$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_0)$

Șiruri RECURENTE

Eugen Nodea

Deoarece este imposibil să evităm folosirea șirurilor recurente în informatică, în cadrul acestui articol vom trata problema șirurilor recurente și ne vom concentra atenția asupra rezolvării recurențelor liniare de ordinul 1 și 2, acestea fiind întâlnite foarte des și vom da exemple de șiruri recurente celebre împreună cu proprietățile lor.

Fie o funcție $f: N^* \to M$ ce definește un șir $(x_n)_{n \in N}$, cu $M \subseteq R$.

Studiul șirurilor rezidă în evidențierea unor caracteristici specifice: *mărginirea*, *monotonia*, *convergența*, *calculabilitatea*, *periodicitatea*.

În acest articol ne vom referi la calculabilitatea șirurilor, o modalitate interesantă de definire a șirurilor reprezentând-o descrierea recurentă a acestora pe baza unor formule recurente.

Vom porni de la definiția: *Numim formulă de recurență o formulă care exprimă orice termen al șirului, de la un rang oarecare, pe baza unuia sau mai multi precedenți.*

O relație de recurență poate fi dată ca o egalitate în formă implicită, explicită sau o inegalitate.

Forma generală *implicită* a unei relații de recurență este:

$F(n, x_n, x_{n-1}, ..., x_0) = 0, \forall n \in N$, unde $F: N \times M^{n+1} \to M$.

Forma generală *explicită* a unei relații de recurență este:

$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_0) = 0, \forall n \in N$, unde $f: N \times M^n \to M$.

Un caz extrem de important îl reprezintă recurențele de ordinul k, $k \geq 1$, $k \in N$, recurențele de ordinul k fiind scrise în cele două forme, implicită și explicită, astfel:
- $F(n, x_{n+k}, x_{n+k-1}, ..., x_0) = 0, \forall n \in N, n \geq k;$
- $x_{n+k} = f(n, x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_0), \forall n \in N, n \geq k.$

În continuare prezentăm câteva exemple de relații în formă implicită:
- $F(n, x_{n+1}, x_n) = 0$ – relație de recurență de ordinul 1;
- $F(n, x_{n+2}, x_{n+1}, x_n) = 0$ – relație de recurență de ordinul 2.

Aceste relații exprimate în formă explicită, sunt:
- $x_{n+1} = f(n, x_n)$ – relație de recurență de ordinul 1;
- $x_{n+2} = f(n, x_{n+1}, x_n) = 0$ – relație de recurență de ordinul 2.

Recurențele pot fi: *liniar omogene*, *liniar neomogene* sau *omografice*.

Exemplificăm relațiile recurente de ordinul 1 prin următoarele relații:
- liniar omogene: $x_{n+1} = a \cdot x_n, \forall n \in N;$
- liniar neomogene: $x_{n+1} = a \cdot x_n + b, \forall n \in N;$
- omografice: $x_{n+1} = (a \cdot x_n + b) / (c \cdot x_n + d), c \cdot x_n + d \neq 0, \forall n \in N.$

Pentru a rezolva recurențele avem la dispoziție următoarele trei metode:
- metoda *substituției*;
- metoda *iterației*;
- metoda *master*.

O amplă analiză a metodelor de rezolvare a recurențelor se găsește în cartea *Introducere în algoritmi, T. H. Cormen, C. E. Leiserson*, *R. L. Rivest*. În acest articol ne propunem rezolvarea punctuală a unor tipuri de recurențe.

Recurențe liniare de ordinul 1

Considerăm mulțimea șirurilor definite prin relația de recurență:
- $x_0 = c,$
- $x_{n+1} = a \cdot x_n + b, \forall n \in N$ și $a, b, c \in R.$

Pentru cazurile particulare:
- $a = 1, b \neq 0$ se obține o progresie aritmetică $x_{n+1} = x_n + b$;
- $a \neq 0, a \neq 1, b = 0$ se obține progresia geometrică cu rația a.

Se pune problema determinării termenului general al șirului $(x_n)_{n \in N}$ prin simplificarea relației de recurență.

Primul pas constă în determinarea unei valori $y \in R$ astfel încât: $x_{n+1} + y = a \cdot (x_n + b)$.

Din relația de recurență avem:
- $x_1 + y = a \cdot (x_0 + b)$ și
- $x_1 = a \cdot x_0 + b.$

Din cele două relații rezultă că $y = b / (a - 1)$.

Notăm cu t_n expresia $x_{n+1} + y$ și obținem progresia geometrică $t_n = a \cdot t_{n-1}$. Deci, $t_n = a^n \cdot t_0$ și prin înlocuire obținem $x_n = a^n \cdot (c + b / (a - 1)) - b / (a - 1)$.

Recurențe liniare omogene de ordinul 2

Considerăm mulțimea șirurilor definite prin relația de recurență:

- $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$, (*)
- $x_0 = c_0$, (**)
- $x_1 = c_1$, $\forall n \in N$, $a, b, c_0, c_1 \in R$ și $b \neq 0$.

Pentru a putea rezolva astfel de recurențe avem nevoie de câteva teoreme pe care le prezentăm în continuare fără a insista asupra demonstrațiilor.

Teoremă

Dacă șirurile $(\alpha_n)_{n\in N}$ și $(\beta_n)_{n\in N}$ îndeplinesc condiția (*), atunci șirul cu termenul general $a \cdot \alpha_n + b \cdot \beta_n$ îndeplinește aceeași condiție.

Teoremă

Dacă α este o rădăcină a ecuației $r^2 = a \cdot r + b$, atunci α^n satisface relația (*).

Teoremă

Dacă ecuația caracteristică $r^2 = a \cdot r + b$ are rădăcinile reale distincte r_1, r_2 atunci sistemul:

$$\begin{cases} a + b = c_0 \\ a \cdot r_1 + b \cdot r_2 = c_1 \end{cases},$$

admite soluție unică.

Teoremă

Dacă ecuația caracteristică $r^2 = a \cdot r + b$ admite o rădăcină dublă α, atunci șirul cu termen general $n \cdot \alpha^n$ satisface relația (*).

Teoremă

Dacă ecuația caracteristică $r^2 = a \cdot r + b$ admite o rădăcină dublă α, atunci șirul care satisface relațiile (*) și (**) are termenul general de forma $x_n = a \cdot \alpha^n + b \cdot n \cdot \alpha^n$

Exemplu

Să se determine șirul $(f_n)_{n\in N}$ definit astfel (șirul lui *Fibonacci*):

- $f_0 = 0$,
- $f_1 = 1$,
- $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $\forall n \in N$, $n \geq 2$.

Ecuația caracteristică asociată șirului este $r^2 = r + 1$ și are rădăcinile reale: $r_1 = (1-\sqrt{5})/2$ și $r_2 = (1+\sqrt{5})/2$.

Șirul are termenul general de forma:

$$f_n = a \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + b \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Condițiile inițiale impun:

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

de unde rezultă în final formula lui *Binet*:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Concluzie

În determinarea unui anumit termen calculabil printr-o relație de recurență, abordarea recursivă pare cea mai accesibilă. Totuși, cu minime cunoștințe matematice, putem implementa un algoritm care să nu necesite dezvoltarea termenilor precedenți.

Prezentăm în cele ce urmează șiruri recurente celebre.

Șirul lui Fibonacci

Definim șirul *Fibonacci* după următoarea relație recurentă:

- $f_0 = 0, f_1 = 1$,
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $\forall n \in N$, $n \geq 2$.

Astfel, se obține următorul șir de numere: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 …

Termenul de rang k al șirului se poate determina cu ajutorul următoarei formule:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$

Proprietăți

- $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$,
- $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$,
- $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$,
- $f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2$,
- $f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1}$,
- $f_{2n} = f_{n-1} \cdot f_n + f_n \cdot f_{n+1}$,
- $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$,
- $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$,
- $f_n^2 = f_{n-1} \cdot f_{n+1} + (-1)^{n+1}$,
- $f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + \ldots + f_{2n-1} \cdot f_{2n} = f_{2n}^2$,
- $f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + \ldots + f_{2n} \cdot f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$,
- $f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot f_3 + \ldots + n \cdot f_n = n \cdot f_{n+2} - f_{n+3} + 2$,
- $n \cdot f_1 + (n-1) \cdot f_2 + \ldots + 2 \cdot f_{n-1} + f_n = f_{n+4} - (n+3)$.

Divizibilitate

- Termenul *Fibonacci* f_n este par dacă și numai dacă n este divizibil cu 3.
- Termenul *Fibonacci* f_n este divizibil cu 3 dacă și numai dacă n este divizibil cu 4.
- Termenul *Fibonacci* f_n este divizibil cu 4 dacă și numai dacă n este divizibil cu 6.
- Termenul *Fibonacci* f_n este divizibil cu 5 dacă și numai dacă n este divizibil cu 5.
- Termenul *Fibonacci* f_n este divizibil cu 7 dacă și numai dacă n este divizibil cu 8.

- Termenul *Fibonacci* f_n este divizibil cu 16 dacă și numai dacă n este divizibil cu 12.
- Termenul *Fibonacci* f_{2n} se divide cu f_n.
- Termenul *Fibonacci* f_n este prim numai dacă și n este prim cu excepția lui f_4 care este egal cu 3. Nu orice n prim implică faptul ca f_n să fie prim.
- Oricare al n-lea termen din șir se divide prin f_n.
- Dacă n este număr compus, atunci și f_n este tot un număr compus (un număr este compus dacă nu este prim).
- Dacă m este divizibil cu n, atunci și f_m este divizibil cu f_n.

Alte proprietăți

- Dacă notăm cu $\Phi = 1 + \sqrt{5} \approx 1.6$ se poate aproxima:

$$f_n \approx \text{rotunjire}(\Phi^n / \sqrt{5}).$$

- Numărul de cifre ale lui f_n poate fi determinat astfel:

$$Nc = \log(\Phi^n / \sqrt{5}) = n \cdot \log(\Phi) - \log(5)/2.$$

- Seria formată din ultima cifră a numerelor din șirul lui *Fibonacci* se repetă după un ciclu de 60 de numere.
- Seria formată din ultimele 2 cifre ale numerelor din șirul lui *Fibonacci* se repetă după un ciclu de 300 de numere.

Triunghiul lui Pascal

Pentru următoarea dispunere a *triunghiului lui Pascal* se observă că suma elementelor de pe coloana de rang k reprezintă de fapt al k-lea termen al șirului *Fibonacci*.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1									
1		1	1							
2			1	2	1					
3				1	3	3	1			
4										
5					1	4	6	4	1	
6						1	5	10	10	5
7							1	6	15	20
8								1	7	21
9									1	8
10										1
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Pentru următoarea dispunere a *triunghiului lui Pascal* se observă că suma pe diagonala de rangul k reprezintă de fapt al k-lea termen al șirului lui *Fibonacci*. De exemplu, $S_d(8) = 1 + 6 + 10 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0 = 21 = f_8$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Mai mult, $f_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}^{n-k}$.

Șirul lui Lucas

Definim *șirul lui Lucas* cu ajutorul următoarelor relații:

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ \forall n \in N,\ n \geq 2.$$

Astfel, obținem șirul: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, …

Proprietăți

- $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n = L_{n+2} - 1$,
- $L_1 + L_3 + L_5 + \ldots + L_{2n-1} = L_{2n}$,
- $L_2 + L_4 + L_6 + \ldots + L_{2n} = L_{2n+1} - 2$,
- $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$,
- $5 \cdot f_n = L_{n-1} + L_{n+1}$,
- $L_n = \Phi^n + (-\Phi)^n$.

Super șirul lui Catalan

Definim *super șirul Catalan* cu ajutorul următoarelor relații:

- $T_1 = 1$, $T_2 = 1$,
- $T_n = (3 \cdot (2 \cdot n - 3) \cdot T_{n-1} - (n - 3) \cdot T_{n-2}) / n$, $\forall n \in N$, $n \geq 3$.

Astfel, se obține următorul șir de numere: 1, 1, 3, 11, 45, 197, …

Reamintim și șirul numerelor lui Catalan, termenul general fiind determinat cu relația:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^{n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}.$$

Astfel, se obține următorul șir de numere: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900,...

Proprietăți ale numerelor lui Catalan

- $C_{n+1} = \dfrac{2 \cdot (2 \cdot n) + 1}{n+2} \cdot C_n$,
- $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k}$,
- Numărul de parantezări distincte $P(n) = C_{n-1}$,
- Numărul de triangularizări ale unui poligon convex cu n vârfuri, adică împărțirea unui poligon în n triunghiuri disjuncte $= C_{n-2}$, $n \geq 3$.
- Numerele lui Catalan în triunghiul lui Pascal,

$$C_{2n-1}^{n} - C_{2n-1}^{n+1} = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$

- Numărul de arbori binari cu n noduri este C_n.

Bibliografie

1. **Dan Brânzei și colab.**, *Șiruri recurente în liceu*, Editura Gil, 1996
2. **I. Munteanu, D. Popa**, *Metoda șirurilor recurente*, Editura Gil
3. **Richard Stanley**, *Exercises on Catalan Number*, Cambridge University Press, 1999
4. **T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest**, *Introducere în algoritmi*, Computer Libris Agora, 2000
5. http://math.ournet.md
6. http://mathworld.wolfram.com
7. http://www.ginfo.ro

Dl. profesor Eugen Nodea este cadru didactic la Colegiul Național "Tudor Vladimirescu" din Târgu-Jiu. Poate fi contactat prin e-mail la adresa enodea@utgjiu.ro