



HAL
open science

Une approche analytique de modèles géologiques à flux gravitaire asservi

Gérard Gagneux, Guy Vallet

► **To cite this version:**

Gérard Gagneux, Guy Vallet. Une approche analytique de modèles géologiques à flux gravitaire asservi. 2010. hal-00466085

HAL Id: hal-00466085

<https://hal.science/hal-00466085>

Preprint submitted on 22 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une approche analytique de modèles géologiques à flux gravitaire asservi

Gérard GAGNEUX et Guy VALLET¹

Résumé. Les modèles géologiques d'érosion et de sédimentation élaborés à l'Institut Français du Pétrole introduisent des systèmes d'équations de continuité sous des contraintes originales d'asservissement des flux. La modélisation des phénomènes de la seule sédimentation conduit à des problèmes de type hyperbolique-parabolique dégénéré faisant apparaître des frontières libres à la manière des problèmes de Bernoulli. Ces formulations sont mal posées au sens d'Hadamard et nécessitent de définir un critère de sélection pour isoler la solution significative. On dégage l'idée que le critère de discrimination d'entropie "à la Kruzhkov" n'est pas ici pertinent et qu'il convient de définir un critère de maximalité en un certain sens pour limiter de façon optimale les flux gravitaires asservis. On présente un tour d'horizon de ces questions très largement ouvertes pour susciter d'autres travaux et d'autres approches de ces problèmes mathématiques nouveaux et d'abord difficile, tant du point de vue analytique que numérique. Le thème central est l'étude d'inclusions différentielles $0 \in \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left(H \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) \nabla S \right)$ où H est le graphe maximal monotone de Heaviside.

1 Introduction

De récentes modélisations proposées par les géologues de l'Institut Français du Pétrole ([5], [16], [18], [19], [27]) pour simuler la formation des bassins sédimentaires à l'échelle géologique conduisent à des problèmes aux limites nouveaux et présentant de réelles difficultés analytiques. Ces modèles concernent l'industrie pétrolière [19] ou la datation et la compréhension de phénomènes géologiques ou climatiques majeurs [2]. Pour aller à l'essentiel des enjeux mathématiques, on considère le modèle gravitaire très simplifié des phénomènes d'érosion et de sédimentation dans un bassin monolithologique sans effet de compaction; il s'agit alors de trouver un couple (λ, S) , λ une grandeur adimensionnée modélisant un limiteur de flux et S la topographie mesurée au-dessus d'une base Ω horizontale, vérifiant l'équation de continuité dans $Q =]0, T[\times \Omega$,

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x) - \operatorname{div} \left(\lambda \left(t, x, \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) \right) \nabla S(t, x) \right) = 0 \quad \text{p.p. en } (t, x) \in Q \quad (1)$$

sous l'effet des contraintes globales régissant l'asservissement du flux diffusif et une condition d'érosion limitée presque partout dans Q

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x) \geq -E(t, x), \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (1 - \lambda) \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E(\cdot) \right) = 0 \quad (2)$$

¹Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications - Pau - UMR CNRS 5142, IPRA BP 1155, F-64013 Pau Cedex
gerard.gagneux@univ-pau.fr, guy.vallet@univ-pau.fr

pour la donnée d'un état initial S_0 , de conditions de bord, ici de Dirichlet homogènes pour un modèle académique et d'un seuil d'érosion maximale E , avec $E(t, x) \geq 0$ dans Q . L'introduction d'un limiteur de flux a pour objet de rendre compatibles la loi de conservation de masse et la contrainte globale qui fait l'originalité de ces modèles en limitant les possibilités d'érosion, selon l'environnement, la nature des sédiments, etc.

De tels problèmes unilatéraux avec contraintes d'asservissement sont d'un type très différent de ceux rencontrés sous forme d'inéquations variationnelles ou quasi variationnelles en Mécanique et en Physique (*cf.* l'ouvrage fondateur de G. Duvaut et J.-L. Lions [13]). L'étude de ces modèles est récente et n'a pas donné lieu à des résultats entièrement satisfaisants pour montrer dans quel cadre fonctionnel et sous quelle formulation ces problèmes sont bien posés au sens de Hadamard. Diverses approches ont été proposées. Un premier point de vue (*cf.* R. Eymard et T. Gallouët [17]) consiste à analyser, à t fixé et pour un gradient de topographie fixé ∇h , l'ensemble des limiteurs λ admissibles *via* le système différentiel unilatéral de nature hyperbolique du premier ordre à double obstacle

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda(t, x) \nabla h(x)) + E(x) &\geq 0, \quad 0 \leq \lambda(t, x) \leq 1, \\ (1 - \lambda(t, x))(\operatorname{div}(\lambda(t, x) \nabla h(x)) + E(x)) &= 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

Ces auteurs mettent en évidence un principe d'existence et d'unicité en établissant le lien avec l'élément maximal d'un ensemble convexe, fermé dans tous les L^p et réticulé. Définissant alors une application $\Lambda : h \rightarrow \lambda$ sous des hypothèses restrictives (h est à gradient lipschitzien et E est minoré par une constante strictement positive), ces auteurs ramènent alors l'étude de l'équation à un problème de point fixe.

Une autre approche, dite lagrangienne, repose sur l'introduction d'un repère local de coordonnées de Lagrange au lieu d'une représentation eulérienne classique en Mécanique des fluides. On pourra se reporter aux travaux de J.-I. Diaz et S. Shmarev [12] dans le cadre d'un modèle dit de M. Budyko en climatologie pour une illustration de cette approche; le système de représentation lagrangien adapté à la stratigraphie permettrait dans son principe de suivre la trajectoire de chaque particule de sédiments. De même, V. Gervais et R. Masson ([22]) introduisent un nouveau système de coordonnées dans lequel la position verticale d'un point est mesurée par rapport au bord supérieur du bassin qui est une frontière libre; ce procédé conduit à découpler l'équation régissant la topographie (*i.e.* l'épaisseur de la couche sédimentaire multilithologique) et le système de conservation de masse décrivant la concentration des divers constituants et donne lieu à des développements numériques.

Notre approche se fonde sur l'introduction d'une inclusion différentielle; notant H le graphe maximal monotone de \mathbb{R}^2 associé à la fonction de Heaviside, on réécrit le système des contraintes sous la forme

$$\lambda \in H \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \text{ avec } \frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0 \text{ p.p. dans } Q \quad (3)$$

et l'équation de continuité prend l'expression multivoque

$$0 \in \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left(H \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \nabla S \right) \quad \text{dans } \mathcal{D}' (]0, T[\times \Omega), \quad (4)$$

i.e., on cherche une paire (λ, S) vérifiant, outre les conditions sur le bord "parabolique",

$$\begin{cases} \lambda \in H \left(\frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \text{ avec } \frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0 \text{ p.p. dans } Q \\ \frac{\partial S}{\partial t} (t, x) - \operatorname{div} (\lambda (t, x) \nabla S (t, x)) = 0 \text{ p.p. en } (t, x) \in Q. \end{cases} \quad (5)$$

De plus, on considère essentiellement dans cette étude le cas-limite où $E = 0$, c'est-à-dire la situation du phénomène de seule sédimentation. Cette situation spécifique conduit mathématiquement à un renforcement du caractère hyperbolique dégénéré du problème, ce qui se traduit par l'apparition de zones mortes, de phénomènes non régularisants de propagation à vitesse finie à l'origine de la formation de points anguleux pour la topographie; on ne peut alors espérer des propriétés de régularité du gradient de la topographie, *a priori* discontinu, et qui représente la pente, cause selon une loi linéaire "à la Fourier-Darcy" du flux diffusif par gravité. La forte dégénérescence du problème implique que les ensembles $\{\lambda = 0\}$ ne sont pas négligeables en général (contrairement au cas où $E \geq E_0 > 0$) et conduit à un problème mal posé. On introduit alors quelques développements propres à permettre la définition de la solution géologiquement significative par un critère de sélection fondé sur la maximalité en un certain sens du limiteur de flux λ ; en cela, on rejoint la démarche suivie par R. Eymard et T. Gallouët décrite précédemment. Il apparaît qu'une condition discriminante d'entropie "à la Kruzhkov" selon les travaux de J. Carrillo [11] n'est pas pertinente pour les modèles géologiques. En outre, la coexistence des régions implicitement inconnues $\{\frac{\partial S}{\partial t} = 0\}$ et $\{\frac{\partial S}{\partial t} > 0\}$ se traduit par des problèmes à frontières libres de type problèmes de Bernoulli d'évolution ([24], [25], [28]).

De manière plus générale, les modèles réalistes prennent en compte plusieurs types de sédiments et donnent lieu à un système fortement couplé entre concentrations et topographie, associé à des conditions de bord à flux pariétal asservi. Le modèle présenté ici est donc un problème-modèle, académique mais propre à construire des outils pour une approche analytique par une certaine réduction de la complexité de ces modèles géologiques, sans dénaturation. En outre, quitte à remplacer dans cette modélisation l'inconnue S (l'épaisseur des sédiments déposés) par une fonction θ représentative d'une température, on mesure que les équations (1) et (2) régissent des phénomènes d'asservissements thermiques complexes, avec contrôle global du réchauffement.

2 Motivation physique

On considère le modèle gravitaire très simplifié des phénomènes d'érosion et de sédimentation dans un bassin monolithologique; pour toute colonne de base

$\omega(t) \subset \Omega$ et de hauteur S de sédiment de masse volumique ρ , suivie dans son mouvement et animée d'un vecteur- vitesse V , la loi de conservation de la masse s'énonce

$$\forall t \in]0, T[, \forall t \in \omega(t) \subset \Omega, \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(S) S \, dx = 0,$$

ce qui se traduit classiquement par l'équation ponctuelle, au sens de $\mathcal{D}'(Q)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho(S) S) + \operatorname{div} (\rho(S) S V) = 0 \text{ dans } Q.$$

Le flux surfacique volumique est conséquence d'un effet gravitaire, selon la pente, d'où une loi d'état du type de Fourier modifiée par un coefficient de diffusion non linéaire et dépendant de l'état instantané du système physique:

$$\rho(S) S V = -a \left(t, x, S, \frac{\partial S}{\partial t} \right) \nabla S$$

déjà rencontrée pour des modèles d'hystérésis capillaire en pédologie [4].

Il en résulte, en négligeant pour simplifier les effets de compaction et donc en prenant ρ constant, une équation de continuité assez peu usuelle

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left(a \left(t, x, S, \frac{\partial S}{\partial t} \right) \nabla S \right) = 0 \quad \text{p.p. en } (t, x) \in Q =]0, T[\times \Omega.$$

Selon les géologues et c'est là l'originalité de ces modèles stratigraphiques, cette équation doit être compatible avec une contrainte d'érosion limitée, liée à l'environnement et au matériau, énoncée sous la forme

$$\frac{\partial S}{\partial t} (t, x) \geq -E(t, x) \quad \text{p.p. en } (t, x) \in Q.$$

En général, cette contrainte unilatérale globale est incompatible avec la loi de conservation de masse et donc, on impose à la fonction $(t, x) \rightarrow a \left(t, x, S, \frac{\partial S}{\partial t} \right)$ de jouer le rôle d'un limiteur de flux; ce limiteur est inactif lorsque ponctuellement et temporairement les deux lois sont compatibles et s'active "au mieux", *i.e.* au strict nécessaire, lorsque les deux lois ne peuvent s'accorder.

D'autres considérations plus approfondies dans le cas multilithologique ou avec des conditions de bord unilatérales réalistes peuvent être trouvées dans [15], [16], [19].

3 Définition d'une solution

On indique les hypothèses et notations générales de l'étude mathématique.

H1. On introduit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d \in N^*$, de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne.

H2. La topographie initiale S_0 est supposée appartenir à un espace $W_0^{1,p_0}(\Omega)$ pour un certain $p_0 > d$.

Cette hypothèse permet de tenir compte des réalités physiques; en effet, d'après les classiques injections de Sobolev, la topographie initiale est continue (en fait, $S_0 \in C^{0,1-\frac{d}{p_0}}(\overline{\Omega})$) et S_0 est différentiable au sens classique \mathcal{L}^d -presque partout dans Ω , d'après l'inégalité de Morrey ([14], p.235), ce qui permet de définir la pente en dehors d'un ensemble \mathcal{L}^d -négligeable.

En pratique géologique, $d = 1$ ou 2 ; cependant, au prix de quelques complications techniques de type *bootstrap*, les arguments développés ici restent valables pour toute dimension en vue d'applications à d'autres situations physiques. Cela concerne en particulier les modèles d'asservissements thermiques où la température est astreinte à tout instant, en tout point, à ne pas baisser malgré la coexistence de zones froides et de zones chaudes. On verra que la propriété de régularité dans $W_0^{1,p_0}(\Omega)$ se transmet à chaque itéré par hérédité dans l'emploi d'un schéma-discretisé par rapport au temps.

On note H l'opérateur défini par $H(r) = 1$ si $r > 0$, $[0, 1]$ si $r = 0$, 0 si $r < 0$ et H_ε , pour $\varepsilon > 0$, son approximation Yosida (i.e. $H_\varepsilon(r) = \min\left(\frac{r^+}{\varepsilon}, 1\right)$); on introduit aussi H_0 la section de norme minimale de H (i.e. $H_0(r) = 1$ si $r > 0$, 0 si $r \leq 0$) et H_{\max} défini par $H_{\max}(r) = 1$ si $r \geq 0$ et 0 si $r < 0$.

On définit alors une notion relativement forte de solution .

Définition 1. Pour toute donnée initiale S_0 dans $W_0^{1,p_0}(\Omega)$ pour un certain $p_0 > d$, une solution du problème de Cauchy-Dirichlet est un couple (λ, S) dans $L^\infty(Q) \times \{H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))\}$ vérifiant

$$\begin{cases} \lambda \in H\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right), \quad S(0, \cdot) = S_0 \text{ dans } \Omega \text{ et, si } d \geq 2, \quad \frac{\partial S}{\partial t} \geq 0 \text{ p.p. dans } Q, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} v + \lambda \nabla S \cdot \nabla v \right\} dx = 0 \text{ p.p. en } t \in]0, T[. \end{cases} \quad (6)$$

L'énoncé de cette définition appelle les remarques suivantes:

Remarques. L'introduction d'un limiteur de flux est nécessaire car le choix de $\lambda = 1_Q$ conduit à la classique équation de diffusion de la chaleur avec la contrainte $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$ p.p. dans Q ; on aurait alors, p.p. en t et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^+(\Omega)$, $\int_{\Omega} \nabla S(t, \cdot) \cdot \nabla \varphi dx \leq 0$ et donc $\int_{\Omega} S(t, \cdot) \Delta \varphi dx \geq 0$; en faisant tendre t essentiellement vers 0^+ , on en déduit que nécessairement ΔS_0 est positif dans $H^{-1}(\Omega)$ et donc, définit une mesure positive, ce qui est un cas exceptionnel.

Le cadre fonctionnel choisi repose sur l'estimation informelle suivante:

prenant de façon générale $H^{(\varepsilon)}$ une approximation lipschitzienne croissante non négative de H , on considère le problème associé ainsi régularisé et on prend

pour fonction-test $v = \int_0^{\frac{\partial S}{\partial t}} \frac{dr}{H^{(\varepsilon)}(r) + \delta}$, $\delta > 0$, ce qui peut se justifier par l'emploi d'un quotient différentiel; il vient alors

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} \int_0^{\frac{\partial S}{\partial t}} \frac{dr}{H^{(\varepsilon)}(r) + \delta} + \frac{H^{(\varepsilon)}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)}{H^{(\varepsilon)}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) + \delta} \nabla S \cdot \nabla \frac{\partial S}{\partial t} \right\} dx = 0 \text{ p.p. sur }]0, T[.$$

Après intégration entre 0 et τ , $\tau \in [0, T]$, le théorème de convergence dominée conduit à l'estimation uniforme remarquable suivante, lorsque δ tend vers 0 et en justifiant que $\nabla \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ p.p. dans $\{H^{(\varepsilon)}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0\}$:

$$\int_{]0, \tau[\times \Omega} \left| \frac{\partial S}{\partial t} \right|^2 dx dt + \frac{1}{2} \|S(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Un point délicat concerne la propriété de non-négativité de $\frac{\partial S}{\partial t}$ p.p. dans Q imposée dans la définition; en clair, cette condition n'est-elle pas redondante et ne résulterait-elle pas de la nullité de λ sur $\{\frac{\partial S}{\partial t} < 0\}$ et de l'équation de continuité? Comme $\frac{\partial S}{\partial t}$ n'est pas une fonction-test, le résultat n'est pas trivial en formulation continue et on se ramène à observer que, presque partout en t ,

$$0 \leq \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^- \leq -\operatorname{div}(\lambda \nabla S) \mathbf{1}_{\{\frac{\partial S}{\partial t} < 0\}} \quad \text{avec} \quad \lambda \mathbf{1}_{\{\frac{\partial S}{\partial t} < 0\}} = 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

La conjecture consiste à prouver que $\operatorname{div}(\lambda \nabla S) \mathbf{1}_{\{\frac{\partial S}{\partial t} < 0\}} = 0$ p.p. dans Ω .

En dimension d'espace $d = 1$, le résultat découle du lemme de Saks et la condition est donc implicitement contenue dans la formulation variationnelle; en dimension $d \geq 2$ et introduisant p.p. sur $]0, T[$, la fonction vectorielle $F = \lambda \nabla S$, on observe que $F \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ et que $\{\frac{\partial S}{\partial t} < 0\} \subset \{F = 0\}$; cependant, d'après des informations que nous ont communiquées F. Bouchut et L. Ambrosio (communications personnelles), il existe des fonctions $F \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ dont la divergence n'est pas nulle presque partout sur $\{F = 0\}$; les contre-exemples se fondent sur un résultat de G. Alberti [1] et concernent une approximation de type Lusin de fonctions vectorielles par des gradients (*cf* aussi [3]). Ces auteurs indiquent que si $d \geq 2$, il existe des fonctions $F \in (L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d))^d$ dont la divergence, calculée au sens des distributions, appartient à $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et n'est pas nulle presque partout dans $\{F = 0\}$. Les extensions vectorielles du lemme de Saks requièrent certainement des hypothèses géométriques fortes, de type "ensemble d'annulation à périmètre fini".

Donc, on ne peut pas conclure immédiatement; une question ouverte, débattue dans [3], est de savoir si la structure particulière de F (ici, F s'annule *via* le scalaire λ) ne permet pas d'établir la nullité de la divergence de F sur $\{\frac{\partial S}{\partial t} < 0\}$. A cause de cette conjecture non levée, on impose donc la condition de non-négativité de $\frac{\partial S}{\partial t}$ dans Q dans la définition d'une solution si $d \geq 2$.

3.1 Sur le caractère hyperbolique-parabolique dégénéré

On rappelle ici quelques propriétés surprenantes de toute solution au sens de la définition 1, démontrées dans [6] et propres au cas de la seule sédimentation $E = 0$. Lorsque $E(t, x) \geq E_0 > 0$, *i.e.* lorsque des phénomènes d'érosion sont possibles, le modèle décrit des phénomènes régularisants de nature très différente.

Proposition 1. Toute solution (λ, S) selon la définition 1 est soumise aux circonstances suivantes:

1) *existence de zones restant hors du phénomène physique:*

On dispose de la relation remarquable:

$\lambda \nabla S^+ = 0$ p.p. dans Q et pour tout t , $S^+(t, \cdot) = S_0^+$ p.p. dans Ω .

En conséquence, si $S_0 \geq 0$ p.p. dans $\omega \subset \Omega$, alors pour tout t , $S(t, \cdot) = S_0$ p.p. dans ω .

De plus, dans ce cas, p.p. dans $\{\nabla S_0 \neq 0\} \cap \omega$ supposé \mathcal{L}^d -non négligeable, λ est nul et le problème y est complètement dégénéré.

La démonstration est obtenue en prenant la fonction-test $v = S^+$.

2) *effet barrière et création de zones mortes:*

S'il existe un ensemble compact K et un ouvert régulier ω tels que

$$K \subset \omega \subset \Omega \quad \text{et} \quad \omega \setminus K \subset \{S_0 \geq 0\},$$

alors, pour tout t , $S(t, \cdot) = S_0$ p.p. dans ω .

En d'autres termes, toute région entourée d'un cordon à topographie positive est hors d'atteinte du processus de sédimentation.

La démonstration se fonde sur le théorème d'Urysohn qui permet d'introduire une fonction-test v telle que $1_K \leq v \leq 1_\omega$.

3.2 Un problème mal posé

Le problème énoncé par la définition 1 est mal posé; en effet, il admet toujours la solution triviale ou "paresseuse" $(0_Q, S_0)$, dont on observera qu'elle est obtenue en utilisant l'approximation Yosida H_ε , pour $\varepsilon > 0$, de H ; cependant, on ne peut exclure cette solution de la définition car elle constitue dans certains cas intéressants la seule solution; il suffit pour cela de supposer que l'on a $S_0 > 0$ dans un ouvert $\Omega_\delta = \{x \in \Omega, 0 < d(x, \partial\Omega) < \delta\}$ pour un $\delta > 0$. Il y a là, en accord avec la proposition 1, un effet-barrière sur le bord et un effet d'enclavement indépendamment de la donnée initiale dans $\Omega \setminus \Omega_\delta$, significatifs d'un problème hyperbolique fortement dégénéré. En outre, on peut en général construire une infinité de solutions. Illustrons cela sur un exemple.

On prend $\Omega =]0, 1[$ et S_0 une fonction négative convexe ($\Delta S_0 \geq 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$), décroissante sur $[0, \alpha]$, constante sur $[\alpha, \beta]$, $\alpha \leq \beta$, et croissante sur $[\beta, 1]$ et dont le graphe peut présenter des points anguleux.

Outre la solution $(0_Q, S_0)$, on observe que le couple $(1_Q, u)$ est solution où u est régie par la classique équation de diffusion de la chaleur; cela résulte du principe du minimum.

Deux autres solutions peuvent être construites en introduisant *via* un schéma semi-discrétisé constructif les problèmes de Bernoulli suivants:

Premier problème de Bernoulli:

pour un pas de temps $h > 0$, on considère la suite décroissante au sens large des points implicitement inconnus $(x^k(h))_k$ dans $[0, \alpha]$ compatibles avec la résolution des problèmes stationnaires surdéterminés suivants: chercher w^k dans $H^1(x^k(h), 1)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} w^k - h \frac{\partial^2 w^k}{\partial x^2} = w^{k-1} \text{ dans }]x^k(h), 1[, \\ w^k(x^k(h)) = S_0(x^k(h)), \frac{\partial w^k}{\partial x}(x^k(h)) = 0 \text{ et } w^k(1) = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

auxquels on associe les solutions itératives

$$\lambda^k = 1_{]x^k(h), 1[} \text{ et } S^k = S_0 1_{]0, x^k(h)]} + w^k 1_{]x^k(h), 1]}. \quad (8)$$

On a montré dans [6], [26] que ce programme est bien posé et qu'il permet d'atteindre une solution lorsque le pas de temps h tend vers 0; le point essentiel est de voir que la suite en escalier $(\lambda_h)_h$ est uniformément bornée dans l'espace $\overline{BV(Q)} \cap L^\infty(Q)$, ce qui permet par compacité dans $L^1(Q)$, de disposer d'une convergence forte et de passer à la limite dans le terme du type $\lambda_h \nabla S_h$. Cette solution (λ, S) , avec $\lambda \in H\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)$ par un argument de monotonie "à la Minty", distincte des précédentes, correspond au modèle géologique où l'on impose en plus de la condition de Dirichlet que la frontière $\{x = 0\}$ ne soit le siège d'aucun échange de sédiments avec le milieu extérieur. On résoud ainsi un problème de Bernoulli d'évolution.

Deuxième suite de problèmes de Bernoulli:

Il s'agit d'une variante facile du cas précédent en échangeant le rôle des frontières $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$ et en considérant la suite croissante au sens large des points $(y^k(h))_k$ dans $[\beta, 1]$ compatibles avec la résolution des problèmes stationnaires surdéterminés suivants: chercher ϖ^k dans $H^1(0, y^k(h))$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \varpi^k - h \frac{\partial^2 \varpi^k}{\partial x^2} = \varpi^{k-1} \text{ dans }]0, y^k(h)[, \\ w^k(0) = 0, \varpi^k(y^k(h)) = S_0(y^k(h)) \text{ et } \frac{\partial \varpi^k}{\partial x}(y^k(h)) = 0, \end{array} \right. \quad (9)$$

auxquels on associe de la même façon les solutions itératives

$$\lambda^k = 1_{]0, y^k(h)[} \text{ et } S^k = \varpi^k 1_{]0, y^k(h)]} + S_0 1_{]y^k(h), 1]}. \quad (10)$$

On indiquera plus généralement à la section suivante un procédé itératif permettant de construire une infinité de solutions sans réelle signification physique, *i.e.* des artefacts mathématiques.

4 Choix d'un critère discriminant

Les études numériques ([5], [18], [19], [23]) utilisent des pas de temps h de l'ordre de 25 siècles pour couvrir une période géologique de plusieurs millions d'années. Il est donc légitime d'étudier précisément les schémas semi-discrétisés en temps pour dégager un critère de sélection de "la solution géologique".

4.1 Etude des problèmes semi-discrétisés associés

Proposition 2. Pour toute donnée initiale S_0 dans $W_0^{1,p_0}(\Omega)$ pour un certain $p_0 > d$, il existe une suite $(\lambda^k, S^k)_k$ dans $L^\infty(\Omega) \times W_0^{1,p_0}(\Omega)$, solution de la suite de problèmes de Cauchy-Dirichlet semi-discrétisés, vérifiant $\lambda^k \in H\left(\frac{S^k - S^{k-1}}{h}\right)$, $S^0 = S_0$ dans Ω et

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \left\{ \frac{S^k - S^{k-1}}{h} v + \lambda^k \nabla S^k \cdot \nabla v \right\} dx = 0. \quad (11)$$

En outre, on a

$$\inf_{\Omega} \text{ess } S^0 \leq \inf_{\Omega} \text{ess } S^{k-1} \leq S^k \leq \sup_{\Omega} \text{ess } S^{k-1} \leq \sup_{\Omega} \text{ess } S^0$$

$$\frac{S^k - S^{k-1}}{h} \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

La preuve est développée dans [6], p.217-220, à l'exception du résultat de régularité qui se démontre comme suit (à la première itération): d'après le théorème de Marcus et Mizel, on a, indépendamment du choix de λ^1 dans $H\left(\frac{S^1 - S_0}{h}\right)$,

$$\begin{aligned} \lambda^1 \nabla S^1 &= h \lambda^1 \nabla \frac{S^1 - S_0}{h} + \lambda^1 \nabla S_0 = h \nabla \left(\frac{S^1 - S_0}{h} \right)^+ + \lambda^1 \nabla S_0 \\ &= h \nabla \left(\frac{S^1 - S_0}{h} \right) + \lambda^1 \nabla S_0 = h \nabla S^1 + (1 - \lambda^1) \nabla S_0. \end{aligned}$$

Ainsi, le premier itéré vérifie

$$S^1 \in H_0^1(\Omega), \quad -h \Delta S^1 = -\frac{S^1 - S_0}{h} + \text{div}((1 - \lambda^1) \nabla S_0) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Prenant par exemple $d = 2$, on note que $\frac{S^1 - S_0}{h}$ est dans tous les espaces $L^q(\Omega)$, q fini, et $(1 - \lambda^1) \nabla S_0 \in (L^{p_0}(\Omega))^d$. La propriété découle immédiatement des résultats de régularité de J. Nečas pour les équations elliptiques et se transmet à chaque itéré par hérédité.

Un problème mal posé sans critère discriminant

On va voir que pour une configuration initiale régulière, ce problème peut admettre une infinité de solutions de natures très différentes. On prend $\Omega =]0, 1[$ et S_0 une fonction négative convexe dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, décroissante sur $[0, \alpha]$, et croissante sur $[\alpha, 1]$. Outre les quatre solutions possibles construites à la section précédente, on peut décrire une infinité non dénombrable de solutions possibles par le procédé suivant, à la première itération:

on introduit a et b tels que $0 \leq a < \alpha < b \leq 1$ et Φ , $\Phi = \Phi(a, b)$, la solution convexe et dans $H^3(]a, b[)$ du problème

$$\frac{\Phi - S_0}{h} - \Delta \Phi = 0 \text{ dans }]a, b[, \quad \Phi(a) = S_0(a), \quad \Phi(b) = S_0(b). \quad (12)$$

Alors, on peut vérifier que l'on obtient une solution au sens de la définition 2 en prenant le couple (λ^1, S^1) , $\lambda^1 = \lambda^1(a, b)$, $S^1 = S^1(a, b)$, avec

$$\begin{cases} \lambda^1(x) = \frac{\Phi'(a)}{S_0'(x)} \text{ sur } [0, a], \quad 1 \text{ sur }]a, b[, \quad \frac{\Phi'(b)}{S_0'(x)} \text{ sur } [b, 1], \\ S^1 = S_0 \text{ sur } [0, a], \quad \Phi \text{ sur }]a, b[, \quad S_0 \text{ sur } [b, 1]. \end{cases} \quad (13)$$

Un autre point de vue.

On observe alors, à la suite de la démonstration de la proposition 2, que la formulation (11) est équivalente à la suivante:

trouver $(\lambda^k, S^k)_k$ dans $L^\infty(\Omega) \times W_0^{1,p_0}(\Omega)$, telle que

$$\begin{cases} \lambda^k \in H\left(\frac{S^k - S^{k-1}}{h}\right) \text{ et } \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \left\{ \frac{S^k - S^{k-1}}{h} v + h \nabla S^k \cdot \nabla v + (1 - \lambda^k) \nabla S^{k-1} \cdot \nabla v \right\} dx = 0, \end{cases} \quad (14)$$

ce qui fait apparaître un terme linéaire de diffusion et un terme de transport non linéaire régi par un opérateur maximal monotone.

En posant $w^k = \frac{S^k - S^{k-1}}{h} \in W_0^{1,p_0}(\Omega)$, on a aussi

$$\begin{cases} \lambda^k \in H(w^k) \text{ et } \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \left\{ w^k v + h \nabla w^k \cdot \nabla v + \lambda^k \nabla S^{k-1} \cdot \nabla v \right\} dx = 0. \end{cases} \quad (15)$$

On peut observer que lorsque ΔS^{k-1} , calculé dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, appartient à $\mathcal{M}_b(\Omega)$, toute solution w^k vérifie

$$\forall \xi \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \xi \geq 0,$$

$$\int_{\Omega} \{w^k \xi + h \nabla w^k \cdot \nabla \xi\} dx - \int_{\Omega \cap \{w^k > 0\}} \xi d\Delta S_0 \leq 0.$$

Il suffit pour cela de prendre la fonction-test $v = H_{\varepsilon}(w^k) \xi$ et de faire tendre ε vers 0.

Cette relation fournit une indication sur les régions ouvertes $\Omega \cap \{w^k > 0\}$ de strict dépôt de sédiments, où λ^k vaut 1.

En outre, on peut s'interroger sur les circonstances qui permettent d'avoir, à la première itération, $\lambda^1 = 1_{\Omega}$ pour des valeurs de h voisines de 0^+ . Prenant, en introduisant l'opérateur de Green de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ associé à la norme de Poincaré, $v = -\Delta^{-1}(w^1)$ dans (15), où $w^1 = w^1(h)$, il viendrait alors

$$\|w^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + h \|w^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle w^1, S_0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Ainsi, la quantité $\|w^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \sqrt{h} \|w^1\|_{L^2(\Omega)}$ reste bornée, indépendamment de h et prenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, on obtient

$$\langle \Delta S_0, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} w^1 \varphi dx - h \int_{\Omega} w^1 \Delta \varphi dx \geq -h \int_{\Omega} w^1 \Delta \varphi dx,$$

et donc, faisant tendre h vers 0^+ , on obtient que ΔS_0 doit être une mesure positive. Il s'agit d'une circonstance particulière, héréditaire à chaque itération. Cette condition nécessaire, *i.e.* $\Delta S_0 \geq 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$, est aussi suffisante.

Autre formulation en termes d'équation non linéaire dégénérée.

S'inspirant des travaux de J. Carrillo [11], on peut regarder cette formulation (15) avec une autre approche en introduisant

$$u^k = \frac{S^k - S^{k-1}}{h} + \frac{1 \text{ unité de longueur}}{1 \text{ unité de temps}} \lambda^k, \text{ par homogénéité,}$$

$$g = (I_d + H)^{-1}, \quad \psi = (I_d + H^{-1})^{-1}.$$

Le problème s'écrit alors: trouver une suite de fonctions mesurables u^k avec $\frac{S^k - S^{k-1}}{h} = g(u^k)$ dans $H_0^1(\Omega)$, vérifiant

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \{g(u^k) v + h \nabla g(u^k) \cdot \nabla v + \psi(u^k) \nabla S^{k-1} \cdot \nabla v\} dx = 0. \quad (16)$$

Une telle formulation de problème non linéaire dégénéré peut faire penser à un critère d'entropie "à la Kruzhkov" au sens des travaux de J. Carrillo [11], mais on verra qu'il n'en est rien dans le contexte géologique.

4.2 Importance du choix de l'approximation du graphe H

Remarquons que les solutions décrites par la proposition 2 dépendent essentiellement du choix de l'approximation lipschitzienne croissante de H . Si on choisit H_ε , pour $\varepsilon > 0$, son approximation Yosida qui ne permet par convergence simple de récupérer que H_0 la section de norme minimale de H , on va mettre en évidence des phénomènes paresseux. On prend à nouveau $\Omega =]0, 1[$ et S_0 une fonction négative convexe ($\Delta S_0 \geq 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$), décroissante sur $[0, \alpha]$, constante sur $[\alpha, \beta]$, $\alpha \leq \beta$, et croissante sur $[\beta, 1]$ et dont le graphe peut présenter des points anguleux.

On rencontre en effet, alors, à la première itération, le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$: trouver $S^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \left\{ \frac{S^\varepsilon - S_0}{h} v + H_\varepsilon \left(\frac{S^\varepsilon - S_0}{h} \right) \nabla S^\varepsilon \cdot \nabla v \right\} dx = 0,$$

de sorte que par ce procédé, on atteint lorsque ε tend vers 0, une solution théorique (λ, S) avec $\lambda \in H \left(\frac{S - S_0}{h} \right)$, qui vérifie en outre une condition d'entropie, en posant $w = \frac{S - S_0}{h} \in H_0^1(\Omega)$, $w \geq 0$:

pour tout $\xi \in H^1(\Omega)$, $\xi \geq 0$,

$$\int_{\Omega} \{w\xi + h \nabla w \cdot \nabla \xi + \lambda \nabla S_0 \cdot \nabla \xi\} dx \leq 0.$$

La relation d'entropie utilisée pour définir des solutions de type Kruzhkov trouve ici une formulation simplifiée par le fait que w est non négatif dans Ω .

Cette condition d'entropie n'est pas vérifiée par la solution $(1_\Omega, u)$ où la fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ est régie par la classique équation discrétisée de la chaleur dans Ω . Or, le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ admet une solution unique et le couple $(0_\Omega, S_0)$ convient indépendamment de ε . En conséquence, la solution ainsi construite est le couple $(0_\Omega, S_0)$.

En prenant une approximation lipschitzienne croissante de H qui tende vers H_{\max} via la fonction $r \rightarrow H_\varepsilon(r + \varepsilon)$, on atteint la solution $(1_\Omega, u)$.

Rappelons que le géologue conjecture que le flux diffusif doit être limité pour rendre compatibles la loi de conservation de masse et la contrainte globale de positivité du taux d'érosion mais qu'il doit être limité au strict nécessaire, *i.e.*, λ doit être "le plus grand possible". En ce sens, la solution entropique au sens de Kruzhkov ne correspond pas au choix de " λ le plus grand", *i.e.*, ici $\lambda = 1_\Omega$.

Remarquons, en relation avec la formulation (16), sur un exemple plus général, que le critère de choisir " λ le plus grand possible parmi les λ admissibles" ne s'identifie pas avec le critère discriminant d'entropie de Kruzhkov.

Soit Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}^*$, ω un ouvert $\subset\subset \Omega$ de diamètre petit et $G \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $u_0 \in \mathcal{D}(\omega)$, $u_0 \geq 0$ et $\max_{\omega} u_0$ "assez petit".

On considère alors le problème suivant: chercher le couple (λ, u) tel que

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \lambda \in H(u) \text{ p.p. dans }]0, T[\times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \operatorname{div}(\lambda G) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[\times \Omega), \\ u = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur }]0, T[\times \partial\Omega. \end{cases} \quad (17)$$

On observe que la classique solution dans $C^\infty(\overline{Q})$ de l'équation de diffusion de la chaleur sans convection est une solution car, d'après le principe du minimum, on a $u > 0$ dans Q et donc $\lambda = 1_Q$. Par ailleurs, approchant H par H_ε et considérant la suite des solutions correspondantes, on met en évidence un point d'accumulation $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ solution de (\mathcal{P}) , avec en particulier $\bar{u} \in H^1(Q)$, $\bar{\lambda} \neq 1_Q$ et vérifiant pour toute fonction $\xi \in H^1(Q)$, $\xi \geq 0$, $\xi(0) = \xi(T)$,

$$\int_Q \left\{ \nabla \bar{u} \cdot \nabla \xi + \bar{\lambda} G \cdot \nabla \xi - \bar{u} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\} \leq 0.$$

On peut montrer que la solution de l'équation de diffusion de la chaleur ne vérifie pas cette condition et qu'en outre, \bar{u} présente des frontières libres se déplaçant à vitesse finie dans la direction du vecteur G . Pour cela, on vérifie que pour un choix convenable de x_0 de \mathbb{R}^d , on a

$$0 \leq \bar{u}(t, x) \leq (G \cdot (x_0 - x) + t)^+,$$

fonction de $H^1(Q)$ construite comme sursolution de l'équation et majorant les conditions imposées sur la frontière parabolique.

Ces deux solutions peuvent être discriminées par le choix "λ le plus grand possible parmi les λ admissibles" qui exclut la solution entropique au sens de [11].

4.3 Un critère sélectif

Si l'on considère à nouveau les solutions construites dans un but heuristique à la section 3.2 et en (7), (8), (9), (10) et (13), on peut éliminer certaines possibilités du champ géologique par un argument de symétrie; lorsque, pour $\Omega =]0, 1[$, la topographie initiale S_0 est représentée par une fonction négative convexe, nulle aux extrémités, **symétrique** par rapport à la droite $\{x = \frac{1}{2}\}$, les solutions correspondantes doivent présenter la même symétrie; cet argument élimine les solutions à frontières libres de type Bernoulli et impose de prendre $b = 1 - a$ dans (13). Les solutions de type Bernoulli (7), (8) sont pertinentes lorsque le bassin $\Omega =]0, 1[$ est inclus dans un intervalle $]-\delta, 1[$, $\delta > 0$, la région $[-\delta, 0]$ étant occupée par une "colline" faisant barrière, d'où la surdétermination des conditions de bord (cf [6], p. 225-229 ou [26]). De même pour les solutions (9), (10) avec un effet barrière à droite. Cependant, on conserve une infinité non dénombrable de solutions correspondant respectivement avec les notations de (12) et (13) aux valeurs des limiteurs de flux

$$\lambda = 0_\Omega, \quad \lambda_a = \frac{\Phi'(a)}{S'_0(\cdot)} 1_{]0, a[} + 1_{]a, 1-a[} + \frac{\Phi'(1-a)}{S'_0(\cdot)} 1_{]1-a, 1[} \quad \text{et } \lambda = 1_\Omega,$$

les valeurs extrêmes constituant les cas-limites de λ_a lorsque $a = 0$ ou $\frac{1}{2}$.

Maximalité du limiteur de flux

On examine tour à tour les trois approches classiques qui permettent d'isoler par son comportement spécifique une solution particularisée pour des problèmes aux limites aux solutions multiples.

1) lissage de la vitesse de sédimentation par viscosité

Le procédé bien connu de régularisation par une perturbation singulière conduirait ici au modèle de Darcy-Barenblatt (*cf* [15], p.426-430 pour des phénomènes d'hystérésis en transition de phases pour les modèles des milieux poreux, et aussi [7], [8], [10], [21], [29]) et à considérer l'équation non réversible

$$\frac{\partial S_\tau}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_\tau \nabla S_\tau) - \tau \Delta \frac{\partial S_\tau}{\partial t} = 0 \quad \text{avec } \lambda_\tau \in H \left(\frac{\partial S_\tau}{\partial t} \right), \tau > 0,$$

avec des conditions de bord de Dirichlet homogènes pour S_τ et $\frac{\partial S_\tau}{\partial t}$, outre la condition initiale.

On est conduit à l'équation dans $H_0^1(\Omega)$ qui assure encore la non-négativité de $\frac{\partial S_\tau}{\partial t}(t, \cdot)$ dans Q , $\left(\frac{\partial S_\tau}{\partial t} \right)^-$ étant alors ici une fonction-test,

$$\frac{\partial S_\tau}{\partial t} - (I - \tau \Delta)^{-1} \{ \operatorname{div}(\lambda_\tau \nabla S_\tau) \} = 0 \quad \text{avec } \lambda_\tau \in H \left(\frac{\partial S_\tau}{\partial t} \right), \tau > 0.$$

On a donc à étudier le comportement asymptotique de toute suite généralisée (λ_τ, S_τ) en permettant l'analyse d'une propriété supplémentaire discriminante. Or, le couple $(\lambda_\tau = 0_Q, S_\tau = S_0)$ est toujours solution et donc, on conservera cette solution paresseuse parmi les solutions possibles; on a vu que cette solution ne peut être exclue de la définition et donc, ce procédé de viscosité très peu sélectif n'est pas assez filtrant ici.

2) critère d'admissibilité par entropie

La notion de solution entropique est liée à l'idée que la solution du "vrai problème physique" est en fait plus régulière (on la note S_τ) que la solution du problème modélisé par (1) et (2) qui transcrit un phénomène simplifié de façon brutale ou raide. On cherche donc à identifier S_τ par une équation qui régit des processus irréversibles de façon à introduire classiquement par une inéquation, un principe d'irréversibilité, une entropie et un flux d'entropie associé. En pratique, la régularisation se fonde sur un effet de viscosité, de diffusion capillaire, de conduction thermique, d'anticipation des conducteurs en trafic routier, etc. Ici, dans l'idée que l'équilibre n'est pas parfaitement instantané mais qu'il se produit dans un délai court $\tau > 0$, on peut exprimer le flux *via* la pente $\nabla S(t + \tau)$ que l'on peut approcher par l'introduction du terme correctif cinétique au premier ordre

$$\nabla S(t + \tau, \cdot) = \nabla S_\tau(t, \cdot) + \tau \nabla \frac{\partial S_\tau}{\partial t}(t, \cdot).$$

Or, on peut écrire dans une formulation qui assure encore la non-négativité de $\frac{\partial S_\tau}{\partial t}(t, \cdot)$ dans Q ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left\{ \lambda(t, \cdot) \left(\nabla S_\tau(t, \cdot) + \tau \nabla \frac{\partial S_\tau}{\partial t}(t, \cdot) \right) \right\} = \\ \operatorname{div} \{ \lambda(t, \cdot) \nabla S_\tau(t, \cdot) \} + \tau \operatorname{div} \left\{ \lambda(t, \cdot) \nabla \frac{\partial S_\tau}{\partial t}(t, \cdot) \right\} \\ \text{avec } \lambda \in H \left(\frac{\partial S_\tau}{\partial t}(t, \cdot) \right) \end{aligned}$$

mais, comme d'après le théorème de Marcus et Mizel, on a

$$\lambda \nabla \frac{\partial S_\tau}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial S_\tau}{\partial t} \right)^+ = \nabla \frac{\partial S_\tau}{\partial t},$$

on obtient finalement

$$\operatorname{div} \left\{ \lambda \left(\nabla S_\tau(t, \cdot) + \tau \nabla \frac{\partial S_\tau}{\partial t}(t, \cdot) \right) \right\} = \operatorname{div} \{ \lambda(\nabla S_\tau(t, \cdot)) \} + \tau \Delta \frac{\partial S_\tau}{\partial t}$$

ce qui ramène à la situation précédente, inopérante.

La même remarque vaut lorsque l'on recourt au procédé dit de *régularisation elliptique* de O. Oleinik et J. - L. Lions, fondé également sur l'approche d'un état d'équilibre différé à l'instant $t + \tau$; par translation sur l'échelle de temps, on considère alors le terme $\frac{\partial S_\tau}{\partial t}(t - \tau, \cdot)$ que l'on peut approcher au premier ordre par $\frac{\partial S_\tau}{\partial t}(t, \cdot) - \tau \frac{\partial^2 S_\tau}{\partial t^2}(t, \cdot)$, ce qui conduit à l'équation modifiée

$$\frac{\partial S_\tau}{\partial t}(t, \cdot) - \tau \frac{\partial^2 S_\tau}{\partial t^2}(t, \cdot) - \operatorname{div} \{ \lambda(\nabla S_\tau(t, \cdot)) \} = 0 \text{ dans } Q,$$

en spécifiant une condition nouvelle pour $\frac{\partial S_\tau}{\partial t}(T, \cdot)$, *i.e.*, sur l'état du taux d'érosion final dans le bassin.

3) par optimalité d'une fonction coût

Dès que l'expression ΔS_0 calculée dans $H^{-1}(\Omega)$ n'est pas une mesure positive, l'introduction d'un limiteur de flux est nécessaire pour rendre compatibles la loi de conservation de masse et la contrainte globale de non-érosion. En conséquence, on va chercher un critère de sélection en traduisant le fait que le flux diffusif doit être limité au strict nécessaire, *i.e.*, λ doit être "le plus grand possible" parmi les solutions mathématiquement admissibles, donc en un certain sens, le plus voisin de 1_Q . Dès lors, on est amené à chercher pour spécifier λ

à mettre en place un procédé de projection au sens d'une certaine métrique de la fonction 1_Q sur l'ensemble fermé borné pour une topologie appropriée des limiteurs de flux attachés à des couples (λ, S) solutions admissibles. Ce point de vue rejoint la démarche adoptée par R. Eymard et T. Gallouët [17].

Ces considérations amènent à la proposition suivante, énoncée pour la première itération:

Proposition 3. Pour toute donnée initiale S_0 dans $W_0^{1,p_0}(\Omega)$ avec $p_0 > d$, il existe un couple $(\bar{\lambda}, \bar{S})$ dans $L^\infty(\Omega) \times W_0^{1,p_0}(\Omega)$, vérifiant $\bar{\lambda} \in H\left(\frac{\bar{S} - S_0}{h}\right)$ et

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \left\{ \frac{\bar{S} - S_0}{h} v + \bar{\lambda} \nabla \bar{S} \cdot \nabla v \right\} dx = 0,$$

$\bar{\lambda}$ réalisant la valeur moyenne maximale des limiteurs admissibles au sens où

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{\lambda} dx = \max_{\lambda \in \Lambda_{ad}} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \lambda dx,$$

Λ_{ad} désignant l'ensemble des $\lambda \in L^\infty(Q)$ admissibles, associés à des couples-solutions (λ, S) avec $\lambda \in H\left(\frac{S - S_0}{h}\right)$.

De fait, $\bar{\lambda}$ est maximal au sens du lemme de Zorn: si (μ, u) est une autre solution avec $\mu \geq \bar{\lambda}$, alors $\mu = \bar{\lambda}$.

En outre, on a

$$\inf_{\Omega} \text{ess } S^0 \leq \inf_{\Omega} \text{ess } \bar{S} \leq \bar{S} \leq \sup_{\Omega} \text{ess } \bar{S} \leq \sup_{\Omega} \text{ess } S^0$$

$$\frac{\bar{S} - S_0}{h} \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Preuve. La proposition 2 assure que l'ensemble Λ_{ad} n'est pas vide et on observe que chercher $\max_{\lambda \in \Lambda_{ad}} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \lambda dx$ revient à

$$\text{minimiser } L(\lambda) = \|1 - \lambda\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (1 - \lambda) dx \text{ dans l'ensemble } \Lambda_{ad}.$$

Soit alors $(\lambda_m)_m$ une suite de Λ_{ad} minimisante pour la fonctionnelle L ; la suite $(S_m)_m$ des solutions correspondantes restent dans un borné fixe de $H_0^1(\Omega)$, dépendant de h et de S_0 , comme on peut le voir immédiatement grâce à la formulation (14). On peut donc trouver une sous-suite extraite $(S_{m'}, \lambda_{m'})_{m'}$, $\lambda_{m'}$ convergeant vers $\bar{\lambda}$ dans $L^\infty(\Omega)$ –faible étoile et $S_{m'}$ convergeant faiblement vers \bar{S} dans $H_0^1(\Omega)$, fortement dans $L^2(\Omega)$ et \mathcal{L}^d – presque partout dans Ω . Grâce à la formulation (14) et à un argument de monotonie de Minty, on vérifie que

$$\bar{\lambda} \in \Lambda_{ad} \text{ et que } L(\bar{\lambda}) = \min_{\Lambda_{ad}} L(\lambda), \text{ d'où le résultat.}$$

Remarque

Conformément à l'intuition, lorsque le couple $(1_\Omega, S)$ est solution, il contribue au plus fort dépôt local de sédiments; en effet, prenant un autre couple possible (λ, u) , $\lambda \in H\left(\frac{u - S_0}{h}\right)$, on introduit $w = \frac{S - S_0}{h}$ et $\hat{w} = \frac{u - S_0}{h}$, puis la fonction- test $v = H_\varepsilon(\hat{w} - w)$ dans les formulations (15) relatives à S et u ; il vient

$$\int_{\Omega} (\hat{w} - w) H_\varepsilon(\hat{w} - w) dx + h \int_{\Omega} \nabla(\hat{w} - w) \cdot \nabla H_\varepsilon(\hat{w} - w) dx + \int_{\Omega} (\lambda - 1) \nabla S_0 \cdot \nabla H_\varepsilon(\hat{w} - w) dx = 0.$$

Or, sur $\{0 < \hat{w} - w < \varepsilon\}$, \hat{w} est strictement positif et donc, λ y vaut 1. On obtient donc facilement que $(\hat{w} - w)^+ = 0$ dans Ω .

Contrôle optimal des dépôts sédimentaires

La proposition 3 ne garantit pas l'unicité du contrôle optimal $\bar{\lambda} \in \Lambda_{ad}$. On peut alors chercher à adjoindre un critère de sélection fondé sur l'objectif de maximiser, parmi les limiteurs $\bar{\lambda}$ optimaux, le dépôt global effectif de sédiments, là où à chaque itération, la sédimentation est *a priori* possible, *i.e.*, sur l'ouvert $\Omega \setminus \{S_0 \geq 0\}$, selon la proposition 1 encore valable pour les semi-discrétisations en temps. On note

$$\Lambda_{opt} = \left\{ \bar{\lambda} \in \Lambda_{ad}, \quad \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{\lambda} dx = \max_{\lambda \in \Lambda_{ad}} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \lambda dx \right\}.$$

On obtient alors, à la première itération, la

Proposition 4. Pour toute donnée initiale S_0 dans $W_0^{1,p_0}(\Omega)$, $p_0 > d$, il existe un couple $(\lambda_{\max}, S_{\max})$ dans $L^\infty(\Omega) \times W_0^{1,p_0}(\Omega)$, vérifiant

$$\lambda_{\max} \in H\left(\frac{S_{\max} - S_0}{h}\right)$$

et

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \left\{ \frac{S_{\max} - S_0}{h} v + \lambda_{\max} \nabla S_{\max} \cdot \nabla v \right\} dx = 0,$$

réalisant la valeur maximale du dépôt global sédimentaire, au sens où

$$\int_{\Omega \setminus \{S_0 \geq 0\}} \frac{S_{\max} - S_0}{h} dx = \max_{(\bar{\lambda}, \bar{S}), \bar{\lambda} \in \Lambda_{opt}} \int_{\Omega \setminus \{S_0 \geq 0\}} \frac{\bar{S} - S_0}{h} dx.$$

5 Questions ouvertes

Les considérations précédentes posent des questions largement ouvertes, notamment dans les directions suivantes:

1) La convergence des schémas semi-discrétisés

On sait montrer que les suites $(\overline{\lambda_h}, \overline{S_h})_h$ décrites à partir des schémas semi-discrétisés donnés à la proposition 3 admettent des points d'accumulation faibles dans $L^\infty(Q) \times \{H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))\}$ mais dans le cas général, on ne sait pas prouver que ces limites vérifient l'équation de continuité; cela résulte d'un manque d'informations sur des propriétés de compacité qui permettraient le passage à la limite dans les termes produits de deux convergences faibles de type $\overline{\lambda_h} \nabla \overline{S_h}$ (cf [5], [9], [20]). En dimension $d = 1$, on parvient dans certains cas à voir que la suite en escalier $(\overline{\lambda_h})_h$ est uniformément bornée dans l'espace $\overline{BV(Q)} \cap L^\infty(Q)$, ce qui permet par compacité dans $L^1(Q)$, de disposer d'une convergence forte ([14], chap. 5). En dimension $d \geq 2$, il semble que l'usage des algèbres $\overline{BV(Q)} \cap L^\infty(Q)$ ne soit pas pertinent d'après C. Bardos (communication personnelle) pour ces problèmes non régularisants à cause des conséquences des inégalités de Strichartz, estimations *a priori* qui jouent un rôle important dans l'étude des équations dispersives.

2) Le cas - limite de phénomènes d'érosion-sédimentation

Le modèle des processus d'érosion-sédimentation est nettement plus régulier que celui de la seule sédimentation et l'on dispose de résultats analytiques et numériques par les travaux de R. Eymard et T. Gallouët [17]; imaginons que l'on connaisse une solution $(\lambda_\varepsilon, S_\varepsilon)$ avec $\lambda_\varepsilon \in H\left(\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon\right)$, c'est-à-dire qu'on autorise une érosion très limitée au seuil $\varepsilon > 0$. La conjecture est alors de savoir si une "bonne" solution du modèle de la seule sédimentation peut être obtenue comme limite des solutions $(\lambda_\varepsilon, S_\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0.

3) Les solutions explicites

En dimension $d = 1$, lorsque la topographie initiale présente un nombre fini de points d'inflexions, on parvient à construire "à la main" les suites $(\overline{\lambda_h}, \overline{S_h})_h$ décrites à partir des schémas semi-discrétisés donnés à la proposition 3 (cf [5] et [6], p. 227-234 pour des exemples), un peu à la manière de la construction des solutions de problèmes hyperboliques du premier ordre à partir de problèmes de Riemann unidimensionnels. On utilise pour cela les propriétés descriptives mises en évidence à la proposition 1 et le fait que la fonction $x \rightarrow \left(\overline{\lambda_h} \frac{\partial \overline{S_h}}{\partial x}\right)(x)$ est continue et non décroissante sur Ω alors que chaque fonction $x \rightarrow \overline{\lambda_h}(x)$ et $x \rightarrow \frac{\partial \overline{S_h}}{\partial x}(x)$ peut présenter des discontinuités ([9], [20]). La situation en dimension $d = 2$ avec le problème des raccords (à périmètre fini ?) des frontières libres est ouverte à la recherche.

4) L'approche numérique

En dimension $d = 2$ essentiellement, l'analyse numérique de ces problèmes dégénéré à caractère localement hyperbolique et recouvrant le champ des questions liées aux problèmes de Bernoulli reste une question largement ouverte. Les modèles gravitaires des phénomènes plus régularisants de réelle érosion et de sédimentation donnent lieu à des schémas de volumes finis; on pourra se reporter à ([16], [17], [18], [19], [22], [23]).

5) L'influence d'un terme de transport

En pratique et pour tenir compte des effets du transport éolien ou marin qui peuvent être fortement dominants par rapport aux effets gravitaires, l'équation de continuité doit être complétée par un terme vectoriel V , éventuellement σ -périodique, selon une formulation du type

$$0 \in \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ H \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) (\nabla S + V(t, x, S)) \right\}.$$

6) Changement d'inconnue

Comme on l'a vu à la section 4.3, le modèle étudié ici suppose un équilibre parfait, instantané, ce qui induit les aspects de comportement hyperbolique. Les géologues, selon une communication personnelle (février 2006) de D. Granjeon à l'IFP, indiquent qu'il faudrait faire intervenir un terme d'ajustement, en supposant un équilibrage de la pente suivant une équation cinétique au premier ordre. On est conduit alors au modèle de Darcy-Barenblatt et à considérer l'équation

$$\frac{\partial S_\tau}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_\tau \nabla S_\tau) - \tau \Delta \frac{\partial S_\tau}{\partial t} = 0 \text{ avec } \lambda_\tau \in H \left(\frac{\partial S_\tau}{\partial t} \right), \tau > 0,$$

avec des conditions de bord de Dirichlet homogènes pour S_τ et $\frac{\partial S_\tau}{\partial t}$, outre la condition initiale.

On a vu que ce modèle est mal posé par le fait qu'il admet plusieurs solutions et donc, là aussi, il importe d'adjoindre un critère de maximalité pour les limiteurs admissibles. Il semble alors intéressant de prendre pour inconnue $u_\tau = \frac{\partial S_\tau}{\partial t}$, égalité à valeur, p.p. en t , dans $H_0^1(\Omega)$ et de considérer l'équation sous la forme

$$u_\tau - \tau \Delta u_\tau - \operatorname{div} \left(\lambda_\tau \left(\nabla \int_0^t u_\tau dx + \nabla S_0 \right) \right) = 0 \text{ dans } \Omega, \text{ p.p. en } t,$$

avec

$$\lambda_\tau \in H(u_\tau), \tau > 0.$$

Sous cette forme, les résultats de régularité de J. Nečas pour les équations elliptiques s'appliquent facilement et conduisent donc à une bonne maîtrise de la régularité du taux d'érosion $\frac{\partial S_\tau}{\partial t}$; il s'ensuit pour la solution S_τ l'appartenance à $W^{1,\infty}\left(0, T; W_0^{1,p_0}(\Omega)\right)$ pour toute donnée initiale S_0 dans $W_0^{1,p_0}(\Omega)$, $p_0 \geq 2$. Le formalisme est en effet le suivant:

prenant une partition de l'unité $\{\chi_k\}_{k=0}^N$ de classe C^∞ subordonnée à un certain recouvrement de Ω par des boules ouvertes $B_{k,\rho}$, $\rho > 0$ et introduisant $v_k = u_\tau \chi_k$, on observe que la fonction v_k vérifie une relation du type

$$v_k - \tau \Delta v_k = \operatorname{div} \left(\lambda_\tau \left(\nabla \int_0^t v_k \, dx + \nabla S_0 \right) \right) + g_k \quad \text{dans } B_{k,\rho},$$

ce qui permet en prenant ρ suffisamment petit, d'obtenir à t fixé, l'estimation informelle, pour $k = 0, 1, \dots, N$,

$$C(p_0, \Omega, \tau) \left[\|v_k\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| \int_0^t \nabla v_k \, dx \right\|_{L^{p_0}(\Omega)^d} + \|\nabla S_0\|_{L^{p_0}(\Omega)^d} + \|g_k\|_{L^{p_0}(\Omega)} \right],$$

en utilisant spécifiquement le fait que la dimension d'espace est $d \leq 2 < p_0$ dans l'usage des injections continues de Sobolev.

Par le lemme de Gronwall, on en déduit pour $u_\tau = \sum_k v_k$, une estimation uniforme par rapport à t de $\|u_\tau(t)\|_{W_0^{1,p_0}(\Omega)}$.

La connaissance de la solution physiquement admissible de ce problème de sédimentation à équilibre différé pourrait, par passage à la limite lorsque τ tend vers 0, fournir une voie de recherche à l'étude du modèle de l'équilibre parfait.

7) Le point de vue lagrangien

En mécanique des fluides, il est demandé de connaître le champ des vitesses à un instant t donné en fonction de t et des coordonnées des points de la configuration physique, dite d'Euler, ce qui privilégie la description eulerienne du mouvement et en fait une habitude, voire une routine méthodologique. Dans les modèles stratigraphiques, on décrit des déformations *a priori* lentes que l'on peut suivre dans leur mouvement. Le système lagrangien peut alors présenter une alternative malgré un formalisme pesant; on pourra se reporter aux travaux de J.- I. Díaz et S. Shmarev [12] pour une démarche éclairante de cette approche sur un modèle de climatologie. L'énergie solaire absorbée par la Terre y est régie par une loi de Budyko exprimée par le graphe maximal monotone de Heaviside et on s'intéresse à l'évolution de frontières libres définissant des ensembles de niveau pour la température. Cette situation présente de fortes similitudes formelles avec les modèles de géologie étudiés ici. En outre, l'écriture dans les variables lagrangiennes des équations de conservation de la masse et du mouvement forme un système compatible avec une loi supplémentaire (d'entropie en thermodynamique...), ce qui est bienvenu pour bien poser mathématiquement le problème.

References

- [1] G. Alberti. A Lusin type theorem for gradients. *Journal of Functional Analysis*, 100(1):110–119, 1991.
- [2] J. Allard, X. Bertin, E. Chaumillon, and F. Pouget. Sand spit rhythmic development: A potential record of wave climate variations? Arçay spit, western coast of France. *Marine Geology*, 253(3-4):107–131, 2008.
- [3] L. Ambrosio, C. De Lellis, and J. Maly. *On the chain rule for the divergence of BV like vector fields: applications, partial results, open problems*, volume Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations of *AMS series in contemporary mathematics*. AMS, 2005.
- [4] Mualem Y. and Dagan G. A dependent domain model of capillary hysteresis. *Water Resour. Res.*, 11:452–460, 1975.
- [5] S. N. Antontsev, G. Gagneux, R. Luce, and G. Vallet. New unilateral problems in stratigraphy. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40(4):765–784, 2006.
- [6] S. N. Antontsev, G. Gagneux, R. Luce, and G. Vallet. A non-standard free boundary problem arising from stratigraphy. *Anal. Appl. (Singap.)*, 4(3):209–236, 2006.
- [7] S. N. Antontsev, G. Gagneux, R. Luce, and G. Vallet. On a pseudoparabolic problem with constraint. *Differential Integral Equations*, 19(12):1391–1412, 2006.
- [8] S. N. Antontsev, G. Gagneux, A. Mokrani, and G. Vallet. Stratigraphic modelling by the way of a pseudoparabolic problem with constraint. *Adv. Math. Sci. Appl.* 19 (2009), no. 1, 195–209. .
- [9] S. N. Antontsev, G. Gagneux, and G. Vallet. On some problems of stratigraphic control. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 44(6):85–94, 2003 (en russe); traduit dans *J. of Applied Mechanics and Technical Physics (New York)*, 44(6):821–828, 2003.
- [10] S. N. Antontsev, G. Gagneux, and G. Vallet. A compactness result for a pseudo-parabolic conservation law with constraint. In *Ninth International Conference Zaragoza-Pau on Applied Mathematics and Statistics*, volume 33 of *Monogr. Semin. Mat. García Galdeano*, pages 403–410. Prensas Univ. Zaragoza, Zaragoza, 2006.
- [11] J. Carrillo . Entropy solutions for nonlinear degenerate problems. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 147 (1999), no. 4, 269–361.
- [12] J.- I. Díaz and S. Shmarev. Lagrangian approach to the study of level sets: application to a free boundary problem in climatology. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 194 (2009), no. 1, 75–103.

- [13] G. Duvaut et J.-L. Lions. Les inéquations en mécanique et en physique. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21. Dunod, Paris, 1972.
- [14] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [15] L. C. Evans. A survey of entropy methods for partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 41(4):409–438 (electronic), 2004.
- [16] R. Eymard and Th. Gallouët. Analytical and numerical study of a model of erosion and sedimentation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(6):2344–2370 (electronic), 2006.
- [17] R. Eymard and Th. Gallouët. A partial differential inequality in geological models. *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 28(6):709–736, 2007.
- [18] R. Eymard, Th. Gallouët, V. Gervais, and R. Masson. Convergence of a numerical scheme for stratigraphic modeling. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(2):474–501, 2005.
- [19] R. Eymard, Th. Gallouët, D. Granjeon, R. Masson, and Q. H. Tran. Multi-lithology stratigraphic model under maximum erosion rate constraint. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 60(2):527–548, 2004.
- [20] G. Gagneux et G. Vallet. Sur des problèmes d’asservissements stratigraphiques. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8:715–739 (electronic), 2002. A tribute to J. L. Lions.
- [21] G. Gagneux and G. Vallet. A result of existence for an original convection-diffusion equation. *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, 99(1):125–131, 2005.
- [22] V. Gervais and R. Masson. Mathematical and numerical analysis of a stratigraphic model. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 38 (2004), no. 4, 585–611.
- [23] V. Gervais and R. Masson. Numerical simulation of a stratigraphic model. *Comput. Geosci.* 12 (2008), no. 2, 163–179.
- [24] A. Lunardi. *Functional Analytic Methods for Evolution Equations*, chapter An Introduction to Parabolic Moving Boundary Problems, pages 371–399. Number 1855 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 2004.
- [25] A. M. Meĭermanov. On a problem with a free boundary for parabolic equations. *Mat. Sb. (N.S.)*, 115(157)(4):532–543, 654, 1981.
- [26] G. Vallet. Sur une loi de conservation issue de la géologie. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 337(8):559–564, 2003.

- [27] G. Vallet. On a new conservation law resulting from sedimentary basin dynamics. In *VIII Journées Zaragoza-Pau de Mathématiques Appliquées et de Statistiques*, volume 31 of *Monogr. Semin. Mat. García Galdeano*, pages 247–255. Prensas Univ. Zaragoza, Zaragoza, 2004.
- [28] J. L. Vazquez. The free boundary problem for the heat equation with fixed gradient condition. In *Free boundary problems, theory and applications (Zakopane, 1995)*, volume 363 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 277–302. Longman, Harlow, 1996.
- [29] Z. Wang and J. Yin, Uniqueness of solutions to a viscous diffusion equation. *Appl. Math. Lett.* 17 (2004), no. 12, 1317–1322.