



Circuite BITONICE

Lucian Ilea, Vlad Țira

Problema determinării unui circuit bitonic a apărut, în diverse forme, la mai multe concursuri de programare. În acest articol vom prezenta o modalitate de rezolvare a acestei probleme.

În cele ce urmează va fi rezolvată următoarea problemă: "fiind cunoscute coordonatele în plan pentru n puncte diferite între ele, $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$, să se determine un traseu circular de lungime totală minimă, traseu care trece exact o dată prin fiecare punct". Problema este propusă în [1] la pagina 279 și a fost întâlnită, sub diverse forme, la numeroase concursuri de informatică.

În cazul general problema este *NP - completă*. Există, însă, un algoritm cu timp de execuție $O(n^2)$, aplicabil dacă se presupune, suplimentar, că nu există puncte cu aceeași abscisă și că se caută doar circuitele bitonice, adică acelea care încep din punctul cel mai din stânga, merg apoi numai de la stânga la dreapta către punctul cel mai din dreapta, iar apoi merg numai către stânga, înapoi spre punctul de pornire. Situația este descrisă în desenele alăturate. În prima figură este reprezentat cel mai scurt circuit, de lungime 24,88..., iar în a doua figură este reprezentat cel mai scurt circuit bitonic, de lungime 25,58... Exemplul este preluat din [1], pagina 279.

Pentru rezolvare se va folosi metoda *programării dinamice* și se va construi o matrice L , care are n linii și $n + 1$ coloane. Punctele se consideră ordonate crescător după abscise. Dificultățile legate de tratarea circuitelor vor fi soluționate prin introducerea unui punct suplimentar P_{n+1} , care este situat la o distanță foarte mică, în dreapta punctului P_n . Procedând în acest mod, în circuit se vor evidenția două părți, cea de la P_1 la P_n și cea de la P_1 la P_{n+1} , în ambele neexistând întoarceri. Introducem următoarele notații:

- L_{ij} - lungimea segmentului $P_i P_j$;
- d_{ij} - lungimea drumului "direct" între P_i și P_j , $d_{ij} = l_{i,j+1} + l_{i+1,j+2} + \dots + l_{j-1,j}$;
- L_{ij} ($i < j$) lungimea celui mai scurt traseu fără întoarceri care are drept capete punctele P_i și P_j , care trece prin punctul P_1 și care conține toate punctele P_1, P_2, \dots, P_j (vezi figura 3).

Rezultatul (lungimea celui mai scurt circuit bitonic) se va

găsi în $L_{n,n+1}$. Modul de determinare al elementelor matricei L este următorul:



Figura 1



Figura 2

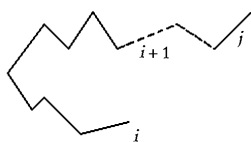


Figura 3

- (1) $L_{ij} = L_{i,j+1} + d_{ij}$; dacă $i < j$;
- (2) $L_{i,i+1} = \min\{k = 1, \dots, i - 1 \mid L_{k,i} + l_{k,i+1}\}$.

Justificarea acestor formule este imediată, ținând cont de semnificația elementelor care intră în calcule. Matricea L va fi construită începând cu linia 1 și va conține 0 în pozițiile (i, j) pentru care $i \geq j$.

Pentru situația redată în figura 2 avem: $n = 7$, $P_1(0, 6)$, $P_2(1, 0)$, $P_3(2, 3)$, $P_4(5, 4)$, $P_5(6, 1)$, $P_6(7, 5)$, $P_7(8, 2)$ (punctele sunt ordonate crescător după abscise). Se introduce punctul $P_8(8,0001, 2)$. Lungimea celui mai scurt circuit bitonic este 25,58 (valoarea este rotunjită la două zecimale exacte). Cu excepția elementelor de pe poziții vecine cu diagonala principală a matricei L , restul elementelor se determină printr-o adunare, ceea ce demonstrează complexitatea $O(n^2)$ a acestui algoritm. Reconstituirea traseului în funcție de rezultatele din matrice se bazează, în esență, pe găsirea celui k pentru care are loc egalitatea în formula (2).

Situații interesante pot surveni în cazul unor dispuneri particulare ale punctelor P_i . În figura 4 este reprezentat cazul în care acestea se obțin ca puncte de intersecție între două seturi de drepte paralele echidistante.



Figura 4

Considerăm că distanța dintre cele n drepte paralele cu axa Ox este d_1 și că distanța dintre cele n drepte paralele oblice este d_2 . În total se obțin n^2 puncte de intersecție. Notând cu α măsura unghiului format de dreptele oblice cu axa Ox , o condiție suficientă să nu existe puncte de intersecție cu aceeași abscisă este ca $d_1/d_2 \cdot \cos(\alpha)$ să nu fie număr rațional. În cazul în care $n = 6$, $d_1 = d_2 = 10$, $\alpha = \pi/4$, se obține că lungimea celui mai scurt circuit bitonic este 509,61, iar traseul este cel reprezentat în figura 5.

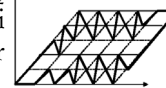


Figura 5

Bibliografie

1. T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, *Introducere în algoritmi*, Computer Libris Agora, Cluj-Napoca, 2001

Dl. prof. Lucian Ilea este cadru didactic la Liceul "Emil Racoviță" din Cluj și poate fi contactat prin e-mail la adresa ilucian@email.ro. Vlad Țira este elev în clasa a XI-a la Liceul "Emil Racoviță" din Cluj și poate fi contactat prin e-mail la adresa vldut@email.ro.