



Conjectura PALINDROAMELOR

Tiberiu Socaciu

În numărul 8/4-5 (vara 1998) al revistei Ginfo am publicat un material legat de aritmetica numerelor (foarte) mari (vezi [Socaciu98]) în care am amintit de Conjectura palindroamelor. În articol am precizat că enunțul rămâne încă o conjectură pentru baza 10, falsitatea conjecturii fiind demonstrată pentru cazul sistemului de numerație binar.

Recapitulare

Vom recapitula acum câteva detalii referitoare la noțiunea de *palindrom*.

Definiție

Pentru o secvență de simboluri $w = a_1 a_2 \dots a_n$, definim funcția oglindă ca fiind $oglină(w) = a_n a_{n-1} \dots a_1$. Spunem că secvența w este o secvență palindromică sau că w este un palindrom dacă $w = oglină(w)$. Spunem că un număr X dat prin reprezentarea sa în baza B este un palindrom dacă reprezentarea lui X în baza B este o secvență palindromică.

Exemplu

Următoarele numere sunt palindroame în orice sistem de numerație cu baza mai mare sau egală cu 10: 1912191, 9009.

Unii matematicieni au fost curioși și au început să se "joace" cu numerele; ei au obținut tot felul de rezultate interesante. Pentru un număr oarecare X dat în baza B , definim următorul proces iterativ: se adună la primul pas numărului X oglinditul său, repetând succesiv procedeul cu rezultatul obținut.

Exemplu

Vom exemplifica acest proces pentru numărul 87 în baza 10. La primul pas adunăm numărul X cu oglinditul său; la următorul pas adunăm la rezultatul obținut oglinditul acestuia ș.a.m.d.

- pasul 1: $87 + 78 = 165$
- pasul 2: $165 + 561 = 726$
- pasul 3: $726 + 627 = 1353$
- pasul 4: $1353 + 3531 = 4884$

Ultimul rezultat este un palindrom care s-a obținut după patru pași.

Enunțul conjecturii

Observăm că după un număr finit de pași am ajuns la un palindrom.

Întrebarea pe care ne-o punem este următoarea: pornind cu un număr oarecare se ajunge întotdeauna la un palindrom după un număr finit de pași?

Verificând pentru diverse numere, observăm că unele numere ajung mai repede la forma palindromică, în timp ce altele mult mai greu.

Se pare, totuși, că acest enunț este adevărat indiferent de numărul cu care se pornește, dar nimeni nu a reușit să demonstreze valoarea de adevăr a acestei conjecturi.

Cel care a enunțat această conjectură este celebrul **Martin Gardner** (vezi [Gardner]).

Pentru un număr X notăm cu $h(X)$ numărul de iterații după care se ajunge la formă palindromică.

Evident, datorită faptului că acest enunț este o conjectură, nu putem afirma că $h(X)$ există pentru orice număr X .

An bun, an rău...

Au apărut tot felul de speculații pe această conjectură. De exemplu, s-a încercat o asociere a anilor cu această metodă. S-a obținut astfel că 1994, 1995, 1997 ar fi fost ani buni, iar 1996 un an rău, deoarece valorile $h(194)$, $h(195)$, $h(197)$ sunt mult mai mici decât $h(196)$.

Dacă încercăm să verificăm conjectura chiar pentru valori care reprezintă ani calendaristici, vom observa că, din contră, anul 1997 ar fi fost unul rău ($h(1997)$ este mai mare decât 4.000.000).



Totuși, conjectura este falsă?

Observăm că enunțul conjecturii nu depinde de baza sistemului de numerație. Prin cercetări s-a demonstrat că bazele de numerație 2^n nu produc palindroame.

Reprezentarea cu repetiție

Fie un număr $X = a_1 a_2 \dots a_n$ în configurația căruia sunt identice w cifre consecutive: $a_k = a_{k+1} = \dots = a_{k+w-1} = b$. Introducem convenția de notare $X = a_1 a_2 \dots a_{k-1} (w, b) a_{k+w} a_{k+w+1} \dots a_n$. Trebuie remarcat faptul că această notație nu este unică, astfel:

$$12223 = 1(3, 2)3 = 12(2, 2)3 = 1(2, 2)23.$$

Exemplu de inconsistență a conjecturii în baza 2

Vom demonstra inconsistența conjecturii pentru numere de forma $X(n) = 10(n, 1)1101(n, 0)00$, unde n este un număr natural nenul.

• *pasul 1:*

$$\begin{array}{r} 10(n, 1)1101(n, 0)00 + \\ 00(n, 0)1011(n, 1)01 \\ \hline 11(n, 0)1000(n, 1)01 \end{array}$$

• *pasul 2:*

$$\begin{array}{r} 11(n, 0)1000(n, 1)01 + \\ 10(n, 1)0001(n, 0)11 \\ \hline 101(n, 1)1010(n, 0)00 \\ = 10(n, 1)11010(n, 0)00 \end{array}$$

• *pasul 3:*

$$\begin{array}{r} 10(n, 1)11010(n, 0)00 + \\ 00(n, 0)01011(n, 1)01 \\ \hline 11(n, 0)00101(n, 1)01 \\ = 11(n+1, 0)010(n+1, 1)01 \end{array}$$

• *pasul 4:*

$$\begin{array}{r} 11(n+1, 0)010(n+1, 1)01 + \\ 10(n+1, 1)010(n+1, 0)11 \\ \hline 101(n+1, 1)101(n+1, 0)00 \\ = 10(n+1, 1)1101(n+1, 0)00 \end{array}$$

Observații

1. Nici unul din numerele obținute în cei patru pași nu este palindrom.
2. După patru pași se ajunge la numărul $X(n+1)$. Prin urmare, se deduce concluzia că oricare ar fi n natural nenul (de exemplu $n = 1$), nu se pot obține palindroame pornind de la $X(n)$.

Exemple analoge în baze exponent ale lui 2

Soluția poate fi extinsă cu succes și la baze exponent de 2, după cum se poate observa tabelul următor (pentru bazele 4, 8, 16 și 32):

Baza Numărul Iterații

4	10 (n, 3) 3323 (n, 0) 00	6
8	10 (n, 7) 7767 (n, 0) 00	8
16	10 (n, F) FFEF (n, 0) 00	10
32	10 (n, V) VVUV (n, 0) 00	12

Observație

Cifrele F, E din sistemul de numerație hexazecimal, respectiv cifrele V, U din sistemul de numerație cu baza 32 se construiesc după regulile uzuale de atribuire a simbolurilor cifrelor mai mari decât 9.

Generalizarea exemplului

În baza $B = 2^n$, numărul $10(n, A)AAZA(n, 0)00$, unde cifra A este $A = (B - 1) = 2^{n-1}$ și cifra Z este $Z = (B - 2) = 2^n - 2 = A - 1$ se ajunge la "perioadă" după $2 \cdot (n + 1)$ iterații. Încercați să demonstrați acest lucru!

Soluții sporadice

Alte soluții se pot întâlni și în alte cazuri, unele baze de numerație (cum ar fi 20) generând soluții cu mai mult de 200 de simboluri în reprezentare. Detalii pot fi găsite în [Seal].

Încheiere

Foarte mulți pasionați încearcă la ora actuală să descopere contraexemple pentru a infirma conjectura în diverse sisteme de numerație. Se pare că pentru baza 10 problema este încă deschisă.

Dacă bătălia pentru $b(196)$ s-a dat cu ajutorul unui program C care rula pe un sistem cu UNIX (vezi [Pquest]), la ora actuală se folosesc calculatoare special programate precum și sisteme de calcul simbolic de genul lui Maple.

Evident, folosind o aritmetică cu numere mari ca cea din [Socaciu95] aveți șanse destul de mari să vă implementați propriul sistem de infirmare a conjecturii palindroamelor pentru diverse baze de numerație.

Notă

Până în acest moment, pentru baza 10, încă nu s-a infirmat conjectura. Așadar, *spor la treabă!*

Bibliografie

- [Gardner] Martin Gardner, *Ha ha ou la comprehension de la mathematique*, Ed. Belin, Paris.
- [Pquest] Program de demonstrare a conjecturii palindroamelor: <http://www.pquest.com/pquest.c>.
- [Seal] David Seal's Page: <http://www.seanet.com/dseal.html>
- [Socaciu95] Tiberiu Socaciu, *Calcul Simbolic*, teză de licență, Universitatea "Babeș-Bolyai" Cluj, (1995).
- [Socaciu98] Tiberiu Socaciu, *Aritmetică cu numere mari*, GInfo 8/4-5 (vara 1998).

Dl. Tiberiu Socaciu este licențiat și master al Facultății de Matematică din cadrul Universității "Babeș-Bolyai" Cluj. Poate fi contactat prin e-mail la adresa infodata@theoffice.net sau prin fax la 064/195015.