

Jacques Peyrière et les produits de Riesz

Jean–Pierre Kahane

The present article, « Jacques Peyrière et les produits de Riesz », was supposed to be a chapter of a book devoted to Jacques Peyrière, to be published by Birkhäuser. I was asked to sign a CAP form (contributor's authorization to publish) and was willing to give such an authorization, but the form meant that I was giving up all rights on my work, including translation. I have this paper written in French on purpose and I don't want to see it translated in English without my permission. I asked for a change, but no change was possible, and all contributors had to agree with the following statement : « The contributor hereby irrevocably grants and assigns to Springer any and all rights which the contributor may have, or may at any time be found to have, in and to the Article, including but not limited to the sole right to print, publish and sell the Article throughout the world, and including all rights in and to all revisions or versions in all languages and media throughout the world. » Since I refused to sign the CAP as it was proposed, the publisher decided, not to publish the paper. I am sorry, of course, not to participate directly to the homage paid to Jacques Peyrière. As a personal homage I should add a few words. The copyright of scientific papers should belong to the authors or to scientific bodies. When a publisher is willing to publish a paper of ours, it is natural that he asks us for permission, and natural that we grant him this permission, with thanks if the publication is well done. But when the publisher insists to have all rights on the work, he converts the copyright into a commercial good ; the author can discover that a copyright granted to a publisher at a given time belongs now to another publisher, and that it was sold indeed by the first publisher as part of his « fonds de commerce. » The publishers of scientific books or journals played an important and positive role in the past, and may be now as useful than before, in a different context. But being too eager to grasp everything from the authors may be wrong at a long run not only for the authors but for themselves. The context of open archives may create a new need for regular publications, if

good relations are created between authors and publishers. If the most powerful publishers do not fill this condition, they may have difficulties in the future with the scientific communities.

L'œuvre de Jacques Peyrière s'étend sur des domaines variés de l'analyse harmonique, de la théorie géométrique de la mesure, des probabilités, de la combinatoire et de l'algèbre. Il y a des traits communs à tous ces travaux : l'audace de s'attaquer à des problèmes difficiles, l'élégance de la présentation et du style, et l'influence à long terme des méthodes qu'il a introduites. Tous ces éléments sont présents dès le premier grand article de Jacques Peyrière, sur les produits de Riesz [12]. On pourrait écrire un livre sur tout ce qui en a découlé. Je me bornerai à en dégager quelques traits saillants et quelques prolongements.

Les produits de Riesz que considère Peyrière sont de la forme

$$(1) \quad \prod_{j=0}^{\infty} (1 + \operatorname{Re}(a_j e^{i\lambda_j t}))$$

où t est la variable réelle, des λ_j des entiers ≥ 1 tels que

$$(2) \quad \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \geq 3 \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

et les a_j des nombres complexes de modules ≤ 1

$$(3) \quad |a_j| \leq 1 \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

La condition (3) signifie que tous les facteurs sont ≥ 0 , et la condition (2) entraîne que dans le développement du produit (1) en somme il n'y a pas d'interférence entre les fréquences. Ainsi les produits partiels de (1)

$$(4) \quad P_{a,N}(t) = \prod_0^N (1 + \operatorname{Re}(a_j e^{i\lambda_j t}))$$

s'écrivent, en posant $a_j = r_j e^{i\theta_j}$,

$$(5) \quad \sum_{(\varepsilon_i)} \left(\frac{r_0}{2}\right)^{|\varepsilon_0|} \left(\frac{r_1}{2}\right)^{|\varepsilon_1|} \dots \left(\frac{r_N}{2}\right)^{|\varepsilon_N|} e^{i(\varepsilon_0\theta_0 + \varepsilon_1\theta_1 + \dots + \varepsilon_N\theta_N)} e^{i(\varepsilon_0\lambda_0 + \varepsilon_1\lambda_1 + \dots + \varepsilon_N\lambda_N)t}$$

où les ε_j prennent les valeurs $-1, 0, 1$, et les $\varepsilon_0\lambda_0 + \varepsilon_1\lambda_1 + \dots + \varepsilon_N\lambda_N$ sont tous distincts. (5) est donc la somme partielle d'ordre $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_N$ de la série

$$(6) \quad \sum_{(\varepsilon_j) \in \{-1, 0, 1\}^N, \sum |\varepsilon_j| < \infty} \prod \left(\frac{r_j}{2}\right)^{|\varepsilon_j|} e^{i \sum \varepsilon_j \theta_j} e^{i(\sum \varepsilon_j \lambda_j)t}$$

Comme ces sommes partielles sont positives et de valeur moyenne 1, (6) est la série de Fourier d'une mesure qu'on désigne par μ_a , et on identifie le produit de Riesz à μ_a .

On considère les λ_j comme fixés, par exemple $\lambda_j = 4^j$ (c'était le choix initial de Frédéric Riesz) et on étudie les propriétés de μ_a en fonction de $a = (a_j)$ sous la condition (3).

D'abord, en appliquant le critère de Wiener à la série (6), on voit que μ_a est une mesure diffuse. Voici un échantillon des résultats de Peyrière :

A) (théorème 1.2) Supposons $|a_j| \leq 1, |b_j| \leq 1$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) et

$$(7) \quad \sum_0^\infty |a_j - b_j|^2 = \infty.$$

Alors les deux mesures μ_a et μ_b sont étrangères : $\mu_a \perp \mu_b$.

B) (cas particulier du théorème 1.3). Supposons $\lambda_j = 4^j, |a_j| \leq 1, |b_j| \leq 1$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), et une condition plus forte que

$$(8) \quad \sum_0^\infty |a_j - b_j|^2 < \infty.$$

à savoir

$$(8') \quad \sum_0^\infty |a_j - b_j|^2 / (1 - |a_j|) < \infty.$$

Alors μ_a et μ_b sont mutuellement absolument continues : $\mu_a \sim \mu_b$.

C) (cas particulier du théorème 2.8). Supposons encore $\lambda_j = 4^j$, et $|a_j| \leq 1$ ($j = 0, 1, 2, \dots$). Alors les dimensions de Hausdorff des boréliens E que charge μ_a ($\mu_a(E) > 0$) vérifient

$$(9) \quad 1 - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \lambda_n} \int \log P_{a,n}(t) d\mu_a(t) \leq \dim E \\ \leq 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \lambda_n} \int \log P_{a,n}(t) d\mu_a(t)$$

D) La définition de μ_a s'étend au cas $\lambda_j = 2^j$, sous la condition additionnelle

$$(10) \quad \sup |a_j| < 1,$$

et l'énoncé A est valable sous la condition additionnelle $\sup |a_j| < 1$, $\sup |b_j| < 1$.

Preuve de A et commentaires.

Voici la preuve de A par Peyrière. On vérifie que les fonctions

$$(11) \quad e^{i\lambda_j t} - \frac{1}{2} \bar{a}_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

forment un système orthonormal dans $L^2(\mu_a)$, et que les normes sont comprises entre deux nombres strictement positifs. On choisit une suite $\{c_j\} \in \ell^2$ telle que

$$(12) \quad \begin{cases} c_j(\bar{a}_j - \bar{b}_j) \geq 0 \\ \sum c_j(\bar{a}_j - \bar{b}_j) = \infty \end{cases}$$

ce qui est possible grâce à (7), et on considère les deux séries

$$(13) \quad \sum_0 c_j(e^{i\lambda_j t} - \frac{1}{2} \bar{a}_j),$$

$$(14) \quad \sum_0 c_j(e^{i\lambda_j t} - \frac{1}{2} \bar{b}_j).$$

La première converge dans $L^2(\mu_a)$ et la seconde dans $L^2(\mu_b)$. Il existe donc une suite d'entiers N tendant vers l'infini telle que les sommes partielles d'ordre N de (13) convergent $\mu_a - p \cdot p \cdot$ et les sommes partielles d'ordre N de (14) convergent $\mu_b - p \cdot p \cdot$. Or, d'après (12), elles ne peuvent pas converger en un même point t . Donc μ_a et μ_b sont étrangères.

Presque en même temps que Peyrière et indépendamment, G. Brown et W. Moran avaient obtenu l'énoncé A [3]. L'élégance de la preuve de Peyrière est frappante.

On peut adapter cette preuve à des situations un peu différentes, où apparaissent des produits de Riesz généralisés. Par exemple, c'est un bon

outil pour comprendre la construction faite par Katznelson d'une série trigonométrique dont toutes les sommes partielles sont positives (ce qui entraîne, par un théorème de Helson, que les coefficients tendent vers 0) et qui n'est pas une série de Fourier–Lebesgue [8]. Je l'ai utilisé explicitement pour la construction d'une série de Walsh ayant la même propriété [6].

La preuve de Peyrière repose sur le fait que la série (13) converge dans $L^2(\mu_a)$ lorsque $\{c_j\} \in \ell^2$ (on peut d'ailleurs la présenter en disant que, sous l'hypothèse $\{c_j\} \in \ell^2$, (13) converge dans $L^2(\mu_a)$ et (14) dans $L^2(\mu_b)$, donc (13) et (14) dans $L^2(\mu_a \wedge \mu_b)$, donc si $\mu_a \wedge \mu_b \neq 0$, $\sum c_j(\bar{a}_j - \bar{b}_j)$ est une série convergente dès que $\{c_j\} \in \ell^2$, ce qui entraîne $\{a_b - b_j\} \in \ell^2$). On peut se demander si la série (13) converge μ_a -presque partout. Il en est bien ainsi, comme l'ont montré indépendamment J. Peyrière [13] et A.H. Fan [4]. La preuve de Fan utilise une randomisation du produit de Riesz, à savoir une mesure aléatoire

$$(15) \quad \mu_{a,\omega} \sim \prod_{j=0}^{\infty} (1 + \operatorname{Re}(a_j e^{i\omega_j} e^{i\lambda_j t}))$$

où les ω_j sont des variables aléatoires indépendantes distribuées sur $[0, 2\pi]$ suivant la mesure de Lebesgue normalisée.

Commentaires sur B.

La conclusion $\mu_a \sim \mu_b$ est très facile à obtenir à partir de (8), pour toute suite (λ_j) vérifiant (2), si l'on fait l'hypothèse (10). Mais, sans cette hypothèse, les conditions (2), (3) et (8) ne garantissent pas $y_a \sim y_b$. Le théorème 1.3 de Peyrière donne d'autres conditions suffisantes. F. Parreau a montré en 1989 que

$$(16) \quad |a_j| = |b_j| \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

joint à (2), (3) et (8) entraîne $\mu_a \sim \mu_b$ [11].

Voici un théorème de Kilmer et Saeki de 1988, relatif aux produits de Riesz aléatoires (15). Si l'on munit le disque $\{z = re^{i\theta}, 0 \leq r \leq 1\}$ de la métrique

$$(17) \quad ds^2 = d\theta^2 + (1 - r)^{-1/2} dr^2,$$

la condition

$$(18) \quad \sum_0^{\infty} d^2(a_j, b_j) < \infty$$

(plus forte que (8)), jointe à (2) et (3), entraîne que $\mu_{a,\omega} \sim \mu_{b,\omega}$ presque sûrement. En corollaire, si on fait au lieu de (2), l'hypothèse plus forte

$$(19) \quad \sum_0^{\infty} \left(\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right)^2 < \infty,$$

(18) entraîne $\mu_a \sim \mu_b$ [9].

Fan a posé la question si

$$(20) \quad \mu_{a,\omega} \sim \mu_{b,\omega} \text{ p.s.} \iff \mu_a \sim \mu_b \text{ [5].}$$

Si la réponse était positive, (18), qui contient la condition de Parreau (16), serait la meilleure condition pour entraîner $\mu_a \sim \mu_b$ sous les conditions (2) et (3).

Commentaire sur C.

Peyrière a été un virtuose dans la détermination des dimensions de Hausdorff des mesures positives. Une mesure μ étant donnée, il est naturel d'introduire une dimension inférieure et une dimension supérieure, qui encadrent les dimensions des boréliens que charge la mesure. Lorsqu'elles sont égales, on parle de dimension de la mesure.

Par exemple, C montre que, dans l'hypothèse $\lambda_j = 4^j$, si l'on suppose l'existence de la limite

$$(21) \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \lambda_n} \int \log P_{a,n}(t) d\mu_a(t),$$

μ_a a pour dimension $1 - L$.

Le théorème 2.8 de Peyrière dépasse ce cas particulier : au lieu de $\lambda_j = 4^j$, il suffit de supposer que les quotients $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}$ sont entiers, ≥ 3 , et bornés.

La méthode de Peyrière repose sur la théorie ergodique développée par Billingsley. C'est aussi de cette manière qu'il a calculé la dimension des mesures aléatoires obtenues à partir des cascades multiplicatives de Benoît Mandelbrot [7]. On doit s'attendre, et c'est le cas, à des résultats plus simples à exprimer pour des mesures aléatoires que pour des mesures déterministes.

Les membres extrêmes de la formule (9) donnent des estimations de $\dim_* \mu_a$ et $\dim^* \mu_a$, les dimensions inférieure et supérieure de μ_a , et le théorème 2.8 de Peyrière est le premier exemple de ce type d'estimé. L'analyse dimensionnelle des mesures (non nécessairement données par un produit de Riesz) consiste à mettre en évidence, pour chaque α compris entre $\dim_* \mu$

et $\dim^* \mu$, un borélien B_α de dimension α tel que $\mu(B_\alpha)$ soit le plus grand possible, de façon que $\alpha < \alpha'$ entraîne $B_\alpha \subset B_{\alpha'}$. Le chapitre 5 de l'exposé de Barral, Fan et Peyrière à paraître à Panoramas et Synthèses [1] fait le point sur l'analyse dimensionnelle. Un bon outil est l'exposant de Hölder local

$$(22) \quad \alpha(t) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\log \mu([t-h, t+h])}{\log h}$$

que Fan appelle la dimension locale inférieure de μ au point t . Les formules de Fan

$$(23) \quad \dim_* \mu = \sup\{\alpha \geq 0 : \alpha(t) \geq \alpha \ \mu - pp\}$$

$$(24) \quad \dim^* \mu = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha(t) \leq \alpha \ \mu - pp\}$$

établissent la relation du local au global.

L'analyse multifractale, à laquelle Jacques Peyrière a beaucoup contribué, repose sur la considération de la fonction $\alpha(t)$ (souvent restreinte dans la littérature aux t tels que dans (22) la limite inférieure coïncide avec la limite supérieure). Elle consiste à étudier la dimension $D(\alpha)$ des ensembles

$$(25) \quad E_\alpha = \{t : \alpha(t) = \alpha\}.$$

[1] contient une étude approfondie de l'analyse multifractale, mais dit peu de choses sur l'analyse multifractale des produits de Riesz, qui semble un sujet difficile.

Le développement du produit (1) en série trigonométrique (6) permet des approches, assez grossières, que je vais indiquer maintenant.

Première approche. L'examen de la série (6) donne tout de suite $\widehat{\mu}_a \widehat{\mu}_b = \widehat{\mu}_{\frac{ab}{2}}$, c'est-à-dire $\mu_a * \mu_b = \mu_{\frac{ab}{2}}$. Si μ_a charge un borélien A et μ_b un borélien B , $\mu_{\frac{ab}{2}}$ charge donc la somme $A + B$. Comme $\dim(A + B) \leq \dim A + \dim B$, on a

$$(26) \quad \dim_* \mu_{\frac{ab}{2}} \leq \dim_* \mu_a + \dim_* \mu_b.$$

De la même façon

$$(27) \quad \dim^* \mu_{\frac{ab}{2}} \leq \dim^* \mu_a + \dim^* \mu_b.$$

Voici une application immédiate. Supposons $\lambda_j = 4^j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$). Alors le spectre de μ_a est contenu dans la réunion des intervalles ouverts $]\frac{2}{3}A^n, \frac{4}{3}A^n[$.

L'image μ_b de μ_a par la transformation $t \rightarrow 2t$ a son spectre dans la réunion des intervalles $]\frac{1}{3}4^n, \frac{2}{3}4^n[$. Comme ces spectres sont disjoints, $\mu_a * \mu_b$ est la mesure de Lebesgue, dont la dimension est 1, et comme les dimensions de μ_a et de μ_b sont les mêmes, on a

$$(28) \quad \dim_* \mu_a \geq \frac{1}{2}.$$

Cela vaut quels que soient les a_s .

Seconde approche. L'énergie d'une mesure μ définie sur le cercle par rapport au noyau de potentiel $|tg\frac{t-s}{2}|^{-\alpha}$ (α -énergie) est

$$\mathcal{E}_\alpha(\mu) = \int \int \frac{d\mu(t)d\mu(s)}{|tg\frac{t-s}{2}|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Ainsi μ est d' α -énergie finie si et seulement si

$$(29) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)|^2 |n|^{\alpha-1} < \infty.$$

Sous l'hypothèse

$$(30) \quad \sup \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} < \infty,$$

μ_a est donc d' α -énergie finie si et seulement si

$$\sum_n \left(\prod_0^{n+1} (1 + |a_j|^2) - \prod_0^n (1 + |a_j|^2) \right) \lambda_n^{\alpha-1} < \infty,$$

soit

$$(31) \quad \sum_n \lambda_n^{\alpha-1} \prod_0^n (1 + |a_j|^2) < \infty.$$

Pour fixer les idées, prenons $\lambda_j = 4^j$ et $a_j = a > 0$. Alors la condition pour que μ_a soit d' α -énergie finie est

$$(32) \quad 4^{\alpha-1}(1 + a^2) < 1.$$

On sait qu'un borélien est d' α -capacité positive si et seulement s'il porte une mesure d' α -énergie finie. Si μ_a charge un borélien, ce borélien est donc

d' α -capacité positive lorsque α vérifie (32), et cela entraîne que sa dimension est $\geq 1 - \frac{\log(1+a^2)}{\log 4}$. Donc

$$(33) \quad \dim_* \mu_a \geq 1 - \frac{\log(1+a^2)}{\log 4},$$

ce qui améliore (28) mais n'atteint pas la valeur donnée par (21).

Troisième approche. On peut chercher à lire sur la série (6) des indications sur la fonction $\alpha(t)$ définie en (22). Pour fixer les idées prenons $\lambda_j = 4^j$, et posons $\nu_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} - \dots - \lambda_0$. Ainsi l'intervalle $]\nu_n, 2\nu_n]$ est disjoint du spectre de μ_a . Soit V_n le noyau de de la Vallée Poussin d'ordre $2\nu_n$: ses coefficients valent 1 sur $[-\nu_n, \nu_n]$, et 0 hors de $[-2\nu_n, 2\nu_n]$, et c'est une combinaison linéaire à coefficients -1 et 2 des noyaux de Fejér d'ordres ν_n et $2\nu_n$. On a

$$(34) \quad \begin{aligned} P_{n,a}(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} V_n(s) d\mu_a(t-s) \\ &= \int_0^{\pi} V_n'(s) \mu_a([t-s, t+s]) ds \\ &\leq 10 \int_0^{\pi} \left(\frac{\nu_n}{s} \wedge \frac{1}{s^2} \right) \mu_a([t-s, t+s]) ds, \end{aligned}$$

donc on a l'implication

$$(35) \quad \forall s \mu_a([t-s, t+s]) \leq C s^{\beta(t)} \implies \forall n P_{n,a}(t) \leq C' \lambda_n^{1-\beta(t)},$$

$\frac{C'}{C}$ ne dépendant que de la suite (λ_j) ; au lieu de $\lambda_j = 4^j$ on peut prendre n'importe quelle suite (λ_j) vérifiant

$$(36) \quad \inf \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} > 3, \quad \sup \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} < \infty.$$

Dans l'autre sens les calculs sont moins simples et les résultats moins bons. Partons des hypothèses (2) et (3), et définissons

$$(37) \quad L_\nu(t) = \frac{1}{\nu} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{\nu+n}.$$

C'est une fonction ≥ 0 , de valeur moyenne $\frac{1}{\nu}$. Posons ici

$$(38) \quad \nu_j = \lambda_{j+1} - \lambda_j - \lambda_{j-1} - \cdots - \lambda_0;$$

ainsi les fréquences de $P_{a,j+1} - P_{a,j}$ sont $\geq \nu_j$. D'après (6),

$$\begin{aligned} \mu([t-s, t+s]) &= \int_{t-s}^{t+s} P_{a,N}(u) du \\ &+ \sum_{j \geq N} \sum_n \widehat{P_{a,j+1} - P_{a,j}}(n) \frac{e^{in(t+s)} - e^{in(t-s)}}{in}. \end{aligned}$$

Posons

$$(39) \quad \mathcal{Q}_{a,j} = (P_{a,j+1} + P_{a,j}) * L_{\nu_j}.$$

Alors

$$(40) \quad \mu([t-s, t+s]) \leq \int_{t-s}^{t+s} P_{a,N}(u) du + \sum_{j \geq N} (\mathcal{Q}_{a,j}(t+s) + \mathcal{Q}_{a,j}(t-s))$$

Voici une application simple de la formule (40). Supposons (30) en plus de (2) et (3), et

$$(41) \quad \forall t \forall j P_{a,j}(t) \leq C \lambda_j^{1-\beta};$$

alors

$$(42) \quad \forall t \forall s \mu([t-s, t+s]) \leq C' s^{-\beta}$$

où $\frac{C'}{C}$ ne dépend que de la suite (λ_j) .

Commentaire sur D, et digression

La suite 2^j a la propriété qu'une somme finie $\sum \varepsilon_j 2^j$ ($\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$) est nulle si et seulement si tous les ε_j sont nuls. A partir de cette observation Peyrière montre qu'en prenant $\lambda_j = 2^j$ les produits partiels (4) sont bornés dans L^1 et que, sous la condition (10), ils convergent vaguement vers une mesure μ_a , qu'on peut encore identifier au produit de Riesz (1).

Suivant cette idée, un cadre naturel pour l'étude des produits de Riesz est, au lieu de la condition (3), l'hypothèse de quasi-indépendance des λ_j , à savoir que

$$(43) \quad \sum_{\text{finie}} \varepsilon_j \lambda_j = 0, \quad \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\} \implies \forall j \varepsilon_j = 0.$$

On se borne d'ordinaire aux produits (1) pour lesquels

$$(44) \quad |a_j| = a < 1.$$

C'est un outil essentiel pour l'étude des ensembles de Sidon Λ ($\Lambda \subset \mathbb{Z}$) définis par la condition que, pour les polynômes trigonométriques à spectre dans Λ , les normes dans $C(\mathbb{T})$ et dans $A(\mathbb{T}) = \mathcal{F}\ell^1(\mathbb{Z})$ sont équivalentes :

$$(45) \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda| \leq S \sup_t \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{i\lambda t} \right|.$$

La borne inférieure des S est la constante de Sidon $S(\Lambda)$. Le livre de Li et Queffelec [10] contient une étude très complète des relations entre ensembles quasi-indépendants et ensembles de Sidon, à partir des travaux de Pisier [14] et de Bourgain [2] ; j'en donne une version un peu allégée dans arXiv : math.0709.4386.

Voici les principaux résultats :

$$(46) \quad \begin{array}{l} \text{Toute réunion finie d'ensembles quasi-indépendants} \\ \text{est un ensemble de Sidon.} \end{array}$$

$$(47) \quad \begin{array}{l} \text{(caractérisation de Bourgain) Une condition nécessaire et suffisante} \\ \text{pour qu'une partie } \Lambda \text{ de } \mathbb{Z} \text{ soit un ensemble de Sidon est qu'il existe} \\ \text{un } c = c(\Lambda) > 0 \text{ tel que, pour toute mesure positive } \varpi \text{ sur } \Lambda, \text{ il existe} \\ \text{une partie } \Lambda' \text{ de } \Lambda, \text{ quasi-indépendante, telle que } \varpi(\Lambda') \geq c \varpi(\Lambda). \end{array}$$

La preuve de (46) utilise seulement les produits de Riesz, et elle donne une estimation de la constante de Sidon : si Λ est la réunion de k ensembles quasi-indépendants,

$$(48) \quad S(\Lambda) \leq 3\sqrt{3} k \sqrt{2k-1}.$$

Pour $k = 1$, cela donne $S(\Lambda) \leq 5,20$, et on a l'estimation un peu meilleure $S(\Lambda) \leq 4,27$; la meilleure borne n'est pas connue.

On ne sait si (46) est une caractérisation des ensembles de Sidon. La condition de Bourgain (47) est la meilleure approche actuelle de la réciproque. Elle est basée sur la condition de Pisier, elle aussi nécessaire et suffisante, dans

laquelle ϖ est la mesure de décompte sur une partie finie arbitraire de Λ . Là encore, les produits de Riesz sont constamment utilisés.

Quittons pour finir les produits de Riesz – c’est la digression annoncée – pour examiner une relation entre ensembles quasi-indépendants, ensembles de Sidon, et condition de maille. Une maille est un ensemble de la forme

$$(49) \quad M = M(k, \{\gamma_j\}, E) = \left\{ \sum_{j=1}^k n_j \gamma_j \right\},$$

où les γ_j sont des entiers fixés ($\gamma_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots, k$), et les n_j des entiers tels que $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in E$, ensemble fixé de \mathbb{Z}^k . On a su dès l’introduction des ensembles de Sidon qu’à chaque ensemble de Sidon Λ est attaché un nombre positif C , ne dépendant que de $S(\Lambda)$, tel que pour toute maille M de la forme (49) on ait

$$(50) \quad |\Lambda \cap M| \leq C k \log(1 + \sup_{(n_1, n_2, \dots, n_k) \in E} (|n_1| + |n_2| + \dots + |n_k|)).$$

En particulier, si $E = \{-1, 0, 1\}^k$, on a

$$(51) \quad |\Lambda \cap M| \leq C k \log(1 + k).$$

Cela vaut en particulier si Λ est quasi-indépendant.

Pour montrer que (51) est inaméliorable, je me propose de construire un ensemble Λ quasi-indépendant tel que, pour tout entier k , il existe une maille M de la forme (49) avec $E = \{-1, 0, 1\}^k$, telle que

$$(52) \quad |\Lambda \cap M| \geq \frac{1}{4} k \log_2 k.$$

La définition de la quasi-indépendance s’étend immédiatement à des sous-ensembles de \mathbb{Z}^n . Quand n est une puissance de 2, $n = 2^\nu$, on va construire dans la maille $\{-1, 0, 1\}^n$ de \mathbb{Z}^n un ensemble quasi-indépendant assez riche. Commençons par $n = 2$. Les vecteurs colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont q.i. (quasi-indépendants); vérifions le en détail. En effet, si

$$\varepsilon_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \varepsilon_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, on a d'abord $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (seconde ligne), puis $\varepsilon_3 = 0$ modulo 2 donc $\varepsilon_3 = 0$ (première ligne), puis $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (indépendance de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

Lorsque $n = 2^\nu$, on va construire par récurrence des matrices A_ν à 2^ν lignes et N_ν colonnes, dont les colonnes sont dans $\{-1, 0, 1\}^n$ et sont q.i. Pour $\nu = 1$, c'est fait, avec $N_1 = 3$. On passe de A_ν à $A_{\nu+1}$ par le procédé figuré

$$A_{\nu+1} = \begin{pmatrix} A_\nu & A_\nu & I_\nu \\ A_\nu & -A_\nu & 0 \end{pmatrix}$$

où I_ν est la matrice unité $2^\nu \times 2^\nu$. Les colonnes de $A_{\nu+1}$ sont dans $\{-1, 0, 1\}^{2n}$. Montrons qu'elles sont q.i. lorsque celles de A_ν le sont. Une relation linéaire à coefficients $-1, 0$ ou 1 entre les colonnes de $A_{\nu+1}$ s'écrit, en posant $n = 2^\nu$ et $N = N_\nu$,

$$\begin{aligned} A_\nu(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_1^N)^t + A_\nu(\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2, \dots, \varepsilon_2^N)^t + I_\nu(\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2, \dots, \varepsilon_3^n)^t &= 0, \\ A_\nu(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_1^N)^t - A_\nu(\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2, \dots, \varepsilon_2^N)^t &= 0, \end{aligned}$$

les ε valant $-1, 0$ ou 1 . En ajoutant, on voit que les lignes de $I_\nu(\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2, \dots, \varepsilon_3^n)^t$ sont nulles modulo 2, donc nulles, donc $\varepsilon_3^1 = \varepsilon_3^2 = \dots = \varepsilon_3^n = 0$, donc

$$A_\nu(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_1^N)^t = A_\nu(\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2, \dots, \varepsilon_2^N)^t = 0,$$

et la quasi-indépendance des colonnes de A_ν entraîne que tous les ε sont nuls. Les colonnes de $A_{\nu+1}$ sont donc bien q.i.

Calculons N_ν . Partons de $N_0 = 1$. La construction donne

$$N_\nu = 2N_{\nu-1} + 2^{\nu-1},$$

soit

$$2^{-\nu}N_\nu = 2^{-(\nu-1)}N_{\nu-1} + \frac{1}{2} = \dots = N_0 + \frac{\nu}{2}$$

donc

$$N_\nu = 2^{\nu-1}(2 + \nu)$$

Pour définir Λ , on choisit dans \mathbb{Z} une suite $(\beta_j)_{j \geq 1}$ très dissociée dans le sens suivant : il n'y a pas de relation linéaire non triviale du type $\sum n_j \beta_j = 0$

(somme finie) avec $n_j \in \mathbb{Z}$ et $|n_j| \leq N_\nu$ quand $2^\nu \leq j < 2^{\nu+1}$ ($\nu \geq 1$). On peut construire une telle suite par récurrence sur ν . Pour

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} N_i < \ell \leq \sum_{i=1}^{\nu} N_i$$

on définit le vecteur ligne (γ_ℓ) comme

$$(\gamma_\ell) = (\beta_{2^\nu}, \beta_{2^{\nu+1}}, \dots, \beta_{2^{\nu+1}-1}) A_\nu$$

(c'est A_ν étalé sur \mathbb{Z} au moyen des β_j). La suite cherchée Λ est la suite γ_ℓ ($\ell \geq 1$). Elle est q.i. parce que toute expression de la forme $\sum \varepsilon_\ell \gamma_\ell$ ($\varepsilon_\ell \in \{-1, 0, 1\}$) s'écrit $\sum n_j \beta_j$ avec $|n_j| \leq N_\nu$ quand $2^\nu \leq j < 2^{\nu+1}$. Elle a N_ν termes dans la maille

$$M = \{\sum \varepsilon_j \beta_j; \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}; 2^\nu \leq j < 2^{\nu+1}\},$$

qui est bien de la forme (49) avec $k = 2^\nu$, $\gamma_i = \beta_{i+2^\nu+1}$, et $E = \{-1, 0, 1\}^k$. Pour une telle maille M , on a

$$|\Lambda \cap M| = N_\nu = \frac{1}{2} 2^\nu (2 + \nu) > \frac{1}{2} k \log_2 k.$$

Mais M est aussi une maille de la forme (49) avec k quelconque entre 2^ν et $2^{\nu+1}$. Ainsi, pour tout entier k , on peut trouver M de la forme (49) telle que

$$|\Lambda \cap M| > \frac{1}{4} k \log_2 k,$$

ce qu'on voulait montrer.

Le cadre naturel pour les ensembles q.i. et pour les ensembles de Sidon est celui des groupes abéliens discrets infinis. Si Γ est un tel groupe, on transcrit immédiatement pour Γ les définitions données pour \mathbb{Z} . Les propositions (46) et (47) restent valables. La dernière construction reste valable si Γ contient des éléments d'ordre arbitrairement grand, et seulement dans ce cas.

Lorsque Γ est le groupe dual de $\mathbb{T}^\mathbb{N}$, Pisier a obtenu le même résultat que notre construction par une méthode non-constructive ([14], proposition 7.3). Le corollaire 3.3 de [14] montre que le résultat est en défaut quand Γ est le groupe dual de $\prod_{j=1}^{\infty} (\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z})$, où p_j est une suite bornée d'entiers; dans ce cas,

tout ensemble de Sidon rencontre une maille de la forme (49) en au plus Ck points, C ne dépendant que de l'ensemble de Sidon.

La construction et les remarques sont consultables sur arXiv : math.0709.4383.

Il me reste à faire un commentaire sur les commentaires. Tous essayent de mettre en valeur le rôle de pionnier de Peyrière, soit dans les énoncés, soit dans les méthodes. Le commentaire sur C est accompagné d'une tentative, peu concluante, pour rattacher les analyses dimensionnelle et multifractale d'un produit de Riesz à sa série de Fourier. Une digression s'ajoute au commentaire sur D , à savoir la construction d'un ensemble quasi-indépendant aux propriétés très différentes de celles de $\{2^j\}$; elle se rattache naturellement à D parce que les résultats de Peyrière sur $\{2^j\}$ sont l'avant-garde de la théorie des ensembles quasi-indépendants.

Une dernière remarque s'impose : les travaux de Peyrière sur les produits de Riesz ne se limitent pas à ses articles de 1975 à 1990 cités en références. Les idées et les résultats les plus saillants se trouvent déjà dans la note aux Comptes Rendus « Sur les produits de Riesz » de 1973 (volume 276, pp. 1453–1455), et dans l'exposé 22 du Séminaire de Théorie des Nombres de l'Université de Bordeaux 1 de 1973-1974, intitulé « Utilisation des produits de Riesz pour minorer la dimension de Hausdorff de certains ensembles ».

Références

- [1] J. BARRAL, A.H. FAN et J. PEYRIÈRE, *Mesures engendrées par multiplication* (137 pages), à paraître dans Panoramas et Synthèses.
- [2] J. BOURGAIN, *Sidon sets and Riesz products*, Annales Inst. Fourier **35** (1) (1985), 137–148.
- [3] G. BROWN and N. MORAN *On orthogonality for Riesz products*, Proc. Camb. Phil. Soc. **76** (1974), 173–181.
- [4] A.H. FAN, *Sur la convergence de séries trigonométriques lacunaires presque-partout par rapport à des produits de Riesz*, C.R. Acad. Sc. Paris **309** (1989), 295–298.
- [5] A.H. FAN, *Some topics in the theory of multiplicative chaos*, Fractal Geometry and Stochastics III, Progr. Probab. **57**, Birkhäuser, Basel (2004), 119–134.
- [6] J.-P. KAHANE, *Un théorème de Helson pour les séries de Walsh*, Advances in Mathematical Sciences, Havin’s anniversary volume, à paraître.
- [7] J.-P. KAHANE et J. PEYRIÈRE, *Sur certaines martingales de Benoît Mandelbrot*, Advances in Math. **22** (1976), 131–145.
- [8] Y. KATZNELSON, *Trigonometric series with positive partial sums*, Bull. Amer. Math. Soc. **71**, (1965), 718–719.
- [9] S.J.. KILMER and S. SAEKI, *On Riesz product measures : mutual absolute continuity and singularity*, Annales Inst. Fourier **38** (2) (1988), 63–93.
- [10] D. LI et H. QUEFFELEC, *Introduction à l’étude des espaces de Banach, Analyse et Probabilités*, Cours spécialisé **12**, Soc. Math. France 2004, XXIV + 627 pages.
- [11] F. PARREAU, *Ergodicité et pureté des produits de Riesz*, Annales Inst. Fourier **40** (2) (1990), 391–405.
- [12] J. PEYRIÈRE, *Etude de quelques propriétés des produits de Riesz*, Annales Inst. Fourier **25** (2) (1975), 127–169.
- [13] J. PEYRIÈRE, *Almost everywhere convergence of lacunary trigonometric series with respect to Riesz products*, Australian J. Math (A) **48** (1990), 376–383.
- [14] G. PISIER, *De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon*, Advances in Math. Supplementary Studies vol. **7B**, dedicated to L. Schwartz, ed. L. Nachbin (1981), 685-726.