HAL open science

Orbites régulières et transition de phases hors-d'équilibre dans les systèmes avec interactions à longue portée

Romain Bachelard, Cristel Chandre, Marie-Emmanuelle Couprie, Duccio Fanelli, Xavier Leoncini, Stefano Ruffo

To cite this version:

Romain Bachelard, Cristel Chandre, Marie-Emmanuelle Couprie, Duccio Fanelli, Xavier Leoncini, et al.. Orbites régulières et transition de phases hors-d'équilibre dans les systèmes avec interactions à longue portée. 12e Rencontre du Non-Linéaire, Mar 2009, Paris, France. pp.13-18. hal-00470270

HAL Id: hal-00470270

https://hal.science/hal-00470270v1

Submitted on 5 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Orbites régulières et transition de phases hors-d'équilibre dans les systèmes avec interactions à longue portée

R. Bachelard[1], C. Chandre[2], M.-E. Couprie[1], D. Fanelli[3], X. Leoncini[2], & S. Ruffo[3]

[1] Synchrotron SOLEIL, L'Orme des Merisiers, Saint-Aubin - BP 48, F-91192 Gif-sur-Yvette cedex, France
[2] Centre de Physique Théorique , CNRS - Aix-Marseille Université, Luminy, Case 907, F-13288 Marseille cedex 9, France
[3] Centro interdipartimentale per lo Studio delle Dinamiche Complesse (CSDC) and INFN and Dipartimento di Energetica "Sergio Stecco", Universitá di Firenze, via s. Marta 3, 50139 Firenze, Italia

romain.bachelard@synchrotron-soleil.fr

Résumé. Les interactions à longue portée (c'est-à-dire en $1/r^\alpha$, avec $\alpha < d$ la dimension du système) sont présentes dans de nombreux domaines de la physique, de l'interaction ondes-particules (physique des plasmas, lasers à électrons libres, etc) à l'astrophysique et aux condensats de Bose-Einstein. Or leur dynamique présente une caractéristique très particulière, celle de se retrouver piégée dans des régimes hors d'équilibre sur des temps très longs (divergents avec le nombre de particules). Ces dynamiques métastables sont appelés "états quasi-stationnaires".

Nous nous intéressons à ces états à travers le modèle paradigmatique Hamiltonian Mean Field. Ce système de N rotateurs couplés est caractérisé macroscopiquement par sa magnétisation $M =< e^{ix_j} >_{j=1:N}$, qui quantifie le degré d'agrégation des N corps. Les états quasi-stationnaires peuvent alors être décomposés en deux grandes familles, les états "magnétisés" et les états "non-magnétisés".

On peut alors montrer que lorsque le nombre de degrés de liberté du système (c'est-à-dire le nombre de particules) augmente, les orbites régulières apparaissent et se multiplient, associées à des tores invariants de la dynamique d'une particule-test. L'observation de ces tores représente une interprétation dynamique de l'émergence des états quasi-stationnaires, parallèlement à l'explication statistique de ce phénomène (réalisé grâce à un mécanisme de maxisation d'entropie). La transition de phases hors d'équilibre de ce système (d'un régime magnétisé à non-magnétisé) peut alors être réinterprétée comme une bifurcation dynamique des structures de l'espace des phases. Une phénoménologie similaire est observée dans un modèle de laser à électrons libres.

Abstract. Long-range interactions (that is, with a potential in $1/r^\alpha$, with $\alpha < d$ the system dimension) can be found in many domains, from the wave-particle interaction (plasma physics, free electron lasers, etc) to astrophysics or Bose-Einstein condensates. Their dynamics has the peculiarity of getting trapped into out-of-equilibrum regimes over very long times (diverging with the number of particles). These metastables dynamics are usually called "Quasi-Stationnary States".

We focus on the Hamiltonian Mean-Field model, often referred as paradigmatic of the long-range interactions. This system of N coupled rotators is macroscopically characterized by its magnetization $M =< e^{ix_j} >_{j=1:N}$, which quantifies the aggregation of the bodies. The quasi-stationary states can then be decomposed into two kinds, the "magnetized states" and the "non-magnetized" ones.

One can then show that one the number of degrees of freedom of the system increases (that is, the number of particles) increases, some regular orbits appear and multiply, which are associated to invariant tori of the dynamics of a test-particle. The observation of these tori represents a dynamical interpretation of the emergence of the quasi-stationary states, in parallel with the statistical explanation (based on a maximization of entropy scheme). The out-of-equilibrum phase transition (from a magnetized regime to the non-magnetized one) can then be reinterpreted as a dynamical bifurcation of phase-space structures. A similar phenomenology can be found in a model of free electron laser.

1 Introduction

La grande majorité des phénomènes observés dans la nature résulte d'interactions complexes entre un grand nombre de constituants élémentaires. Une observation très commune est l'émergence de trajectoires

régulières, malgré la complexité du réseau de couplage en jeu. Le comportement collectif de grands ensembles de particules peut être décrit à l'aide de la mécanique statistique : les fondements théoriques de la mécanique statistique à l'équilibre reposent sur l'hypothèse d'ergodicité, c'est-à-dire l'accord entre les moyennes temporelles et celles sur les ensembles. Ainsi, en supposant un mélange global effectif des trajectoires dans l'espace des phases, on peut conclure à l'ergodicité du système et ainsi à la validité de la mécanique statistique [1]. Le comportement thermodynamique est obtenu dans la limite où le nombre de degrés de liberté croit à l'infini, ce qui offre des chemins innombrables au chaos. En effet, dans cette limite, les régions régulières (tores invariants) ne possèdent pas assez de dimensions pour empêcher les trajectoires de se disperser : l'essentiel de l'espace des phases est alors rempli de trajectoires chaotiques, catalysant ainsi le mélange [2].

Pourtant, les systèmes à interactions à longue portée [3,4] possèdent une dynamique de relaxation à l'équilibre extrêmement lente. Plus exactement, avant d'atteindre un état asymptotique [5,6], ils se retrouvent piégés dans des états hors-d'équilibre *métastables*. Le temps de convergence à l'équilibre augmente avec la taille du système, et diverge formellement dans la limite thermodynamique, l'ergodicité perdant alors sa pertinence. Ainsi, la convergence à l'équilibre des systèmes gravitants n'a jamais été démontrée et reste problématique. Les galaxies pourraient donc représenter les exemples les plus spectaculaires de ces dynamiques hors-d'équilibre [7], mais des phénomènes analogues ont aussi été observés dans des problèmes de physiques des plasmas [8].

Ces états métastables, dénommés Etats Quasi-Stationnaires (EQS) dans la littérature, représentent souvent les seuls régimes expérimentaux accessibles (c'est le cas par exemple du Laser à Electrons Libres [9]). Ces interactions à longue portée sont de nature auto-cohérente, telle une particule interagissant avec un champ qui résulte lui-même de l'action combinée de toutes les autres particules, ou bien d'un champ externe [8]. C'est justement cette auto-cohérence qui engendre cette régularité du mouvement si largement observée. Par ailleurs, des classes différentes de conditions initiales peuvent conduire à des temps de relaxation différents.

L'approche traditionnelle pour comprendre l'émergence de trajectoires régulières est basée sur le résultat suivant : si le hamiltonien étudié est proche de l'intégrabilité, la théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser [10] prouve que l'espace des phases est rempli de tores invariants sur lesquels le mouvement est quasi-périodique. Par contre, dans ce contexte, l'augmentation du nombre de particules augmente la contribution des trajectoires chaotiques [2], en contradiction flagrante avec le fait que les EQS prédominent dans la limite des grands N. Le scénario évoqué ci-dessus ne permet donc pas d'expliquer la présence de mouvements réguliers dans les systèmes avec interactions à longue portée.

Nous proposons ici tout d'abord un cadre d'interprétation pour les EQS : nous nous basons sur l'idée que les tores peuvent aussi se former dans l'espace des phases grâce à l'interaction auto–consistente dans la limite thermodynamique. Comme nous allons le voir, avec un faible nombre N de degrés de liberté, la trajectoire d'une particule dans un système avec interactions à longue portée est erratique, mais elle devient de plus en plus régulière lorsque $N \to \infty$. Ces trajectoires proviennent en fait d'un hamiltonien effectif dépendant du temps et à basse dimension. Puis nous mettons en regard la dynamique d'un modèle paradigmatique avec celle du Laser à Eletrons Libres (LEL) : les propriétés de régularisation de la dynamique sont observées, de même que le changement de structures macroscopiques suivant les régimes d'EQS. Cette observation nous permet de conclure à la généralité de notre approche dans le cadre des interactions à longue portée.

2 Le modèle Hamiltonian Mean-Field

Le modèle Hamiltonian Mean-Field (HMF) [12], une référence pour étudier les systèmes à longue portée, décrit l'évolution de N particules couplées par une force attractive, à travers le hamiltonien H :

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} \left(1 - \cos\left(\theta_i - \theta_j\right)\right) \right], \tag{1}$$

où θ_i et p_i correspondent respectivement à la position de la particule i sur le cercle unité et à son moment. Notons que le hamiltonien (1) peut aussi être vu comme une version simplifiée de modèles gravitationnels [13] ou de plasmas [14], lorsque seule la première harmonique du développement de Fourier du potentiel est considérée. Afin de caractériser le comportement du système, on peut introduire la "magnétisation" $\mathbf{M} = \frac{1}{N}\left(\sum \cos\theta_i,\ \sum \sin\theta_i\right) = M(\cos\phi,\ \sin\phi)$, qui reflète le degré d'aggrégation spatial des particules (homogénéité/inhomogénéité).

Nous utilisons ici des conditions initiales de type "water–bag", c'est-à-dire d'un paquet de particules uniformément ditribuées dans un rectangle $[-\theta_0,\, \theta_0] \times [-p_0,\, p_0]$ du plan (θ, p). Ces états sont initialement magnétisés $M = M_0 = \sin(\theta_0)/\theta_0$, et possèdent une énergie moyenne par particule de $U = p_0^2/6 + (1 - M_0^2)/2$. Lors des simulations numériques à partir de ce water–bag, le système se retrouve piégé dans un EQS [5,6].

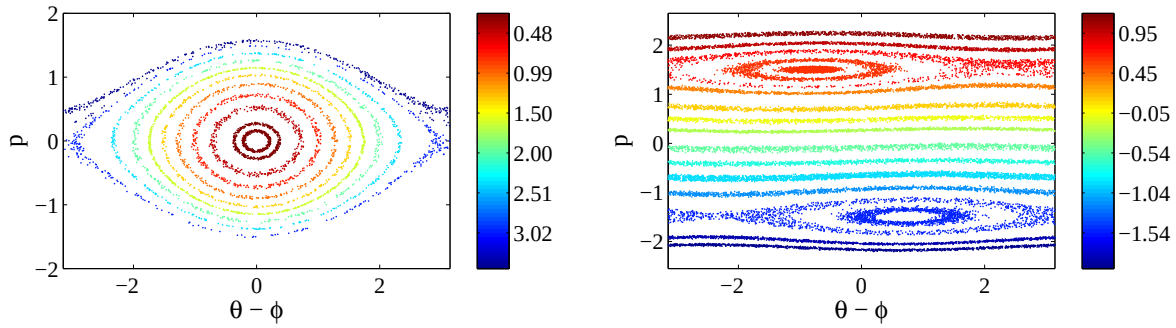

Figure1. Sections de Poincaré de quelques particules du hamiltonien HMF (1) pour $N = 2 \times 10^5$ dans le régime EQS, pour deux types de conditions initiales : $(M_0, U) = (0.6, 0.54)$ (figure de gauche) et $(M_0, U) = (0.6, 0.88)$ (figure de droite). Dans le premier cas, un unique aggrégat de particules apparaît, qui génère un EQS à magnétisation finie ($M_{QSS} \approx 0.5$), tandis que dans le second cas, deux aggrégats symétriques émergent, qui caractérisent un EQS à faible magnétisation. Le code de couleurs correspond aux valeurs de l'action associée aux particules.

La particule i obéit aux équations du mouvement suivantes $\dot{p}_i = -M\ \sin(\theta_i - \phi)$ et $\dot{\theta}_i = p_i$, où M et ϕ sont des fonctions de *l'ensemble des particules*. Les simulations numériques suggèrent que, pour N assez grand, tant la magnétisation M que ϕ rentrent dans un régime oscillatoire particulier. Le mouvement de la particule isolée se retrouve alors gouvernée par un hamiltonien effectif dépendant du temps à un degré de liberté (généralement appelé hamiltonien à un degré et demi de liberté).

Cet aspect de la dynamique nous pousse à explorer les propriétés de l'espace des phases des EQS à l'aide d'une technique inspirée des sections de Poincaré. Plus spécifiquement, après le régime transitoire, M oscille autour d'une valeur moyenne $\bar{M}$: nous enregistrons alors les positions et moments de quelques particules choisies (θ_i, p_i) lorsque $M(t) = \bar{M}$ et $dM/dt > 0$. Les sections stroboscopiques correspondantes sont visibles sur la Fig. 1. Deux types de structures de l'espace des phases sont observées, en fonction des conditions initiales (M_0, U), l'un avec un fort aggrégat central, le second avec deux aggrégats symétriques. Le premier EQS est caractérisé par une magnétisation finie (phase inhomogène), le second possède une magnétisation oscillante très faible (phase homogène).

L'EQS à un aggrégat peut idéalement être mis en correspondance avec une collection de pendules en faible interaction. Ainsi que l'analyse stroboscopique le révèle, les particules évoluent sur des trajectoires régulières, qui sont quasiment à une dimension, bien qu'elle possède un certain degré de diffusion locale, une *épaisseur*. Dans le cas de l'EQS à deux aggrégats, la section de Poincaré se rapproche très fortement de celle d'une particule évoluant dans le potentiel de deux ondes contra-propagatives. Ces dernières n'interagissent que très faiblement, puisque leurs vitesses de propagation sont très différentes. Afin d'avoir une estimation quantitative de l'épaisseur des tores en fonction du nombre de particules, nous nous concentrons sur le régime à un aggrégat. Les figures a), b) et c) de la Fig. 2 montrent l'espace des phases

de particules pour des valeurs croissantes de N. Une tendance nette vers l'intégrabilité est observée, et quantifiée sur le panneau d), où l'épaisseur est tracée en fonction de N.

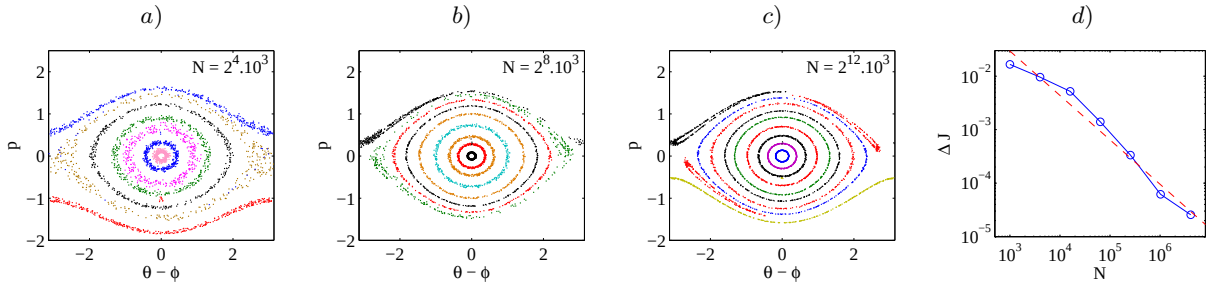

Figure2. Sections de Poincaré de quelques particules du hamiltonien HMF (1), quand la taille du système est accrue (pour $M_0 = 0.6$ et $U = 0.54$). Pour des valeurs assez grandes de N, la magnétisation M peut être approximativement écrite comme $M(t) \approx \bar{M} + \delta M(t) \cos \omega t$, avec $|\delta M| \ll \bar{M}$ et $|\partial_t \delta M| \ll \omega |M|$. En ignorant la dépendance temporelle de δM et en utilisant un modèle réduit de particules–test dans un champ externe périodique $M(t)$, on obtient des sections stroboscopiques qui sont qualitativement et quantitativement similaires à celles ci–dessus, avec pour seule différence une épaisseur *nulle* [15]. Puis nous nous concentrons sur des tores d'action $J \approx 1.9$, et nous traçons sur le panneau d) sa variance ΔJ, calculée sur une fenêtre de temps $\Delta t = 300$, comme fonction de N. Une décroissance en $1/N$ (ligne pointillée) est une bonne approximation sur plusieurs décades de N.

En conséquence, nous avons montré que le mouvement d'une particule d'un système paradigmatique avec interactions à longue portée devient de plus en plus régulier lorsque le nombre de particules augmente. Ce comportement s'oppose à celui des systèmes à courte portée, et permet une nouvelle interprétation de l'abondance de mouvements réguliers dans les dynamiques à longue portée. De plus, les caractéristiques du mouvement d'une particule dépendent du choix des conditions initiales. Une question se pose alors naturellement : quel est le lien entre les propriétés macroscopiques des différents EQS avec les changements de la dynamique particulaire ?

Pour les systèmes avec interactions à longue portée, la dépendance aux conditions initiales peut se matérialiser sous la forme d'une véritable transition de phases hors-d'équilibre : en jouant sur des paramètres appropriés de l'état initial, on observe une convergence vers des états asymptotiques (dans la limite $N \to \infty$) aux propriétés macroscopiques différentes (par exemple, distributions particulaires homogènes/inhomogènes) [16]. Cette transition de phases a été expliquée grâce à la théorie de la "relaxation" de Lynden-Bell [11]. Une interprétation dynamique microscopique de cette transition a été proposée, en termes de changements violents dans les propriétés des orbites des particules [17].

3 Application au Laser à Electrons Libres

Afin d'étayer la généralité des conclusions tirées ci–dessus, le phénomène présenté ici est aussi discuté dans le contexte de modèles hamiltoniens décrivant l'interaction entre un faisceau de particules chargées et un ensemble d'ondes évoluant de manière auto-cohérente [19]. Un grand nombre d'applications impliquant les longues portées sont concernées, telle la physique des plasmas, les tubes à ondes progressives ou encore les LELs [20]. Plus spécifiquement, la même tendance à l'intégrabilité est observée dans cette dernière application, un résultat potentiellement riche pour comprendre les régimes saturés de ces lasers.

Un LEL est constitué d'un faisceau d'électrons ultra–relativistes injecté dans un champ magnétique permanent : les particules chargées acquièrent une trajectoire oscillante et émettent un rayonnement synchrotron. Si l'émission est initialement incohérente dans le régime dit de "Self–Amplified Spontaneous Emission" [21], une instabilité va se développer. Une onde de très faible amplitude apparaît, qui piège légèrement les électrons dans ses puits de potentiel : ceux–ci vont alors se mettre à émettre avec une certaine cohérence, permettant par là même une nouvelle amplification de l'onde. Les mécanismes

de piégeage et d'émission cohérente s'amplifient alors mutuellement jusqu'à obtention d'une onde laser puissante et fortement cohérente (spectralement et temporellement).

Régi par des interactions à longue portée (à l'instar de l'interaction onde-particules), le régime dit "saturé" du LEL, lorsque l'intensité de l'onde atteint son maximum et se met à osciller, correspond alors à un EQS. Ainsi, de premières études dans ce contexte ont permis, grâce à la physique statistique hors–d'équilibre, de prédire l'intensité de saturation du LEL [22], où encore l'existence d'une transition de phases hors d'équilibre [23]. Nous nous concentrons ici sur la dynamique particulaire, et plus particuliérement sur l'existence des tores "épais".

Dans la limite unidimensionnelle et monochromatique, la dynamique d'un laser à électrons libres est décrite par le hamiltonien à longue portée [19] $H = \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2} + 2\sqrt{\frac{I}{N}}\cos\left(\theta_j - \phi\right)\right.$, où I et ϕ décrivent respectivement l'intensité et la phase de l'onde émise. En utilisant la technique précédemment décrite de sections de Poincaré, nous explorons l'espace des phases de quelques particules. Une phénoménologie similaire à celle du modèle HMF – présence d'EQS à un ou plusieurs aggrégats, caractérisés par des tores "épais" à N fini – est observée (voir Fig.3). En particulier, pour un paquet initial d'électrons à faible dispersion d'énergie, l'onde du laser croît fortement et la dynamique des particules s'organise autour d'un large aggrégat au mouvement cohérent (voir Fig. 3). A l'opposé, un paquet à forte dispersion en énergie tend à remplir de manière quasi–homogène l'espace des phases, au détriment de l'émission cohérente, et l'onde laser sera alors de très faible amplitude.

De plus, le système possède aussi une tendance à l'intégrabilité lorsque le nombre de particules N augmente, offrant ainsi un cadre plus large aux résultats obtenus dans le cadre du modèle HMF. Notons enfin que la présence d'une transition de phase dans ce système a aussi été mise en évidence récememnt [23] ; la caractérisation des structures de l'espace des phases fera pour sa part l'objet d'une étude prochaine.

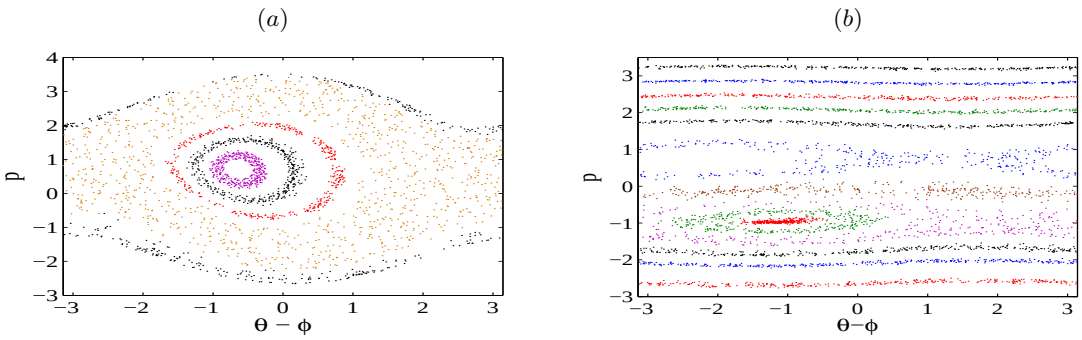

Figure3. Sections de Poincaré du modèle uni-dimensionnel de laser à électrons libres, pour une onde initialement nulle, et un water–bag de particules de magnétisation initiale $M_0 = 0$ et $U = 0$ (a) et $M_0 = 0$ et $U = 4.5$ (b). Les trajectoires des particules sont enregistrées à chaque occurence de $I(t) = \bar{I}$, où $\bar{I}$ est l'intensité moyenne de l'EQS. Pour un paquet d'électrons de faible énergie, un aggrégat central de particules se développent, au sein du puits de potentiel de l'onde émise. Dans le cas d'un paquet de forte énergie, de plus petits structures symétriques se développent, à l'instar de la phénoménologie du modèle HMF. Remarquons que la magnétisation est aussi appelée "facteur de bunching" dans le cadre du LEL.

4 Conclusion

Ainsi, l'exploration de la dynamique des systèmes avec interactions à longue portée nous a permis de parvenir d'aboutir à une conclusion assez générale : une tendance à l'organisation et à l'intégrabilité de la dynamique particulaire est observée lorsque la taille du système (c'est-à-dire le nombre de particules) est augmentée. Les structures de l'espace des phases sont identifiées et interprétées comme des tores invariants d'un hamiltonien effectif à un degré et demi de liberté. Sur la base de cette analyse, on peut alors

comprendre les transitions de phase hors d'équilibre dans ces systèmes par la dynamique microscopique, comme bifurcation des structures macroscopiques et cohérentes qui la composent. Ces résultats sont obtenus non seulement sur le modèle jouet Hamiltonian Mean–Field, mais aussi dans le cadre du laser à électrons libres. Concluons que ce type de laser représente un des candidats les plus probables pour l'observation expérimentale des effets si spécifiques aux interactions à longue portée (transition de phases hors–d'équilibre, temps de relaxation, etc).

5 Remerciements

Les auteurs remercient le programme Galileo "Study and control of models with a large number of interacting particles" de l'université franco-italienne pour son soutien financier.

Références

1. G. Gallavotti, *Statistical Mechanics : A short treatise* (Springer, Berlin, 1999).
2. C. Froeschlé and J.-P. Scheidecker, Phys. Rev. A **12**, 2137 (1975).
3. T. Dauxois *et al.* (Eds.) *Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions*, Lecture Notes in Physics **602** (Springer, Berlin, 2002).
4. A. Campa *et al.* (Eds.) *Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions : Theory and Experiments*, AIP Conf. Procs. **970** (2008).
5. V. Latora, A. Rapisarda, S. Ruffo, Phys. Rev. Lett. **80**, 692 (1998).
6. Y.Y. Yamaguchi *et al.* Physica A **337**, 36 (2004).
7. P.H. Chavanis, Int. J. Mod. Phys. **20**, 3113 (2006)
8. Y. Elskens and D.F. Escande, *Microscopic Dynamics of Plasmas and Chaos*, (IoP Publishing, Bristol, 2003).
9. J. Barré *et al.*, Phys. Rev E **69**, 045501(R) (2004).
10. A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **98**, 527 (1954) ; V.I. Arnold, Soviet Math. Dokl. **2** 501 (1961) ; J. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen **K1**, 1 (1962).
11. D. Lynden-Bell, Mon. Not. R. Astron. Soc. **136**, 101 (1967).
12. M. Antoni and S. Ruffo, Phys. Rev. E **52**, 3261 (1995).
13. F. Hohl and M.R. Feix, Astrophys. J. **147**, 1164 (1967).
14. J.M. Dawson, Phys. Fluids **5**, 445 (1962).
15. R. Bachelard *et al.*, Eur. Phys. J. D **42**, 125 (2007).
16. A. Antoniazzi, D. Fanelli, S. Ruffo, Y. Yamaguchi, Phys. Rev. Lett. **99**, 040601 (2007).
17. R. Bachelard *et al.*, Phys. Rev. Lett. **101**, 260603 (2008).
18. P.H. Chavanis, Eur. Phys. J. B **53**, 487 (2006).
19. R. Bonifacio *et al.*, Riv. Nuovo Cimento **13**, 1 (1990).
20. L.H. Yu *et al.*, *Science* **289**, 932 (2000).
21. R. Bonifacio, C. Pellegrini and L. Narducci, Opt. Commun. **50**, 373 (1984).
22. J. Barré *et al.*, Phys. Rev. E **69**, 045501 (2004).
23. P. de Buyl *et al.*, http ://arxiv.org/abs/0902.0712 .