

$$X \wedge Y \wedge X = Y...$$

To be XOR not to be

Lucian Ilea, Bogdan Mărincaș

În cadrul acestui articol vă vom prezenta câteva proprietăți ale operatorului XOR și câteva aplicații în cadrul cărora acesta poate fi folosit cu succes.

În cadrul anumitor limbaje de programare, pe lângă operatorii logici binecunoscuți **or**, **and**, **not** se poate folosi și operatorul "sau exclusiv", exprimat prin cuvântul rezervat **xor** în *Pascal* și prin caracterul "**^**" în *C/C++*.

În afara simplificării scrierii unor expresii logice, acest operator logic poate fi folosit și pentru calcule matematice, în cazurile în care operandii sunt numere întregi fără semn.

Dacă x și y sunt două variabile logice, atunci $x \wedge y$ are valoarea 1 dacă și numai dacă exact unul dintre operandi are valoarea 1. Cu alte cuvinte $x \wedge y = (!x \& y) \vee (x \& !y)$. Operatorul binar \wedge are importante proprietăți algebrice ușor de verificat: asociativitate, comutativitate, 0 este elementul neutru al operației, $x \wedge x = 0$ și $x \wedge !x = 1$.

Prezentăm acum câteva aplicații ale operatorului **XOR**.

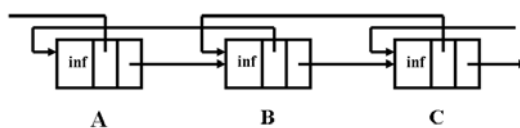
1. Prima aplicație pe care o prezentăm este cea de interschimbare a valorilor a două numere întregi fără semn x și y . Această operație o putem realiza pe baza "regulii celor trei pahare" ($aux = x; x = y; y = aux$) sau folosind adunarea și scăderea ($x = x + y; y = x - y; x = x - y$). Este oarecum surprinzător că poate fi folosită și secvența de instrucțiuni $x = x \wedge y; y = x \wedge y; x = x \wedge y$, incredibil de concisă.

2. Fie următoarea problemă: Se consideră un șir de numere în care, cu excepția uneia, fiecare valoare întâlnită apare de un număr par de ori. Se cere determinarea singurului element care apare de un număr impar de ori.

De exemplu, pentru $n = 7$ și elementele șirului x egale cu 4, 3, 5, 3, 4, 4, 4 rezultatul este 5. În rezolvare vom aplica proprietățile operatorului \wedge . Comutativitatea și asociativitatea ne oferă dreptul de a efectua calculele în orice ordine. Faptul că $x \wedge x = 0$ ne asigură că dublurile din șir se anulează reciproc și că, în final, efectuând disjuncție exclusivă între toate elementele șirului x , va rămâne doar elementul cu număr impar de apariții. (Se observă că nu este necesar să se folosească șiruri.)

3. În aceeași categorie putem include și următoarea problemă: Se consideră un număr natural n și $n - 1$ numere naturale distincte aparținând intervalului $[1, n]$. Să se determine singurul număr natural aparținând intervalului care nu apare în acest șir. Răspunsul îl considerăm ușor de obținut.

4. Următoarea aplicație interesantă o putem realiza pe liste dublu înălțuite. Listele dublu înălțuite, de regulă, conțin un câmp pentru informații, un câmp de legătură spre elementul anterior și un câmp de legătură spre elementul următor. Are loc o înălțuire ca în figura următoare.



În cazul listelor dublu înălțuite XOR informațiile de legătură sunt comasate într-un singur câmp. De exemplu, pentru elementul A aceasta va fi $(A - 1) \wedge B$, pentru B va fi $A \wedge C$, etc. (se efectuează disjuncție logică între adresele elementelor vecine). Când se traversează lista de la stânga la dreapta se va lua adresa elementului anterior și se va efectua \wedge cu valoarea din câmpul de legătură. Similar se va proceda pentru traversarea de la dreapta la stânga. Apare dezavantajul că operațiile de inserare și de ștergere de elemente presupun calcule suplimentare. Deoarece determinarea unei noi adrese se face în funcție de două adrese anterioare, cea mai simplă implementare va folosi două santinele.

Dintre aplicațiile mai importante ale disjuncției exclusive menționăm: *virusi informatici*, *realizarea animației* și *securitatea datelor*. Unii dintre virusii informatici "infectează" datele dintr-un calculator aplicându-le un șablon ("semnătură") cu care efectuează operația \wedge la nivel de bit. Este inutil să precizăm că "devirusarea" constă în aplicarea încă o dată a aceleiași matrițe.

Menționăm că unele probleme în care diverse variabile pot avea doar două stări (0 sau 1) care se pot modifica alternativ sunt de fapt probleme de aplicare a operatorului \wedge . A se vedea în acest sens problema "XOR" de la IOI 2002, Coreea de Sud (GInfo nr. 12/8). Însă, în cazul acestei probleme principala dificultate este de altă natură...

Dl. prof. Lucian Ilea este cadru didactic și Bogdan Marincăș este elev în clasa a XII-a la Colegiul Național "Emil Racoviță" din Cluj-Napoca. Pot fi contactați prin e-mail la adresa ilucian@email.ro, respectiv bond007@xnet.ro.



Focus

GInfo nr. 14/2 - februarie 2004