

## Задачи вступительного семинара

1. Задан связный неориентированный граф без петель и кратных ребер, содержащий не менее трех вершин. Докажите, что для связных графов следующие утверждения эквивалентны:
  - (a) граф двусвязен (то есть все его вершины имеют степень больше одного, и при удалении любой вершины и всех инцидентных ей ребер граф остается связным);
  - (b) для любых двух заданных вершин  $a$  и  $b$  существует простой цикл, проходящий через них;
  - (c) для любой пары вершина-ребро существует простой цикл, проходящий через данную вершину и по данному ребру;
  - (d) для любых двух заданных ребер существует простой цикл, проходящий по этим ребрам;
  - (e) для любых двух заданных вершин и ребра существует простой путь, проходящий из одной из заданных вершин в другую, через заданное ребро.
2. Укажите способ отсортировать пять чисел, выполнив не более семи сравнений.
3. Задана последовательность цифр. Разрешается вставить между некоторыми цифрами знаки “+”, “−” и “\*”. Требуется вставить знаки таким образом, чтобы результат получившегося выражения был максимален. Если между некоторыми цифрами знака не стоит, то считается, что они образуют одно число.
4. Лабиринтом называется шахматная доска  $8 \times 8$ , на которой между некоторыми клетками стоят стенки. Лабиринт огорожен стенками со всех сторон, причем он должен быть таким, чтобы из любой его клетки можно было попасть во все остальные. Котенком называется фигура, которая ходит по лабиринту на одну клетку вверх, вниз, влево или вправо, причем, если Котенок наткнется на стенку, ход считается сделанным, несмотря на то, что Котенок остается на той же клетке и о стенке никому не сообщается. Петя собирается написать такую программу для Котенка (т.е. конечную последовательность ходов Котенка), чтобы тот смог обойти все клетки произвольного лабиринта, независимо от начального местоположения Котенка. Витя собирается помешать Пете выполнить свой план, и он составляет для Пети такой лабиринт и выбирает в нем такое начальное положение Котенка, в котором составленная программа не будет работать (т.е. обойдет не все клетки). Кто выиграет: Петя или Витя?
5. Существует ли бесконечная последовательность, состоящая только из цифр 0 и 1, в которой никакая подпоследовательность не встречается три раза подряд?
6. Нарисуйте конечный автомат, принимающий только последовательности четной длины, содержащие как нули, так и единицы.
7. Задан неориентированный граф (без петель и кратных ребер), степени всех вершин которого четны и равны между собой. Требуется покрыть все его вершины набором непересекающихся по вершинам простых циклов (время  $O(V^3 \log V)$ ).
8. Дан ориентированный граф, в котором между любой парой различных вершин существует ровно одно ребро. Докажите, что в таком графе существует гамильтонов путь.
9. Докажите корректность алгоритма Флойда.
10. Докажите, что число правильных скобочных последовательностей длины  $2n$  равно  $\frac{C_{2n}^n}{n+1}$ .
11. Предложите алгоритм нахождения четности перестановки, работающий за время  $O(n)$ .
12. Возможна ли реализация сбалансированного дерева, в которой все основные операции с деревом (добавление, поиск, удаление элемента, поиск минимального, максимального, следующего за данным элемента, и т.п.) занимают время  $O(\log \log n)$ ?
13. В трехмерном пространстве заданы  $k$  точек  $(x_i, y_i, z_i)$ . Требуется за время  $O(n)$  найти точку, которая минимизирует сумму квадратов расстояний до заданных точек. Ответ докажите.
14. Проверьте изоморфизм двух неориентированных деревьев за время  $O(n^2)$ .