



Optimalité systolique infinitésimale de l'oscillateur harmonique

Juan-Carlos Álvarez Paiva, Florent Balacheff

► To cite this version:

Juan-Carlos Álvarez Paiva, Florent Balacheff. Optimalité systolique infinitésimale de l'oscillateur harmonique. 2010. hal-00467573

HAL Id: hal-00467573

<https://hal.science/hal-00467573>

Preprint submitted on 26 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OPTIMALITÉ SYSTOLIQUE INFINITÉSIMALE DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

J.C. ÁLVAREZ PAIVA AND F. BALACHEFF

RÉSUMÉ. Nous étudions les aspects infinitésimaux du problème suivant. Soit H un hamiltonien de $\mathbb{R}^{2n}$ dont la surface d'énergie $\{H = 1\}$ borde un domaine compact et étoilé de volume identique à celui de la boule unité de $\mathbb{R}^{2n}$. La surface d'énergie $\{H = 1\}$ contient-elle une orbite périodique du système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

dont l'action soit au plus π ?

ABSTRACT. We study the infinitesimal aspects of the following problem. Let H be a Hamiltonian on $\mathbb{R}^{2n}$ whose energy surface $\{H = 1\}$ encloses a compact starshaped domain of volume equal to that of the unit ball in $\mathbb{R}^{2n}$. Does the energy surface $\{H = 1\}$ carry a periodic orbit of the Hamiltonian system

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

with action less than or equal to π ?

Considérons le hamiltonien homogène de degré 2 de $\mathbb{R}^{2n}$ donné par la formule

$$H_{st}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n (q_i^2 + p_i^2)$$

et associé au système formé de deux oscillateurs harmoniques découplés de même période propre. Les orbites de ce système hamiltonien sont toutes périodiques de période π . La surface d'énergie $\{H_{st} = 1\}$ borde la boule unité standard de $\mathbb{R}^{2n}$ dont le volume vaut $\frac{\pi^n}{n!}$. Cet hamiltonien est un exemple d'hamiltonien *périodique*, *i.e.* un hamiltonien dont toutes les orbites sont périodiques et de même période. Le type de question auquel nous nous intéressons ici est la suivante.

Question 1. *Si $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow [0, \infty)$ désigne un hamiltonien propre, lisse en dehors de l'origine et homogène de degré 2, tel que le volume du domaine bordé par la surface d'énergie $\{H = 1\}$ vaille $\frac{\pi^n}{n!}$, existe-t-il une orbite périodique du système hamiltonien*

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

dont la période (coïncidant avec l'action) soit au plus π ?

2010 *Mathematics Subject Classification.* 37J40, 37J50, 53D10.

Key words and phrases. Forme normale, oscillateur harmonique, volume systolique, système hamiltonien.

Il n'est pas clair que la réponse à cette question soit positive en toute généralité, mais nous obtenons ici des résultats allant dans ce sens pour un hamiltonien suffisamment proche de l'hamiltonien H_{st} (pour la topologie lisse).

Pour énoncer plus précisément nos résultats, replaçons notre question dans un contexte plus général. Soit M^{2n-1} une variété de dimension impaire munie d'une forme de contact α (*i.e.* une 1-forme α telle que $\alpha \wedge d\alpha^{n-1}$ soit une forme volume). Le *volume* de (M, α) est défini comme la quantité

$$\text{vol}(M, \alpha) = \frac{1}{n!} \int_M \alpha \wedge d\alpha^{n-1}.$$

Rappelons qu'étant donné une variété de contact, les orbites du champ de Reeb X défini par les équations

$$d\alpha(X, \cdot) = 0 \text{ et } \alpha(X) = 1$$

s'appellent les *caractéristiques*. Nous définissons la *systole* par la formule

$$\text{sys}(M, \alpha) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \alpha$$

où l'infimum des actions est pris sur l'ensemble des caractéristiques fermées. S'il n'existe pas de caractéristiques fermées, nous poserons $\text{sys}(M, \alpha) = \infty$. Enfin définissons le *volume systolique* comme la quantité

$$\mathfrak{S}(M, \alpha) = \frac{\text{vol}(M, \alpha)}{\text{sys}(M, \alpha)^n}.$$

Dans le cas où (M, α) est le cotangent unitaire d'une variété riemannienne muni de sa 1-forme canonique, cette dernière quantité coïncide à une constante dimensionnelle près avec la notion de volume systolique présentée dans [AB09]. Remarquons que si $\phi : M \rightarrow N$ désigne un difféomorphisme entre deux variétés de dimension impaire, et α une forme de contact sur N , alors $\mathfrak{S}(M, \phi^*\alpha) = \mathfrak{S}(N, \alpha)$.

D'après un résultat de Taubes [Tau07], toute variété de contact (M, α) de dimension 3 admet une caractéristique fermée, et donc $\mathfrak{S}(M, \alpha) > 0$. Dans le cas du cotangent unitaire d'une variété de Finsler compacte, l'existence d'une caractéristique fermée découle des travaux de Lusternik et Fet (voir [Kli78]), et l'étude infinitésimale du volume systolique a été initiée dans [AB09]. Dans le cas d'une hypersurface compacte, lisse et étoilée de $\mathbb{R}^{2n}$ (par étoilée nous entendons que l'hypersurface borde un domaine étoilé de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant l'origine dans son intérieur), l'existence d'une caractéristique fermée est due à Rabinowitz [Rab87], et c'est cette dernière situation qui nous intéresse plus particulièrement ici.

Nous travaillons dans l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^{2n}$ muni des coordonnées $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, et nous noterons α la 1-forme $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - q_i dp_i)$. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ une hypersurface compacte, lisse et étoilée. La restriction de la 1-forme α à Σ est une forme de contact. Nous définissons l'*hamiltonien associé* à Σ comme l'unique fonction notée $H_{\Sigma} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow [0, \infty)$ homogène de degré 2 et lisse en dehors de l'origine telle que Σ coïncide avec la surface de niveau $\{H_{\Sigma} = 1\}$. Réciproquement, à tout hamiltonien H propre, lisse en dehors de l'origine et homogène de degré 2, nous pouvons associer la surface de niveau $\{H = 1\}$ qui est une hypersurface lisse

et étoilée. Remarquons que le hamiltonien associé à la sphère unité standard S^{2n-1} n'est autre que

$$H_{st} = \sum_{i=1}^n (q_i^2 + p_i^2).$$

Les caractéristiques de $(\Sigma, \alpha|_{\Sigma})$ (les orbites du champ de Reeb) coïncident exactement avec les orbites du système hamiltonien correspondant à la surface d'énergie $\{H = 1\}$, et d'après [Rab87], $(\Sigma, \alpha|_{\Sigma})$ admet au moins une caractéristique fermée. Dans ce contexte, nous pouvons noter $\mathfrak{S}(\Sigma)$ le volume systolique de $(\Sigma, \alpha|_{\Sigma})$. Remarquons que

$$\mathfrak{S}(S^{2n-1}) = \frac{1}{n!}.$$

Nous reformulons la question 1 de la manière suivante :

Question 2. *Pour quelles hypersurfaces Σ lisses étoilées de $\mathbb{R}^{2n}$ l'inégalité*

$$(1) \quad \mathfrak{S}(\Sigma) \geq \frac{1}{n!}$$

est-elle vérifiée ?

Cette question constitue une variation autour d'un problème posé par Viterbo dans [Vit00]. En effet, dans le cas où Σ est convexe, minorer le volume systolique de Σ équivaut à minorer le volume symplectique du domaine K compact bordant Σ par sa capacité d'Ekland-Hofer-Zender (voir [MS98]). D'après [AMO08], si Σ est convexe, il existe une constante $c > 0$ indépendante de la dimension telle que

$$\mathfrak{S}(\Sigma) \geq \frac{c}{n!}.$$

Nous commençons par montrer que toute hypersurface Σ invariante par le flot du hamiltonien H_{st} vérifie

$$\mathfrak{S}(\Sigma) \geq \frac{1}{n!}.$$

Ces hypersurfaces invariantes par le flot du hamiltonien H_{st} correspondent aux bords des domaines K circulaires, i.e. des domaines tels que $e^{i\theta} K = K$ pour tout réel θ ($\mathbb{R}^{2n}$ étant identifié $\mathbb{C}^n$). En particulier, les bords des domaines de Reinhardt (comme par exemple les domaines construits par Hermann dans [Her98]) sont circulaires, et satisfont l'inégalité systolique (1). Plus généralement, nous prouvons le résultat suivant.

Proposition 1. *Soient Σ et Σ_0 deux hypersurfaces lisses et étoilées. Supposons que le flot de Reeb de Σ_0 soit périodique de période $\text{sys}(\Sigma_0)$ et que le flot du hamiltonien H_{Σ} associé à Σ soit constant le long des orbites du flot hamiltonien H_0 associé à Σ_0 . Alors*

$$\mathfrak{S}(\Sigma) \geq \mathfrak{S}(\Sigma_0).$$

De plus, l'égalité n'est possible que si Σ et Σ_0 sont homothétiques.

Démonstration. Nous procédons de manière analogue à la preuve du Théorème 3.1 de [AB09]. Quitte à transformer Σ par une homothétie, nous pouvons supposer que

$$\text{vol}(\Sigma) = \text{vol}(\Sigma_0).$$

Soit $\rho : \Sigma_0 \rightarrow (0, \infty)$ la fonction radiale définie par

$$\rho(q, p) = \frac{1}{\sqrt{H(q, p)}}$$

et soit $\delta : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ l'application $(q, p) \mapsto \rho(q, p)(q, p)$. Nous noterons abusivement par α la restriction de α à Σ_0 et Σ . Nous avons $\delta^*\alpha = \rho\alpha$, d'où

$$\text{vol}(\Sigma) = \frac{1}{n!} \int_{\Sigma_0} \rho^n \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}.$$

Comme $\text{vol}(\Sigma) = \text{vol}(\Sigma_0)$, la moyenne de ρ^n sur Σ_0 est égale à 1 et donc le minimum de ρ est au plus 1.

Soit (q, p) un point de Σ_0 où ρ atteint son minimum et soit γ la caractéristique fermée issue de ce point. L'image de γ par l'application radiale δ est une caractéristique fermée de Σ et son action vaut $\min(\rho) \cdot \text{sys}(\Sigma_0) \leq \text{sys}(\Sigma_0)$ (voir [AB09]). Le cas d'égalité impose que $\rho = 1$ et donc $\Sigma = \Sigma_0$. $\square$

Dire que le hamiltonien H est constant le long des orbites de H_0 est équivalent à dire que le crochet de Poisson

$$\{H, H_0\} := dH(X_{H_0}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \right)$$

est identiquement nul. De même que dans [AB09], nous pouvons adapter de manière directe l'approche de Cushman dans [Cush92] des formes normales des systèmes hamiltoniens pour prouver le résultat suivant :

Proposition 2. *Soit $\{H_t\}$ une famille lisse de hamiltoniens lisses en dehors de l'origine et homogènes de degré 2 telle que H_0 soit périodique. Pour chaque entier N , il existe une isotopie $\phi_t^{(N)} : \mathbb{R}^{2n} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \setminus 0$ de l'identité par des transformations symplectiques lisses et homogènes de degré 1 telle que*

$$H_t \circ \phi_t^{(N)} = H_0 + tE_1 + \dots + t^N E_N + o(t^N),$$

où $E_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des hamiltoniens lisses en dehors de l'origine et homogènes de degré 2 tels que $\{E_i, H_0\} = 0$ ($1 \leq i \leq N$).

Nous pouvons alors montrer le théorème suivant, analogue du théorème 2.1 de [AB09] dans notre situation :

Théorème 1. *Soit Σ_0 une hypersurface lisse et étoilée dont le flot de Reeb est périodique de période $\text{sys}(\Sigma_0)$. Soit N un entier quelconque. Fixons un N -jet de déformation de H_0 , soit N fonctions $H_1, \dots, H_N$ lisses en dehors de l'origine et homogènes de degré 2 quelconques. Alors il existe une déformation lisse $H_t := H_{\Sigma_t}$ de H_0 telle que*

$$H_t = H_0 + tH_1 + \dots + t^N H_N + o(t^N)$$

et

$$\mathfrak{S}(\Sigma_t) \geq \mathfrak{S}(\Sigma_0).$$

Démonstration. D'après la proposition 2, il existe une déformation lisse $\phi_t^{(N)} : \mathbb{R}^{2n} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \setminus 0$ de l'application identité consistant en des transformations symplectiques lisses et homogènes de degré 1 telle que

$$(H_0 + tH_1 + \dots + t^N H_N) \circ \phi_t^{(N)} = H_0 + tE_1 + \dots + t^N E_N + o(t^N),$$

avec $\{E_i, H_0\} = 0$ ($1 \leq i \leq N$).

Définissons une famille de hamiltoniens homogènes de degré 2 et lisses en dehors de l'origine par la formule

$$H_t = (H_0 + tE_1 + \dots + t^N E_N) \circ (\phi_t^{(N)})^{-1}.$$

Comme $\{H_t \circ \phi_t^{(N)}, H_0\} = 0$, nous déduisons de la proposition 1 et du fait que $(\phi_t^{(N)})^* \alpha = \alpha$ que

$$\mathfrak{S}(\Sigma_{H_t}) = \mathfrak{S}(\phi_t^{(N)}(\Sigma_{H_t})) = \mathfrak{S}(\Sigma_{H_t \circ \phi_t^{(N)}}) \geq \mathfrak{S}(\Sigma_0).$$

□

RÉFÉRENCES

- [AB09] Alvarez-Paiva, J.C. & Balacheff, F. : *Infinitesimal systolic rigidity for metrics all of whose geodesics are closed and of the same length*. Prépublication sur arXiv :0912.3413 (2009).
- [AMO08] Artstein-Avidan S., Milman V. & Ostrover Y. : *The M-ellipsoid, symplectic capacities and volume*. Comment. Math. Helv. **83** (2008), 359-369.
- [Cush92] Cushman, R. : *A survey of normalization techniques applied to perturbed Keplerian systems*. Dynamics Reported (N.S.), Vol. I (K. Jones, ed.), Springer-Verlag, New York, 1992, 54-112.
- [Her98] Hermann, D. : *Non-equivalence of symplectic capacities for open sets with restricted contact type boundary*. Prépublication d'Orsay (1998).
- [Kli78] Klingenberg, W. : *Lectures on closed geodesics*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 230. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.
- [MS98] McDuff, D. & Salamon, D. : *Introduction to symplectic topology*. Second edition. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- [Rab87] Rabinowitz, P. : *On a theorem of Weinstein*. J. Differential Equations **68** (1987), 332-343.
- [Tau07] Taubes, C. : *The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture*. Geom. Topol. **11** (2007), 2117-2202.
- [Vit00] Viterbo, C. : *Metric and isoperimetric problems in symplectic geometry*. Journal of the A.M.S. **13** (2000), 411-431.

J.C. ÁLVAREZ PAIVA, LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ, BAT. M2, UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES, 59 655 VILLENEUVE D'ASCQ, FRANCE.

E-mail address: `juan-carlos.alvarez-paiva@math.univ-lille1.fr`

F. BALACHEFF, LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ, BAT. M2, UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES, 59 655 VILLENEUVE D'ASCQ, FRANCE.

E-mail address: `florent.balacheff@math.univ-lille1.fr`