

Задачи вступительного семинара

Во всех задачах считается, что арифметические и логические действия с целыми числами выполняются за $O(1)$.

1. Есть неориентированный граф G , для которого существует раскраска его вершин в 3 цвета такая, что концы любого ребра раскрашены в разные цвета. Постройте алгоритм, работающий за полиномиальное время, который раскрашивает этот граф в $O(\sqrt{V})$ цветов.
2. Есть квадратная матрица $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$, состоящая из натуральных чисел. Определим перманент A :

$$\text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

где S_n — множество всех перестановок из n элементов. Например,

$$\text{perm} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc.$$

Постройте по матрице A матрицу B , перманент которой будет совпадать с перманентом A . Матрица B должна состоять из нулей и единиц, и её размер и время построения должны быть полиномиальны по n и $\log(\max_{i,j} a_{ij})$.

3. Есть дерево из n вершин. Необходимо реализовать структуру данных, которая будет поддерживать следующие операции:
 - удалить ребро дерева,
 - сказать, есть ли путь между двумя заданными вершинами.

Вам необходимо придумать две реализации этой структуры.

- (a) Первая реализация должна быть *offline* (то есть можно считать, что все операции, которые необходимо выполнить, известны заранее). Суммарное время работы должно составлять $O((n + m) \log^*(n + m))$.
 - (b) Вторая реализация должна быть *online* (операции становятся известны по одной, результат запроса необходимо сообщить до поступления следующей операции). Время запроса должно составлять $O(1)$, суммарное время всех удалений — $O(n \log n)$.
4. Требуется найти все простые числа от 1 до n за $O(n)$.
 5. Требуется найти любой цикл в ориентированном графе или сообщить об отсутствии таковых за $O(V + E)$. Полностью обоснуйте свой алгоритм.
 6.
 - (a) Докажите, что в любом двудольном графе найдется паросочетание, которое покрывает все вершины максимальной степени.
 - (b) Докажите, что все рёбра любого двудольного графа можно покрыть Δ паросочетаниями, где Δ — максимальная степень вершины в графе.

Подсказка. Может оказаться полезной лемма Холла, которая формулируется следующим образом: если есть двудольный граф с множествами вершин A и B , то существует паросочетание, покрывающее вершины $U \subseteq A$, тогда и только тогда, когда для любого $V \subseteq U$ выполняется $N(V) \geq |V|$, где $N(V)$ — количество вершин из B , которые соединены хотя бы с одной вершиной из V .

7. Найдите количество целых чисел c в промежутке от a до b таких, что существуют целые $x > 0$ и $k > 1$, для которых выполнено $c = x^k$, за $O(\log a + \log b)$. При этом решение задачи 4 считается известным.
8. Рассмотрим отсортированную последовательность степеней вершин некоторого графа G без петель и кратных рёбер с $n \geq 3$ вершинами (обозначим её $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$). Докажите, что если для любых двух несмежных вершин графа u и v сумма их степеней не менее чем n , то $d_k > k$ для любого $1 \leq k < n/2$.