

Булевы функции и схемная сложность (01.07.2009, группа «П», Илья Разенштейн)

1. Определение булевых функций. Задание с помощью таблиц истинности. Примеры булевых функций: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, функция большинства.
2. Задание булевых функций с помощью формул и схем. Запись схемы в виде программы. Совершенная КНФ и ДНФ. Полные наборы функций: $\{\wedge, \vee, \neg\}$, штрих Шеффера («И-НЕ», \downarrow), стрелка Пирса («ИЛИ-НЕ», \uparrow).
3. Определение $\text{size}_B(f)$, $\text{depth}_B(f)$ и $\text{fsize}_B(f)$. Отличие $\text{size}_{B_1}(f)$ и $\text{size}_{B_2}(f)$ не более, чем в константу раз. Теорема Субботовской (формулировка).
4. Отличие $\log \text{fsize}(f)$ и $\text{depth}(f)$ не более, чем в константу раз.
5. Оценки сверху и снизу для $\text{size}(f)$: метод каскадов для верхней оценки, комбинаторные соображения для нижней оценки, сложность случайно выбранной функции. Теорема Лупанова (формулировка).
6. Схема для сравнения чисел с размером $O(n)$ и глубиной $O(\log n)$.
7. Схема для сложения чисел с размером $O(n)$ и глубиной $O(n)$. Оптимизация глубины до $O(\log n)$.
8. Схема для умножения чисел с размером $O(n^2)$ и глубиной $O(\log^2 n)$. Оптимизация глубины до $O(\log n)$.
9. Монотонные функции. Схема для функции большинства с размером $O(n)$ и глубиной $O(\log n \log \log n)$.
10. Вероятностный метод. Схема для функции большинства в монотонном базисе с размером $\text{poly}(n)$ и глубиной $O(\log n)$. Сеть AKS (формулировка результата).

Домашнее задание

1. Докажите полноту стрелки Пирса и штриха Шеффера.
2. Докажите, что любая функция, которая задается формулой из конъюнкций и дизъюнкций, монотонна.
3. Постройте схему для умножения с размером $O(n^{\log_2 3})$.
4. Постройте схему B_0 с 4 входами и 2 выходами, которая использовалась при построении схемы сравнения.