

Семинар на разные темы для группы «П»

Фамилия, имя, отчество	
------------------------	--

Во всех задачах считается, что арифметические и логические действия с целыми числами выполняются за время $O(1)$, если не указано иное.

- Опишите все автоматные множества слов в алфавите из одной буквы.
 - Докажите, что любое бесконечное автоматное множество можно представить в виде объединения двух непересекающихся бесконечных автоматных множеств.
- Пусть A — бесконечное множество конечных слов в алфавите Σ . Докажите, что найдется такое бесконечное слово в алфавите Σ , что сколь угодно длинное его начало является началом какого-нибудь слова из A .
- Докажите, что можно разбить натуральные числа на два множества так, чтобы ни одно из них не содержало бесконечной арифметической прогрессии.
- Все двоичные слова разделены произвольным образом на два класса. Докажите, что любую последовательность нулей и единиц можно разрезать на конечные куски так, чтобы все куски (кроме, быть может, первого) принадлежали одному классу.
- Задан взвешенный ациклический граф из n вершин и m ребер. Веса ребер неотрицательны. Требуется выкинуть множество ребер наибольшего веса так, чтобы транзитивное замыкание остатка совпало с транзитивным замыканием исходного графа. Требуемое время работы — $O\left(\min\left\{\frac{n^3}{\log n}, nm\right\}\right)$.
- Задано дерево из n вершин. Из него удаляют по очереди все ребра. Периодически нам дается пара вершин, и мы должны сказать, лежат ли они в одной компоненте связности. Требуемое время работы — $O(n \log n)$ на все удаления ребер и $O(1)$ на каждый запрос.
- Подсчитайте количество перестановок чисел от 1 до n таких, что разность между соседними числами не превосходит k . Требуемое время работы — $O(n \times 2^k k! \text{poly}(k))$.
- Турнир* — это ориентированный полный граф.
 - Докажите, что в турнире существует вершина, из которой достижимы все остальные вершины.
 - Найдите такую вершину за время $O(n^2)$, где n — количество вершин в турнире. При этом вершина должна обладать следующим свойством: максимальное из расстояний до всех остальных вершин должно быть минимально возможным.

Задача	1a	1b	2	3	4	5	6	7	8a	8b
Отметка										