

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

51. ROČNÍK, školský rok 2001/2002

Zadania úloh 2. kola kategórie P

Druhé kolo 51. ročníka MO kategórie P sa koná 8. januára 2002 v dopoludňajších hodinách. Na riešenie úloh máte 4 hodiny čistého času. Riešenie každého príkladu musí obsahovať (pokiaľ nie je v zadaní uvedené ináč):

- **Popis riešenia**, to znamená slovný popis použitého algoritmu, argumenty zdôvodňujúce jeho správnosť (prípadne dôkaz správnosti algoritmu), diskusiu o efektivite vášho riešenia (časová a pamäťová zložitosť). Slovný popis riešenia musí byť jasný a zrozumiteľný i bez nahliadnutia do samotného zápisu algoritmu (do programu).
- **Program**. V úlohách **P-II-1**, **P-II-2** a **P-II-3** treba uviesť dostatočne podrobný zápis algoritmu, najlepšie v tvare zdrojového textu najdôležitejších častí programu v jazyku Pascal alebo C. Zo zápisu môžete vynechať jednoduché operácie ako vstupy, výstupy, implementáciu jednoduchých matematických vzťahov a pod. V úlohe **P-II-4** nakreslite požadovanú komparátorovú sieť.

Hodnotí se nielen správnosť programu, ale tiež kvalita popisu riešenia a efektivita zvoleného algoritmu.

P-II-1

Uvažujme maticu A rozmerov $m \times n$, ktorej prvky sú nuly a jednotky. *Orámovaným obdĺžnikom* budeme nazývať takú podmaticu, ktorá má aspoň dva riadky, aspoň dva stĺpce a ktorej prvý a posledný riadok, ako aj prvý a posledný stĺpec obsahujú iba jednotky. Vnútro obdĺžnika môže obsahovať ľubovoľné prvky.

Súťažná úloha

Navrhните algoritmus, ktorý v danej matici A nájde najväčší orámovaný obdĺžnik. Veľkosť orámovaného obdĺžnika s i riadkami a j stĺpcami je $i \cdot j$ (t.j. hľadáme orámovaný obdĺžnik, pre ktorý bude súčin $i \cdot j$ najväčší možný). Môžete predpokladať, že aspoň jeden orámovaný obdĺžnik sa v matici nachádza. Ak existuje takých obdĺžnikov viac, stačí nájsť ľubovoľný z nich.

Príklad:

Vstup:

$m = 11, n = 24$

```
000000000000000000000000
0011111000000000001100000
0011001111111111111111110
0010111111111111111111110
001010100000100011100000
001111100100100011100000
000010001100100111111000
000010000000100100101000
010011111111100100001000
001000000000000111111000
000000000000000000000000
```

Výstup:

Najväčší orámovaný obdĺžnik má rozmery 6×9 a jeho ľavý horný roh je v 4. riadku a 5. stĺpci.

P-II-2

Výskumný ústav potrubí a rúr má nový problém, tentokrát so sústavou orientovaných rúr. Na vyčistenie takejto sústavy je potrebné, aby čistiaci robot prešiel každou rúrou práve raz. Sústava je orientovaná, to znamená, že pre každú rúru je predpísaný smer, ktorým ňou robot musí prejsť. S vynaložením veľkého úsilia sa programátorom VÚPR podarilo napísať program, ktorý pre danú sústavu nájde jednu možnú trasu čistenia, alebo určí, že takáto trasa neexistuje. Niekedy je však dôležité vedieť, či existuje takýchto čistiacich trás viac (striedaním čistiacich trás je možné redukovať opotrebenie robota v zákrutách).

Sústava rúr pozostáva z n uzlov očíslovaných $1, \dots, n$, medzi ktorými vedie m jednosmerných rúr očíslovaných $1, \dots, m$. Každá rúra vedie medzi dvojicou (navzájom rôznych) uzlov a nemá žiadne odbočky alebo vetvenia. Z každého uzla vedie do každého iného uzla najviac jedna rúra. Pre túto sústavu je zaručené, že existuje trasa pre robota, ktorá začína aj končí v uzle 1 a prejde každou rúrou práve raz (rešpektujúc jej smer). Pracovníci VÚPR navyše pomocou svojho programu jednu takúto trasu našli a je vám k dispozícii. Vašou úlohou je zistiť, či existuje iná trasa, začínajúca aj končiacia vo vrchole 1, ktorá prejde každou rúrou práve raz.

Túto trasu nemusíte vypisovať, t.j. odpoveď vášho programu má byť áno/nie.

Príklad:

Vstup:

$n = 5, m = 7$

rúry:

1 2

1 5

2 3

3 1

3 4

4 1

5 3

trasa: 1 2 3 4 1 5 3 1

Výstup:

Existuje iná trasa.

Poznámka:

1 2 3 1 5 3 4 1 je príklad inej trasy.

Vstup:

$n = 5, m = 6$

rúry:

1 2

2 3

3 1

3 4

4 5

5 3

trasa: 1 2 3 4 5 3 1

Výstup:

Neexistuje iná trasa.

P-II-3

V triede sedí učiteľ a dáva pozor na n žiakov, ktorí píšú písomku. Učiteľ sa väčšinu času pozerá jedným smerom. Tento smer budeme nazývať *základný smer*. Ak však učiteľ začuje odniekadiaľ podozrivé zvuky, rýchlo sa otočí, aby videl, čo sa deje. Úlohou je zvoliť základný smer tak, aby uhol, o ktorý sa musí otočiť, bol čo najmenší. Keďže k rôznym žiakom sa treba otočiť o rôzny uhol, chceme minimalizovať priemerný uhol.

Súťažná úloha

Na vstupe je dané číslo n a súradnice n bodov v rovine $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$. Každý bod určuje polohu jedného žiaka v triede. Učiteľ sedí

v bode $[0, 0]$. Môžete predpokladať, že bod $[0, 0]$ neleží na žiadnej priamke určenej dvoma zadanými bodmi.

V základnom smere je učiteľ otočený smerom k nejakému bodu $[x, y]$. Keď začuje šuchotať žiaka i , otočí sa smerom k bodu $[x_i, y_i]$. Otáča sa buď v smere hodinových ručičiek, alebo proti smeru hodinových ručičiek, podľa toho, ktorým smerom je uhol otočenia menší (t.j. pre každého žiaka je uhol otočenia najviac 180°).

Priemerný uhol otočenia je priemer uhlov otočenia pre všetkých n bodov. Úlohou je nájsť taký bod $[x, y]$ určujúci základný smer, aby priemerný uhol otočenia bol najmenší možný.

Pomôcka: Môžete predpokladať, že máte k dispozícii funkciu $\text{uhol}(x, y)$, ktorá vráti uhol otočenia učiteľa medzi bodom $[1, 0]$ a bodom $[x, y]$ v protismere hodinových ručičiek (t.j. uhol medzi 0° a 360°).

Príklad:

Vstup:

$n = 4$, body: $[-1, 1]$, $[0, -3]$, $[-2, -2]$, $[2, 0]$

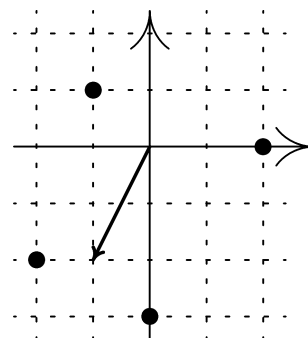
Výstup:

Základný smer je smerom k bodu $[-1, -2]$.

Poznámka:

Priemerný uhol otočenia je 67.5° .

Správnych riešení je viacero, napríklad aj bod $[-2, -2]$ (žiak 3).



P-II-4

Komparátorové siete

Komparátorové siete sa využívajú pri návrhu paralelných algoritmov. Tiež je jednoduché ich realizovať pomocou elektronických obvodov. *Komparátor* je jednoduché zariadenie, ktoré dostane na vstupe dve čísla, porovná ich a na vrchnom zo svojich výstupov vráti menšie z týchto dvoch čísel a na spodnom to väčšie. Z komparátorov možno zostaviť zložitejšie obvody, ktoré budeme volať komparátorové siete.

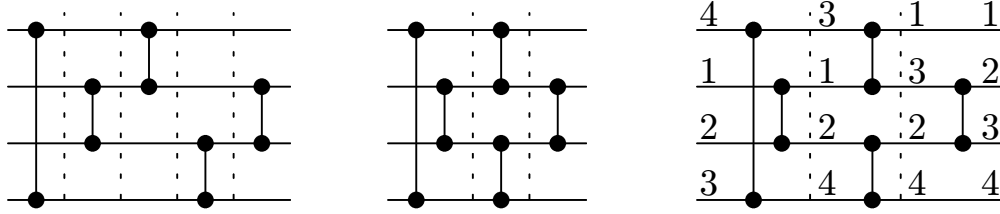
Komparátorová sieť pozostáva z n vodorovne usporiadaných *vodičov*, ktoré sú na niektorých miestach poprepájané komparátormi. Komparátory sú usporiadané do *vrstiev*, ktoré zodpovedajú krokom výpočtu. Na začiatku výpočtu (v kroku 0) sieť dostane na vstup n čísel. Po skončení kroku $k - 1$ sa výstupy z kroku $k - 1$ prenesú vodičmi na komparátory vo vrstve k . Komparátor vo vrstve k spája vždy dva vodiče (nemusia byť susedné). Ak je na spodnom z nich menšia hodnota ako na vrchnom, vymení tieto hodnoty, v opačnom prípade ich nechá tak. V jednej vrstve

môže byť aj viacero komparátorov (výpočet sa odohrá naraz, paralelne), ale v jednej vrstve môže jeden vodič vstupovať najviac do jedného komparátora. Po skončení celého výpočtu sú na výstupoch siete tie isté čísla ako na vstupe, iba v zmenenom poradí.

Grafy sa vodiče zobrazujú ako vodorovné čiary, komparátory ako zvislé spojnice svojich vstupných vodičov. Komparátory v jednej vrstve sa kreslia zvislo nad seba, prípadne do niekoľkých susediacich stĺpcov. Jednotlivé vrstvy oddelíme čiarokvanou čiarou. Výpočet prebieha zľava doprava.

Pri návrhu sietí sa pokúšame zostrojiť ich tak, aby čas výpočtu bol čo najmenší, t.j. aby sieť mala čo najmenej vrstiev. Druhým dôležitým kritériom je počet komparátorov (od tohoto počtu môže závisieť napríklad cena výroby siete).

Príklad.

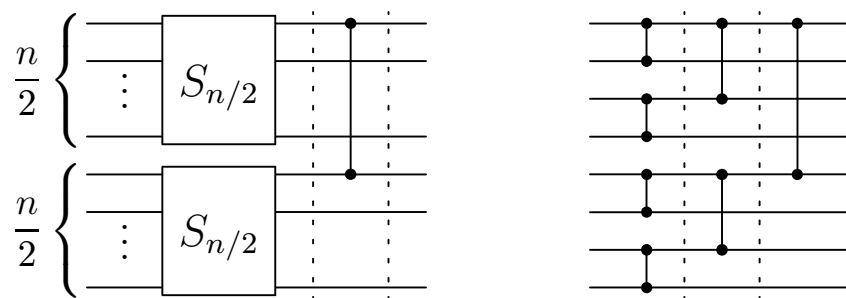


Uvažujme najľavejšiu sieť na obrázku. Táto sieť dostane štyri vstupy a vráti ich utriedené od najmenšieho po najväčší. Po prvých dvoch krokoch výpočtu bude najmenší vstup buď na prvom alebo druhom vodiči a najväčší vstup na treťom alebo štvrtom. Ďalšie dva kroky umiestnia najmenší a najväčší prvok na ich miesto a v poslednom kroku dotriedime druhý a tretí vodič. Všimnite si, že prvý a druhý komparátor, podobne ako tretí a štvrtý, je možno zlúčiť do jednej vrstvy bez toho, aby sa zmenil výsledok výpočtu. Výsledná rýchlejšia sieť je na prostrednom obrázku. Pravý obrázok ukazuje priebeh výpočtu pre vstup 4, 1, 2, 3.

Príklad. Zostrojte sieť, ktorá na vstupe dostane n čísel a na výstupe umiestni najmenšie z týchto čísel na vodič 1 (na poradí ostatných čísel nám nezáleží). Môžete predpokladať, že n je mocnina dvoch.

Riešenie. Sieť zostrojíme rekurzívne. Označme S_n sieť, ktorá úlohu rieši pre n vstupov. Ak $n = 1$, S_n nebude obsahovať žiaden komparátor, lebo máme iba jeden vstup. Predpokladajme teda, že $n > 1$. Vstupy rozdelíme na dve polovice (hornú a dolnú). Na každú polovicu aplikujeme sieť $S_{n/2}$. Tieto dve siete polovičnej veľkosti môžu pracovať paralelne. Po skončení ich výpočtu máme na vodiči 1 najmenší z hornej polovice vstupov a na vodiči $n/2 + 1$ máme najmenší z dolnej polovice. Teraz stačí pridať jeden komparátor medzi vodičmi 1 a $n/2 + 1$ a dostaneme celkové minimum na prvom vodiči. Sieť S_n teda pozostáva z dvoch sietí $S_{n/2}$ a z jedného

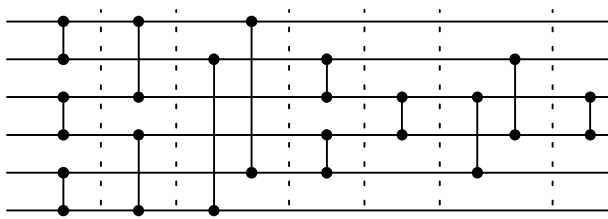
komparátora. Konštrukcia siete S_n je zobrazená na nasledujúcom obrázku vľavo, vpravo je príklad výslednej siete pre $n = 8$.



Všimnime si, že hĺbka rekurzie je $\log_2 n$, keďže veľkosť vstupu sa v každom rekurzívnom kroku zníži na polovicu. Každá úroveň rekurzie pridá do výslednej siete jednu vrstvu, preto sieť S_n má $\log_2 n$ vrstiev. Počet použitých komparátorov je v poslednej vrstve 1, v každej ďalšej vrstve odzadu sa vždy zdvojnásobí. Nech počet vstupov je $n = 2^k$. Potom počet použitých komparátorov je $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1 = n - 1$ (súčet geometrickej postupnosti). Dostali sme teda sieť, ktorá má $O(\log n)$ vrstiev a používa $O(n)$ komparátorov.

Súťažné úlohy

- a) Na nasledujúcom obrázku je sieť so šiestimi vstupmi. Nájdite vstup (t.j. 6 čísel), ktorý táto sieť neutriedi. Zobrazte aj priebeh výpočtu siete pre tento vstup.



- b) V sieti uvedenej v časti a) je komparátor, ktorý keď odstránime, sieť bude správne triediť ľubovoľnú postupnosť šiestich čísel. Nájdite tento komparátor a vysvetlite, prečo po jeho odstránení sieť správne triedi.
- c) Na vstupe je $2n$ navzájom rôznych čísel. Čísla na prvých n vstupoch sú utriedené od najmenšieho po najväčšie a čísla na druhých n vstupoch sú tiež utriedené od najmenšieho po najväčšie. Navrhnite komparátorovú sieť, ktorá na prvých n výstupoch vráti n najmenších čísel (v ľubovoľnom poradí) a na druhých n výstupoch vráti n najväčších čísel (v ľubovoľnom poradí). Snažte sa, aby vaša sieť bola čo najrýchlejšia.

Príklad: $n=3$, vstupy 1,4,5,2,3,6. Na výstupe prvé tri vodiče obsahujú 1,2,3 v ľubovoľnom poradí a druhé tri vodiče obsahujú 4,5,6 v ľubovoľnom poradí. Napríklad 2,3,1,6,5,4 je správny výstup.

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
51. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Zadania 2. kola kategórie P

Vydala IUVENTA
pre vnútornú potrebu Ministerstva školstva SR
Autori príkladov B. Brejová, M. Forišek, M. Pál a T. Vinař
Zodpovedný redaktor M. Forišek
Sadzba programom L^AT_EX

© Slovenská komisia Matematickej olympiády, 2001