n-i+1] & \cdot & [2,3] & [1,3] \\ [1,n-1] & [2,n-1] & \cdot & [2,n-i+1] & \cdot & [2,2] & [1,2] \\ [1,n] & [1,n-1] & \cdot & [1,n-i+1] & \cdot & [1,2] & [1,1] \end{array} \right] \end{array}$$

Compte tenu du résultat (1) énoncé plus haut, la multiplication à droite de A par N_n conduit à :

	<u>Col. 1</u>	<u>Col. 2</u>	...	<u>Col. i</u>	...	<u>Col. n-1</u>	<u>Col. n</u>
	C_2	$C_1 + C_3$...	$C_{i-1} + C_{i+1}$...	$C_{n-2} + C_n$	C_{n-1}
$A \cdot N_n =$	[1,2]	[1,1]+[1,3]	.	[1,i-1]+[1,i+1]	.	[1,n-2]+[1,n]	[1,n-1]
	[2,2]	[1,2]+[2,3]	.	[2,i-1]+[2,i+1]	.	[2,n-2]+[1,n-1]	[2,n-1]
	[2,3]	[1,3]+[3,3]	.	[3,i-1]+[3,i+1]	.	[3,n-2]+[1,n-2]	[2,n-2]
	[2,4]	[1,4]+[3,4]	.	[4,i-1]+[4,i+1]	.	[3,n-3]+[1,n-3]	[2,n-3]

	[2,i]	[1,i]+[3,i]	.	[i-1,i-1]+[i-1,i+1]	.	[3,n-i+1]+[1,n-i+1]	[2,n-i+1]
	.	.	.	[i-1,i]+[i,i+1]	.	.	.
	.	.	.	[i-1,i+1]+[i+1,i+1]	.	.	.
	.	.	.	[i-1,i+2]+[i+1,i+2]	.	.	.

	.	.	.	[i-1,n-i-1]+[i+1,n-i-1]	.	.	.
	.	.	.	[i-1,n-i]+[i+1,n-i]	.	.	.
	.	.	.	[i-1,n-i+1]+[i,n-i]	.	.	.
	[2,n-i+1]	[3,n-i+1]+[1,n-i+1]	.	[i-1,n-i+2]+[i-1,n-i]	.	[1,i]+[3,i]	[2,i]

	[2,n-3]	[3,n-3]+[1,n-3]	.	[4,n-i+2]+[4,n-i]	.	[1,4]+[3,4]	[2,4]
	[2,n-2]	[3,n-2]+[1,n-2]	.	[3,n-i+2]+[3,n-i]	.	[1,3]+[3,3]	[2,3]
	[2,n-1]	[2,n-2]+[1,n-1]	.	[2,n-i+2]+[2,n-i]	.	[1,2]+[2,3]	[2,2]
	[1,n-1]	[1,n-2]+[1,n]	.	[1,n-i+2]+[1,n-i]	.	[1,1]+[1,3]	[1,2]

On voit donc qu'en règle générale, $A \cdot N_n$ n'est pas bisymétrique.

Nous allons démontrer l'équivalence : $A \cdot N_n$ bisymétrique $\Leftrightarrow A \in \mathcal{BSC}_n(B)$.

Démontrons d'abord l'implication :

$A \cdot N_n$ bisymétrique $\Rightarrow A \in \mathcal{BSC}_n(B)$, ou ce qui revient au même :

$A \cdot N_n$ bisymétrique $\Rightarrow A$ satisfait aux Relations (R_0) , (R_1) , (R_2) , ..., (R_k) , ..., jusqu'à la Relation (R_ν) pour n pair, ($n = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$) ou jusqu'à la Relation $(R_{\nu+1})$ pour n impair ($n = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{N}$).

(R_1) :

Les relations (R_1) n'appellent aucune démonstration : elles expriment simplement, comme il a déjà été dit, que les n paramètres constituant la 1^{ère} ligne : $[1,1]$, $[1,2]$, ..., $[1,i]$, ..., $[1,n-1]$, $[1,n]$ de la matrice générale de $\mathcal{BSC}_n(B)$ peuvent être fixés de façon arbitraire.

(R₂):

Rappelons ces relations :

$$[2,2] = [1,1] + [1,3]$$

$$[2,3] = [1,2] + [1,4]$$

.....

$$[2,i] = [1,i-1] + [1,i+1]$$

.....

$$[2,n-2] = [1,n-3] + [1,n-1]$$

$$[2,n-1] = [1,n-2] + [1,n]$$

Il s'agit de démontrer que : $A \cdot N_n$ bisymétrique \Rightarrow (R₂).

Remarquons que les $(n-2)$ paramètres de niveau 2 de la matrice A se trouvent dans la colonne 1 de la matrice $A \cdot N_n$ entre les indices $2 \leq i \leq n-1$.

Pour que $A \cdot N_n$ soit bisymétrique il faut que tous les éléments de sa 1^{ère} colonne, entre les indices $2 \leq i \leq n-1$, soient égaux aux éléments correspondants de sa 1^{ère} ligne, soit :

$$[2,i] = [1,i-1] + [1,i+1], \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

et (R₂) est démontré.

Notons que (R₂) entraîne bien la bisymétrie de l'ensemble du Cadre de niveau 1 de $A \cdot N_n$.

(R₃):

Rappelons ces relations :

$$[3,2] = [1,1] + [1,3] + [1,5]$$

$$[3,3] = [1,2] + [1,4] + [1,6]$$

.....

$$[3,i] = [1,i-2] + [1,i] + [1,i+2]$$

.....

$$[3,n-3] = [1,n-5] + [1,n-3] + [1,n-1]$$

$$[3,n-2] = [1,n-4] + [1,n-2] + [1,n]$$

Il s'agit de démontrer que : $A \cdot N_n$ bisymétrique \Rightarrow (R₃).

Remarquons que les $(n-4)$ paramètres de niveau 3 de la matrice A se trouvent dans la colonne 2 de la matrice $A \cdot N_n$, entre les indices $3 \leq i \leq n-2$.

Pour que $A \cdot N_n$ soit bisymétrique il faut que tous les éléments de sa 2^{ème} colonne, entre les indices $3 \leq i \leq n-2$, soient égaux aux éléments correspondants de sa 2^{ème} ligne, soit :

$$[1,i] + [3,i] = [2,i-1] + [2,i+1], \quad 3 \leq i \leq n-2, \text{ soit encore :}$$

$$[3,i] = [1,i] + [2,i-1] + [2,i+1], \quad 3 \leq i \leq n-2,$$

Or (R_2) entraîne :

$$[2, i-1] = [1, i-2] + [1, i] \quad \text{et} \quad [2, i+1] = [1, i] + [1, i-2]$$

On en déduit :

$$[3, i] = [1, i-2] + [1, i] + [1, i-2], \quad 3 \leq i \leq n-2.$$

et (R_3) est démontré.

Notons que (R_3) entraîne bien la bisymétrie de l'ensemble du Cadre de niveau 2 de $A \cdot N_n$.

(R_k) :

Rappelons les relations (R_k) :

$$[k, k] = [1, 1] + [1, 3] + [1, 5] + \dots + [1, 2k-1]$$

$$[k, k+1] = [1, 2] + [1, 4] + [1, 6] + \dots + [1, 2k]$$

$$[k, k+2] = [1, 3] + [1, 5] + [1, 7] + \dots + [1, 2k+1]$$

.....

$$[k, k+h] = [1, 1+h] + [1, 3+h] + [1, 5+h] + \dots + [1, 2k-1+h] \quad (*)$$

$$(0 \leq h \leq n-2k+1)$$

.....

$$[k, n-k] = [1, n-2k+1] + [1, n-2k+3] + [1, n-2k+5] + \dots + [1, n-1]$$

$$[k, n-k+1] = [1, n-2k+2] + [1, n-2k+4] + [1, n-2k+6] + \dots + [1, n]$$

(*) soit aussi, en effectuant le changement d'indices : $i = k+h$, $k \leq i \leq n-k+1$:

$$[k, i] = [1, i-k+1] + [1, i-k+3] + [1, i-k+5] + \dots + [1, i+k-1]$$

Nous allons démontrer (R_k) par récurrence forte sur k .

Nous admettrons donc (hypothèse de récurrence) que : $A \cdot N_n$ bisymétrique \Rightarrow toutes les relations (R_k) sont vraies jusqu'au rang k . Nous allons établir qu'il en est alors de même pour (R_{k+1}) . (On supposera aussi $2k < n$, faute de quoi (R_{k+1}) n'existe pas).

Remarquons que les $(n-2k)$ paramètres de niveau $k+1$ de la matrice A se trouvent dans la colonne k de la matrice $A \cdot N_n$, entre les indices $k+1 \leq h \leq n-k$.

Pour que $A \cdot N_n$ soit bisymétrique il faut que tous les éléments de sa $k^{\text{ème}}$ colonne, entre les indices $k+1 \leq h \leq n-k$ soient égaux aux éléments correspondants de sa $k^{\text{ème}}$ ligne, soit :

$$[k-1, k+1] + [k+1, k+1] = [k, k] + [k, k+2]$$

$$[k-1, k+2] + [k+1, k+2] = [k, k+1] + [k, k+3]$$

$$[k-1, k+3] + [k+1, k+3] = [k, k+2] + [k, k+4]$$

.

.

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = [k, k+h-1] + [k, k+h-1] \quad (*)$$

.

.

$$\begin{aligned} [k-1, n-k-2] + [k+1, n-k-2] &= [k, n-k-3] + [k, n-k-1] \\ [k-1, n-k-1] + [k+1, n-k-1] &= [k, n-k-2] + [k, n-k] \\ [k-1, n-k] + [k+1, n-k] &= [k, n-k-1] + [k, n-k+1] \end{aligned}$$

(*) avec : $1 \leq h \leq n-2k$.

On en déduit donc :

$$[k+1, k+h] = [k-1, k+h] + [k, k+h-1] + [k, k+h-1] \quad (1)$$

avec : $1 \leq h \leq n-2k$.

D'après l'hypothèse de récurrence, (R_k) et (R_{k-1}) sont vraies. On en déduit que :

$$\begin{aligned} [k-1, k+h] &= [1, 2+h] + [1, 4+h] + [1, 6+h] + \dots + [1, 2k+h-4] + [1, 2k+h-2] \\ [k-1, k+h-1] &= [1, h] + [1, 2+h] + [1, 4+h] + \dots + [1, 2k+h-4] + [1, 2k+h-2] \\ [k-1, k+h+1] &= [1, 2+h] + [1, 4+h] + [1, 6+h] + \dots + [1, 2k+h-2] + [1, 2k+h] \end{aligned}$$

En reportant ces 3 résultats dans l'expression (1) ci-dessus, il vient après simplification :

$$[k+1, k+h] = [1, h] + [1, 2+h] + [1, 4+h] + \dots + [1, 2k+h-2] + [1, 2k+h],$$

avec : $1 \leq h \leq n-2k$.

(R_{k+1}) est donc établi.

Il s'ensuit que : $A \cdot N_n$ bisymétrique \Rightarrow toutes les relations (R_k) sont vraies jusqu'au rang k .

Nous allons vérifier qu'il en est bien ainsi pour la valeur limite supérieure de k :

$k = \nu$, pour n pair ($n = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$) et $k = \nu+1$ pour n impair ($n = 2\nu+1$, $\nu \in \mathbb{N}$).

(R_ν) n pair ($n = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$) :

Rappelons les 2 relations correspondantes :

$$[\nu, \nu] = [1, 1] + [1, 3] + [1, 5] + \dots + [1, n-1] \quad (\nu \text{ termes}) \quad (2)$$

$$[\nu, \nu+1] = [1, 2] + [1, 4] + [1, 6] + \dots + [1, n] \quad (\nu \text{ termes}) \quad (3)$$

Partons de l'expression générale démontrée précédemment (cf. Relation (R_k)) :

$$[k, k+h] = [1, 1+h] + [1, 3+h] + [1, 5+h] + \dots + [1, 2k-1+h]$$

$(0 \leq h \leq n-2k+1)$;

En y faisant $k = \nu$ et en remarquant qu' h ne peut alors valoir que 0 ou 1, on obtient pour $h = 0$ puis pour $h = 1$, les 2 relations (2) et (3) constitutives de (R_ν) .

La relation (R_ν) est donc bien vérifiée.

(R_{v+1}) n impair ($n = 2v + 1, v \in \mathbb{N}$) :

Rappelons l'unique relation correspondante :

$$[v+1, v+1] = [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1,n] \quad (v+1 \text{ termes}) \quad (4)$$

Partons de l'expression générale démontrée précédemment :

$$[k, k+h] = [1, 1+h] + [1, 3+h] + [1, 5+h] + \dots + [1, 2k-1+h] \\ (0 \leq h \leq n-2k+1)$$

En y faisant $k = v+1$ et en remarquant qu' h ne peut alors valoir que 0, on obtient pour $h = 0$ la relation (4) constitutive de (R_{v+1}).

La relation (R_{v+1}) est donc bien vérifiée.

En conclusion, nous avons bien démontré l'implication : $A \cdot N_n$ bisymétrique $\Rightarrow A \in \mathcal{BSE}_n(B)$.

Reste à démontrer l'implication inverse :

$A \in \mathcal{BSE}_n(B) \Rightarrow A \cdot N_n$ bisymétrique, ou ce qui revient au même, la proposition suivante :

Si A vérifie les Relations (R₀), (R₁), (R₂), ..., (R_k), ..., jusqu'à la Relation (R_v) pour n pair, ($n = 2v, v \in \mathbb{N}^*$) ou jusqu'à la Relation (R_{v+1}) pour n impair ($n = 2v + 1, v \in \mathbb{N}$), alors $A \cdot N_n$ est bisymétrique.

Par hypothèse donc les paramètres de A vérifient la Relation générale (voir ((R_k) plus haut) pour toute valeur de k telle que les paramètres ci-dessous existent (c. à d. : $1 \leq k \leq v$ pour n pair ($n = 2v, v \in \mathbb{N}^*$) et $1 \leq k \leq v+1$ pour n impair ($n = 2v + 1, v \in \mathbb{N}$)).

$$[k, k+h] = [1, 1+h] + [1, 3+h] + [1, 5+h] + \dots + [1, 2k-1+h] \\ (0 \leq h \leq n-2k+1)$$

ou encore :

$$[k, k+h] = \sum_{i=1}^k [2i-1+h] \\ (0 \leq h \leq n-2k+1)$$

Il s'agit de démontrer que cette propriété entraîne la bisymétrie du produit $A \cdot N_n$, et donc de démontrer, pour toute valeur de k telle que les paramètres ci-dessous existent (c. à d. : $2 \leq k \leq v-1$ pour n pair ($n = 2v, v \in \mathbb{N}^*$) et $2 \leq k \leq v$ pour n impair ($n = 2v + 1, v \in \mathbb{N}$)), l'égalité suivante (5) :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = [k, k+h-1] + [k, k+h-1] \quad (5) \\ (1 \leq h \leq n-2k)$$

k étant fixé dans le domaine de validité défini ci-dessus, nous allons calculer :

$$[k-1, k+h] = [k-1, (k-1) + (h+1)], \text{ soit :}$$

$$(0 \leq h+1 \leq n-2(k-1)+1)$$

$$[k-1, k+h] = [k-1, (k-1) + (h+1)]$$

$$(-1 \leq h \leq n-2k+2)$$

$$[k-1, k+h] = \sum_{i=1}^{k-1} [1, 2i-1+h+1] = \sum_{i=1}^{k-1} [1, 2i+h]$$

$$(-1 \leq h \leq n-2k+2)$$

Par ailleurs :

$$[k+1, k+h] = [k+1, (k+1) + (h-1)], \text{ soit :}$$

$$(0 \leq h-1 \leq n-2(k+1)+1)$$

$$[k+1, k+h] = [k+1, (k+1) + (h-1)]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

$$[k+1, k+h] = \sum_{i=1}^{k+1} [1, 2i-1+h-1] = \sum_{i=1}^{k+1} [1, 2i-2+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

On a donc :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = \sum_{i=1}^{k-1} [1, 2i+h] + \sum_{i=1}^{k+1} [1, 2i-2+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

En posant : $j = i-1$ dans le 2^{ème} signe \sum :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = \sum_{i=1}^{k-1} [1, 2i+h] + \sum_{j=0}^k [1, 2j+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

Et, après simplification :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = [1, 1+h] + [1, 2k+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

Calculons de même :

$$[k, k+h-1]$$

$$(0 \leq h-1 \leq n-2k+1)$$

soit :

$$[k, k+h-1]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k+2)$$

$$[k, k+h-1] = \sum_{i=1}^k [1, 2i-1+h-1] = \sum_{i=1}^k [1, 2i-2+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k+2)$$

Calculons par ailleurs :

$$[k, k+h+1]$$

$$(0 \leq h+1 \leq n-2k+1)$$

soit :

$$[k, k+h+1]$$

$$(0 \leq h+1 \leq n-2k+1)$$

$$[k, k+h+1] = \sum_{i=1}^k [2i-1+h+1] = \sum_{i=1}^k [2i+h]$$

$$(-1 \leq h \leq n-2k)$$

On a donc :

$$[k, k+h-1] + [k, k+h+1] = \sum_{i=1}^k [1, 2i-2+h] + \sum_{i=1}^k [2i+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

En posant : $j = i+1$ dans le 2^{ème} signe \sum :

$$[k, k+h-1] + [k, k+h+1] = \sum_{i=1}^k [1, 2i-2+h] + \sum_{j=2}^{k+1} [2j-2+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

Et, après simplification :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = [1, 1+h] + [1, 2k+h]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

Finalement, on aboutit bien, dans tout le domaine de validité de k , à :

$$[k-1, k+h] + [k+1, k+h] = [k, k+h-1] + [k, k+h-1]$$

$$(1 \leq h \leq n-2k)$$

En conclusion, l'implication réciproque est bien vérifiée :

$$A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) \Rightarrow A \cdot N_n \text{ bisymétrique}$$

Nous avons donc établi l'équivalence :

$$A \cdot N_n \text{ est bisymétrique (ou : } N_n \cdot A \text{ est bisymétrique, ou : } A \cdot N_n \text{ est commutatif)}$$

\Leftrightarrow

$$A \text{ appartient à } \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}) = \text{Vect}(\mathbb{B}_{n_i}), 1 \leq i \leq n.$$

Il convient maintenant de montrer que le produit de 2 matrices quelconques A et A' de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ est commutatif.

Commençons par montrer que tel est bien le cas lorsque l'on choisit 2 matrices de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$, autrement dit que : $B_{ni} \cdot B_{nj} = B_{nj} \cdot B_{ni}$, pour : $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Pour $i = 2$, on a : $B_{n2} = N_n$. Comme $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ est le commutant de la matrice N_n , nous sommes assurés par construction même que : $B_{n2} \cdot B_{nj} = B_{nj} \cdot B_{n2}$, $1 \leq j \leq n$.

Montrons maintenant que $B_{ni} \cdot B_{nj}$ ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) $\in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

Ce dernier point n'est pas acquis puisque le produit de 2 matrices bisymétriques n'est pas nécessairement bisymétrique.

Pour ce faire, nous allons démontrer que le produit de la matrice $(B_{ni} \cdot B_{nj})$ et de la matrice $B_{n2} = N_n$ est commutatif.

$$(B_{ni} \cdot B_{nj}) \cdot B_{n2} = B_{ni} \cdot (B_{nj} \cdot B_{n2})$$

Or $B_{nj} \cdot B_{n2}$ est commutatif, donc :

$$(B_{ni} \cdot B_{nj}) \cdot B_{n2} = B_{ni} \cdot (B_{nj} \cdot B_{n2}) = B_{ni} \cdot (B_{n2} \cdot B_{nj}) = (B_{ni} \cdot B_{n2}) \cdot B_{nj}$$

$B_{ni} \cdot B_{n2}$ est commutatif, donc :

$$(B_{ni} \cdot B_{n2}) \cdot B_{nj} = (B_{n2} \cdot B_{ni}) \cdot B_{nj} = B_{n2} \cdot (B_{ni} \cdot B_{nj})$$

Donc le produit de la matrice $(B_{ni} \cdot B_{nj})$ et de la matrice $B_{n2} = N_n$ est bien commutatif.

Comme seules les matrices bisymétriques appartenant à $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ commutent avec $B_{n2} = N_n$, on en conclut que :

$$B_{ni} \cdot B_{nj} \quad (1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n) \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}).$$

De ce fait la matrice produit $B_{ni} \cdot B_{nj}$ est bisymétrique.

Or, si le produit $B_{ni} \cdot B_{nj}$ est bisymétrique, alors c'est qu'il est commutatif. Donc $B_{ni} \cdot B_{nj}$ est commutatif.

Redémontrons ce dernier point :

$B_{ni} \cdot B_{nj}$ étant bisymétrique, $B_{ni} \cdot B_{nj}$ est symétrique. Donc :

$$B_{ni} \cdot B_{nj} = {}^t(B_{ni} \cdot B_{nj}) = {}^t B_{nj} \cdot {}^t B_{ni} = B_{nj} \cdot B_{ni}$$

La commutativité du produit $B_{ni} \cdot B_{nj}$ est donc bien établie.

Les matrices de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ sont donc bien commutatives.

Bien entendu, ceci suffit à établir que $\forall A \in \mathcal{BSC}_n(B) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$, et $\forall A' \in \mathcal{BSC}_n(B) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$, : $A \cdot A' = A' \cdot A$. En effet, comme $A = \sum_{i=1}^n a_i B_i$ et comme $A' = \sum_{i=1}^n a'_i B_i$, le produit $A \cdot A' = (\sum_{i=1}^n a_i B_i) (\sum_{i=1}^n a'_i B_i)$ est commutatif, puisque tous les produits $B_{ni} \cdot B_{nj}$ ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) le sont.

En conclusion : $\mathcal{BSC}_n(B) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$, est un sev de $\mathcal{M}_n(B)$ et de $\mathcal{BS}_n(B)$, de dimension n , constitué de matrices bisymétriques commutatives, incluant N_n .

Par ailleurs, $\mathcal{BSC}_n(B)$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $\mathcal{M}_n(B)$, la 2^{ème} loi interne étant la multiplication matricielle.

Remarque :

Comme dans les cas particuliers $n = 3$ à 6 étudiés précédemment, on aurait pu former le produit $N_n \cdot A$ (au lieu de $A \cdot N_n$) et rechercher à quelles conditions ce produit est bisymétrique. De même, on aurait pu chercher à déterminer les conditions dans lesquelles le produit $A \cdot N_n$ est commutatif. Dans les deux cas, on aurait conclu de la même façon que A doit satisfaire aux relations $(R_0), (R_1), (R_2), \dots, (R_k), \dots$ jusqu'à la Relation (R_ν) pour n pair, ($n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$) ou jusqu'à la Relation $(R_{\nu+1})$ pour n impair ($n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$).

Nous pouvons énoncer le théorème conclusif, résumant l'ensemble des résultats obtenus.

Définition 1 et Théorème 2-2 - 2^{ème} Définition du sev $\mathcal{BSC}_n(B)$. $\mathcal{BSC}_n(B)$ est l'ensemble des matrices bisymétriques d'ordre n dont les paramètres sont définis par les Relations (R_k) ci-dessous, $1 \leq k \leq \nu$, si n pair ($n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$) et $1 \leq k \leq \nu + 1$, si n impair ($n = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$).

(R_k) :

$$[k, k] = [1,1] + [1,3] + [1,5] + \dots + [1,2k-1]$$

$$[k, k+1] = [1,2] + [1,4] + [1,6] + \dots + [1,2k]$$

$$[k, k+2] = [1,3] + [1,5] + [1,7] + \dots + [1,2k+1]$$

.....

$$[k, k+h] = [1,1+h] + [1,3+h] + [1,5+h] + \dots + [1,2k-1+h] \quad (*)$$

$$(0 \leq h \leq n-2k+1)$$

.....

$$[k, n-k] = [1, n-2k+1] + [1, n-2k+3] + [1, n-2k+5] + \dots + [1, n-1]$$

$$[k, n-k+1] = [1, n-2k+2] + [1, n-2k+4] + [1, n-2k+6] + \dots + [1, n]$$

(*) soit aussi, en effectuant le changement d'indices : $i = k+h$ ($k \leq i \leq n-k+1$) :

$$[k, i] = [1, i-k+1] + [1, i-k+3] + [1, i-k+5] + \dots + [1, i+k-1].$$

L'ensemble des Relations (R_k) constitue un condition nécessaire et suffisante assurant que $\mathcal{BSC}_n(B)$ est le commutant de la matrice N_n .

$\mathcal{BSC}_n(B)$ est un sev de $\mathcal{BS}_n(B)$ - et donc de $\mathcal{M}_n(B)$ -, de dimension n , commutatif pour la multiplication matricielle. (Ceci signifie que le produit de 2 matrices quelconques de $\mathcal{BSC}_n(B)$ est commutatif).

Soit $\{B_{ni}\}, 1 \leq i \leq n$, l'ensemble des n matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$ telles que :

$$[1, j] = 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } [1, i] = 1.$$

$\{B_{ni}\}, 1 \leq i \leq n$, constitue la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$ et l'on a donc :

$$\mathcal{BSC}_n(B) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n.$$

$\mathcal{BSC}_n(B)$ constitue une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(B)$, la 2^{ème} loi interne étant la multiplication matricielle.

Remarque 1.

Le Théorème 2-2 qui précède est un théorème d'existence et non d'unicité. Il assure qu'il existe un sous-espace vectoriel commutatif de $\mathcal{BS}_n(B)$ de dimension n . Il ne garantit pas son unicité et ce point est d'ailleurs faux (cf. Chapitre Conclusion de la présente étude).

Remarque 2.

La définition de $\mathcal{BSC}_n(B)$ peut être effectuée de 3 façons parfaitement équivalentes :

- $\mathcal{BSC}_n(B)$ peut être défini comme le commutant de la matrice N_n . (C'est l'approche que nous avons adoptée initialement).
- On peut aussi se donner comme point de départ les Relations (R_k) (cf. supra). La définition de $\mathcal{BSC}_n(B)$ en découle (Théorème 2-2).
- On peut enfin prédéfinir (de façon tout à fait indépendante) les matrices B_{ni} ($1 \leq i \leq n$), démontrer que le système $\{B_{ni}\}, 1 \leq i \leq n$, est libre et poser par définition : $\mathcal{BSC}_n(B) = \text{Vect}(B_{ni}), 1 \leq i \leq n$.

Remarque 3 :

Pour construire $\mathcal{BSC}_n(B)$, nous avons utilisé la propriété de commutativité d'une matrice A de $\mathcal{BS}_n(B)$ avec la matrice de référence $B_{n2} = N_n$. Était-il possible d'utiliser comme matrice de référence n'importe quelle matrice B_{ni} , $1 \leq i \leq n$, pour parvenir au même résultat ?

La réponse est clairement négative.

Bien entendu, $B_{n1} = I_n$ et $B_{nn} = J_n$ ne permettent pas la construction de l'ensemble $\mathcal{BSC}_n(B)$. Mais, outre ces cas particuliers, montrons que d'autres matrices B_{ni} , $1 < i < n$, ne conviennent pas.

Fournissons un exemple relatif à $\mathcal{BSC}_5(B)$.

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & f & g & h & d \\ c & g & i & g & c \\ d & h & g & f & b \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, (a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in B^9 \text{ une matrice donnée de } \mathcal{BS}_5(B).$$

Choisissons comme matrice de référence (en lieu et place de B_{52}) : $B_{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Tous calculs faits : } A \cdot B_{53} = \begin{bmatrix} c & b+d & a+c+e & b+d & c \\ g & f+h & b+g+d & f+h & g \\ i & 0 & i & 0 & i \\ g & f+h & b+g+d & f+h & g \\ c & b+d & a+c+e & b+d & c \end{bmatrix}$$

$A \cdot B_{53}$ est bisymétrique si et seulement si les conditions (C) sont réalisées :

$$(C) : g = b + d \text{ et } i = a + c + e$$

Si l'on adopte B_{53} comme matrice de référence, il n'existe donc, dans ce cas, aucune contrainte sur les valeurs de f et h . En conséquence, si les conditions (C) ci-dessus sont remplies, le produit $A \cdot B_{53}$ sera commutatif, mais le produit $A \cdot B_{52}$ ne le sera pas en règle générale, puisque les conditions supplémentaires (cf. cas $n = 5$ étudié ci-dessus) : $f = a + c$ et $h = c + e$ ne seront pas nécessairement remplies.

Autrement dit, la matrice de référence B_{53} ne permet pas de « construire » $\mathcal{BSC}_5(B)$.

Cherchons à déterminer le sous-ensemble de $\mathcal{M}_5(B)$ constitué des matrices commutant avec B_{53} , que nous noterons $\text{Com}(B_{53})$.

On peut démontrer que pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_5(B)$ commute avec B_{53} , il faut et suffit que A soit de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a+c+\lambda & f+j & c+e+\mu & j \\ k & b+d & a+c+e & b+d & c \\ j & c+e+\mu & f+j & a+c+\lambda & f \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix},$$

Cette forme dépend des 9 paramètres suivants : $a, b, c, d, e, f, \lambda, \mu, j$ (tous éléments de B).

$\text{Com}(B_{53})$ est un sev de $\mathcal{M}_5(B)$ de dimension 9 dont une base est constitué :

- par les 3 matrices B_{51}, B_{53}, B_{55} , (extraites de la base canonique de $\mathcal{BSC}_5(B)$),
- et par les matrices $E_2, E_4, E_6, E_7, E_8, E_9$ qui suivent :

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$E_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; E_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; E_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc : $\text{Com}(B_{53}) = \text{Vect}(B_{51}, E_2, B_{53}, E_4, B_{55}, E_6, E_7, E_8, E_9)$.

On notera que $\text{Com}(B_{53})$ renferme des matrices bisymétriques, ainsi que des matrices non bisymétriques (ni même 1-symétriques ou 2-symétriques), telles : E_2, E_4, E_6, E_9 .

Remarque 4.

Les sous-matrices centrales (smc) d'une matrice bisymétrique sont bisymétriques. Par contre, les sous-matrices centrales (smc) d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(B)$ n'appartiennent pas en règle générale à $\mathcal{BSC}_n(B)$, comme on le vérifie aisément.

Théorème 2-3. Soient $A \in \mathcal{BSC}_n(B)$ et P un polynôme quelconque de $B[X]$.

Alors : $P(A) \in \mathcal{BSC}_n(B)$.

Preuve :

Pour $P = 0$, polynôme nul : $P(A) = O_n$ et $O_n \in \mathcal{BSC}_n(B)$.

Pour $P = 1$ (constante 1) : $P(A) = A^0 = I_n$ et $I_n \in \mathcal{BSC}_n(B)$.

Dans le cas général, P est un polynôme de degré p non nul.

Il est clair que :

$A \in \mathcal{BSC}_n(B) \Rightarrow A^2 \in \mathcal{BSC}_n(B), \dots, A^p \in \mathcal{BSC}_n(B)$.

Comme toute combinaison linéaire de matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$ appartient à $\mathcal{BSC}_n(B)$,

$P(A)$ appartient à $\mathcal{BSC}_n(B)$.

Théorème 2-4. $A \in \mathcal{BSC}_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{BSC}_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B)$.

Preuve :

Nous savons (cf. Théorème 1-25) que :

$A \in \mathcal{BS}_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{BS}_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B)$.

Soit $A \in \mathcal{BSC}_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B)$.

Comme $\mathcal{BSC}_n(B) \subseteq \mathcal{BS}_n(B)$, A^{-1} existe et $A^{-1} \in \mathcal{BS}_n(B)$.

Montrons que : $A^{-1} \in \mathcal{BSC}_n(B)$.

Nous utiliserons à nouveau l'équivalence :

$$A^{-1} \in \mathcal{BSC}_n(B) \Leftrightarrow A^{-1} \cdot N_n \text{ commutatif (ou : } A^{-1} \cdot B_{n2} \text{ commutatif, puisque } N_n = B_{n2}).$$

$$\text{Or : } A \in \mathcal{BSC}_n(B) \Rightarrow A \cdot B_{n2} = B_{n2} \cdot A$$

$$\text{Par ailleurs : } A^{-1} \text{ existe, donc : } A^{-1} \cdot A \cdot B_{n2} = A^{-1} \cdot B_{n2} \cdot A$$

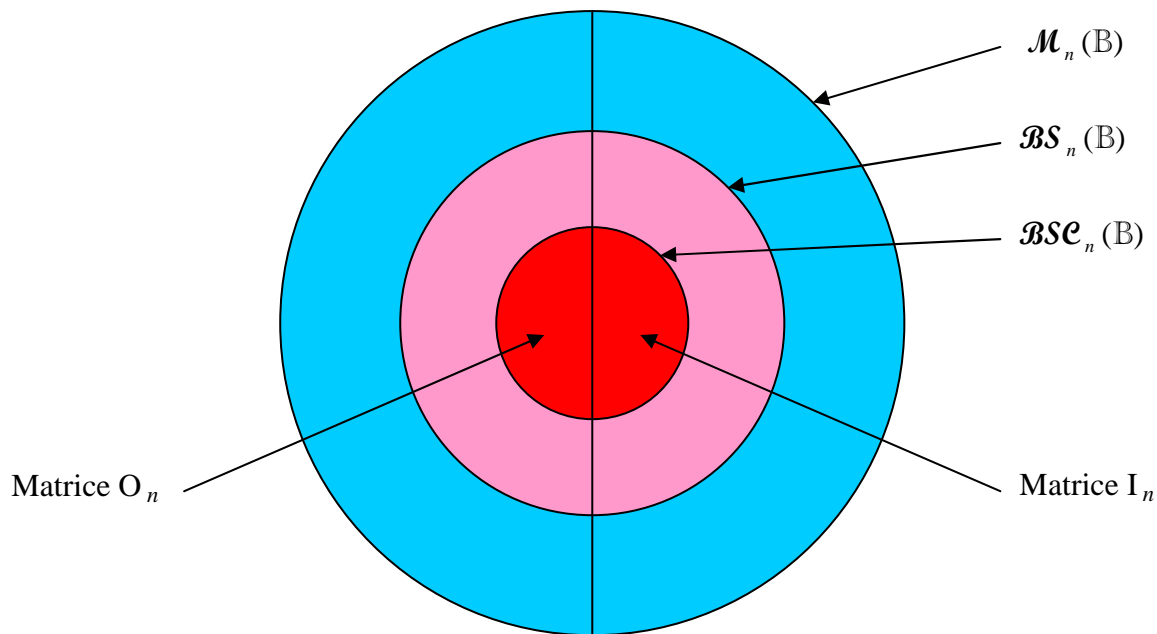
$$\text{Par suite : } B_{n2} = A^{-1} \cdot B_{n2} \cdot A \Rightarrow B_{n2} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B_{n2} \cdot A \cdot A^{-1}$$

$$\Rightarrow B_{n2} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B_{n2}$$

Donc le produit $A^{-1} \cdot B_{n2}$ est commutatif.

$$\text{Par suite : } A^{-1} \in \mathcal{BSC}_n(B) \text{ et donc : } A^{-1} \in \mathcal{BSC}_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B).$$

2.4. Schéma représentant les inclusions : $\mathcal{BSC}_n(B) \subseteq \mathcal{BS}_n(B) \subseteq \mathcal{M}_n(B)$



Ensemble des matrices non inversibles | Ensemble des matrices inversibles
 $\mathcal{BSC}_n(B) \cap \mathcal{GL}_n(B)$

Rappelons que : $\dim(\mathcal{M}_n(B)) = n^2$; $\dim(\mathcal{BS}_n(B)) = \left[E\left(\frac{n+1}{2}\right) \right]^2$; $\dim(\mathcal{BSC}_n(B)) = n$.

NOTATION

Par souci d'allègement d'écriture, nous noterons dorénavant les matrices B_{ni} , $1 \leq i \leq n$, de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$, sous la forme simplifiée : B_i , $1 \leq i \leq n$.

Autrement dit, le 1^{er} indice de B_{ni} correspondant à l'ordre n sera désormais sous-entendu.

CHAPITRE 3

Signature-colonne et signature-ligne d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ – Isomorphismes entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ et entre $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ – Produit de matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

3.1. Signature-colonne et signature-ligne d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Les notions qui suivent sont essentielles pour la suite de l'étude des matrices de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

Définition 3-1. Soit $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

On appelle signature-colonne de A la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ dont les éléments sont ceux de la 1^{ère} colonne de A . Nous la noterons : $|A|$.

On appelle signature-ligne de A la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ dont les éléments sont ceux de la 1^{ère} ligne de A . Nous la noterons : \overline{A} .

Les éléments de la signature-colonne et de la signature-ligne de A sont ainsi constitués des n paramètres de A : $[1, i]$, $1 \leq i \leq n$.

Remarque :

Il est clair que $|A|$ ou \overline{A} détermine parfaitement la matrice A . En effet, la donnée de $|A|$ ou \overline{A} détermine la connaissance des n paramètres $[1, i]$, $1 \leq i \leq n$, de la matrice A . Or ceux-ci ne sont autres que les coordonnées de A dans la base canonique $\{B_i\}$, $1 \leq i \leq n$.

(Rappelons en effet que : $[1, i] = a_i$, $1 \leq i \leq n$, et que : $A = \sum_{i=1}^n a_i B_i$).

3.2. Isomorphismes entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ et entre $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Définition 3-2. Nous désignerons par φ l'isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ défini par :

$$|A| \xrightarrow{\varphi} A$$

Nous désignerons par ψ l'isomorphisme entre $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ défini par :

$$\overline{A} \xrightarrow{\psi} A$$

Remarque 1 :

Le schéma ci-dessous précise la nature de l'isomorphisme φ .

Soit $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$. les n paramètres $[1, i]$, $1 \leq i \leq n$ de A sont ici notés : a_i , $1 \leq i \leq n$.

φ est l'application bijective suivante entre les ev $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$:

$$|A| = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi} A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

Schéma équivalent pour ψ , application bijective entre $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

Remarque 2 :

L'isomorphisme φ permet de doter $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ d'une loi multiplicative interne, définie comme suit.

Soient C_1 et C_2 deux matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$.

L'isomorphisme φ permet d'associer à C_1 et à C_2 deux matrices A_1 et A_2 de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$:

$$C_1 \xrightarrow{\varphi} A_1 \quad \text{et} \quad C_2 \xrightarrow{\varphi} A_2.$$

Nous dirons que le produit des deux matrices-colonnes C_1 et C_2 , noté $C_1 \cdot C_2$, est, par définition, la signature-colonne du produit $A_1 \cdot A_2$.

On a donc, φ étant bijectif :

$$A_1 \cdot A_2 \xrightarrow{\varphi^{-1}} C_1 \cdot C_2.$$

On pourra définir de la même façon le carré d'une matrice-colonne C , que l'on notera C^2 , plus généralement la puissance $k^{\text{ème}}$ ($k \in \mathbb{N}$) d'une matrice-colonne C , que l'on notera C^k .

Si la matrice A , image de C par φ , est inversible, on pourra définir la matrice-colonne inverse de C , notée C^{-1} , et on pourra définir plus généralement C^k , $\forall k \in \mathbb{Z}$.

On a donc doté l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ d'une loi de multiplication interne.

L'isomorphisme φ entre les ev $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ et $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ devient alors un isomorphisme d'algèbres, faisant correspondre la multiplication interne à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ ainsi définie à la multiplication matricielle classique interne à $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

Théorème 3-3. Soient $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$, $B \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$. On a les équivalences suivantes :

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad |A| = |B| \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} = \overline{B}$$

Théorème 3-4. Soient $A \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$, $B \in \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

$$|A+B| = |A| + |B| \quad \text{et} \quad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Preuve:

Les Théorèmes 3-3 et 3-4 sont des conséquences directes de l'existence des isomorphismes φ et ψ précédents.

Théorème 3-5. Soient $A \in \mathcal{BSC}_n(B)$, $B \in \mathcal{BSC}_n(B)$.

$$|A \cdot B| = A \cdot |B| = B \cdot |A| \quad \text{et} \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot B = \overline{B} \cdot A$$

On peut énoncer ce théorème comme suit :

La signature-colonne du produit de 2 matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$ est égale au produit de l'une quelconque de ces matrices par la signature-colonne de l'autre (dans l'ordre requis).

La signature-ligne du produit de 2 matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$ est égale au produit de l'une quelconque de ces matrices par la signature-ligne de l'autre (dans l'ordre requis).

Preuve:

La matrice-colonne $|A \cdot B|$ est la signature-colonne de la matrice-produit $A \cdot B$. Elle est donc égale à la 1^{ère} colonne de $A \cdot B$.

La matrice-colonne $A \cdot |B|$ est aussi égale à la 1^{ère} colonne de la matrice-produit $A \cdot B$.

$$\text{Donc : } |A \cdot B| = A \cdot |B|.$$

Comme $A \in \mathcal{BSC}_n(B)$ et $B \in \mathcal{BSC}_n(B)$, on a : $A \cdot B = B \cdot A$.

$$\text{Donc : } |A \cdot B| = |B \cdot A| = B \cdot |A| \quad (\text{conformément au résultat précédent}).$$

Même raisonnement pour les signatures-lignes.

Théorème 3-6. Soient $A \in \mathcal{BSC}_n(B)$, $B \in \mathcal{BSC}_n(B)$ telles que : $A \cdot B = O_n$, où O_n désigne la matrice nulle d'ordre n . On a :

$$A \cdot B = O_n \Leftrightarrow A \cdot |B| = |O_n| \Leftrightarrow B \cdot |A| = |O_n|$$

$$A \cdot B = O_n \Leftrightarrow \overline{A} \cdot B = \overline{O_n} \Leftrightarrow \overline{B} \cdot A = \overline{O_n}$$

Preuve:

Notons d'abord que : $|O_n| = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$, matrice-colonne nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(B)$,

et que : $\overline{O_n} = [\quad 0 \quad]_n$, matrice-ligne nulle de $\mathcal{M}_{1,n}(B)$.

Ce théorème est une conséquence directe du Théorème 3-5 qui précède dans le cas particulier où $A \cdot B = O_n$.

Théorème 3-7. Soient $A \in \mathcal{BSC}_n(B)$, $B \in \mathcal{BSC}_n(B)$. On a les implications suivantes :

$$A \cdot |B| = |O_n| \Rightarrow \overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$$

$$B \cdot |A| = |O_n| \Rightarrow \overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$$

$$\overline{A} \cdot B = \overline{O_n} \Rightarrow \overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$$

$$\overline{B} \cdot A = \overline{O_n} \Rightarrow \overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$$

Preuve:

Notons bien que :

$\overline{A} \cdot |B|$ est un scalaire de B : il s'agit de l'élément d'indice (1, 1) de la matrice $A \cdot B$,

$\overline{B} \cdot |A|$ est un scalaire de B : il s'agit de l'élément d'indice (1, 1) de la matrice $B \cdot A$.

Comme $A \cdot B = B \cdot A$, on a : $\overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A|$.

D'après le Théorème 3-6 : $A \cdot |B| = |O_n| \Rightarrow A \cdot B = O_n$

$$\overline{A} \cdot B = \overline{O_n} \Rightarrow A \cdot B = O_n.$$

Par suite, et dans les 2 cas, tous les éléments de $A \cdot B$ sont nuls, en particulier l'élément d'indice (1, 1). Donc :

$$\overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0.$$

Remarque :

Il est clair que les implications énoncées dans le Théorème 3-7 sont « à sens unique ».

En effet, lorsque : $\overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0$, seul l'élément d'indice (1, 1) de la matrice $A \cdot B$ est nul. Ceci n'entraîne en rien la nullité du produit $A \cdot B$.

Considérons l'exemple suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \in \mathcal{BSC}_3(B) \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{BSC}_3(B).$$

$$\text{On a : } A \cdot B = B \neq O_n \quad \text{et} \quad |A \cdot B| = A \cdot |B| = B \cdot |A| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq |O_n|.$$

$$\text{Cependant : } \overline{A} \cdot |B| = \overline{B} \cdot |A| = 0.$$

3.3. Transformation d'un système affine associé à une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ en équation matricielle

L'isomorphisme φ permet de transposer un système affine associé à une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ en équation matricielle et vice versa.

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ une matrice de } \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}).$$

Considérons le système affine (S) suivant de n équations à n inconnues x_1, \dots, x_n .

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Nous dirons que le système (S) est associé à la matrice A de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ et inversement que la matrice A de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ est associée au système (S).

Le système (S) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(S) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Posons } [X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B}) \text{ et } [B] = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B}).$$

(S) s'écrit alors sous la forme :

$$(S) \quad A \cdot [X] = [B]$$

Introduisons la matrice X de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ telle que : $|X| = [X]$.

Introduisons de même la matrice B de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ telle que : $|B| = [B]$.

L'isomorphisme φ permet d'affirmer qu'il revient au même de résoudre le système affine :

$$(S) \quad A \cdot [X] = [B], \text{ où l'inconnue est la matrice-colonne } [X] \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B}),$$

ou l'équation matricielle (S') suivante :

$$(S') \quad A \cdot X = B, \text{ où l'inconnue est la matrice } X \text{ de } \mathcal{BSC}_n(\mathbb{B}).$$

3.4. Produit $B_i \cdot B_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$

3.4.1. Aspects théoriques

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3-8. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$.

Soit U_i ($1 \leq i \leq n$) la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne i .

Soit V_j ($1 \leq j \leq n$) la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne j .

Alors : $A \cdot U_i$ est une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ égale à la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A ,
et : $V_j \cdot A$ est une matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ égale à la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .

Preuve:

Raisonnons sur les colonnes. (Même raisonnement s'agissant des lignes).

Ecrivons A sous la forme : $[C_1 \ \dots \ C_i \ \dots \ C_n]$, où les C_i , $1 \leq i \leq n$, désignent les colonnes de la matrice A .

$$\text{Notons : } U_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } i. \text{ On a donc : } A \cdot U_i = [C_1 \ \dots \ C_i \ \dots \ C_n] \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = [C_i].$$

Théorème 3-9. Le produit de 2 matrices de la base canonique $B_i \cdot B_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, est la matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ dont la signature-colonne (resp. signature-ligne) est :

- la $i^{\text{ème}}$ colonne (resp. $i^{\text{ème}}$ ligne) de la matrice B_j

ou :

- la $j^{\text{ème}}$ colonne (resp. $j^{\text{ème}}$ ligne) de la matrice B_i ,

ces 2 colonnes (resp. lignes) étant égales.

Preuve:

Raisonnons sur les colonnes.

$$\text{Remarquons d'abord que : } |B_j| = U_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } j.$$

D'après le Lemme 3-8 précédent :

$$B_i \cdot |B_j| = B_i \cdot U_j = j^{\text{ème}} \text{ colonne de la matrice } B_i.$$

D'après le Théorème 3-5 : $|B_i \cdot B_j| = B_i \cdot |B_j|$, donc :

$$|B_i \cdot B_j| = j^{\text{ème}} \text{ colonne de la matrice } B_i.$$

Le Théorème 3-3 permet alors de conclure :

$$B_i \cdot B_j = \text{matrice de } \mathcal{BSC}_n(B) \text{ de signature-colonne égale à la } j^{\text{ème}} \text{ colonne de } B_i.$$

Comme $B_i \cdot B_j = B_j \cdot B_i$, on a parallèlement :

$$B_j \cdot B_i = \text{matrice de } \mathcal{BSC}_n(B) \text{ de signature-colonne égale à la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } B_j.$$

En rapprochant les deux résultats, on en déduit que la $i^{\text{ème}}$ colonne de B_j est égale à la $j^{\text{ème}}$ colonne de B_i .

Même raisonnement s'agissant des lignes.

3.4.2. Calcul pratique du produit $B_i \cdot B_j$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

Le Théorème 3-9 permet de calculer très simplement le produit de 2 matrices B_i et B_j de la base canonique ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$).

3.4.2.1. Représentation simplifiée des matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$

Nous utiliserons à maintes reprises dans la suite de cette étude la représentation simplifiée suivante d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(B)$, dans laquelle :

- la matrice est représentée par un tableau de $n \times n$ cases,
- les cases dont l'élément est égal à la valeur est 1 contiennent une croix : x,
- les cases dont l'élément est égal à la valeur est 0 sont laissées à blanc.

Exemples :

Dans ce mode de représentation, on a à titre d'exemples :

$I_4 = B_1$	$N_4 = B_2$	B_3	$J_4 = B_4$																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>x</td></tr> </table>	x					x					x					x	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr> </table>		x			x		x			x		x			x		<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr> </table>			x			x		x	x		x			x			<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> </table>	x			x		x	x			x	x		x			x
x																																																																			
	x																																																																		
		x																																																																	
			x																																																																
	x																																																																		
x		x																																																																	
	x		x																																																																
		x																																																																	
		x																																																																	
	x		x																																																																
x		x																																																																	
	x																																																																		
x			x																																																																
	x	x																																																																	
	x	x																																																																	
x			x																																																																
$N_4 + I_4$	$B_2 + B_3$	$I_4 + J_4 = B_1 + B_4$	$B_1 + B_2 + B_3 + B_4$																																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td></tr> </table>	x	x			x	x	x			x	x	x			x	x	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> </table>		x	x		x	x	x	x	x	x	x	x		x	x		<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> </table>	x			x		x	x			x	x	x	x			x	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr> </table>	x	x	x	x	x			x	x			x	x	x	x	x
x	x																																																																		
x	x	x																																																																	
	x	x	x																																																																
		x	x																																																																
	x	x																																																																	
x	x	x	x																																																																
x	x	x	x																																																																
	x	x																																																																	
x			x																																																																
	x	x																																																																	
	x	x	x																																																																
x			x																																																																
x	x	x	x																																																																
x			x																																																																
x			x																																																																
x	x	x	x																																																																

Avec ce mode de représentation, la table de multiplication $B_i \cdot B_j$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ s'obtient par simple lecture de la façon suivante :

- on se positionne dans la ligne j de la matrice B_i ,
- on recherche dans cette ligne j les indices-colonnes des cases contenant une croix. Ces indices correspondent aux coordonnées non nulles dans la base canonique du produit $B_i \cdot B_j$. Si l'on trouve (à titre d'exemple, et en supposant $n \geq 4$) une croix dans les colonnes 1, 3 et 4 de la ligne j de la matrice B_i , alors :

$$B_i \cdot B_j = B_1 + B_3 + B_4.$$

D'après le Théorème 3-9, il est indifférent de regarder le contenu de la ligne j de la matrice B_i ou celui de la ligne i de la matrice B_j : le résultat est identique.

Nous allons retrouver, à titre d'application, les résultats correspondant aux tables de multiplication $B_i \cdot B_j$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, pour $n = 1$ à 6, du Chapitre 2.

3.4.3. Tables de multiplication $B_i \cdot B_j$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, pour $n = 1$ à 6.

$n = 1$

$$B_1$$

$$B_1 \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array} = B_1$$

$n = 2$

$$B_1$$

$$B_1 \begin{array}{|c|c|} \hline X & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = B_1$$

$$B_2 \begin{array}{|c|c|} \hline & X \\ \hline & \\ \hline \end{array} = B_2$$

$$B_2$$

$$B_1 \begin{array}{|c|c|} \hline & X \\ \hline X & \\ \hline \end{array} = B_2$$

$$B_2 \begin{array}{|c|c|} \hline X & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = B_1$$

$n = 3$

$$B_1$$

$$B_1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline X & & \\ \hline & X & \\ \hline & & X \\ \hline \end{array} = B_1$$

$$B_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & X & \\ \hline X & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = B_2$$

$$B_3 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & X \\ \hline & X & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = B_3$$

$$B_2$$

$$B_1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & X & \\ \hline X & & X \\ \hline & X & \\ \hline \end{array} = B_2$$

$$B_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & X & \\ \hline X & & X \\ \hline & X & \\ \hline \end{array} = B_1 + B_3$$

$$B_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & X & \\ \hline X & & \\ \hline & X & \\ \hline \end{array} = B_2$$

B_3

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & & x \\
 \hline
 & x & \\
 \hline
 x & & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_3 \\
 = B_2 \\
 = B_1
 \end{array}$$

$n = 4$

B_1

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 x & & & \\
 \hline
 & x & & \\
 \hline
 & & x & \\
 \hline
 & & & x \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_1 \\
 = B_2 \\
 = B_3 \\
 = B_4
 \end{array}$$

B_2

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & x & & \\
 \hline
 x & & x & \\
 \hline
 & x & & x \\
 \hline
 & & x & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_2 \\
 = B_1 + B_3 \\
 = B_2 + B_4 \\
 = B_3
 \end{array}$$

B_3

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & x & \\
 \hline
 & x & & x \\
 \hline
 x & & x & \\
 \hline
 & x & & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_3 \\
 = B_2 + B_4 \\
 = B_1 + B_3 \\
 = B_2
 \end{array}$$

B_4

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & x \\
 \hline
 & & x & \\
 \hline
 & x & & \\
 \hline
 x & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_4 \\
 = B_3 \\
 = B_2 \\
 = B_1
 \end{array}$$

$n = 5$

B_1

$$\begin{array}{l}
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4 \\
 B_5
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 x & & & & \\
 \hline
 & x & & & \\
 \hline
 & & x & & \\
 \hline
 & & & x & \\
 \hline
 & & & & x \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = B_1 \\
 = B_2 \\
 = B_3 \\
 = B_4 \\
 = B_5
 \end{array}$$

B_2

B_1		x				= B_1
B_2	x		x			= $B_1 + B_3$
B_3		x		x		= $B_2 + B_4$
B_4			x		x	= $B_3 + B_5$
B_5				x		= B_4

 B_3

B_1			x			= B_1
B_2		x		x		= $B_2 + B_4$
B_3	x		x		x	= $B_1 + B_3 + B_5$
B_4		x		x		= $B_2 + B_4$
B_5			x			= B_3

 B_4

B_1				x		= B_4
B_2			x		x	= $B_3 + B_5$
B_3		x		x		= $B_2 + B_4$
B_4	x		x			= $B_1 + B_3$
B_5		x				= B_2

 B_5

B_1					x	= B_5
B_2				x		= B_4
B_3			x			= B_3
B_4		x				= B_2
B_5	x					= B_1

 $n = 6$ B_1

B_1	x					= B_1	
B_2		x				= B_2	
B_3			x			= B_3	
B_4				x		= B_4	
B_5					x	= B_5	
B_6						x	= B_6

B₂

B₁		x					= B₂
B₂	x		x				= B₁ + B₃
B₃		x		x			= B₂ + B₄
B₄			x		x		= B₃ + B₅
B₅				x		x	= B₄ + B₆
B₆				x			= B₅

B₃

B₁			x				= B₃
B₂		x		x			= B₂ + B₄
B₃	x		x		x		= B₁ + B₃ + B₅
B₄		x		x		x	= B₂ + B₄ + B₆
B₅			x		x		= B₃ + B₅
B₆				x			= B₄

B₄

B₁				x			= B₄
B₂			x		x		= B₃ + B₅
B₃		x		x		x	= B₂ + B₄ + B₆
B₄	x		x		x		= B₁ + B₃ + B₅
B₅		x		x			= B₂ + B₄
B₆			x				= B₃

B₅

B₁					x		= B₅
B₂				x		x	= B₄ + B₆
B₃			x		x		= B₃ + B₅
B₄		x		x			= B₂ + B₄
B₅	x		x				= B₁ + B₃
B₆		x					= B₂

B₆

B₁						x	= B₆
B₂					x		= B₅
B₃				x			= B₄
B₄			x				= B₃
B₅		x					= B₂
B₆	x						= B₁

Tous les résultats obtenus ci-dessus sont en parfaite conformité avec ceux du Chapitre 2.

3.4.4. Remarque concernant le produit $B_i \cdot B_j$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Remarquons tout d'abord que, dans une matrice quelconque donnée B_i de la base canonique ($1 \leq i \leq n$), tous les éléments non nuls d'une ligne donnée ont un indice colonne de même parité. Si i est impair, les éléments non nuls d'une ligne impaire (resp. paire) ont un indice colonne impair (resp. pair). Si i est pair, les éléments non nuls d'une ligne impaire (resp. paire) ont un indice colonne pair (resp. impair).

Désignons par *B-pair* une matrice de la base canonique $\{B_i\}$, $1 \leq i \leq n$, d'indice i pair et par *B-impair* une matrice de la base canonique $\{B_i\}$, $1 \leq i \leq n$, d'indice i impair.

On tire de la remarque précédente les règles suivantes.

$$\begin{aligned} \text{B-pair} \times \text{B-pair} &= \sum \text{B-impair} \\ \text{B-impair} \times \text{B-impair} &= \sum \text{B-impair} \\ \text{B-pair} \times \text{B-impair} &= \sum \text{B-pair} \\ \text{B-impair} \times \text{B-pair} &= \sum \text{B-pair}. \end{aligned}$$

3.5. Produit d'une matrice quelconque de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ par une matrice de la base canonique B_i , $1 \leq i \leq n$

3.5.1 Théorème relatif au produit d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ par une matrice de la base canonique B_i , $1 \leq i \leq n$.

Les deux théorèmes qui suivent généralisent le Théorème 3-9 relatif au produit de 2 matrices de la base canonique $B_i \cdot B_j$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

Théorème 3-10. Soit A une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

Le produit de la matrice A par la matrice B_i ($1 \leq i \leq n$) de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$, est la matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ dont la signature-colonne est égale à la $i^{\text{ème}}$ colonne de A et dont la signature-ligne est égale à la $i^{\text{ème}}$ ligne de A .

Preuve :

Raisonnons sur les colonnes.

Considérons $A \cdot |B_i|$.

$|B_i|$ est une matrice-colonne dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne i . On peut donc appliquer le Lemme 3-8 et conclure que :

$$A \cdot |B_i| = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

$$\text{Mais : } A \cdot |B_i| = |A \cdot B_i| \quad (\text{cf. Théorème 3-5}). \quad \text{Donc : } |A \cdot B_i| = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

Même raisonnement concernant les lignes.

Le théorème suivant, tout aussi important, est une conséquence directe du Théorème 3.10.

Théorème 3-11. Soit A une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

La $i^{\text{ème}}$ colonne ($1 \leq i \leq n$) de la matrice A est égale à $B_i \cdot |A|$.

La $i^{\text{ème}}$ ligne ($1 \leq i \leq n$) de la matrice A est égale à $\overline{A} \cdot B_i$.

Preuve :

Raisonnons à nouveau sur les colonnes. D'après le Théorème 3-10 :

$$|A \cdot B_i| = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

Mais l'on a aussi : $|A \cdot B_i| = |B_i \cdot A| = B_i \cdot |A|$ (d'après le Théorème 3-5).

Même raisonnement concernant les lignes.

Remarque :

Le Théorème 3-11 permet de calculer très aisément chaque colonne et chaque ligne d'une matrice quelconque de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

Soit A une matrice de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$. Si l'on désigne :

- par L_1 et par L_i les matrices-lignes de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{B})$ correspondant à la 1^{ère} et à la $i^{\text{ème}}$ ligne de A ,
- et par C_1 et par C_i les matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{B})$ correspondant à la 1^{ère} et à la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et par C_1 ,

le Théorème 3-11 affirme que :

$$L_i = L_1 \cdot B_i \quad \text{et} \quad C_i = B_i \cdot C_1$$

La suite de cette Section 3.5. est consacrée à des applications du Théorème 3-11.

3.5.2. Applications diverses du Théorème 3-11

Remarque :

Pour la définition du déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$, se référer à l'Annexe 1 du Chapitre 4.

Notation :

Nous serons amenés à noter \overline{x} l'élément de \mathbb{B} qui prend la valeur alternative de celle de x . Si x vaut 0, \overline{x} vaut 1, et inversement.

On a donc : $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$.

On vérifie aisément que : $\overline{\overline{x}} = x + 1$. Noter que : $\overline{\overline{x} + y} = \overline{x + \overline{y}} = \overline{x + y}$.

Calcul d'une colonne d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(B)$ à partir de sa signature-colonne

Calcul d'une colonne d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(B)$ à partir de sa signature-ligne

Les exemples qui suivent sont basés sur les colonnes. On aurait tout aussi bien pu effectuer des calculs identiques sur des lignes.

$n = 3$

Soit : $C_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, la forme générale de la signature-colonne d'une matrice A de $\mathcal{BSC}_3(B)$.

On vérifie sans peine que : $C_1 = B_1 \cdot C_1$ et que : $C_3 = B_3 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$.

Calculons C_2 :

$$C_2 = B_2 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

D'où la forme générale d'une matrice A de $\mathcal{BSC}_3(B)$:

$$A = [C_1 \quad C_2 \quad C_3] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 + a_3 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

$n = 4$

Soit : $C_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$, la forme générale de la signature-colonne d'une matrice A de $\mathcal{BSC}_4(B)$.

On vérifie sans peine que : $C_1 = B_1 \cdot C_1$ et que : $C_4 = B_4 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$.

Calculons C_2 :

$$C_2 = B_2 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de C_3 est immédiat sachant que : $B_3 = J_3 \cdot B_2$.

$$C_3 = B_3 \cdot C_1 = J_3 \cdot B_2 \cdot C_1 = J_3 \cdot C_2 = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

D'où la forme générale d'une matrice A de $\mathcal{BSC}_3(B)$:

$$A = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 + a_3 & a_2 + a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

$n = 5$

Soit : $C_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}$, la forme générale de la signature-colonne d'une matrice A de $\mathcal{BSC}_5(B)$.

On vérifie sans peine que : $C_1 = B_1 \cdot C_1$ et que : $C_5 = B_5 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$.

$$C_2 = B_2 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_3 + a_5 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

$$C_3 = B_3 \cdot C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_1 + a_3 + a_5 \\ a_2 + a_4 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

$$C_4 = B_4 \cdot C_1 = J_4 \cdot B_2 \cdot C_1 = J_4 \cdot C_2 = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 + a_5 \\ a_2 + a_4 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

D'où la forme générale d'une matrice A de $\mathcal{BSC}_5(B)$:

$$A = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_1 + a_3 & a_2 + a_4 & a_3 + a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 + a_5 & a_2 + a_4 & a_3 \\ a_4 & a_3 + a_5 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

$n = 6$

Nous allons mener nos calculs différemment en faisant appel à l'isomorphisme φ associant à une matrice-colonne C_1 de $\mathcal{M}_{61}(B)$ à la matrice de $\mathcal{BSC}_6(B)$ dont cette matrice-colonne représente la signature-colonne.

Nous donnerons par commodité le même nom à la matrice-colonne C_1 et à la matrice de $\mathcal{BSC}_6(B)$ associée :

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi} C_1 = a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + a_5 B_5 + a_6 B_6$$

Calculons C_2 (considéré comme matrice de $\mathcal{BSC}_6(B)$).

$$\begin{aligned} C_2 &= B_2 \cdot C_1 = B_2 (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + a_5 B_5 + a_6 B_6) \\ &= a_1 B_2 B_1 + a_2 B_2^2 + a_3 B_2 B_3 + a_4 B_2 B_4 + a_5 B_2 B_5 + a_6 B_2 B_6 \\ &= a_1 B_2 + a_2 (B_1 + B_3) + a_3 (B_2 + B_4) + a_4 (B_3 + B_5) + a_5 (B_4 + B_6) \\ &\quad + a_6 B_5 \\ &= a_2 B_1 + (a_1 + a_3) B_2 + (a_2 + a_4) B_3 + (a_3 + a_5) B_4 + (a_4 + a_6) B_5 + a_5 B_6 \end{aligned}$$

Par φ^{-1} , on en déduit la matrice-colonne C_2 .

$$C_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_3 + a_5 \\ a_4 + a_6 \\ a_5 \end{bmatrix}, \text{ résultat conforme à notre attente.}$$

Calculons de même C_3 (considéré comme matrice de $\mathcal{BSC}_6(B)$).

$$\begin{aligned} C_3 &= B_3 \cdot C_1 = B_3 (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + a_5 B_5 + a_6 B_6) \\ &= a_1 B_3 B_1 + a_2 B_3 B_2 + a_3 B_3^2 + a_4 B_3 B_4 + a_5 B_3 B_5 + a_6 B_3 B_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 \mathbf{B}_3 + a_2 (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_4) + a_3 (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_5) + a_4 (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_6) \\
 &\quad + a_5 (\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_5) + a_6 \mathbf{B}_4 \\
 &= a_3 \mathbf{B}_1 + (a_2 + a_4) \mathbf{B}_2 + (a_1 + a_3 + a_5) \mathbf{B}_3 + (a_2 + a_4 + a_6) \mathbf{B}_4 \\
 &\quad + (a_3 + a_5) \mathbf{B}_5 + a_4 \mathbf{B}_6
 \end{aligned}$$

Par φ^{-1} , on en déduit la matrice-colonne C_3 .

$$C_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 + a_4 \\ a_1 + a_3 + a_5 \\ a_2 + a_4 + a_6 \\ a_3 + a_5 \\ a_4 \end{bmatrix}, \text{ résultat conforme à notre attente.}$$

Sachant d'autre part que : $C_4 = J_6 C_3$, $C_5 = J_6 C_2$, $C_6 = J_6 C_1$,

On en déduit la forme générale d'une matrice A de $\mathcal{BSC}_5(B)$:

$A = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6]$, soit :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_1 + a_3 & a_2 + a_4 & a_3 + a_5 & a_4 + a_6 & a_5 \\ a_3 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 + a_5 & a_2 + a_4 + a_6 & a_3 + a_5 & a_4 \\ a_4 & a_3 + a_5 & a_2 + a_4 + a_6 & a_1 + a_3 + a_5 & a_2 + a_4 & a_3 \\ a_5 & a_4 + a_6 & a_3 + a_5 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 & a_2 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Etant donné un vecteur-colonne V de $\mathcal{M}_{n1}(B)$, recherche d'une matrice A de $\mathcal{BSC}_n(B)$ telle que la $i^{\text{ème}}$ colonne de A soit égale à V .

(Bien évidemment ce problème est transposable aux vecteurs-lignes)

Il s'agit donc de résoudre l'équation d'inconnue C_i : $C_i = V$, qui, par application du Théorème 3-11 s'écrit :

$$B_i C_1 = V \text{ (où l'inconnue est } C_1).$$

Ce problème peut avoir une solution unique, plusieurs solutions ou être impossible. Plus précisément :

- si $\det(B_i) = 1$ (pour l'ordre n considéré), le système considéré est de Cramer. La matrice B_i est inversible. Il existe donc une solution unique : $C_1 = B_i^{-1} V$.
- si $\det(B_i) = 0$ (pour l'ordre n considéré), le système considéré n'est pas de Cramer. La matrice B_i n'est pas inversible. Le problème peut avoir 0 ou plusieurs solutions.

Examinons quelques exemples.

$$\underline{n = 4}$$

Une particularité de l'ordre $n = 4$ est que $\det(B_i) = 1, \forall i = 1 \text{ à } 4$ (cf. Tableau de la Section 4.2. du Chapitre 4). Cette particularité (que l'on retrouve aussi à d'autres ordres tels que 6, 10 et 12) entraîne une conséquence très précise, à savoir :

$$\begin{aligned} \forall V \in \mathcal{M}_{41}(\mathbb{B}) : & \exists A_1 \text{ (unique)} \in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B}) \text{ telle que : } 1^{\text{ère}} \text{ colonne de } A_1 = V, \\ & \exists A_2 \text{ (unique)} \in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B}) \text{ telle que : } 2^{\text{ème}} \text{ colonne de } A_2 = V, \\ & \exists A_3 \text{ (unique)} \in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B}) \text{ telle que : } 3^{\text{ème}} \text{ colonne de } A_3 = V, \\ & \exists A_4 \text{ (unique)} \in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B}) \text{ telle que : } 4^{\text{ème}} \text{ colonne de } A_4 = V. \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, choisissons : $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Il est clair que : $\exists A_1$ (unique) $\in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B})$ telle que : $1^{\text{ère}} \text{ colonne de } A_1 = V$.

En effet, l'unique solution A_1 est évidemment celle correspondant à : $|A_1| = V$.

$$\text{Donc : } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est non moins clair que : $\exists A_4$ (unique) $\in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B})$ telle que : $4^{\text{ème}} \text{ colonne de } A_4 = V$ et que : $A_4 = A_1$.

Cherchons à déterminer la matrice $A_2 \in \mathcal{BSC}_4(\mathbb{B})$ telle que : $2^{\text{ème}} \text{ colonne de } A_2 = V$.

Par application du Théorème 3-11, nous avons à résoudre l'équation :

$$B_2 C_1 = V \quad (\text{où l'inconnue est } C_1).$$

On calcule $B_2^{-1} = B_2 + B_4$ (le vérifier). On en déduit :

$$C_1 = B_2^{-1} V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enfin : $\exists A_3$ (unique) $\in \mathcal{BSC}_4(B)$ telle que : 3^{ème} colonne de $A_3 = V$
 et l'on a : $A_3 = A_2$ (comme on le constate en observant A_2).

Ce résultat non surprenant tient au fait que : $B_3 = J_4 B_2$.

$n = 5$

A l'ordre $n = 5$, on a évidemment : $\det(B_1) = 1$ et $\det(B_5) = 1$. Par contre, à la différence de l'ordre $n = 4$: $\det(B_2) = 0$, $\det(B_3) = 0$, $\det(B_4) = 0$, (cf. Chapitre 4). Les matrices B_2, B_3, B_4 ne sont donc pas inversibles.

$$\text{Soit } V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cherchons à déterminer s'il existe une matrice $A_2 \in \mathcal{BSC}_5(B)$ telle que 2^{ème} colonne de $A_2 = V$.

Par application du Théorème 3-11, nous avons à résoudre l'équation :

$$B_2 C_1 = V \quad (\text{où l'inconnue est } C_1).$$

$$\text{Posons } C_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}. \text{ Sachant que } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ il vient :}$$

$$B_2 C_1 = V \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ système équivalent à :}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_5 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}, \text{ dont on extrait : } \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}.$$

Ce sous-système est clairement impossible. Il n'existe donc pas de matrice A_2 de $\mathcal{BSC}_5(B)$ ayant sa 2^{ème} colonne égale à V .

Cherchons à déterminer s'il existe une matrice $A_3 \in \mathcal{BSC}_5(B)$ telle que 3^{ème} colonne de $A_3 = V$.

Par application du Théorème 3-11, nous avons à résoudre l'équation :

$$B_3 C_1 = V \quad (\text{où l'inconnue est } C_1).$$

$$\text{Posons } C_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}. \text{ Sachant que } B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ il vient :}$$

$$B_3 C_1 = V \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ système équivalent à :}$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \\ x_4 = \overline{X_2} \quad (= X_2 + 1) \\ x_5 = X_1 \end{cases}$$

où X_1, X_2, X_3 désignent des paramètres à valeur dans B (pouvant donc prendre indifféremment la valeur 0 ou 1).

Nous en déduisons 4 solutions pour C_1 , deux à deux symétriques :

$$C_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_1'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_1''' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_1'''' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les 4 matrices répondant au problème posé sont donc :

$$A_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } A_3''' = J_5 A_3'; \quad A_3'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } A_3'''' = J_5 A_3''.$$

Recherche des matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$ ayant une colonne donnée nulle.

(Bien évidemment ce problème est transposable aux lignes).

Ce problème est un cas particulier du précédent, celui pour lequel $V = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$.

Il s'agit donc de rechercher les matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$ ayant leur $i^{\text{ème}}$ colonne nulle ($1 \leq i \leq n$).

Ceci revient à résoudre l'équation d'inconnue $C_i : C_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$, qui, par application du

Théorème 3-11, s'écrit :

$$B_i C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n \text{ (où l'inconnue est } C_1).$$

Ce problème admet bien évidemment toujours la solution $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$.

En effet, la matrice nulle O_n ayant toutes ses colonnes (et toutes ses lignes) nulles répond clairement au problème, $\forall i = 1$ à n .

Il convient donc de rechercher les solutions non triviales, s'il en existe.

Plus précisément :

- si $\det(B_i) = 1$ (pour l'ordre n considéré), le système considéré est de Cramer.

La matrice B_i est inversible. Il existe donc une solution unique : $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ et

la matrice nulle O_n est la seule solution au problème posé.

- si $\det(B_i) = 0$ (pour l'ordre n considéré), le système considéré n'est pas de Cramer.

La matrice B_i n'est pas inversible. Il existe, outre la solution $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$, d'autres solutions, non nulles, pour C_1 et, outre la matrice nulle, il existe d'autres solutions au problème posé.

Examinons deux exemples correspondant à l'ordre $n = 5$.

Cherchons à savoir s'il existe (outre la matrice nulle O_5) des matrices de $\mathcal{BSC}_5(B)$ telles que leur 2^{ème} colonne soit nulle ? Comme $\det(B_2) = 0$, la réponse est positive. Nous allons les identifier.

Il s'agit donc de résoudre : $B_2 C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_5$ (où l'inconnue est C_1).

Posons $C_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$. Sachant que $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, il vient :

$$B_2 C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ système équivalent à :}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = X_1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = X_1 \end{cases}, \text{ où } X_1 \in B.$$

Pour $X_1 = 0$, on obtient : $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ correspondant à la matrice nulle.

Pour $X_1 = 1$, on obtient : $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ correspondant à la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ qui est bien une solution non nulle du problème posé.}$$

Il n'existe donc, dans ce cas précis, outre O_5 , qu'une seule solution non triviale au problème posé.

Cherchons maintenant à savoir s'il existe (outre la matrice nulle O_5) des matrices de $\mathcal{BSC}_5(B)$ telles que leur 3^{ème} colonne soit nulle ? Comme $\det(B_3) = 0$, la réponse est positive. Nous allons les identifier.

Il s'agit donc de résoudre : $B_3 C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_5$ (où l'inconnue est C_1).

Posons $C_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$. Sachant que $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, il vient :

$$B_3 C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ système équivalent à :}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = X_2 \\ x_5 = X_1 \end{cases}, \text{ où } X_1 \in B \text{ et } X_2 \in B.$$

Nous en déduisons 4 solutions pour C_1 .

1) $X_1 = 0, X_2 = 0$ correspond clairement à la solution triviale : O_5 .

$$2) X_1 = 1, X_2 = 0 \text{ correspond à } C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ et donc à la matrice : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

$$3) X_1 = 0, X_2 = 1 \text{ correspond à } C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et donc à la matrice : } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

$$4) X_1 = 1, X_2 = 1 \text{ correspond à } C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ et donc à la matrice : } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

Il existe donc, dans ce cas précis, outre O_5 , 3 solutions non triviales au problème posé.

Détermination des matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$ telles que leur $i^{\text{ème}}$ colonne soit égale à leur $1^{\text{ère}}$ colonne.

(Bien évidemment ce problème est transposable aux lignes).

Il s'agit donc de résoudre l'équation d'inconnue $C_i = C_1$, qui, par application du Théorème 3-11, s'écrit :

$$B_i C_1 = C_1 \text{ (où l'inconnue est } C_1 \text{)}.$$

Cette équation est équivalente à la suivante :

$$(B_i + B_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n.$$

Il s'agit là d'une équation homogène dont $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ constitue la solution triviale.

La matrice correspondante est la matrice nulle O_n qui répond à l'évidence au problème posé.

Nous ne nous intéresserons dorénavant qu'aux solutions non triviales.

- si $\det(B_i + B_1) = 1$ (pour l'ordre n considéré), le système considéré est de Cramer. La matrice $(B_i + B_1)$ est inversible.

La solution triviale $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ est l'unique solution et la matrice nulle O_n est la seule solution au problème posé.

- si $\det(B_i + B_1) = 0$ (pour l'ordre n considéré), le système considéré n'est pas de Cramer. La matrice $(B_i + B_1)$ n'est pas inversible.

Il existe, outre la solution $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$, d'autres solutions non nulles pour C_1 et, outre la matrice nulle O_n , il existe d'autres solutions non nulles au problème posé.

Examinons quelques exemples.

$n = 3$

$i = 2$: $\det(B_2 + B_1) = \det(M_2) = 1$: la matrice nulle O_3 est la seule solution.

$i = 3$: $\det(B_3 + B_1) = 0$. On est amené à résoudre le système : $(B_3 + B_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_3$,

sachant que : $B_3 + B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Posons : $C_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 0x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ x_1 + x_3 = 0$$

Ce système a pour solution générale :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_1 \end{cases} \quad \text{où } X_1 \in \mathbb{B} \text{ et } X_2 \in \mathbb{B}.$$

1) $X_1 = 0, X_2 = 0$ correspond clairement à la solution triviale : O_5 .

2) $X_1 = 1, X_2 = 0$ correspond à $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, et donc à la matrice $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

3) $X_1 = 0, X_2 = 1$ correspond à $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, et donc à la matrice : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

4) $X_1 = 1, X_2 = 1$ correspond à $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, et donc à la matrice : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

qui représente bien une solution non triviale du problème posé.

Il existe donc, dans ce cas précis, 3 solutions non triviales au problème posé.

$n = 4$

$i = 2$: $\det(B_2 + B_1) = \det(M_2) = 1$: la matrice nulle O_4 est la seule solution.

$i = 3$: $\det(B_3 + B_1) = 1$: la matrice nulle O_4 est la seule solution.

$i = 4$: $\det(B_4 + B_1) = 0$: On est amené à résoudre le système : $(B_4 + B_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_4$,

sachant que : $B_4 + B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ce système a pour solution générale :

$$C_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} \quad \text{où } X_1 \in \mathbb{B} \text{ et } X_2 \in \mathbb{B}.$$

Les 3 matrices non triviales répondant au problème posé sont :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Remarque :

Nous remarquons que, pour les ordres $n=3$ et $n=4$, nous avons toujours trouvé des solutions multiples non triviales de matrices réalisant l'égalité de leur 1^{ère} et de leur dernière colonne. Ceci est toujours le cas à tous les ordres. En effet, si l'on choisit pour signature-colonne d'une matrice de $\mathcal{BSC}_n(B)$ un vecteur-colonne symétrique par rapport à son axe médian, alors, en raison de la bisymétrie de la matrice concernée, la dernière colonne de cette matrice sera égale à sa 1^{ère} colonne (*idem* pour les lignes).

Précisons que ces matrices ayant une signature-colonne symétrique par rapport à son axe médian représentent les seules solutions au problème posé. En effet une matrice de $\mathcal{BSC}_n(B)$ ayant une signature-colonne non symétrique par rapport à son axe médian aura pour dernière colonne un vecteur-colonne égal au symétrique de celui de la 1^{ère} colonne par rapport à son axe médian. Dès lors, la 1^{ère} colonne et la dernière colonne de cette matrice ne seront pas égales.

$n=5$ Contentons-nous de fournir les résultats.

$i=2$: $\det(B_2 + B_1) = \det(M_2) = 0$.

Le système : $(B_3 + B_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_5$ a des solutions dont la forme générale est :

$$C_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1 \\ 0 \\ X_1 \\ X_1 \end{bmatrix}, \text{ où } X_1 \in B.$$

Pour $X_1 = 1$, on trouve la seule solution non triviale au problème posé:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\underline{i = 3} : \det(\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1) = 0.$$

Le système : $(\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_5$ a des solutions dont la forme générale est :

$$C_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \\ X_1 \\ 0 \\ X_1 \end{bmatrix}, \text{ où } X_1 \in \mathbb{B}.$$

Pour $X_1 = 1$, on trouve la seule solution non triviale au problème posé :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{i = 4} : \det(\mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_1) = 0.$$

La seule solution réalisant l'égalité de la 1^{ère} et de la 4^{ème} colonne d'une matrice de $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$ est aussi celle qui réalise l'égalité de la 1^{ère} et de la 2^{ème} colonne (cf. le cas $i = 2$), à savoir :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{i = 4} : \det(\mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_1) = 0.$$

Il s'agit du cas d'égalité de la 1^{ère} et de la dernière colonne d'une matrice de $\mathcal{BSC}_5(\mathbb{B})$. Nous avons établi plus haut (cf. Remarque conclusive du cas $n = 4$) que toute matrice ayant une signature-colonne symétrique par rapport à son axe médian, répond à la question. Nous avons aussi établi que ce sont les seules.

Nous pouvons donc, sans même résoudre le système : $(\mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_1) C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_5$

conclure que la solution générale de ce système est de la forme :

$$C_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_2 \\ X_1 \end{bmatrix}, \text{ où } X_1 \in B, X_2 \in B \text{ et } X_3 \in B.$$

Hormis la solution nulle O_5 , il y a donc 7 solutions non triviales au problème posé, à savoir :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.6. Produit de 2 matrices quelconques de $\mathcal{BSC}_n(B)$

Le théorème qui suit généralise les Théorèmes 3-9 et 3-11.

Théorème 3-12. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{BSC}_n(B)$:

$$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n.$$

Désignons par $C_i(A)$ la $i^{\text{ème}}$ colonne de A et par $L_i(A)$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de A ($1 \leq i \leq n$).

Désignons par $C_i(B)$ la $i^{\text{ème}}$ colonne de B et par $L_i(B)$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de B ($1 \leq i \leq n$).

Le produit de matrices $A \cdot B$ est la matrice de $\mathcal{BSC}_n(B)$ dont la signature-colonne est :

$$|A \cdot B| = |B \cdot A| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) = \sum_{i=1}^n a_{1i} C_i(B).$$

Le produit de matrices $A \cdot B$ est la matrice de $\mathcal{BSC}_n(B)$ dont la signature-ligne est :

$$\overline{A \cdot B} = \overline{B \cdot A} = \sum_{i=1}^n b_{1i} L_i(A) = \sum_{i=1}^n a_{1i} L_i(B).$$

Preuve :

Raisonnons sur les colonnes.

B_i , $1 \leq i \leq n$, désigne comme toujours la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$.

Il est clair que : $A = \sum_{i=1}^n a_{1i} B_i$ et que : $B = \sum_{i=1}^n b_{1i} B_i$.

Par application du Théorème 3-11 :

$A \cdot |B_i| = C_i(A)$, $\forall i = 1$ à n . Donc :

$$\sum_{i=1}^n b_{1i} (A \cdot |B_i|) = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) \Rightarrow$$

$$A \cdot \sum_{i=1}^n b_{1i} |B_i| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) \Rightarrow$$

$$A \cdot \sum_{i=1}^n |b_{1i} B_i| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) \Rightarrow$$

$$A \cdot \left| \sum_{i=1}^n b_{1i} B_i \right| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) \Rightarrow$$

$$A \cdot |B| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A) \Rightarrow$$

$$|A \cdot B| = \sum_{i=1}^n b_{1i} C_i(A).$$

En raison de la commutativité du produit $A \cdot B$, on a aussi :

$$|A \cdot B| = |B \cdot A| = \sum_{i=1}^n a_{1i} C_i(B).$$

Même raisonnement pour les lignes.

CHAPITRE 4

Déterminant des matrices B_i , $1 \leq i \leq n$, de la Base Canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Note :

Pour la définition du déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$, se référer à l'Annexe 1 du présent chapitre.

4.1. Introduction

Le Tableau constituant la Section 4.2. du présent chapitre fournit la valeur du déterminant des matrices B_i , $1 \leq i \leq 16$, de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$.

Le calcul a été effectué au moyen d'un programme informatique développé en Visual Basic résolvant des équations matricielles de la forme :

$$A \cdot X = B$$

où $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{B})$ est l'inconnue, où A est une matrice donnée de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ et où $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{B})$ représente le second membre.

Dans le cas d'espèce, nous nous sommes servi de ce programme pour résoudre des équations homogènes du type :

$$B_i \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n, 1 \leq i \leq 16.$$

La résolution d'une telle équation homogène permet de déterminer si cette dernière possède

d'autres solutions que la solution nulle: $X = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$.

- Si l'équation considérée n'admet que la solution nulle, alors on en déduit que : $\det(B_i) = 1$, pour la valeur de i et pour l'ordre n considérés,
- Si l'équation considérée admet d'autres solutions que la solution nulle, alors on en déduit que : $\det(B_i) = 0$, pour la valeur de i et pour l'ordre n considérés.

L'examen des lignes et des colonnes du Tableau 4.2. met en évidence l'existence probable de périodicités dans les valeurs des déterminants $\det(B_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Les Théorèmes 4-1 et 4-4 de la Section 4.3. fournissent l'explication de ces périodicités.

4.2. Tableau donnant les déterminants des matrices B_i , $1 \leq i \leq 16$, de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$

Ordre	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}	B_{16}
1	1															
2	1	1														
3	1	0	1													
4	1	1	1	1												
5	1	0	0	0	1											
6	1	1	1	1	1	1										
7	1	0	1	0	1	0	1									
8	1	1	0	1	1	0	1	1								
9	1	0	1	0	0	0	1	0	1							
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
11	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1					
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
13	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1			
14	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1		
15	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4.3. Théorème du déterminant des matrices B_i , $1 \leq i \leq n$, de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$

Théorème 4-1 - Théorème du déterminant des matrices B_i , $1 \leq i \leq n$, de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ (1^{ère} formulation). Soit B_i , $1 \leq i \leq n$, une matrice de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\det(B_i) = 1 \Leftrightarrow i \text{ est premier avec } n+1$$

ou :

$$\det(B_i) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(i, n+1) = 1$$

Remarques :

1 est premier avec $n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, puisque $\text{pgcd}(1, n+1) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Par suite :

$$\det(B_1) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

n est premier avec $n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, puisque $\text{pgcd}(n, n+1) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Par suite :

$$\det(B_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

Lorsque le nombre $n+1$ est premier (ceci se produit dans le Tableau pour les ordres $n=1$, $n=2$, $n=4$, $n=6$, $n=10$, $n=12$, $n=16$), alors $\text{pgcd}(i, n+1) = 1$, $\forall i = 1$ à n . Par suite, dans ce cas-là : $\det(B_i) = 1$, $\forall i = 1$ à n .

On vérifiera que le contenu du Tableau est en parfaite adéquation avec le théorème ci-dessus.

Nous allons proposer une deuxième formulation du Théorème 4-1 rigoureusement équivalente à la première.

Comme on n'a pas manqué de le remarquer, les matrices B_i , $1 \leq i \leq n$, de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$ ont une forme de rectangle formé de chiffres 1, dont les côtés sont orientés selon les 1^{ère} et 2^{ème} diagonales de la matrice considérée.

Ceci nous amène à poser les définitions suivantes.

Définition et Théorème 4-2. Soit B_i , $1 \leq i \leq n$, une matrice de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(\mathbb{B})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des chiffres 1 qui y figurent dessine une configuration en forme de rectangle.

Nous appellerons longueur (notée \mathcal{L}) de la matrice B_i , le nombre de chiffres 1 portés par l'un des côtés de ce rectangle, parallèle à la 1^{ère} diagonale.

Nous appellerons largeur (notée \mathcal{l}) de la matrice B_i , le nombre de chiffres 1 portés par l'un des côtés de ce rectangle, parallèle à la 2^{ème} diagonale.

On a : $\mathcal{l} = i$ et $\mathcal{L} = n+1-i$.

Preuve :

On établit sans peine les relations : $\ell = i$ et $\mathcal{L} = n+1-i$.

Remarques :

- 1) Lorsque $1 \leq i \leq E\left(\frac{n+1}{2}\right)$, on a : $\ell < \mathcal{L}$. Lorsque $E\left(\frac{n+1}{2}\right) < i \leq n$, on a : $\ell > \mathcal{L}$.
- 2) Lorsque n est impair ($n = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{N}$), pour $i = \nu + 1$, la matrice $B_{\nu+1}$ est une matrice-losange de forme carrée. C'est la seule matrice telle que : $\ell = \mathcal{L}$.

Lemme 4-3. Soit B_i , $1 \leq i \leq n$, une matrice de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{pgcd}(i, n+1) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(\mathcal{L}, \ell) = 1$$

Preuve :

Démonstration immédiate.

Théorème 4-4 - Théorème du déterminant des matrices B_i , $1 \leq i \leq n$, de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$ (2^{ème} formulation). Soit B_i , $1 \leq i \leq n$, une matrice de la base canonique de $\mathcal{BSC}_n(B)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\det(B_i) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{L} \text{ est premier avec } \ell$$

ou :

$$\det(B_i) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(\mathcal{L}, \ell) = 1$$

Remarque :

La 2^{ème} formulation du Théorème résulte directement du Lemme 4-3.

Preuve du Théorème 4-4 :

La preuve du Théorème 4-4 paraîtra dans une publication ultérieure.

ANNEXE 1 / CHAPITRE 4 - DÉTERMINANT D'UNE MATRICE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$

Définition 4-5. Soit $A = [a_{i,j}]$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$.

Le déterminant de la matrice A , que nous noterons $\det(A)$, est le scalaire de \mathbb{B} défini comme suit :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

où \mathcal{S}_n représente l'ensemble des permutations de l'ensemble des entiers $\{1, 2, \dots, n\}$ et

où σ représente une permutation donnée faisant partie de \mathcal{S}_n .

Remarque :

Nous admettrons dans le cadre de cette étude que le déterminant ainsi défini possède les propriétés « classiques » d'un déterminant, et en particulier la suivante :

Théorème 4-6. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$: A inversible $\Leftrightarrow \det(A) = 1$.