

Задачи вступительного семинара

Фамилия, имя, отчество	
Класс	
Регион	

Во всех задачах считается, что арифметические и логические действия с целыми числами выполняются за время $O(1)$, если не указано иное.

- Найти частное и остаток от деления $2n$ -битного числа на n -битное за время:
 - $O(\frac{n^2}{k^2})$, где k — размер (в битах) целых чисел, операции с которыми выполняются за время $O(1)$,
 - $O(n \log^2 n)$, если дан алгоритм умножения двух n -битных чисел за время $O(n \log n)$.
- Дано n вершин и m ребер, образующие неориентированный двудольный граф. Необходимо за время $O(nm)$ найти размеры максимального паросочетания в графах, получающихся последовательным удалением ребер из этого графа:
 - Графе, состоящем из ребер с 1-го по m -е.
 - Графе, состоящем из ребер со 2-го по m -е.
 - ...
 - Графе, состоящем из ребер с $m - 1$ -го по m -е.
 - Графе, состоящем только из m -го ребра.
- Дано n прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат. Требуется подсчитать площадь их объединения за время $O(n \log n)$.
- Дана строка s . Необходимо для каждого её суффикса определить, является ли он палиндромом, за время $O(|s|)$.
- Функцией Эйлера* называется количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . Подсчитать функцию Эйлера для всех натуральных чисел от 1 до n за время
 - $O(n \log n)$,
 - $O(n)$.
- Задан неориентированный взвешенный граф с неотрицательными ребрами. Найдите простой цикл наименьшего веса за время $O(nm \log n)$.
- Для каждого из n предметов задан вес w_i и стоимость c_i . Найдите набор предметов с максимальной суммарной стоимостью, вес которых не превосходит W . Решите задачу за время $O(n \log n)$ при ограничениях:
 - w_i — целое от 1 до 2,
 - w_i — целое от 1 до 3.
- Дано строго выпуклый многоугольник из n вершин и k прямых. Для каждой прямой найти все точки её пересечения с многоугольником, либо установить, что их бесконечно много, за время $O(n \log n + k \log n)$.
- Регулярным* называется граф, в котором степени всех вершин одинаковы.
 - Докажите, что в регулярном двудольном графе существует совершенное паросочетание.
 - Найдите в регулярном двудольном графе, степени вершин которого — степени двойки, совершенное паросочетание за время $O(m + n)$.
- Задан неориентированный граф с 4 различными выделенными вершинами: s_1 , t_1 , s_2 и t_2 . Степени выделенных вершин нечетные, степени остальных вершин четные. Найдите реберно-непересекающиеся $s_1 - t_1$ и $s_2 - t_2$ пути за время $O(m + n)$.

Задача	1a	1b	2	3	4	5a	5b	6	7a	7b	8	9a	9b	10
Отметка														