



**HAL**  
open science

## Cohomologie de Chevalley des graphes ascendants

Walid Aloulou, Didier Arnal, Ridha Chatbouri

► **To cite this version:**

Walid Aloulou, Didier Arnal, Ridha Chatbouri. Cohomologie de Chevalley des graphes ascendants. 2010. hal-00465530

**HAL Id: hal-00465530**

**<https://hal.science/hal-00465530v1>**

Preprint submitted on 19 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# COHOMOLOGIE DE CHEVALLEY DES GRAPHES ASCENDANTS

WALID ALOULOU, DIDIER ARNAL ET RIDHA CHATBOURI

ABSTRACT. The space  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  of all tensor fields on  $\mathbb{R}^d$ , equipped with the Schouten bracket is a Lie algebra. The subspace of ascending tensors is a Lie subalgebra of  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ .

In this paper, we compute the cohomology of the adjoint representations of this algebra (in itself and  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ ), when we restrict ourselves to cochains defined by aerial Kontsevitch's graphs like in our previous work (Pacific J of Math, vol 229, no 2, (2007) 257-292). As in the vectorial graphs case, the cohomology is freely generated by all the products of odd wheels.

**Résumé.** L'espace des tenseurs ascendants est une sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie (graduée)  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  des champs de tenseurs sur  $\mathbb{R}^d$  muni du crochet de Schouten.

Dans cet article, on calcule la cohomologie des représentations adjointes de cette sous algèbre de Lie, en se restreignant à des cochaînes définies par des graphes de Kontsevich aériens comme dans [AAC1] et [AAC2]. On retrouve un résultat analogue à celui de la cohomologie des graphes vectoriels et linaires: elle est librement engendré par des produits de roues de longueurs impaires.

## 1. INTRODUCTION

Notons  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  l'espace des tenseurs contravariants complètement antisymétriques sur  $\mathbb{R}^d$ . Cet espace, muni du crochet de Schouten et de la graduation  $deg(\alpha) = k - 1$ , si  $\alpha$  est un  $k$ -tenseur, est une algèbre de Lie graduée.

Un problème naturel est le calcul de la cohomologie de Chevalley de l'action adjointe de cette algèbre de Lie.

Pour aborder cette question, on se restreint des cochaînes  $C_\Delta$  définies à partir des graphes de Kontsevich aériens  $\Delta$ . En effet, il semble probable qu'on définisse ainsi la partie la plus fondamentale de la cohomologie cherchée.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 17B56, 53D50, 05C90.

*Key words and phrases.* Graphes de Kontsevich, Cohomologie de Chevalley.

Ce travail a été effectué dans le cadre des accords CMCU (programmes Hubert Curien Utique) 06/S 1502 et 09/G 1502.

D. Arnal remercie la Faculté des Sciences de Monastir, W. Aloulou et R. Chatbouri remercient l'Institut de Mathématiques de Bourgogne pour leurs chaleureuses hospitalités.

Même ainsi pose, la question reste trs difficile. En particulier, la cohomologie de l'action adjointe de la sous algbre des tenseurs homognes, de la forme

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq d} \alpha^{i_1 \dots i_p}(x) \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_p}}$$

o les fonctions  $\alpha^{i_1 \dots i_p}(x)$  sont des polynômes homognes de degré  $p$  sur  $\mathbb{R}^d$ , est non triviale.

D'un autre côté, nous avons dans [AAC1] et [AAC2] calcul la cohomologie des algbres de Lie  $Vect(\mathbb{R}^d)$  des champs de vecteurs et  $\mathcal{L}_{poly}(\mathbb{R}^d)$  des tenseurs linaires.

Cet article est un premier pas vers la localisation de la cohomologie de  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  sa restriction aux tenseurs homognes.

Pour celà, on dfinit une sous-algèbre de Lie intressante de  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ , c'est celle des tenseurs ascendants: un  $p$ -tenseur  $\alpha$  est dit ascendant ou de type  $(q \leq p)$ , avec  $p, q \in \mathbb{N}$  si:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq d} \alpha^{i_1 \dots i_p}(x) \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_p}}$$

o toute fonction  $\alpha^{i_1 \dots i_p}(x)$  est un polynôme homogne de degré  $q$  sur  $\mathbb{R}^d$  tel que

$$\begin{cases} q < p & \text{si } p > 1, \\ q \leq p & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

Muni du crochet de Schouten, l'espace des tenseurs ascendants sur  $\mathbb{R}^d$  not  $T_{poly}^{(\cdot \leq \cdot)}(\mathbb{R}^d)$  est une sous algèbre de Lie graduée de  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  qui contient  $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^d)$ .

Comme dans [AAC1] et [AAC2], on veut déterminer la cohomologie de Chevalley de l'action adjointe de cette sous algèbre dans  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ , en se restreignant à des cochaînes  $C_\Delta$  définies à partir des graphes de Kontsevich aériens  $\Delta$ . La restriction aux tenseurs ascendants correspond à l'utilisation de graphes pour lesquels chaque sommet  $i$  est de type not  $(q \leq p)$ , c'est dire, tel qu'exactly  $p$  flches sortent de  $i$

et  $q$  flches aboutissent sur  $i$  avec  $\begin{cases} q < p & \text{si } p > 1, \\ q \leq p & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$

On appellera de tels graphes des graphes ascendants. La cohomologie se traduit, alors, par un opérateur de cobord  $\partial$  défini directement sur l'espace des graphes aériens ascendants. On calcule ici la cohomologie de cet opérateur  $\partial$ .

La situation est donc similaire à celle des graphes vectoriels et linaires aériens étudiés dans [AAC1] et [AAC2]. Rappelons que pour construire la cochaîne  $C_\Delta$  dans le cas des graphes ascendants, on doit ajouter au graphe aérien  $\Delta$  autant de jambes que de pieds, suivant la méthode de [AGM], et ceci pour n'importe quel nombre de

pieds. On obtient ainsi pour chaque graphe aérien ascendant une suite infinie de graphes non aériens.

On calcule la cohomologie par les méthodes de [AAC1] et [AAC2]: après la définition de l'ordre et du symbole d'une combinaison linéaire symétrique de graphes aériens ascendants, on définit une homotopie qui permet de ramener, modulo des cobords, chaque cocycle à un graphe aérien formé par des sommets simples, c'est à dire des sommets de type  $(q \leq p)$  avec  $p \leq 1$ . Autrement dit, chaque sommet reçoit et fait sortir au plus une flèche. La cohomologie de  $\partial$  coïncide alors avec celle calculée dans [AAC1] et [AAC2]: elle est librement engendrée par des produits de roues

$$R_{2k_1+1} \times R_{2k_2+1} \times \cdots \times R_{2k_p+1}$$

de longueur  $2k_i+1$  impaires et strictement croissantes tels que  $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_p$ .

On en déduit que la cohomologie de Chevalley de l'action adjointe des tenseurs ascendants dans  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  est donnée par des cochaînes  $C_\delta$  où  $\delta$  est une combinaison de roues impaires de longueur strictement plus petite que  $2d$ .

## 2. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

On considère l'algèbre de Lie graduée  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  des champs de tenseurs contravariants complètement antisymétriques sur  $\mathbb{R}^d$ . Cette algèbre est graduée par  $deg$  (où  $deg(\alpha) = k - 1$ , si  $\alpha$  est un  $k$ -tenseur) et son crochet est celui de Schouten qui s'écrit:

$$[\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_\ell]_S = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{k-i+j-1} \xi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \cdots \wedge \xi_k \wedge [\xi_i, \eta_j] \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \cdots \wedge \eta_\ell.$$

où les  $\xi_i$  et les  $\eta_j$  sont des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^d$ .

Prenons deux tenseurs  $\alpha = \sum_{i_1 \dots i_k} \alpha^{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k}$  et  $\beta = \sum_{j_1 \dots j_\ell} \beta^{j_1 \dots j_\ell} \partial_{j_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{j_\ell}$ ,

on définit l'opérateur  $\nabla : T_{poly}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow Der(T_{poly}(\mathbb{R}^d))$  par

$$\nabla_\alpha \beta = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_\ell}} \alpha^{i_1 \dots i_k} (\partial_{i_r} \beta^{j_1 \dots j_\ell}) \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\partial_{i_r}} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k} \wedge \partial_{j_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{j_\ell}.$$

Avec cet opérateur, on peut définir le crochet de Schouten en posant simplement

$$[\alpha, \beta]_S = (-1)^{deg(\alpha)} \nabla_\alpha \beta - (-1)^{(deg(\alpha)+1)deg(\beta)} \nabla_\beta \alpha.$$

$(T_{poly}(\mathbb{R}^d), [ , ]_S, deg)$  est une algèbre de Lie graduée: le crochet de Schouten est antisymétrique et il est de degré 0.

Soient  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , un  $p$ -tenseur  $\alpha$  est dit de type  $(q \leq p)$  si et seulement si

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq d} \alpha^{i_1 \dots i_p}(x) \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_p}}$$

o chaque fonction  $\alpha^{i_1 \dots i_p}(x)$  est un polynôme homogène sur  $\mathbb{R}^d$  de degré  $q$  tel que

$$\begin{cases} q < p & \text{si } p > 1, \\ q \leq p & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

Un tenseur de type  $(q \leq p)$  est dit aussi un tenseur ascendant.

Muni du crochet de Schouten, l'espace  $T_{poly}^{(\cdot \leq \cdot)}(\mathbb{R}^d)$  des tenseurs ascendants est une sous algèbre de Lie graduée de  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ .

Cependant, on peut voir chaque application  $n$ -linéaire antisymétrique comme une application  $n$ -linéaire symétrique si on change la graduation. Posons  $|\alpha| = \text{deg}(\alpha) + 1$  et  $Q(\alpha, \beta) = (-1)^{\text{deg}(\alpha)}[\alpha, \beta]_S$ , le crochet de Schouten se transforme en une opération  $Q$  qui est  $|\cdot|$ -symétrique. Dans ce cas, l'opérateur de cohomologie de Chevalley s'écrit: (voir par exemple [AAC1])

**Proposition 2.1.** (Cohomologie symétrisée)

*Une application  $n$ -linéaire  $|\cdot|$ -symétrique  $C$  est une  $n$ -cochaîne, son cobord  $\partial C$  est donné par*

$$\begin{aligned} (\partial C)(\alpha_0, \dots, \alpha_n) &= \sum_{i=0}^n \left( \varepsilon_{|\alpha|}(i, 0 \dots \hat{i} \dots n) (-1)^{|C|(|\alpha_i|-1)} \nabla_{\alpha_i} C(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{|C|} \varepsilon_{|\alpha|}(0 \dots \hat{i} \dots n, i) \nabla_{C(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)} \alpha_i \right) \\ &\quad - \sum_{i \neq j} \varepsilon_{|\alpha|}(i, j, 0, \dots, \hat{i} \dots \hat{j} \dots n) C(\nabla_{\alpha_i} \alpha_j, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i \dots \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n), \end{aligned}$$

o  $\varepsilon_{|\alpha|}(i, 0 \dots \hat{i} \dots n)$  est la signature de la permutation gradue  $(\alpha_i, \alpha_0, \dots, \hat{i} \dots, \alpha_n)$  et plus précisément, le signe  $\varepsilon_{|\alpha|}$  sur la transposition  $(\alpha_i, \alpha_j)$  est:  $\varepsilon_{|\alpha|}(i, j) = (-1)^{|\alpha_i||\alpha_j|} \varepsilon_{|\alpha|}(j, i)$ .

### 3. GRAPHES AÉRIENS ET COCHAÎNES

Les cochaînes étudiées dans cet article sont construites à partir de graphes comme dans [K] et [AGM]. Pour des tenseurs de type  $(\cdot \leq \cdot)$ , on considère la classe restreinte des graphes qui sont de type  $(\cdot \leq \cdot)$ . Définissons la construction dans ce cas.

Un graphe  $\Delta$  de type  $(\cdot \leq \cdot)$  est un graphe aérien de Kontsevich, défini par la donnée de  $n$  sommets numérotés  $1, \dots, n$  et d'arêtes qui sont des flèches  $\overrightarrow{ab}$  telles que chaque sommet  $i$  est de type  $(f_i \leq \ell_i)$ , c'est à dire, exactement  $\ell_i$  flèches sortent de  $i$

et  $f_i$  flèches aboutissent sur  $i$  avec  $\begin{cases} f_i < \ell_i & \text{si } \ell_i > 1, \\ f_i \leq \ell_i & \text{si } \ell_i \leq 1. \end{cases}$

On appelle  $Deb(i)$  la collection des arêtes partant d'un sommet  $i$ , rangées dans un ordre donné ( $Deb(i)$  peut être vide). Le graphe  $\Delta$  est donc une liste de  $n$  listes de flèches:

$$\Delta = \left( \left( \overrightarrow{1a_1^1}, \dots, \overrightarrow{1a_{\ell_1}^1} \right), \dots, \left( \overrightarrow{na_1^n}, \dots, \overrightarrow{na_{\ell_n}^n} \right) \right).$$

Pour construire la cochaîne, on ajoute des "pieds" (sommets terrestres) et des "jambes" (flèches aboutissant des pieds) à  $\Delta$ . Soit  $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ , on se donne  $|m| = m_1 + \dots + m_n$  nouveaux sommets (pieds) notés  $b_1^1, \dots, b_{m_1}^1, \dots, b_1^n, \dots, b_{m_n}^n$  et  $|m|$  nouvelles flèches (jambes) notées  $\overrightarrow{1b_1^1}, \dots, \overrightarrow{1b_{m_1}^1}, \dots, \overrightarrow{nb_1^n}, \dots, \overrightarrow{nb_{m_n}^n}$ . On définit le graphe non aérien  $\Gamma$  compatible avec la numérotation de ses sommets, c'est à dire tel que les  $\ell_1 + m_1$  premières flèches partent du sommet 1, les  $\ell_2 + m_2$  suivantes du sommet 2, etc...

$$\Gamma = \left( \left( \overrightarrow{1a_1^1}, \dots, \overrightarrow{1a_{\ell_1}^1}, \overrightarrow{1b_1^1}, \dots, \overrightarrow{1b_{m_1}^1} \right), \dots, \left( \overrightarrow{na_1^n}, \dots, \overrightarrow{na_{\ell_n}^n}, \overrightarrow{nb_1^n}, \dots, \overrightarrow{nb_{m_n}^n} \right) \right).$$

Notons  $(x^1, \dots, x^d)$  des points de  $\mathbb{R}^d$ . Si la flèche  $\overrightarrow{e_\Gamma}$  de  $\Gamma$  est à la  $r^{\text{ième}}$  place dans la liste  $\Gamma$ , on notera  $t_{\overrightarrow{e_\Gamma}}$  l'indice  $t_r$ . On notera donc  $x^{t_{\overrightarrow{e_\Gamma}}}$  pour  $x^{t_r}$  et  $\partial_{t_{\overrightarrow{e_\Gamma}}}$  pour  $\frac{\partial}{\partial x^{t_r}}$ .

Pour tout sommet  $i$  de  $\Delta$ , la collection  $Deb(i)$  sera la suite  $(\overrightarrow{ia_1^i}, \dots, \overrightarrow{ia_{\ell_i}^i}, \overrightarrow{ib_1^i}, \dots, \overrightarrow{ib_{m_i}^i})$  des flèches issues de  $i$ , si  $\alpha$  est un  $\ell_i + m_i$ -tenseur, on notera  $\alpha^{t_{Deb(i)}}$  sa composante:

$$\alpha^{t_{Deb(i)}} = \alpha^{\overrightarrow{ia_1^i} \dots \overrightarrow{ia_{\ell_i}^i} \overrightarrow{ib_1^i} \dots \overrightarrow{ib_{m_i}^i}}.$$

De même, on note  $Fin(i) = (\overrightarrow{c_1^i i}, \dots, \overrightarrow{c_{f_i}^i i})$  la suite des flèches arrivant sur  $i$  ( $Fin(i)$  peut être vide). On définit pour chaque  $i$ , l'opérateur  $\partial_{Fin(i)} = \frac{\partial^{f_i}}{\partial_{\overrightarrow{c_1^i i}} \dots \partial_{\overrightarrow{c_{f_i}^i i}}}$  (c'est

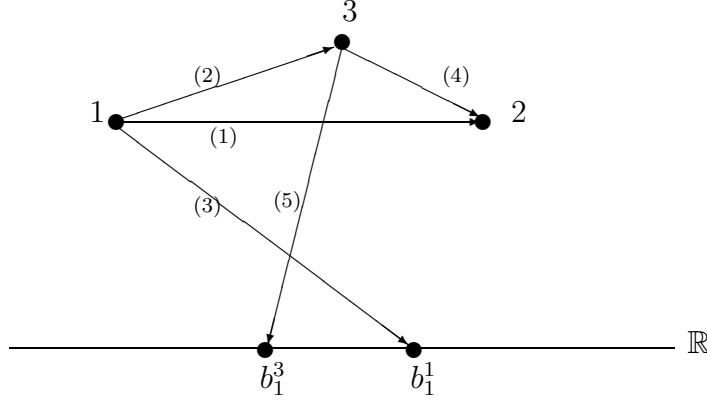
l'opérateur identité si aucune flèche n'arrive sur  $i$ ).

Chaque graphe non aérien  $\Gamma$  permet de définir une application  $B_\Gamma$  qui, pour toute famille  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de tenseurs contravariants totalement antisymétriques et d'ordres respectifs  $\ell_1 + m_1, \dots, \ell_n + m_n$  sur  $\mathbb{R}^d$ , associe un opérateur  $|m|$ -différentiel  $B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  défini par

$$B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{t \rightrightarrows=1}^d \prod_{i=1}^n \partial_{Fin(i)} \alpha_i^{t_{Deb(i)}} \partial_{\overrightarrow{1b_1^1}} \wedge \dots \wedge \partial_{\overrightarrow{nb_{m_n}^n}}.$$

**Exemple:**

On prend l'exemple du graphe  $\Gamma$  ci-dessous



Le graphe  $\Gamma$  est orienté par l'ordre  $\mathcal{O}$  suivant:

$$\vec{12} < \vec{13} < \vec{1b_1^1} < \vec{32} < \vec{3b_1^3}.$$

Alors, pour tous tenseurs  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  d'ordre respectif 3, 0 et 2, l'opérateur bidifférentiel  $B_\Gamma$  s'écrit:

$$B_{(\Gamma, \mathcal{O})}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{1 \leq t_1, \dots, t_5 \leq d} \alpha_1^{t_1, t_2, t_3} \cdot \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^{t_1} \partial x^{t_4}} \cdot \frac{\partial \alpha_3^{t_4, t_5}}{\partial x^{t_2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{t_3}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{t_5}}.$$

**Remarque 3.1.**

La définition de l'opérateur  $B_\Gamma$  dépend du choix de la liste compatible

$$\Gamma = \left( \overrightarrow{1a_1^1}, \dots, \overrightarrow{1a_{\ell_1}^1}, \overrightarrow{1b_1^1}, \dots, \overrightarrow{1b_{m_1}^1}, \dots, \overrightarrow{na_1^n}, \dots, \overrightarrow{na_{\ell_n}^n}, \overrightarrow{nb_1^n}, \dots, \overrightarrow{nb_{m_n}^n} \right).$$

Changer cette liste par une permutation  $\sigma$  sur l'ordre des flèches faisant passer de la liste  $\Gamma$  à la liste  $\sigma(\Gamma)$ , revient à multiplier  $B_\Gamma$  par le signe  $\varepsilon(\sigma)$ .

La définition de l'opérateur  $B_\Gamma$  est étendu aux graphes non compatibles en posant

$$B_{\sigma(\Gamma)} = \varepsilon(\sigma) B_\Gamma.$$

On considère un graphe arien  $\Delta = \left( \left( \overrightarrow{1a_1^1}, \dots, \overrightarrow{1a_{\ell_1}^1} \right), \dots, \left( \overrightarrow{na_1^n}, \dots, \overrightarrow{na_{\ell_n}^n} \right) \right)$  de type  $(. \leq .)$ . Si on ajoute les jambes à la fin de la liste  $\Delta$ , on obtient alors une liste

$$\tilde{\Gamma} = \left( \overrightarrow{1a_1^1}, \dots, \overrightarrow{1a_{\ell_1}^1}, \dots, \overrightarrow{na_1^n}, \dots, \overrightarrow{na_{\ell_n}^n}, \overrightarrow{1b_1^1}, \dots, \overrightarrow{1b_{m_1}^1}, \dots, \overrightarrow{nb_1^n}, \dots, \overrightarrow{nb_{m_n}^n} \right).$$

On note  $\varepsilon(m_1, \dots, m_n)$  la signature de la permutation passant de la liste  $\Gamma$  à la liste  $\tilde{\Gamma}$ .

La cochaîne  $C_\Delta$  définie par  $\Delta$  est une série formelle:

$$C_\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n \geq 0} \varepsilon(m_1, \dots, m_n) B_{\tilde{\Gamma}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

avec la convention que  $\alpha_i^{t_{Deb(i)}} = 0$  si  $|\alpha_i| \neq \ell_i + m_i$ .

Les cochaînes considérées ici sont des combinaisons linéaires à coefficients constants:

$$C = \sum_{\Delta} a_{\Delta} C_{\Delta}$$

de cochaînes associées à des graphes  $\Delta$  de type  $(\cdot \leq \cdot)$ . Comme les tenseurs  $\alpha_i$  sont antisymétriques, on se restreindra à des combinaisons  $C$  telles que  $a_{\sigma(\Delta)} = \varepsilon(\sigma) a_{\Delta}$  pour toute permutation  $\sigma$  sur l'ordre de l'une quelconque des suites  $(\overrightarrow{ia_1^i}, \dots, \overrightarrow{ia_{\ell_i}^i})$ .

Comme on ne considère que des cochaînes symétriques (pour  $|\cdot|$ ), on se restreint à des cochaînes  $C$  telles que pour n'importe quelle permutation  $\tau$  de deux sommets  $i$  et  $j$  de  $\Delta$ , on a  $a_{\tau(\Delta)} = (-1)^{\ell_i \ell_j + (\ell_i + \ell_j)(\ell_{i+1} + \dots + \ell_{j-1})} a_{\Delta}$ , si  $\tau(\Delta)$  est le graphe ascendant:

$$\begin{aligned} \tau(\Delta) &= \\ &= \tau\left(\left(\overrightarrow{1a_1^1}, \dots, \overrightarrow{1a_{\ell_1}^1}\right), \dots, \left(\overrightarrow{ia_1^i}, \dots, \overrightarrow{ia_{\ell_i}^i}\right), \dots, \left(\overrightarrow{ja_1^j}, \dots, \overrightarrow{ja_{\ell_j}^j}\right), \dots, \left(\overrightarrow{na_1^n}, \dots, \overrightarrow{na_{\ell_n}^n}\right)\right) \\ &= \left(\left(\overrightarrow{\tau(1)\tau(a_1^1)}, \dots, \overrightarrow{\tau(1)\tau(a_{\ell_1}^1)}\right), \dots, \left(\overrightarrow{\tau(j)\tau(a_1^j)}, \dots, \overrightarrow{\tau(j)\tau(a_{\ell_j}^j)}\right), \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \left(\overrightarrow{\tau(i)\tau(a_1^i)}, \dots, \overrightarrow{\tau(i)\tau(a_{\ell_i}^i)}\right), \dots, \left(\overrightarrow{\tau(n)\tau(a_1^n)}, \dots, \overrightarrow{\tau(n)\tau(a_{\ell_n}^n)}\right)\right) \\ &= \left(\left(\overrightarrow{1\tau(a_1^1)}, \dots, \overrightarrow{1\tau(a_{\ell_1}^1)}\right), \dots, \left(\overrightarrow{i\tau(a_1^j)}, \dots, \overrightarrow{i\tau(a_{\ell_j}^j)}\right), \dots, \left(\overrightarrow{j\tau(a_1^i)}, \dots, \overrightarrow{j\tau(a_{\ell_i}^i)}\right), \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \left(\overrightarrow{n\tau(a_1^n)}, \dots, \overrightarrow{n\tau(a_{\ell_n}^n)}\right)\right). \end{aligned}$$

Alors, d'après [AGM], on a

$$C_{\tau(\Delta)}(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = C_{\Delta}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n).$$

Si  $\delta = \sum_{\Delta} a_{\Delta} \Delta$  est une combinaison linéaire symétrique de graphes ascendants et  $C_{\delta}$  la cochaîne  $\sum_{\Delta} a_{\Delta} C_{\Delta}$ , alors, cette condition garantit que le terme correspondant à  $m_1 = \dots = m_n = 0$  dans la série  $C_{\delta}$  est  $|\cdot|$ -symétrique. Grâce au signe  $\varepsilon(m_1, \dots, m_n)$ , tous les autres termes le sont aussi.

### Exemple:

Prenons pour  $\Delta$  la “roue de longueur 3”:

$$\Delta = \left(\left(\overrightarrow{12}\right), \left(\overrightarrow{23}\right), \left(\overrightarrow{31}\right)\right).$$



Alors si  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sont des tenseurs d'ordre  $k_1, k_2, k_3$ ,

$$C_\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{1 \leq t_1, \dots, t_{k_1+k_2+k_3} \leq d} (-1)^{k_2-1} \partial_{t_{k_1+k_2+1}} \alpha_1^{t_1 \dots t_{k_1}} \partial_{t_1} \alpha_2^{t_{k_1+1} \dots t_{k_1+k_2}} \partial_{t_{k_1+1}} \alpha_3^{t_{k_1+k_2+1} \dots t_{k_1+k_2+k_3}} \partial_{t_2} \wedge \dots \wedge \partial_{t_{k_1}} \wedge \partial_{t_{k_1+2}} \wedge \dots \wedge \partial_{t_{k_1+k_2}} \wedge \partial_{t_{k_1+k_2+2}} \wedge \dots \wedge \partial_{t_{k_1+k_2+k_3}}.$$

Cette cochaîne n'est pas symétrique, sa symétrisation est:

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon_{|\alpha|}(\sigma) C_\Delta(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \alpha_{\sigma(3)}) = (3C_\Delta - 3C_{\Delta'}) (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

où  $\Delta'$  est le graphe aérien:

$$\Delta' = \left( \left( \overrightarrow{13} \right), \left( \overrightarrow{21} \right), \left( \overrightarrow{32} \right) \right).$$

$C$  est donc la cochaîne  $C_\delta$  associée à la combinaison symétrique de graphes linéaires  $\delta = 3\Delta - 3\Delta'$ .

#### 4. L'OPÉRATEUR DE COBORD SUR LES GRAPHES DE TYPE $(. \leq .)$

Dans ce paragraphe, nous définissons directement sur les combinaisons linéaires symétriques  $\delta$  de graphes de type  $(. \leq .)$ , un opérateur de cobord noté  $\partial$  correspondant à l'opérateur de cobord pour les cochaînes symétriques  $C_\delta$  définies par  $\delta$ . Dans [AGM], il est montré qu'un tel opérateur  $\partial\delta$  défini sur les graphes existe et vérifie  $C_{\partial\delta} = \partial C_\delta$ . Dans le cas des graphes ascendants, son expression peut être simplifiée.

Soit  $\Delta$  un graphe de type  $(. \leq .)$  ayant  $n$  sommets  $(1, \dots, n)$ .

$$\Delta = \left( \left( \overrightarrow{1a_1^1}, \dots, \overrightarrow{1a_{\ell_1}^1} \right), \dots, \left( \overrightarrow{na_1^n}, \dots, \overrightarrow{na_{\ell_n}^n} \right) \right).$$

Chaque sommet  $k$  de  $\Delta$  est de type  $(f_k \leq \ell_k)$ .

On fixe un indice  $j$  tel que  $0 \leq j \leq n$ . On renumérote les sommets de  $\Delta$  en  $(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)$ . On garde le graphe avec son orientation, c'est à dire qu'on obtient un graphe  $\Delta(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)$  qui a les mêmes flèches que  $\Delta$  mais leur nom a changé conformément au nouveau nom des sommets. L'ordre des flèches est inchangé.

$$\Delta(0, \dots, \hat{j}, \dots, n) = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0}, \dots, \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{kc_1^k}, \dots, \overrightarrow{kc_{\ell_{k+1}}^k} \right), \dots, \hat{j}, \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n}, \dots, \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right).$$

Chaque sommet  $k$  de  $\Delta(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)$  est de type  $(f_{k+1} \leq \ell_{k+1})$  si  $k < j$  et  $(f_k, \ell_k)$  si  $k > j$ .

On fixe un autre indice  $i < j$  et une partie  $I$  de  $Fin(i)$  dans ce graphe  $\Delta(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)$ . On construit les graphes  $\Delta_{i,j}^{I,r,s}$  et  $\Delta_{j,i}^{I,r,t}$  non compatibles de sommets  $(0, \dots, n)$  ainsi:

$$\Delta_{i,j}^{I,r,s} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{ic_1^i} \dots \underbrace{\overrightarrow{ij^i}}_{(s)} \dots \overrightarrow{ic_r^i} \right), \left( \overrightarrow{jc_{r+1}^i} \dots \overrightarrow{jc_{\ell_{i+1}}^i} \right), \dots, \hat{j}, \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right)$$

avec  $I = \text{Fin}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(i)$ ,  $\text{Fin}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(j) = \text{Fin}_{\Delta(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)}(i) \setminus I$  et  $s$  est la position de la flèche  $\overrightarrow{ij}$  dans  $\text{Deb}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(i)$ . On impose que  $i$  soit de type  $(f'_i \leq r+1)$  et que  $j$  soit de type  $(f'_j \leq \ell_{i+1} - r)$ . On a  $f'_i + f'_j = f_{i+1} + 1$ .

De même

$$\Delta_{j,i}^{I,r,t} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{jc_1^i} \dots \underbrace{\overrightarrow{ji^i}}_{(t)} \dots \overrightarrow{jc_r^i} \right), \left( \overrightarrow{ic_{r+1}^i} \dots \overrightarrow{ic_{\ell_{i+1}}^i} \right), \dots, \hat{j}, \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right)$$

avec  $I = \text{Fin}_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(i)$ ,  $\text{Fin}_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(j) = \text{Fin}_{\Delta(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)}(i) \setminus I$  et  $t$  est la position de la flèche  $\overrightarrow{ji}$  dans  $\text{Deb}_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(i)$ . On impose que  $i$  soit de type  $(f'_i \leq r+1)$  et que  $j$  soit de type  $(f'_j \leq \ell_{i+1} - r)$ . On a  $f'_i + f'_j = f_{i+1} + 1$ .

Ces graphes sont définis pour tout  $0 \leq r \leq \ell_{i+1}$  et  $1 \leq s, t \leq r+1$ .

**Définition 4.1.** (L'éclatement du sommet  $i$ )

Soit  $\Delta$  un graphe ayant  $n$  sommets  $(1, \dots, n)$ . On fixe deux indices  $i$  et  $j$  tels que  $0 \leq i < j \leq n$ . On renumérote les sommets de  $\Delta$  en  $(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)$ . On obtient un graphe  $\Delta(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)$  défini comme précédemment. L'éclatement du sommet  $i$  de  $\Delta(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)$  est la collection des graphes  $\Delta_{i,j}^{I,r,s}$  et  $\Delta_{j,i}^{I,r,t}$ , pour tout  $I \subset \text{Fin}_{\Delta(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)}(i)$ ,  $0 \leq r \leq \ell_{i+1}$  et  $1 \leq s, t \leq r+1$ .

On dit que le graphe  $\Delta_{i,j}^{I,r,s}$  (resp.  $\Delta_{j,i}^{I,r,t}$ ) se contracte proprement en  $i$  à  $\Delta$  si et seulement si

$$\inf \left\{ \#\text{Deb}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(i) + \#\text{Fin}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(i), \#\text{Deb}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(j) + \#\text{Fin}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(j) \right\} > 1$$

ou

$$\text{Deb}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(i) = \text{Fin}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(j) = \left( \overrightarrow{ij} \right) \text{ et } \text{Fin}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(i) = \text{Deb}_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(j) = \emptyset$$

(resp.

$$\inf \left\{ \#Deb_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(i) + \#Fin_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(i), \#Deb_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(j) + \#Fin_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(j) \right\} > 1$$

ou

$$Deb_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(j) = Fin_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(i) = \left( \vec{j}i \right) \text{ et } Fin_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(j) = Deb_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(i) = \emptyset.$$

On notera la famille de graphes vérifiant cette propriété:

$$\left\{ \Delta_{i,j}^{I,r,s} \text{ tels que } \Delta_{i,j}^{I,r,s} \xrightarrow{i}^{prop} \Delta \right\} \text{ (resp. } \left\{ \Delta_{j,i}^{I,r,t} \text{ tels que } \Delta_{j,i}^{I,r,t} \xrightarrow{i}^{prop} \Delta \right\}).$$

**Proposition 4.2.** (L'opérateur  $\partial$  sur les graphes de type  $(. \leq .)$ )

Soit  $\delta = \sum_{\Delta} a_{\Delta} \Delta$  une combinaison linéaire symétrique de graphes de type  $(. \leq .)$  ayant  $n$  sommets  $(1, \dots, n)$ . Alors

$$\partial C_{\delta} = \sum_{\Delta} a_{\Delta} C_{\partial \Delta}$$

où

$$\partial(\Delta) = - \sum_{0 \leq i < j \leq n} \left[ \sum_{\Delta_{j,i}^{I,r,t} \xrightarrow{i}^{prop} \Delta} \varepsilon_{j,i}^{r,t} \cdot \Delta_{j,i}^{I,r,t} + \sum_{\Delta_{i,j}^{I,r,s} \xrightarrow{i}^{prop} \Delta} \varepsilon_{i,j}^{r,s} \cdot \Delta_{i,j}^{I,r,s} \right].$$

Pour tout sommet  $a$ , posons  $\#Deb_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(a) = q_a$  et  $\#Deb_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(a) = p_a$ . Les signes sont:

$$\varepsilon_{j,i}^{r,t} = (-1)^{q_j(q_0 + \dots + q_{j-1})} (-1)^{(q_j-1)(q_0 + \dots + q_{i-1})} (-1)^{t-1}$$

et

$$\varepsilon_{i,j}^{r,s} = (-1)^{p_j(p_0 + \dots + p_{j-1})} (-1)^{(p_j-1)(p_0 + \dots + p_{i-1})} (-1)^{s-1} (-1)^{p_i p_j}.$$

**Preuve**

La cohomologie de Chevalley est donnée par:

$$\begin{aligned} \partial C_{\delta}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) &= \sum_{j=0}^n \varepsilon_{|\alpha|}(j, 0 \dots \hat{j} \dots n) (-1)^{|C_{\delta}|(|\alpha_j|-1)} \nabla_{\alpha_j} C_{\delta}(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n) \\ &+ \sum_{i=0}^n (-1)^{|C_{\delta}|} \varepsilon_{|\alpha|}(0 \dots \hat{i} \dots n, i) \nabla_{C_{\delta}(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)} \alpha_i \\ &- \sum_{i \neq j} \varepsilon_{|\alpha|}(j, i, 0, \dots, \hat{i} \dots \hat{j} \dots n) C_{\delta}(\nabla_{\alpha_j} \alpha_i, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n) \\ &= (I) + (II) + (III). \end{aligned}$$

Il y a des simplifications entre (I), (II) et (III). Dans [AGM], il est montré que chaque terme de (I) et (II) correspond à un graphe  $\Delta_{i,j}^{I,r,s}$  ou  $\Delta_{j,i}^{I,r,t}$  provenant d'un éclatement qui ne se contracte pas proprement sur  $\Delta$ , on dira que ce terme n'est pas propre. Il se simplifie avec un terme de (III) et il nous reste la somme des termes "propres" de (III):

$$\begin{aligned} \partial C_\delta(\alpha_0, \dots, \alpha_n) &= - \sum_{\Delta} a_\Delta \left[ \sum_{i < j} \varepsilon_{|\alpha|}(j, 0, \dots, \hat{j}, \dots, n) (-1)^{(|\alpha_j|-1)(|\alpha_0|+\dots+|\alpha_{i-1}|)} \right. \\ C_\Delta(\alpha_0, \dots, \underbrace{\nabla_{\alpha_j} \alpha_i}_{(i)}, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n) &+ \sum_{i < j} \varepsilon_{|\alpha|}(j, 0, \dots, \hat{j}, \dots, n) (-1)^{(|\alpha_j|-1)(|\alpha_0|+\dots+|\alpha_{i-1}|)} \\ \left. (-1)^{|\alpha_i||\alpha_j|} C_\Delta(\alpha_0, \dots, \underbrace{\nabla_{\alpha_i} \alpha_j}_{(i)}, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n) \right]. \end{aligned}$$

Après simplification, pour chaque graphe  $\Delta$ , l'opérateur

$$C_\Delta(\alpha_0, \dots, \underbrace{\nabla_{\alpha_i} \alpha_j}_{(i)}, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n)$$

est la somme des termes de la forme  $C_{\Delta_{i,j}^{I,r,s}}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  où  $\Delta_{i,j}^{I,r,s}$  se contracte proprement en  $i$  sur  $\Delta$ . De même l'opérateur

$$C_\Delta(\alpha_0, \dots, \underbrace{\nabla_{\alpha_j} \alpha_i}_{(i)}, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n)$$

est la somme des termes de la forme  $C_{\Delta_{j,i}^{I,r,t}}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  où  $\Delta_{j,i}^{I,r,t}$  se contracte proprement en  $i$  sur  $\Delta$ .

On vérifie que ces termes apparaissent avec les signes  $\varepsilon_{i,j}^{r,s}$  respectivement  $\varepsilon_{j,i}^{r,t}$ .

**Définition 4.3.** (Espaces de cohomologie sur les graphes)

*Une combinaison linéaire symétrique  $\delta$  de graphes de type  $(\cdot \leq \cdot)$  est un cocycle si  $\partial\delta = 0$ , un cobord s'il existe une combinaison linéaire symétrique  $\beta$  telle que  $\delta = \partial\beta$ .*

*L'espace  $Z^n$  des  $n$ -cocycles est l'espace des combinaisons symétriques de graphes linéaires ayant  $n$  sommets et qui sont des cocycles.*

*L'espace  $B^n$  des  $n$ -cobords est l'espace des combinaisons de graphes qui sont les cobords de combinaisons symétriques de graphes ayant  $n - 1$  sommets.*

*Le  $n^{\text{ème}}$  espace de cohomologie des graphes  $H^n$  est le quotient de l'espace  $Z^n$  par l'espace  $B^n$ .*

## 5. SYMBOLE D'UN GRAPHE

Soit  $\Delta$  un graphe de type  $(. \leq .)$  de sommets numérotés  $(1, \dots, n)$ . On peut distinguer cinq classes de sommets  $i$ :

Classe 1: les sommets  $i$  de type  $(0 \leq \ell_i)$  avec  $\ell_i > 1$ . On posera  $\mathcal{O}(i) = (0, \ell_i)$ .

Classe 2: les sommets  $i$  de type  $(f_i \leq \ell_i)$  avec  $\ell_i > f_i \geq 1$ . On posera  $\mathcal{O}(i) = (f_i, \ell_i)$ .

Classe 3: les sommets  $i$  de type  $(1 \leq 1)$ . On posera  $\mathcal{O}(i) = (1, 1)$ .

Classe 4: les sommets  $i$  de type  $(0 \leq 1)$ . On posera  $\mathcal{O}(i) = (0, 1)$ .

Classe 5: les sommets  $i$  de type  $(0 \leq 0)$ . On posera  $\mathcal{O}(i) = (0, 0)$ .

On ordonne les types des sommets suivant  $(*)$  en posant:

$$(0, \ell_i) > (f_j, \ell_j) > (1, 1) > (0, 1) > (0, 0),$$

$$(0, \ell_i) \geq (0, \ell_{i'}) \Leftrightarrow \ell_i \geq \ell_{i'} \text{ et } (f_i, \ell_i) \geq (f_{i'}, \ell_{i'}) \Leftrightarrow \begin{cases} \ell_i \geq \ell_{i'}, \\ \ell_i = \ell_{i'} \text{ et } f_i \geq f_{i'}. \end{cases}$$

L'ordre  $\mathcal{O}(\Delta)$  d'un graphe  $\Delta$  de type  $(. \leq .)$  est le mot formé par les ordres de ses sommets:

$$\mathcal{O}(\Delta) = (\mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n)).$$

On ordonne les ordres des graphes par l'ordre lexicographique, en respectant  $(*)$ .

Si  $\delta = \sum_{\Delta} a_{\Delta} \Delta$  est une combinaison linéaire symétrique de graphes ascendants, on définit l'ordre de  $\delta$  par:

$$\mathcal{O}(\delta) = \text{Max}\{\mathcal{O}(\Delta), a_{\Delta} \neq 0\}$$

et on appellera symbole de  $\delta$  la combinaison linéaire non symétrique:

$$\sigma_{\delta} = \sum_{\mathcal{O}(\Delta) = \mathcal{O}(\delta)} a_{\Delta} \Delta.$$

Comme  $\delta$  est symétrique, son ordre a la forme:

$$\mathcal{O}(\delta) =$$

$$((0, \ell_1), \dots, (0, \ell_{k_0-1}), (f_{k_0}, \ell_{k_0}), \dots, (f_{k_1-1}, \ell_{k_1-1}), \underset{(k_1)}{(1, 1)}, \dots, \underset{(k_2)}{(1, 1)}, \underset{(k_2)}{(0, 1)}, \dots, \underset{(k_3)}{(0, 1)}, \underset{(k_3)}{(0, 0)}, \dots)$$

avec

$$\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_{k_0-1}, \text{ et } (f_{k_0}, \ell_{k_0}) \geq \dots \geq (f_{k_1-1}, \ell_{k_1-1})$$

(on peut avoir  $k_0 = 1$  ou  $k_1 = k_0$ , etc. . .)

**Proposition 5.1.** (Le symbole de  $\partial\delta$ )

Soit  $\delta$  une combinaison linéaire symétrique de graphes aériens ascendants, d'ordre

$$\mathcal{O}(\delta) =$$

$$((0, \ell_1), \dots, (0, \ell_{k_0-1}), (f_{k_0}, \ell_{k_0}), \dots, (f_{k_1-1}, \ell_{k_1-1}), \underbrace{(1, 1)}_{(k_1)}, \dots, \underbrace{(1, 1)}_{(k_2)}, \underbrace{(0, 1)}_{(k_2)}, \dots, \underbrace{(0, 1)}_{(k_3)}, \underbrace{(0, 0)}_{(k_3)}, \dots)$$

Alors, chaque graphe  $\Delta_{i,j}^{I,r,s}$  et  $\Delta_{j,i}^{I,r,t}$  apparaissant dans  $\partial\delta$  est d'ordre au plus:

$$\mathcal{O}(\delta) \oplus (1, 1) =$$

$$((0, \ell_1), \dots, (0, \ell_{k_0-1}), (f_{k_0}, \ell_{k_0}), \dots, (f_{k_1-1}, \ell_{k_1-1}), \underbrace{(1, 1)}_{(k_1)}, \dots, \underbrace{(1, 1)}_{(k_2+1)}, \underbrace{(0, 1)}_{(k_2+1)}, \dots, \underbrace{(0, 1)}_{(k_3+1)}, \underbrace{(0, 0)}_{(k_3+1)}, \dots).$$

Si  $\mathcal{O}(\partial\delta) = \mathcal{O}(\delta) \oplus (1, 1)$ , alors le symbole de  $\partial\delta$  est:

$$\begin{aligned} \sigma_{\partial\delta} &= - \sum_{\Delta \in \sigma_\delta} a_\Delta \left\{ \sum_{\substack{i < j \\ 0 \leq i < k_0-1 \\ k_1-1 \leq j \leq k_2-1}} \sum_{\Delta_{i,j}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \xrightarrow[\text{prop}]{i} \Delta} \varepsilon_{i,j}^{\ell_{i+1}-1,s} \Delta_{i,j}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \right. \\ &+ \sum_{\substack{i < j \\ k_0-1 \leq i < k_1-1 \\ k_1-1 \leq j \leq k_2-1}} \left[ \sum_{\Delta_{j,i}^{I,0,1} \xrightarrow[\text{prop}]{i} \Delta} \varepsilon_{j,i}^{0,1} \Delta_{j,i}^{I,0,1} + \sum_{\Delta_{i,j}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \xrightarrow[\text{prop}]{i} \Delta} \varepsilon_{i,j}^{\ell_{i+1}-1,s} \Delta_{i,j}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \right] \\ &+ \sum_{\substack{i < j \\ k_1-1 \leq i < k_2-1 \\ k_1-1 \leq j \leq k_2-1}} \left[ \sum_{\Delta_{j,i}^{0,1} \xrightarrow[\text{prop}]{i} \Delta} \varepsilon_{j,i}^{0,1} \Delta_{j,i}^{I,0,1} + \sum_{\Delta_{i,j}^{I,0,1} \xrightarrow[\text{prop}]{i} \Delta} \varepsilon_{i,j}^{0,1} \Delta_{i,j}^{I,0,1} \right] \left. \right\} \\ &= \clubsuit. \end{aligned}$$

Rciproquement, si le second membre  $\clubsuit$  est différent de 0, alors,  $\mathcal{O}(\partial\delta) = \mathcal{O}(\delta) \oplus (1, 1)$  et il sera égal à  $\sigma_{\partial\delta}$ .

**Preuve**

Fixons un couple  $(i, j)$  avec  $0 \leq i < j \leq n$ . Il est clair que dans la décomposition de  $\partial(\Delta)$ , les ordres des graphes  $\Delta_{j,i}^{I,r,t}$  ou  $\Delta_{i,j}^{I,r,s}$  sont:

\* Si  $0 \leq i < k_0 - 1$ , alors

$$\mathcal{O}(\Delta_{j,i}^{I,r,t}) = ((0, \ell_1), \dots, \underbrace{(1, \ell_{i+1} - r)}_{(i)}, \dots, \underbrace{(0, r + 1)}_{(j)}, \dots) \quad \circ \quad 1 \leq r < \ell_{i+1}.$$

Donc  $\mathcal{O}(\Delta_{j,i}^{I,r,t}) < \mathcal{O}(\delta) \oplus (1, 1)$ . Il n'y a aucun graphe  $\Delta_{j,i}^{I,r,t}$ , dans ce cas, qui apparaît dans  $\clubsuit$ .

D'autre part:

$$\mathcal{O}(\Delta_{i,j}^{I,r,s}) = ((0, \ell_1), \dots, \underbrace{(0, r+1)}_{(i)}, \dots, \underbrace{(1, \ell_{i+1}-r)}_{(j)}, \dots) \quad \text{o } 1 \leq r < \ell_{i+1}.$$

Donc  $\mathcal{O}(\Delta_{i,j}^{I,r,s}) \leq \mathcal{O}(\delta) \oplus (1, 1)$  et l'égalité n'est vraie que si  $r = \ell_{i+1} - 1$  et  $k_1 - 1 \leq j \leq k_2 - 1$ . Pour chaque  $s$  compris entre 1 et  $\ell_{i+1}$ , il y a un seul graphe

$$\Delta_{i,j}^{I, \ell_{i+1}-1, s} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{ic_1^i} \dots \underbrace{\overrightarrow{ij}}_{(s)} \dots \overrightarrow{ic_{\ell_{i+1}-1}^i} \right), \left( \overrightarrow{jc_{\ell_{i+1}}^i} \right), \dots, \hat{j} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right)$$

\* Si  $k_0 - 1 \leq i < k_1 - 1$ , alors

$$\mathcal{O}(\Delta_{j,i}^{I,r,t}) = ((0, \ell_1), \dots, \underbrace{(f'_i, \ell_{i+1}-r)}_{(i)}, \dots, \underbrace{(f'_j, r+1)}_{(j)}, \dots) \quad \text{o } 0 \leq r < \ell_{i+1}.$$

Donc  $\mathcal{O}(\Delta_{j,i}^{I,r,t}) \leq \mathcal{O}(\delta) \oplus (1, 1)$  et l'égalité n'est vraie que si  $r = 0, t = 1, f'_i = f_{i+1}$  et  $k_1 - 1 \leq j \leq k_2 - 1$ . Il y a  $f_{i+1}$  graphes  $\Delta_{j,i}^{I,0,1}$  dans ce cas:

$$\Delta_{j,i}^{I,0,1} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{ji} \right), \left( \overrightarrow{ic_1^i} \dots \overrightarrow{ic_{\ell_{i+1}}^i} \right), \dots, \hat{j} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right)$$

où les  $f_{i+1}$  flèches arrivantes sur  $i$  dans  $\Delta(0, \dots, \hat{j} \dots, n)$  seront réparties une sur  $j$  et les  $f_{i+1} - 1$  qui restent sur  $i$  dans  $\Delta_{j,i}^{I,0,1}$  et on a  $f_{i+1}$  possibilités.

D'autre part:

$$\mathcal{O}(\Delta_{i,j}^{I,r,s}) = ((0, \ell_1), \dots, \underbrace{(f'_i, r+1)}_{(i)}, \dots, \underbrace{(f'_j, \ell_{i+1}-r)}_{(j)}, \dots) \quad \text{o } 0 \leq r < \ell_{i+1}.$$

Donc  $\mathcal{O}(\Delta_{i,j}^{I,r,s}) \leq \mathcal{O}(\delta) \oplus (1, 1)$  et l'égalité n'est vraie que si  $r = \ell_{i+1} - 1, f'_i = f_{i+1}$  et  $k_1 - 1 \leq j \leq k_2 - 1$ . Pour chaque  $s$  compris entre 1 et  $\ell_{i+1}$ , il y a un seul graphe

$$\Delta_{i,j}^{I, \ell_{i+1}-1, s} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{ic_1^i} \dots \underbrace{\overrightarrow{ij}}_{(s)} \dots \overrightarrow{ic_{\ell_{i+1}-1}^i} \right), \left( \overrightarrow{jc_{\ell_{i+1}}^i} \right), \dots, \hat{j} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right)$$

\* Si  $k_1 - 1 \leq i < k_2 - 1$ , alors

$$\mathcal{O}(\Delta_{j,i}^{I,r,t}) = \mathcal{O}(\Delta_{i,j}^{I,r,s}) = ((0, \ell_1), \dots, \underbrace{(1, 1)}_{(i)}, \dots, \underbrace{(1, 1)}_{(j)}, \dots) \quad \text{o } r = 0 \text{ et } s = t = 1.$$

Donc pour et seulement pour  $i < j \leq k_2 - 1$ ,  $\mathcal{O}(\Delta_{j,i}^{I,0,1}) = \mathcal{O}(\Delta_{i,j}^{I,0,1}) = \mathcal{O}(\delta) \oplus (1, 1)$  et il y a un seul graphe  $\Delta_{j,i}^{0,1}$  et un seul graphe  $\Delta_{i,j}^{I,0,1}$  dans ce cas.

$$\Delta_{j,i}^{I,0,1} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{ji} \right), \left( \overrightarrow{ic_1^i} \right), \dots, \hat{j} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right)$$

$$\Delta_{i,j}^{I,0,1} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{ij} \right), \left( \overrightarrow{jc_1^i} \right), \dots, \hat{j} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right)$$

\* Si  $i \geq k_2$ , pour tout  $j > i$ , on a  $\mathcal{O}(\Delta_{j,i}^{I,r,t}), \mathcal{O}(\Delta_{i,j}^{I,r,s}) < \mathcal{O}(\delta) \oplus (1, 1)$ , dans ce cas, ces graphes n'apparaissent pas dans  $\clubsuit$ .

Enfin, si  $\Delta$  est un graphe de  $\delta$  qui n'apparaît pas dans le symbole  $\sigma_\delta$ , alors les ordres des graphes  $\Delta_{i,j}^{I,r,s}$  et  $\Delta_{j,i}^{I,r,t}$  qui se contractent sur  $\Delta$  sont tous strictement plus petits que  $\mathcal{O}(\delta) \oplus (1, 1)$ . On regarde donc seulement les  $\Delta$  qui apparaissent dans  $\clubsuit$ .

A partir de maintenant, on note abusivement

$$\sigma_{\partial\delta} = \sum_{\substack{\Delta' \in \partial\delta \\ \mathcal{O}(\Delta') = \mathcal{O}(\delta) \oplus (1,1)}} a_{\Delta'} \Delta', \text{ si } \partial\delta = \sum_{\Delta'} a_{\Delta'} \Delta'.$$

Définissons maintenant l'opérateur d'homotopie.

**Définition 5.2.** (L'homotopie)

Soit  $\Delta$  un graphe de type  $(. \leq .)$  de sommets  $(0, \dots, n)$ , ayant des sommets  $i$  d'ordre  $(1, 1)$ . On définit l'homotopie  $h$  comme l'application qui transforme le graphe  $\Delta$  en le graphe  $h(\Delta)$  défini ainsi:

On considère  $i_0$ , le plus grand des indices  $i$  d'ordre  $(1, 1)$ . La flèche issue de  $i_0$  est  $\overrightarrow{i_0 a}$ . Le graphe  $h(\Delta)$  est le graphe de sommets  $(0, \dots, \hat{i}_0, \dots, n)$  obtenu en comprimant la flèche  $\overrightarrow{i_0 a}$  de  $\Delta$  et en identifiant les sommets  $i_0$  et  $a$  au sommet  $a$ . On remplace la flèche  $\overrightarrow{ci_0}$  dans  $\Delta$  par la flèche  $\overrightarrow{ca}$  dans  $h(\Delta)$ .

Si  $\Delta$  n'a pas de sommets d'ordre  $(1, 1)$ , on pose  $h(\Delta) = 0$ .

On prolonge  $h$  linéairement à l'espace des combinaisons linéaires de graphes.

**Proposition 5.3.** (Symbole et homotopie)

Soit  $\delta$  une combinaison linéaire symétrique de graphes de type  $(. \leq .)$  ayant  $n$  sommets numérotés  $(1, \dots, n)$  et d'ordre

$$\mathcal{O}(\delta) =$$

$$\left( (0, \ell_1), \dots, (0, \ell_{k_0-1}), (f_{k_0}, \ell_{k_0}), \dots, (f_{k_1-1}, \ell_{k_1-1}), \underset{(k_1)}{(1, 1)}, \dots, \underset{(k_2)}{(1, 1)}, \underset{(k_2)}{(0, 1)}, \dots, \underset{(k_3)}{(0, 1)}, \underset{(k_3)}{(0, 0)}, \dots \right).$$



Alors

$$h(\sigma_{\partial\delta}) = \sigma_{\partial h(\sigma_\delta)} + (-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_{k_2-1}} \left( \sum_{1 \leq i < k_0} \ell_i + \sum_{k_0 \leq i < k_1} (\ell_i - f_i) \right) \sigma_\delta.$$

**Preuve**

On reprend les notations de la proposition précédente. On a donc:

$$\begin{aligned} \sigma_{\partial\delta} = & - \sum_{\Delta \in \sigma_\delta} a_\Delta \left\{ \sum_{\substack{i < j \\ 0 \leq i < k_0-1 \\ k_1-1 \leq j \leq k_2-1}} \sum_{\Delta_{i,j}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{i,j}^{\ell_{i+1}-1,s} \Delta_{i,j}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \right. \\ & + \sum_{\substack{i < j \\ k_0-1 \leq i < k_1-1 \\ k_1-1 \leq j \leq k_2-1}} \left[ \sum_{\Delta_{j,i}^{I,0,1} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{j,i}^{0,1} \Delta_{j,i}^{I,0,1} + \sum_{\Delta_{i,j}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{i,j}^{\ell_{i+1}-1,s} \Delta_{i,j}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \right] \\ & \left. + \sum_{\substack{i < j \\ k_1-1 \leq i < k_2-1 \\ k_1-1 \leq j \leq k_2-1}} \left[ \sum_{\Delta_{j,i}^{I,0,1} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{j,i}^{0,1} \Delta_{j,i}^{I,0,1} + \sum_{\Delta_{i,j}^{I,0,1} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{i,j}^{0,1} \Delta_{i,j}^{I,0,1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Le dernier sommet d'ordre  $(1, 1)$  dans  $\partial\delta$  est  $k_2 - 1$ . Dans l'expression précédente, on regarde les termes pour  $j = k_2 - 1$ :

$$\begin{aligned} = & - \sum_{\Delta \in \sigma_\Delta} a_\Delta \left\{ \sum_{\substack{i < j \\ 0 \leq i < k_0-1 \\ j = k_2-1}} \sum_{\Delta_{i,k_2-1}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{i,k_2-1}^{\ell_{i+1}-1,s} \Delta_{i,k_2-1}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \right. \\ & + \sum_{\substack{i < j \\ k_0-1 \leq i < k_1-1 \\ j = k_2-1}} \left[ \sum_{\Delta_{k_2-1,i}^{I,0,1} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{k_2-1,i}^{0,1} \Delta_{k_2-1,i}^{I,0,1} + \sum_{\Delta_{i,k_2-1}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{i,k_2-1}^{\ell_{i+1}-1,s} \Delta_{i,k_2-1}^{I,\ell_{i+1}-1,s} \right] \\ & \left. + \sum_{\substack{i < j \\ k_1-1 \leq i < k_2-1 \\ j = k_2-1}} \left[ \sum_{\Delta_{k_2-1,i}^{I,0,1} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{k_2-1,i}^{0,1} \Delta_{k_2-1,i}^{I,0,1} + \sum_{\Delta_{i,k_2-1}^{I,0,1} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{i,k_2-1}^{0,1} \Delta_{i,k_2-1}^{I,0,1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

\* Pour  $0 \leq i < k_0 - 1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{i,k_2-1}^{I,\ell_{i+1}-1,s} = & \left( (\overrightarrow{0c_1^0 \dots 0c_{\ell_1}^0}), \dots, (\overrightarrow{ic_1^i \dots \underbrace{i(k_2-1)}_{(s)} \dots ic_{\ell_{i+1}-1}^i}), (\overrightarrow{(k_2-1)c_{\ell_{i+1}}^i}), \dots \right. \\ & \left. \dots \widehat{k_2-1} \dots, (\overrightarrow{nc_1^n \dots nc_{\ell_n}^n}) \right). \end{aligned}$$

Appliquons l'homotopie  $h$ , on obtient

$$h(\Delta_{i,k_2-1}^{I,\ell_{i+1}-1,s}) = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{ic_1^i} \dots \underbrace{\overrightarrow{i(c_{\ell_{i+1}}^i)}}_{(s)} \dots \overrightarrow{ic_{\ell_{i+1}-1}^i} \right), \dots \widehat{k_2 - 1} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right)$$

et le signe sera

$$\varepsilon_{i,k_2-1}^{\ell_{i+1}-1,s} = (-1)^{s-1} (-1)^{\ell_{i+1}} (-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_{k_2-1}}.$$

D'où, pour chaque  $1 \leq s \leq \ell_{i+1}$ ,

$$\varepsilon_{i,k_2-1}^{\ell_{i+1}-1,s} h(\Delta_{i,k_2-1}^{I,\ell_{i+1}-1,s}) = -(-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_{k_2-1}} \Delta(0, \dots \widehat{k_2 - 1} \dots, n).$$

\* Pour  $k_0 - 1 \leq i < k_1 - 1$ .

- On a d'abord  $f_{i+1}$  graphes de type  $\Delta_{k_2-1,i}$

$$\Delta_{k_2-1,i}^{I,0,1} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{(k_2-1)i} \right), \left( \overrightarrow{ic_1^i} \dots \overrightarrow{ic_{\ell_{i+1}}^i} \right), \dots \widehat{k_2 - 1} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right)$$

alors

$$h(\Delta_{k_2-1,i}^{I,0,1}) = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{ic_1^i} \dots \overrightarrow{ic_{\ell_{i+1}}^i} \right), \dots \widehat{k_2 - 1} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right).$$

D'où,

$$\varepsilon_{k_2-1,i}^{0,1} h(\Delta_{k_2-1,i}^{I,0,1}) = (-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_{k_2-1}} \Delta(0, \dots \widehat{k_2 - 1} \dots, n).$$

- On a aussi un graphe de type  $\Delta_{i,k_2-1}$

$$\Delta_{i,k_2-1}^{I,\ell_{i+1}-1,s} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{ic_1^i} \dots \underbrace{\overrightarrow{i(k_2-1)}}_{(s)} \dots \overrightarrow{ic_{\ell_{i+1}-1}^i} \right), \left( \overrightarrow{(k_2-1)c_{\ell_{i+1}}^i} \right), \dots \right. \\ \left. \dots \widehat{k_2 - 1} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right).$$

D'où, pour chaque  $1 \leq s \leq \ell_{i+1}$ ,

$$\varepsilon_{i,k_2-1}^{\ell_{i+1}-1,s} h(\Delta_{i,k_2-1}^{I,\ell_{i+1}-1,s}) = -(-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_{k_2-1}} \Delta(0, \dots \widehat{k_2 - 1} \dots, n).$$

\* Pour  $k_1 - 1 \leq i < k_2 - 1$ , on a aussi des graphes des deux types :

$$\Delta_{k_2-1,i}^{I,0,1} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{(k_2-1)i} \right), \left( \overrightarrow{ic_1^i} \right), \dots, \widehat{k_2-1} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right).$$

Donc

$$\varepsilon_{k_2-1,i}^{0,1} h(\Delta_{k_2-1,i}^{I,0,1}) = (-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_{k_2-1}} \Delta(0, \dots, \widehat{k_2-1} \dots, n).$$

De même, on a

$$\Delta_{i,k_2-1}^{I,0,1} = \left( \left( \overrightarrow{0c_1^0} \dots \overrightarrow{0c_{\ell_1}^0} \right), \dots, \left( \overrightarrow{i(k_2-1)} \right), \left( \overrightarrow{(k_2-1)c_1^i} \right), \dots, \widehat{k_2-1} \dots, \left( \overrightarrow{nc_1^n} \dots \overrightarrow{nc_{\ell_n}^n} \right) \right).$$

Donc

$$\varepsilon_{i,k_2-1}^{0,1} h(\Delta_{i,k_2-1}^{I,0,1}) = -(-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_{k_2-1}} \Delta(0, \dots, \widehat{k_2-1} \dots, n).$$

Enfin, dans l'expression de  $\sigma_{\partial\Delta}$ , on regarde les termes pour  $j < k_2 - 1$ . D'abord, par définition de l'homotopie  $h$  si  $j < k_2 - 1$ , on a:

$$\Delta_{i,j}^{I,r,s} \xrightarrow[i]{prop} \Delta \iff h(\Delta_{i,j}^{I,r,s}) \xrightarrow[i]{prop} h(\Delta)$$

et

$$\Delta_{j,i}^{I,r,t} \xrightarrow[i]{prop} \Delta \iff h(\Delta_{j,i}^{I,r,t}) \xrightarrow[i]{prop} h(\Delta).$$

De plus les signes  $\varepsilon_{i,j}^{r,s}$  et  $\varepsilon_{j,i}^{r,t}$  ne dépendent pas de  $k_2 - 1$ , on en déduit que la somme de tous les termes pour  $j < k_2 - 1$  est:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\partial\delta} &= - \sum_{\Delta \in \sigma_\delta} a_\Delta \left\{ \sum_{\substack{i < j \\ 0 \leq i < k_0 - 1 \\ k_1 - 1 \leq j < k_2 - 1}} \sum_{\Delta_{i,j}^{I, \ell_{i+1} - 1, s} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{i,j}^{\ell_{i+1} - 1, s} \Delta_{i,j}^{I, \ell_{i+1} - 1, s} \right. \\
&+ \sum_{\substack{i < j \\ k_0 - 1 \leq i < k_1 - 1 \\ k_1 - 1 \leq j < k_2 - 1}} \left[ \sum_{\Delta_{j,i}^{I, 0, 1} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{j,i}^{0, 1} \Delta_{j,i}^{I, 0, 1} + \sum_{\Delta_{i,j}^{I, \ell_{i+1} - 1, s} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{i,j}^{\ell_{i+1} - 1, s} \Delta_{i,j}^{I, \ell_{i+1} - 1, s} \right] \\
&+ \sum_{\substack{i < j \\ k_1 - 1 \leq i < k_2 - 1 \\ k_1 - 1 \leq j < k_2 - 1}} \left[ \sum_{\Delta_{j,i}^{I, 0, 1} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{j,i}^{0, 1} \Delta_{j,i}^{I, 0, 1} + \sum_{\Delta_{i,j}^{I, 0, 1} \xrightarrow{prop} \Delta} \varepsilon_{i,j}^{0, 1} \Delta_{i,j}^{I, 0, 1} \right] \left. \right\} \\
&= \sigma_{\partial h(\sigma_\Delta)}(0, \dots, \widehat{k_2 - 1}, \dots, n).
\end{aligned}$$

Ceci démontre notre proposition.

## 6. COHOMOLOGIE DES GRAPHES ASCENDANTS

Disons qu'un sommet  $i$  d'un graphe de type  $(. \leq .)$   $\Delta$  est simple si  $\#Deb(i) \leq 1$  et  $\#Fin(i) \leq 1$ .

**Proposition 6.1.** (Modulo un cobord, le symbole d'un cocycle ne contient que des sommets simples)

*Soit  $\delta$  une combinaison linéaire symétrique de graphes de type  $(. \leq .)$ . On suppose que  $\delta$  est un cocycle ( $\partial\delta = 0$ ). Alors il existe un cobord  $\partial\beta$  tel que le symbole  $\sigma_{\delta - \partial\beta}$  de  $\delta - \partial\beta$  ne contient que des graphes  $\Delta$  dont tous les sommets sont simples.*

### Preuve

Puisque  $\delta$  est un cocycle,  $h(\sigma_{\partial\delta}) = 0$ . On a alors:

$$0 = (-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_{k_2 - 1}} \left( \sum_{1 \leq i < k_0} \ell_i + \sum_{k_0 \leq i < k_1} (\ell_i - f_i) \right) \sigma_\delta + \sigma_{\partial h(\sigma_\delta)} = a\sigma_\delta + \sigma_{\partial h(\sigma_\delta)}.$$

Dire que  $\sigma_\delta$  contient au moins un graphe possédant un sommet non simple, c'est dire que dans  $\mathcal{O}(\delta)$ ,  $k_1 > 0$ . Dans l'expression précédente, le coefficient  $a$  de  $\sigma_\delta$  est non nul. Puisque  $\sigma_\delta$  n'est pas nul, on en déduit que  $h(\sigma_\delta)$  n'est pas nul, donc  $k_2 > k_1$ , il existe des sommets d'ordre  $(1, 1)$  dans les graphes  $\Delta$  de  $\sigma_\delta$ .

Posons  $\beta_1 = -\frac{1}{a}S(h(\sigma_\delta))$ , o  $S(h(\sigma_\delta))$  est la symétrisation du graphe  $h(\sigma_\delta)$ . D'abord par construction, les graphes apparaissant dans  $S(h(\sigma_\delta))$  mais pas dans  $h(\sigma_\delta)$  sont

d'ordre strictement plus petit que les graphes apparaissant dans  $h(\sigma_\delta)$ , ou:

$$\sigma_{h(\sigma_\delta)} = \sigma_{S(h(\sigma_\delta))}.$$

Ensuite, on a vu que pour calculer le symbole de  $\partial\delta$ , on ne considérait que les graphes du symbole de  $\delta$  donc:

$$\sigma_{\partial h(\sigma_\delta)} = \sigma_{\partial S(h(\sigma_\delta))} = -a\sigma_{\partial\beta_1}$$

Alors,

$$\sigma_{\partial\beta_1} = \sigma_\delta.$$

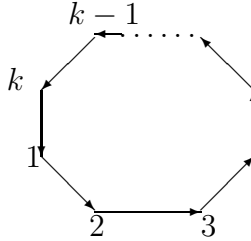
Autrement dit  $\delta_1 = \delta - \partial\beta_1$  a un ordre strictement plus petit que  $\mathcal{O}(\delta)$ . Si le symbole de  $\delta_1$  a des graphes avec des sommets non simples, on peut recommencer cette opération. Au bout d'un nombre fini d'étapes, on arrive sur une combinaison de graphes  $\delta - \partial\beta$  dont le symbole ne contient que des sommets simples:

$$\mathcal{O}(\delta - \partial\beta) = \left( (1, 1), \dots, (1, 1), (0, 1), \dots, (0, 1), (0, 0), \dots, (0, 0) \right).$$

Donc tous les graphes de  $\delta - \partial\beta$  n'ont eux aussi que des sommets simples. Ces graphes sont des graphes vectoriels ou linéaires à sommets simples étudiés dans [AAC1] et [AAC2].

**Définition 6.2.** (Les roues)

Une roue symétrique  $R_k$  de longueur  $k$  est le symétrisé de la roue simple qui est le graphe  $\Delta_k$  ayant  $k$  sommets  $(1, \dots, k)$  et les  $k$  flèches  $\left( (\overrightarrow{12}), (\overrightarrow{23}), \dots, (\overrightarrow{(k-1)k}), (\overrightarrow{k1}) \right)$ .



Le calcul de la cohomologie des graphes vectoriels et linéaires a été réalisé dans [AAC1] et [AAC2]. Comme nous nous sommes ramenés à cette situation, on obtient, de même, ici:

**Théorème 6.3.** (La cohomologie de Chevalley des graphes de type  $(\cdot \leq \cdot)$ )

La cohomologie de Chevalley des graphes de type  $(. \leq .)$  est donnée par les roues de longueur impaire. Plus précisément, pour tout  $n$ , une base de  $H^n$  est donnée par

$$\left\{ R_{2k_1+1} \wedge R_{2k_2+1} \wedge \cdots \wedge R_{2k_p+1}, \quad \text{avec } k_1 < k_2 < \cdots < k_p, \sum_{i=1}^p (2k_i + 1) = n \right\}.$$

**Théorème 6.4.** (La cohomologie de Chevalley de l'action adjointe des tenseurs ascendants)

La cohomologie de Chevalley de l'action adjointe des tenseurs ascendants dans  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  est donnée par des cochaînes  $C_\delta$  où  $\delta$  est une combinaison de roues impaires de longueur strictement plus petite que  $2d$ .

### Preuve

Soit  $C_\delta$  un cocycle défini avec des graphes de type  $(. \leq .)$ , alors,  $\partial C_\delta = C_{\partial\delta} = 0$ . D'après le théorème précédent,

$$\delta = \partial\beta + \sum_{\substack{r_1 < \cdots < r_q \\ r_j \text{ impair}}} a_{r_1 \dots r_q} R_{r_1} \wedge \cdots \wedge R_{r_q}.$$

Montrons que si  $2p + 1 > 2d$ , alors,  $C_{R_{2p+1}} = 0$ .

Prenons  $\Delta$  la roue de longueur  $2p + 1$ :

$$\Delta = \left( \left( \overrightarrow{1\bar{2}} \right), \left( \overrightarrow{2\bar{3}} \right), \dots, \left( \overrightarrow{(2p+1)\bar{1}} \right) \right).$$

Alors si  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p+1}$  sont des tenseurs d'ordre  $k_1, \dots, k_{2p+1}$ . Posons

$$I_1 = \{1, \dots, k_1\}, I_2 = \{k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2\}, \dots, I_{2p+1} = \left\{ \sum_{j < 2p+1} k_j + 1, \dots, \sum_{j \leq 2p+1} k_j \right\}.$$

Soient  $(j_1, \dots, j_{2p+1}) \in I_1 \times \cdots \times I_{2p+1}$ , posons  $\widehat{I}_1 = I_1 \setminus \{j_1\}, \dots, \widehat{I}_{2p+1} = I_{2p+1} \setminus \{j_{2p+1}\}$ . Alors,

$$\begin{aligned} C_\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_{2p+1}) &= \\ & \sum_{1 \leq t_1, \dots, t_{k_1 + \dots + k_{2p+1}} \leq d} \sum_{(j_1, \dots, j_{2p+1}) \in I_1 \times \cdots \times I_{2p+1}} \varepsilon(j_1, \dots, j_{2p+1}, \widehat{I}_1, \dots, \widehat{I}_{2p+1}) \\ & \partial_{t_{j_{2p+1}}} \alpha_1^{t_{I_1}} \partial_{t_{j_1}} \alpha_2^{t_{I_2}} \dots \partial_{t_{j_{2p}}} \alpha_{2p+1}^{t_{I_{2p+1}}} \partial_{t_{\widehat{I}_1}} \wedge \cdots \wedge \partial_{t_{\widehat{I}_{2p+1}}}. \end{aligned}$$

On définit  $2p + 1$  champs de vecteurs dépendant de  $t_{\widehat{I}_1}, \dots, t_{\widehat{I}_{2p+1}}$  en posant

$$\xi_1 = \sum_{t_{j_1}=1}^d \alpha_1^{t_{I_1}} \partial_{t_{j_1}}, \dots, \xi_{2p+1} = \sum_{t_{j_{2p+1}}=1}^d \alpha_{2p+1}^{t_{I_{2p+1}}} \partial_{t_{j_{2p+1}}}$$

et

$$Jac_{j_1, \dots, j_{2p+1}}(\xi_k) = \begin{pmatrix} \partial_{t_{j_1}}^{t_{j_1}} \xi_k & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \partial_{t_{j_{2p+1}}}^{t_{j_1}} \xi_k \\ \partial_{t_{j_1}}^{t_{j_2}} \xi_k & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \partial_{t_{j_{2p+1}}}^{t_{j_2}} \xi_k \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \partial_{t_{j_1}}^{t_{j_{2p+1}}} \xi_k & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \partial_{t_{j_{2p+1}}}^{t_{j_{2p+1}}} \xi_k \end{pmatrix}.$$

En symétrisant  $C_\Delta$ , on obtient

$$\begin{aligned} C_{R_{2p+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2p+1}) &= \sum_{\sigma \in S_{2p+1}} \varepsilon_{|\alpha|}(\sigma) C_\Delta(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(2p+1)}) \\ &= \sum_{1 \leq t_1, \dots, t_{k_1} + \dots + k_{2p+1} \leq d} \sum_{(j_1, \dots, j_{2p+1}) \in I_1 \times \dots \times I_{2p+1}} \varepsilon(j_1, \dots, j_{2p+1}, \widehat{I_1}, \dots, \widehat{I_{2p+1}}) \\ &\quad \mathbf{a} \left( tr(Jac_{j_1, \dots, j_{2p+1}}(\xi_1) \dots Jac_{j_1, \dots, j_{2p+1}}(\xi_{2p+1})) \right) \partial_{t_{\widehat{I_1}}} \wedge \dots \wedge \partial_{t_{\widehat{I_{2p+1}}}} \end{aligned}$$

où on a noté par  $\mathbf{a}$  l'opérateur d'antisymétrisation.

Dans [W] et [AL], il est montré que  $\mathbf{a}(tr(A_1 \dots A_{2p+1})) = 0$  dès que  $2p + 1 > 2d$ . Alors, ceci prouve que  $C_{R_{2p+1}} = 0$  si  $2p + 1 > 2d$ .

La cohomologie est donc engendrée par les cochaînes  $C_\delta$  où  $\delta$  est une combinaison de roues impaires de longueur strictement plus petite que  $2d$ .

### Remarque 6.5.

On peut traiter de même les graphes de Kontsevich ariens de type  $(\cdot \geq \cdot)$  forms par des sommets de type  $(f_i \geq l_i)$ , c'est à dire, exactement  $l_i$  flèches sortent de  $i$  et  $f_i$  flèches aboutissent sur  $i$  avec  $\begin{cases} f_i > l_i & \text{si } f_i > 1, \\ f_i \geq l_i & \text{si } f_i \leq 1. \end{cases}$

On peut regarder la cohomologie de Chevalley des graphes de type  $(\cdot \geq \cdot)$  en définissant un autre ordre:

Classe 1: les sommets  $i$  de type  $(f_i \geq 0)$  avec  $f_i > 1$ . On posera  $\mathcal{O}(i) = (f_i, 0)$ .

Classe 2: les sommets  $i$  de type  $(f_i \geq l_i)$  avec  $f_i > l_i \geq 1$ . On posera  $\mathcal{O}(i) = (f_i, l_i)$ .

Classe 3: les sommets  $i$  de type  $(1 \geq 1)$ . On posera  $\mathcal{O}(i) = (1, 1)$ .

Classe 4: les sommets  $i$  de type  $(1 \geq 0)$ . On posera  $\mathcal{O}(i) = (1, 0)$ .

Classe 5: les sommets  $i$  de type  $(0 \geq 0)$ . On posera  $\mathcal{O}(i) = (0, 0)$ .

On ordonne les ordres des sommets suivant  $(*)$  en posant:

$$(f_i, 0) > (f_j, l_j) > (1, 1) > (1, 0) > (0, 0),$$

$$(f_i, 0) \geq (f_{i'}, 0) \Leftrightarrow f_i \geq f_{i'} \text{ et } (f_i, l_i) \geq (f_{i'}, l_{i'}) \Leftrightarrow \begin{cases} f_i \geq f_{i'}, \\ f_i = f_{i'} \text{ et } l_i \geq l_{i'}. \end{cases}$$

L'ordre  $\mathcal{O}(\Delta)$  d'un graphe  $\Delta$  de type  $(. \geq .)$  est le mot formé par les ordres de ses sommets:

$$\mathcal{O}(\Delta) = (\mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n)).$$

On ordonne les ordres des graphes par l'ordre lexicographique, en respectant  $(*)$ .

En appliquant le même technique, on retrouve que la cohomologie des graphes de type  $(. \geq .)$  est aussi engendrée par une combinaison de roues impaires.

On remarque, finalement, qu'en considérant les graphes de type  $(. \leq .)$  et de type  $(. \geq .)$ , on passe d'une classe de graphes à l'autre en changeant le sens de toutes les flèches, on dira qu'on a transposé ce graphe. Les roues sont des graphes invariants sous cette transformation, elles donnent, aussi, la base de la cohomologie transposée définie par:

$$({}^t\partial)(\Delta) = {}^t(\partial({}^t\Delta)).$$

Cependant, l'opérateur  ${}^t\partial$  est un opérateur de cobord différent de celui de Chevalley sur  $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ . (Voir l'exemple donn dans [AAC2])

## REFERENCES

- [AAC1] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Cohomologie de Chevalley des graphes vectoriels*, Pacific J of Math, vol 229, no 2, (2007) 257-292.
- [AAC2] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Chevalley cohomology for linear graphs*, Lett. Math. Phys. vol 80 (2007) 139-154.
- [AGM] D. Arnal, A. Gammella, M. Masmoudi, *Chevalley Cohomology for Kontsevich's graphs*, Pacific J of Math, vol 218, no 2, (2005) 201-239.
- [AL] A.S. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 1, (1950) 449-463.
- [AM] D. Arnal and M. Masmoudi, *Cohomologie de Hochschild des graphes de Kontsevich*, Bull. Soc. Math. France 130 (2002), no. 1, 49-69.
- [AMM] D. Arnal, D. Manchon, M. Masmoudi, *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*, Pacific J of Math, vol 203, no 1 (2002), 23-66.



- [DWL] M. De Wilde and P.B.A Lecomte, *Cohomology of the Lie algebra of smooth vector fields of a manifold, associated to the Lie derivative of smooth forms*, J. Math. Pures et appl., 197-214 (1983).
- [GF] I.M. Gelfand, D.B. Fuchs, *Cohomologies of Lie algebra of tangent vector fields of a smooth manifold*, Funct. Anal. and Applic. Vol 3. N° 2, 1970, 110-116.
- [K] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. 66 (2003), no. 3, 157-216.
- [W] H. Weyl, *The classical groups, Their invariants and representations*, Princeton Math Series, New Jersey, Princeton University Press, 1946.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, INSTITUT PRÉPARATOIRE AUX ETUDES D'INGÉNIEURS DE SFAX, ROUTE MENZEL CHAKER KM 0.5, SFAX, 3018, TUNISIE

*E-mail address:* `Walid.Aloulou@ipeim.rnu.tn`

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BOURGOGNE, UMR CNRS 5584, UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE, U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES B.P. 47870, F-21078 DIJON CEDEX, FRANCE

*E-mail address:* `Didier.Arnal@u-bourgogne.fr`

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNITÉ DE RECHERCHE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, FACULTÉ DES SCIENCES DE MONASTIR, AVENUE DE L'ENVIRONNEMENT, 5019 MONASTIR, TUNISIE

*E-mail address:* `Ridha.Chatbouri@ipeim.rnu.tn`