

Considerații asupra FRACTALILOR

Ciprian Ileană, Ioana-Maria Ileană

Teoria fractalilor și cea a haosului se numără printre cele mai interesante și mai noi ramuri ale matematicii. Cu o istorie relativ recentă (aproximativ 50-60 de ani) ele s-au impus repede în lumea științei, având aplicații în aproape toate domeniile, de la informatică până la geografie, economie, statistică etc.

În acest articol veți putea citi o introducere în teoria fractalilor și a haosului; aceasta este urmată de o prezentare a celor mai celebri fractali, printre care se regăsesc triunghiul lui *Sierpinski*, garnitura lui *Sierpinski*, covorul lui *Sierpinski*, curba lui *Peano* de umplere a spațiului, seriile *Mandelbrot* și seriile *Julia*. Va fi explicată noțiunea de dimensiune fractală și vor apărea definițiile unor termeni des folosiți.

Istoria fractalilor și a haosului

Geometria fractală și teoria haosului revoluționează matematica și știința, oferind o nouă cale de percepere a realității. S-au scris mai multe cărți despre știința haosului și geometria fractală, iar un număr de programe afișează fractali matematici cum ar fi faimoasa serie *Mandelbrot*.

De la artiști până la matematicieni, de la geografi până la astronomi, de la meteorologi până la experți financiari, efectiv nici un domeniu de activitate nu a rămas neatins de această modificare radicală în modul nostru de muncă, de gândire și de creație.

Mare parte din interesul de care se bucură fractalii este datorat faptului că matematica s-a reîntors la lumea macroscopică, la lumea palpabilă pe care o putem vedea cu toții, lăsând la o parte universul alambicat al tabelor pline de cifre și litere grecești și al acceleratoarelor de particule.

Istoria în sine a fractalilor nu este lungă. Ea a început în anul 1875 odată cu apariția revoluționarei lucrări a matematicianului *Benoit Mandelbrot*, "*O teorie a seriilor fractale*", lucrare care a devenit ulterior cartea sa manifest "*Geometria fractală a naturii*".

Cuvântul *fractal* a fost inventat de către *Mandelbrot*, el utilizându-l pentru a reuni munca multor altor matematicieni dinaintea sa. Printre primii matematicieni care au creat fractali (în general privindu-i doar ca pe niște exerciții abstracte, neavând nici o idee despre semnificațiile pe care le-ar putea avea aceștia) se numără nume cum ar fi: *Waclaw Sierpinski*, *Helge von Koch*, *Georg Cantor* sau *David Holbert*. Ei au simțit că descoperiseră ceva care sfida și amenința câteva dintre convingerile cele mai puternice și

Benoit Mandelbrot

Fondator al geometriei fractale, *Benoit Mandelbrot* s-a născut în *Polonia*, în anul 1924. În 1936 emigrează în *Franța* împreună cu întreaga familie și intră astfel sub influența unchiului său, profesor de matematică în *Paris* (*Collège de France*), matematician "de modă veche", riguros și exigent, succesor al marelui *Jacques Solomon Hadamard*. Astfel, prin in-

termediul acestui adevărat părinte spiritual, *Mandelbrot* ia contact atât cu matematica lui *Gaston Julia*, cât și cu "ariditatea" matematicii clasice. Contradicția dintre propria părere despre matematică și natura scolastică și rigidă impusă de matematicienii vremii a condus la germinarea și dezvoltarea unui drum nou: geometria fractală. Anul 1967 poate fi conside-

rat anul de naștere al geometriei fractale, o dată cu apariția articolului "*How long is the coast of Britain?*", iar cartea "*The Fractals Geometry of Nature*" editată în 1982 consacră definitiv această noțiune ce devine practic domeniu al matematicii, fizicii și biologiei moderne.



Figura 1



mai prețioase ale matematicii acelor timpuri. În perioada 1875-1925 (cu aproximație), perioadă de mare criză în matematică, s-au descoperit forme bizare ce contraziceau conceptele cu privire la spațiu, suprafață, distanță sau dimensiune ale matematicienilor acelor timpuri.

Haos și sisteme dinamice

Dacă ar fi să analizăm lumea din jurul nostru am ajunge la o împărțire a lucrurilor în două mari clase: o clasă a **ordinii** și o alta a **dezordinii**. Din această cauză suntem poate tentați să asociem aceste două clase cu dihotomia: bine - rău, lucru destul de evident, dacă ne gândim că este de preferat pentru fiecare dintre noi să fim înconjurați de evenimente și lucruri care se desfășoară în timp și spațiu, urmând un tipar și o serie de reguli clare, cunoscute, care știm că nu se schimbă și nu sunt încălcate.

Din păcate, acest lucru nu este posibil în realitate; nu putem pretinde, de exemplu, unui artist ca, la intervale bine definite, să genereze doar opere de valoare **universală**. Am putea conchide că acolo unde lucrurile sunt clare, iar scopul sistemului este doar de a reproduce un flux tehnologic, de a reproduce o acțiune ce implică sincronizări de persoane, ordinea este imperios necesară. Într-un astfel de sistem, în care însăși structura și modul său de funcționare asigură predictibilitatea, orice variație este sinonimă accidentului.

La polul opus se află starea de dezordine, stare ce pare a fi cea normală în cazul oricărui tip de sistem, cel puțin până la o intervenție de factori coercitivi, structuranți care să încerce impunerea unei stări de ordine. În realitate, interacțiunile ce au loc între numeroasele **celule** ale unui sistem complex conduc în mod evident la o variabilitate a parametrilor măsurabili. Ca urmare, predicția nu este posibilă decât statistic, lucru ce nu ne prea ajută într-o situație dată. Un astfel de sistem în cadrul căruia subsistemele (celulele) se manifestă liber, după bunul lor plac, se numește **sistem haotic**.

Pentru cei neavizați, ideea unei teorii despre haos sau a unei metodologii cu privire la controlul haosului poate părea o aberație, ea fiind asociată fie conceptului de dezordine, fie unor termeni ce amintesc de procesul genezei din teologie. Această confuzie a apărut din păcate, în mare parte, datorită nefericitei alegeri a unei etichete pentru un

domeniu de studiu fascinant. Pentru unii, acesta a fost chiar motivul pentru a aborda acest domeniu, în speranța obținerii unor informații transcendente, dar au fost surprinși dând peste o matematică **aridă** împânzintă de experimente cu ecuații diferențiale. Acest lucru i-a determinat pe mulți să abandoneze înainte de a descoperi extraordinarele aplicații practice care decurg din acest capitol al științei: comunicarea prin haos, stabilizarea sistemelor neliniare, structura haotică a unui semnal encefalografic și restabilirea haoticității normale a activității neuronale în tratamentele pentru epilepsie ș.a.m.d.

Am văzut până acum că unele concepte precum **haos** și **teoria haosului** pot părea ambigue. Pentru a le clarifica, vom arunca o privire asupra a ceea ce înseamnă complexa noțiune de **sistem dinamic**.

În general, printr-un sistem înțelegem o colecție de elemente și efectele lor unul asupra altuia. Aceasta pare destul de abstract. Dar, de fapt, suntem înconjurați de sisteme. Vremea, o pădure, economia globală, o mulțime de oameni pe un stadion de fotbal, peștii dintr-un lac, o centrală nucleară reprezintă exemple de sisteme, al căror **comportament** se poate schimba foarte rapid.

Sistemele reale își semnalează prezența prin trei factori:

- sunt dinamice, adică supuse schimbărilor;
- sunt complexe, adică depind de mulți parametri;
- sunt iterative, adică legile care le guvernează comportamentul pot fi descrise prin **feedback**.

Nimeni nu poate descrie complet prin formule matematice interacțiunile unui astfel de sistem. Cu toate acestea, se încearcă investigarea regularităților care formează baza unui astfel de sistem dinamic, în particular, găsirea unor modele matematice simple, cu ajutorul cărora să se poată simula comportamentul sistemului. Putem prezenta aceasta schematic ca în figura 2.

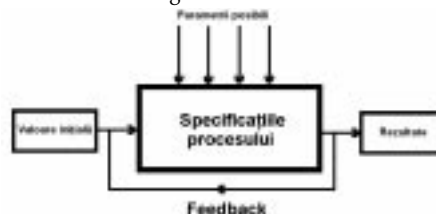


Figura 2: Schematica unui sistem haotic.

Termeni...

Haos: în limbajul curent, orice sistem care este înfricoșător prin incontrollabilitatea și dezordinea sa. Cuvântul a primit și un sens tehnic specific: dependența sensibilă de condițiile inițiale. Cu alte cuvinte, o mică schimbare în starea unui sistem haotic poate duce rapid la mari modificări în starea sistemului, măsurată la un moment ulterior (chiar dacă starea sistemului este complet dependentă de aceste condiții inițiale).

Calcul diferențial: ramură a matematicii care se ocupă cu găsirea pantei sau a raportului de schimbare a curbelor. Această pantă este denumită **diferențială** sau **linie tangentă**.

Diferențiere: Procedeu matematic de determinare a valorii pantei unei curbe într-un punct dat (vezi și **calcul diferențial**).

În general numim **haotic** un comportament imprecizabil, în contextul de mai sus. Cauza acestuia este bazată pe faptul că schimbări neglijabile asupra cantității grupate mai apoi de **feedback** pot produce efecte haotice neașteptate. Acest fenomen uimitor apare în particular într-o gamă de probleme care ar putea ridica semne de întrebare asupra unor teorii recunoscute, sau stimula noi formulări în biologie, fizică, matematică, chimie și în domeniul economic.

Așadar, aria de cercetare în teoria sistemelor dinamice este în mod manifest interdisciplinară. Această teorie este încă tânără și pare suficient de simplă matematic pentru ca oricine cu abilități elementare de programare și calculator să poată să-i aprecieze rezultatele. Scopul cercetării este de a înțelege cum are loc tranziția de la ordine la haos.

O posibilitate importantă pentru a investiga sensibilitatea sistemelor haotice este de a le reprezenta comportamentul prin grafică pe computer. Aceste forme grafice rezultate apar sub forma unor fractali.

Fractali celebri

În cele ce urmează vom prezenta o serie de fractali care au devenit celebri.

Triunghiul lui Sierpinski

Probabil cel mai cunoscut fractal al tuturor timpurilor este așa-numitul **triunghi al lui Sierpinski**.

Modul de realizare al acestui fractal este foarte simplu: la început se desenează un triunghi pe care îl vom diviza în patru părți egale, iar trei dintre ele (cele din exterior) vor fi și ele divizate (folosind același procedeu), procesul continuând la infinit pentru toate triunghiurile formate.

În figura 3 este prezentată modalitatea de construcție descrisă anterior.

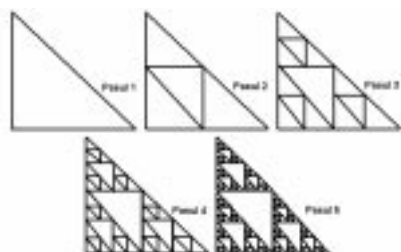


Figura 3: Triunghiul lui Sierpinski

Desigur, pentru a putea realiza forma matematică imaginată de **Sierpinski** ar însemna să putem trasa linii de divizare infinit de mici. În figură sunt ilustrați doar primii pași efectuați.

O altă modalitate de realizare a acestui fractal este următoarea: se pornește de la un triunghi plin în care se "decupează" triunghiuri egale cu un sfert din triunghiul inițial. Dacă repetăm la infinit acest proces, atunci vom obține un fractal identic cu **triunghiul lui Sierpinski** (uneori, când este realizat prin această tehnică el se mai numește și **garnitura lui Sierpinski**). Primii pași ai acestui procedeu sunt prezentați în figura 4.

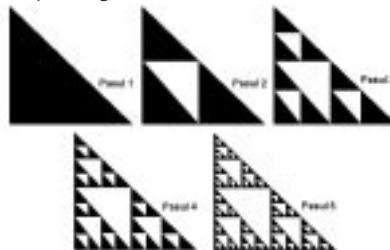


Figura 4: Garnitura lui Sierpinski

Până acum totul ar părea în regulă, nici o lege a matematicii nefiind încălcată. Problema a apărut atunci când **Sierpinski** a încercat să determine aria pe care o ocupă acest fractal. Pe de o parte am putea crede că aria este zero, deoarece un număr infinit de găuri acoperă în cele din urmă orice suprafață plină din triunghi. Pe de altă parte însă, la un moment dat, îndepărtăm doar un sfert din aria rămasă, lăsând mare parte încă acoperită și, deci, oricât de mult am repeta această operațiune, întotdeauna va rămâne mai mult decât s-a luat. Deci aria nu ajunge niciodată zero.

Acest tip de problemă l-a tulburat pe **Leibnitz** și a ridicat dificultăți matematicienilor încă din antichitate. Dar, să vedem, totuși, cât este aria **triunghiului lui Sierpinski**. Chiar dacă intuiția sugerează că ea ar fi zero, există o demonstrație care ne arată că ea nu poate fi zero. Cu toate acestea, comunitatea matematicienilor a hotărât ca aria să fie considerată zero, acest lucru datorându-se în principal imposibilității răspunderii la întrebarea: "**Dacă aria nu este zero, atunci cât este?**". Neputând combate acest lucru, **Sierpinski** și colegii lui au admis că problema ariei infinit de mici, dar diferită de zero a fost doar "un vis urât".

Termeni...

Sistem dinamic: un sistem a cărui stare la un moment dat poate fi determinată din starea lui la un moment anterior și dintr-un set de ecuații care modelează felul în care iterează sistemul.

Entropie: Proprietatea matematică a unui sistem, care îl face incapabil pe un observator să distingă între ele părțile acestuia; o măsură a factorului aleator (ΔS).

Fractal: orice formă ale cărei părți componente, atunci când sunt mărite, prezintă tot atâtea detalii ca și întregul. Unii matematicieni folosesc cuvântul fractal cu sensul de formă care este strict autosimilă și nu statistic autosimilă (potrivit acestei definiții, seria **Mandelbrot nu este un fractal**). Sensul original se referă la o formă a cărei dimensiune **Hausdorff-Besicovitch** depășește dimensiunea sa topologică.



pabele



Curbe de umplere a spațiului

Chiar dacă lui *Sierpinski* i s-a impus acceptarea faptului că aria unei forme alcătuite doar din linii este zero, matematicienii au încercat să demonstreze contrariul.

O altă formă imaginată de același matematician este *covorul lui Sierpinski*. Forma geometrică de la care se pornește este un segment de dreaptă care este apoi înlocuit cu alte opt segmente de dreaptă (așa cum se poate vedea în figura 5). Fiecare segment este înlocuit cu forma întreagă și procesul continuă la infinit. Asemănându-se foarte tare cu *triunghiul lui Sierpinski* și putând fi obținut prin metoda prezentată mai sus, dar și prin decuparea de găuri într-un pătrat plin, s-ar putea ivi și aici aceeași controversă legată de aria formei.

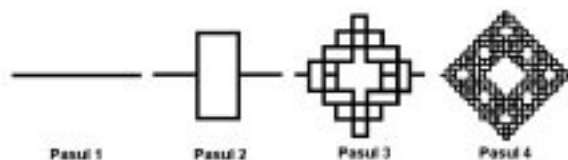


Figura 5: Covorul lui Sierpinski

Plecând de la *covorul lui Sierpinski*, matematicianul *Giusseppe Peano* a descris forma numită *curba de umplere a spațiului a lui Peano*. Realizarea ei diferă doar prin adăugarea unui al nouălea segment de dreaptă, așa cum se poate vedea în figura 6.

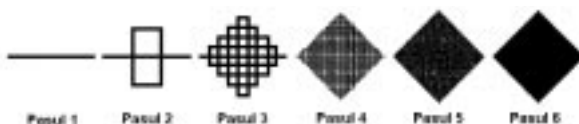


Figura 6: Curba de umplere a spațiului a lui Peano

Folosind această curbă pe care a prezentat-o în anul 1890 (când avea titlul de *profesor extraordinar de calcul infinitezimal* la *Universitatea din Torino*), *Peano* a demonstrat că se poate umple o porțiune din spațiu, folosind o curbă continuă care nu are lățime (deci nu are arie). În consecință, *aria curbei de umplere a spațiului* este egală cu

aria în care este înscrisă. Așa s-a ajuns ca o formă alcătuită din segmente de dreaptă să umple suprafața unui plan bi-dimensional.

Seria Mandelbrot

Vom prezenta acum detalii referitoare la o categorie specială de fractali, și anume seria *Mandelbrot*.

Există numeroase descrieri ale acestei serii. După părerea multora, amintește de o țestoasă văzută de sus (*Randow* - 1986). Alții văd în ea un interesant cactus "înmugurit" (*Clausberg* - 1986).

Pentru unii matematicieni nu e mai mult decât o hipocicloidă căreia i s-au adăugat o serie de cercuri, pe care stau alte cercuri ș.a.m.d. (*Durandi* - 1987).

De altfel, cu toții au dreptate, ca și profesorul din *Bremen* căruia forma îi amintește de un *birocrat gras* (după o rotație de 90°).

Atitudinea și interpretările personale, cu siguranță, își au rolul lor în descrierea unei imagini atât de neobișnuite. E vorba, probabil, de două feluri de percepție. În primul rând, o anumită familiaritate cu structurile asemănătoare formelor naturale, în particular cele observate la mărirea imaginii.

Pe de altă parte, ciudățenia acestui tip de repetiție este foarte diferită de cea a unei frunze sau a unui copac. Structura la diferite scări, unde apar mai multe proprietăți și detalii, contrazice viziunea noastră normală, ne face să ne revizuim percepțiile și în final să ajungem la o înțelegere. În figura 7 puteți vedea o "hartă" a seriei *Mandelbrot*.

Figura în sine nu e mult mai veche decât numele; în primăvara anului 1980, *Benoit Mandelbrot* a reușit pentru prima oară să schițeze acest grafic pe un calculator.

Niciodată n-a mai atins un produs al cercetării matematice ezoterice un asemenea nivel de popularitate, făcându-și apariția în agende, ocupând timpul liber, și devenind atât de rapid un "superstar".

Pentru a evita confuzia în descrierea ce urmează, să definim mai întâi termenii de bază:

Termeni...

Infinitezimal: un număr infinit de mic, folosit de *Leibnitz* pentru a înțelege cum funcționează calculul diferențial. S-a dovedit, în cele din urmă, că nu se ajunge la rezultate satisfăcătoare în acel mod, motiv pentru care aproape nimeni nu mai vorbește acum despre infinitezimali.

Curbă continuă: o curbă ale cărei puncte se învecinează (de fiecare parte a lor) cu alte puncte al curbei. Pentru curbele continue se poate găsi întotdeauna o linie care aproximează panta sau direcția sa în orice punct dat. Curbele fractale pot părea uneori continue, dar nu se pot determina aproximații ale pantei.

Curbă discontinuă: o curbă care conține întreruperi sau schimbări bruște de direcție; deoarece fiecare punct dintr-un fractal conține (ca întreg) toate direcțiile de mișcare, se spune că direcția se schimbă infinit de rapid și că fractalii sunt curbe infinit discontinue.

Seria Mandelbrot: Seria de puncte care nu scapă către infinit când este iterată funcția $z^2 + c$, unde c este punctul însuși și z începe din originea (0, 0). În sens mai general, orice serie de puncte care nu scapă către infinit, când este iterată o funcție care include punctul însuși drept constantă. O serie *Mandelbrot* este întotdeauna o hartă a unui număr infinit de serii *Julia* înrudite.


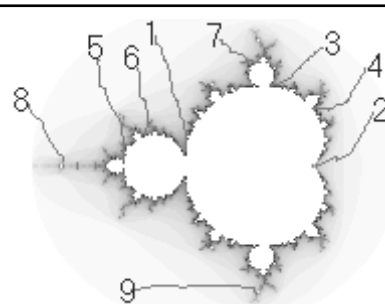








1. Seahorse Valley -0.75, 0.1			
2. Elephant Valley 0.275, 0			
3. Triple Spiral Valley 0.274, 0.654			
4. Quad-Spiral Valley 0.274, 0.482			
5. Scepter Valley -1.36, 0.005			
6. Scepter Variant -1.108, 0.230		8. Mini Mandelbrot -1.75, 0	
7. Double Scepter Valley -0.1002, 0.8383		9. Another Mandelbrot -0.1592, -1.0317	

Figura 7: Harta seriei Mandelbrot

- În *seria Mandelbrot* distingem corpul principal și *mugurii*, sau *copiii Gingerbread Man*.
- La o anumită distanță de vizibil conexa regiune centrală găsim serii *Mandelbrot* de ordin superior sau sateliți, legați de corpul principal prin filamente. Singurul filament care poate fi clar observat este de-a lungul axei reale pozitive. Dar există astfel de conexiuni și către punctele aparent izolate din partea de sus și de jos a figurii.
- Vorbim de *mărire* când doar o porțiune din figură este desenată și analizată.

- Imaginea din figura 8 este numită *seria Mandelbrot* sau *Gingerbread Man*. Este bazinul *atractorului finit*.

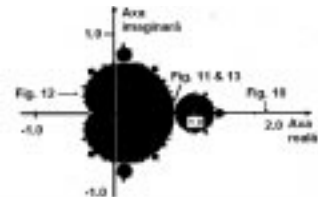


Figura 8: Seria Mandelbrot (60 de repetiții)

- Aproximațiile asupra figurii, (prezentate în figura 9) sunt liniile de contur sau suprafețele echipotențiale. Ele aparțin bazinului atractorului ∞ .



Figura 9: Seria Mandelbrot (100 de repetiții)

În figura 10 este prezentată o *serie Mandelbrot* de ordinul II.



Figura 10: O serie Mandelbrot de ordinul II

Imaginile care urmează prezintă secțiuni din varianta originală a unui *Gingerbread Man*, în diferite puncte și scalate (mărite) diferit. În figura 8, regiunile respective sunt marcate cu săgeți.

Figurile 11 și 12 prezintă o secțiune impregnată cu spirale și multe alte forme. Regiunile din partea stângă sunt excrescențe (mlădițe) ale corpului principal. La o rezoluție mai bună, ar putea fi identificate cu niște copii *Gingerbread Man*.

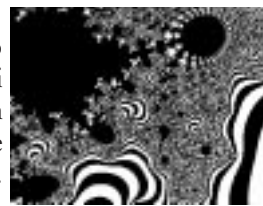


Figura 11: O secțiune între corpul principal și un mugure

Termeni...

Atrator: când o funcție matematică este iterată ea poate converge către o anumită valoare sau un set de valori, indiferent de valoarea inițială. Această valoare sau set de valori este denumită atrator, deoarece toate celelalte valori se deplasează către ea când funcția este iterată. Dacă o funcție are două variabile, se pot trasa numerele corespunzătoare pe un ecran bidimensional pentru a putea vedea forma atractorului. Similar, funcțiile cu trei variabile pot avea atractori tridimensionali. Deoarece majoritatea fractalilor sunt desenați prin iterarea unei funcții și trasarea valorilor către care ea converge, formele fractale pot fi considerate picturi ale atractorilor.

Iterație: procesul de aplicare repetată a unei funcții asupra rezultatelor furnizate de aceeași funcție.

Sistemul Funcției Iterate (IFS): orice funcție care folosește iterația. Mai concret, *IFS* este un sistem care iterează un set de transformări afine contractive, folosind tehnicile inițiate de *Michael Barnsley* și alți matematicieni. Aceste sisteme pot fi exprimate ca un mic set de coduri *IFS*.

Stare inițială: toate proprietățile măsurabile ale unui sistem, în momentul în care începe observarea sistemului.



Figura 12: Un satelit foarte îndepărtat

În figura 13 este prezentată o secțiune a fractalului aflată sub cea prezentată în figura 11.

Autosimilaritatea observată aici este întâlnită și în natură. Un exemplu în acest sens ar fi ramificarea (iterată) a două ramuri care pornesc din aceeași tulpină principală.

Diferența constă în faptul că autosimilaritatea fractalilor matematici nu are limite. Într-un curs, profesorul *Mandelbrot* a prezentat o imagine a unei secțiuni din *Gingerbread Man* mărită de $6 \cdot 10^{23}$ ori (numărul lui *Avogadro*), care respecta încă forma standard.

Dacă privim cu atenție, vom observa că miniseriile *Mandelbrot* (copiii *Gingerman*) sunt întâlnite, practic, peste tot sub forma unor imagini miniaturale ale seriei *Mandelbrot*. Este interesant faptul că, pe lângă apariția lor în interiorul unei serii *Mandelbrot* "mai mare", îi întâlnim în cadrul unor formule neînrudite.

Miniseriile *Mandelbrot* conțin la rândul lor toată gama de caracteristici ale unei serii *Mandelbrot*, incluzând toți mugurii, căluții de mare și spiralele. Fiecare miniserie *Mandelbrot* prezintă de asemenea *dendrite* ale căror forme depind de particularitățile fiecărei miniserii. Aceste "dendrite" pot fi spirale, fulgere luminoase și se atașează în grupe de două, patru sau opt la miniseria *Mandelbrot* și la căluții săi de mare.

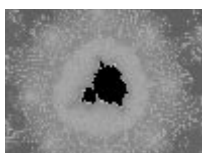


Figura 13: Regiunea de sub figura 11

Figura 12 a fost rotită cu 90° . În poziția normală mica serie *Mandelbrot* are o orientare aproape opusă cu cea a originalului. Este atașată unei ramuri cu valori puternic negative pentru c_{real} . Rata (factorul) de mărire este de aproximativ 500.

O miniserie *Mandelbrot* poate fi întâlnită acolo unde există o pereche simetrică de spirale sau alte obiecte. Miniseriile *Mandelbrot* ridică întrebări interesante: *De ce le conțin mai multe formule neînrudite? Ce vrea să însemne această prezență universală, în legătură cu formulele menționate?*

Miniseriile *Mandelbrot* au o "capacitate" uimitoare. Ele pot lua "include" împrejurimile și astfel se obțin perechi de "reproduceri". Astfel, o miniserie poate proveni din *ochiul central* al unui căluț de mare. În interiorul unei spirale a unui căluț de mare se află o miniserie *Mandelbrot*, în apropierea acesteia se află două spirale unite exact în punctul în care se află miniseria *Mandelbrot*.

În figura 14 sunt prezentate câteva imagini ale unor miniserii *Mandelbrot*. Puteți vedea opt perechi de tipul celor descrise anterior. Imaginea din stânga a fiecărei perechi prezintă o structură de tip *Mandelbrot*; imaginea din dreapta dezvăluie împrejurimile unei miniserii *Mandelbrot* care se află în apropierea punctului prezentat în imaginea din stânga. Se observă că imaginea din dreapta este, în mod invariabil, o unire a două copii ale imagii de sus, unite în punctul marcat.

Seriile Julia

Există o întreagă familie de fractali numiți serii *Julia*, care sunt îndeaproape înrudiți cu seria *Mandelbrot*. De fapt, în interiorul fiecărui punct din cadrul unei serii *Mandelbrot* se află o întreagă serie *Julia*.

Seria *Julia*, asociată cu un punct dat din cadrul seriei *Mandelbrot*, seamănă, în general, cu zona ce înconjoară acest punct în cadrul seriei *Mandelbrot*. În cadrul hărții din figura 15, sunt prezentate câteva serii *Julia* foarte interesante, precum și punctele corespunzătoare lor din cadrul seriei *Mandelbrot*. După cum se poate observa, există o mulțime de variații ale seriilor *Julia*. Unele modele sunt evidente. Seriile *Julia* aparținând punctelor din afara seriei se găsesc într-un număr infinit și nu au un "lac" negru în interior. Seriile *Julia*, care aparțin punctelor de la capetele dendritelor, sunt ele însele dendritice ca formă. Cele care

Termeni...

Scăparea către infinit: În cazul anumitor funcții matematice, cum ar fi cea folosită pentru desenarea seriei *Mandelbrot*, dacă un punct scapă dintr-o anumită zonă atunci când funcția este iterată, se poate demonstra că în cele din urmă ea se va deplasa rapid către infinit. De aceea, se spune că punctul scapă către infinit, imediat după ce părăsește zona

Algoritmul timpului de scăpare: o tehnică pentru afișarea hărților de funcții iterate; punctele sunt colorate în funcție de cât de repede scapă dintr-o zonă, atunci când funcția este iterată.

Serie Julia: orice serie care conține doar puncte care rămân stabile pe pacursul iterării unei funcții. Mai concret, o serie *Julia* asociată cu funcția $z = z^2 + c$, unde c este o constantă arbitrară.

Punct fix: Punctul în care se sfârșește o transformare, când este iterată. Fiecare transformare afină contractivă are un punct fix.

Cosinus: funcție trigonometrică prin a cărei iterație se obține un atractor care se bifurcă cu cicluri de toate lungimile posibile, incluzând regiuni complet haotice.

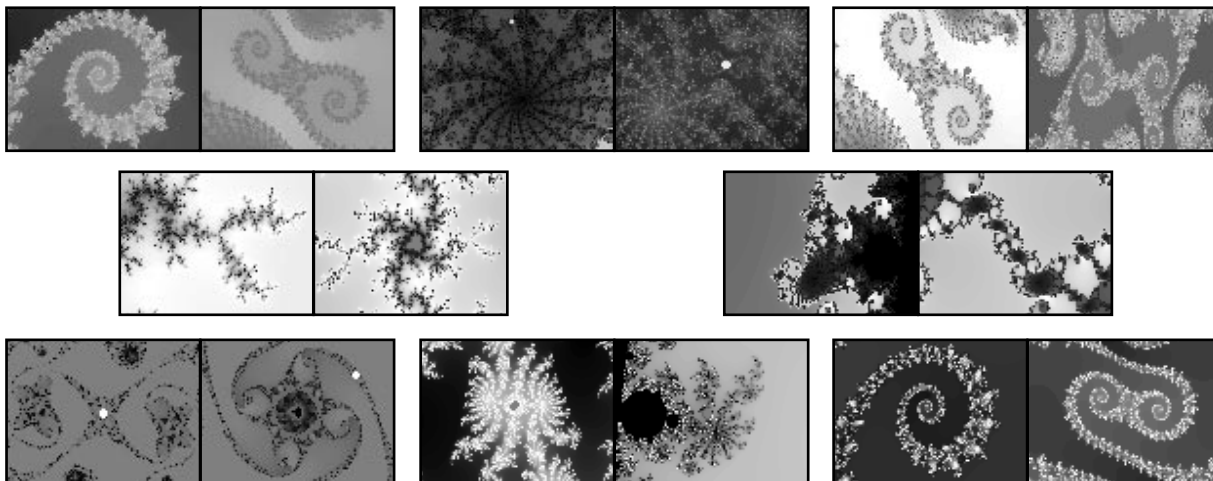


Figura 14: Exemple de miniserii Mandelbrot

aparțin seriei au zone asemănătoare cu un lac negru în interior.

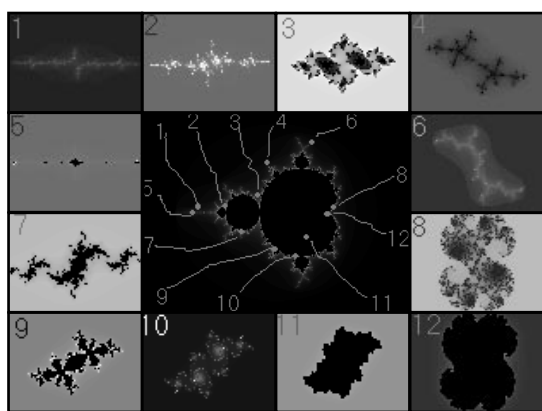


Figura 15: Harta seriilor Julia

În seriile *Julia* există modele care sunt înrudite cu miniseriile *Mandelbrot*. Aceasta se poate observa în imaginile din figura 16.

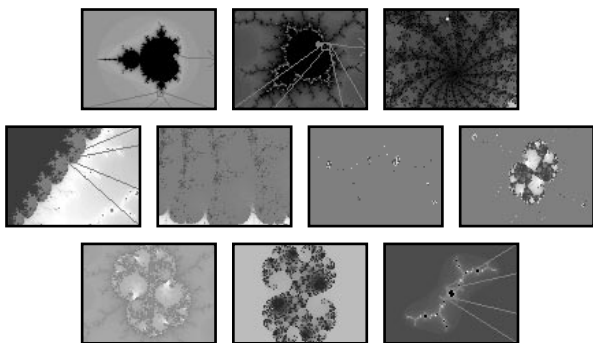


Figura 16: Modele din seriile Julia

Miniseriile *Julia* pot fi întâlnite în cadrul seriilor *Julia* ale căror puncte se află în apropierea unei miniserii *Mandelbrot*, și în seria *Mandelbrot* însăși în cadrul dendritelor unei miniserii *Mandelbrot*. În figura 17 sunt ilustrate două serii *Julia*.



Figura 17: Serii Julia

Dimensiunea fractală

Este arhicunoscut faptul că orice formă are o anumită dimensiune. Astfel:

- punctul are dimensiunea 0;
- dreapta are dimensiunea 1;
- planele și suprafețele au dimensiunea 2;
- spațiul are dimensiunea 3.

Aceste dimensiuni au fost mai apoi extinse, ajungându-se la așa-numitele spații n -dimensionale. În aceste spații, obiectele vor avea n dimensiuni. De exemplu, într-un hiperspațiu cvadridimensional (cu patru dimensiuni) vom avea hipercuburi (obiecte cvadridimensionale ale căror secțiuni sunt cuburi tridimensionale), hipersfere (obiecte cvadridimensionale ale căror secțiuni sunt cuburi tridimensionale). În acest caz, prin secțiune se înțelege intersecția obiectului cvadridimensional cu un spațiu tridimensional. În general, prin secțiunea unui obiect n -dimensional se înțelege intersecția acestuia cu un spațiu $(n - 1)$ -dimensional.

Noile descoperiri din matematică, realizate la începutul secolului al XX-lea, au dus inevitabil la necesitatea unui mod cu totul nou de măsurare a spațiului și a dimensiunii. Răspunsul a fost dat de către matematicienii *Felix Hausdorff* și *Abram S. Besicovitch* care au descoperit (în sensul strict al cuvântului) dimensiuni noi, dar au și redefinit cu adevărat dimensiunea în sine.

În urma studierii și dezvoltării lucrărilor lui *Hausdorff*, *Besicovitch* a afirmat că formele pot avea dimensiuni fracționare. Astfel, curbe cum ar fi cele ale lui





Sierpinski sau *Koch*, ar cădea între dimensiunile normale și astfel s-ar putea explica comportarea lor ciudată. Dimensiunea *Hausdorff-Besicovitch* a fost calculată pe baza măsurătorilor de la aproximările simple ale unei curbe. Mai exact ea este definită ca fiind raportul dintre logaritmul numărului de copii și logaritmul mărimii "seminței" corespunzătoare fiecărei copii. De exemplu, pentru *linia de coastă Koch triunghiulară*, vom avea $\log 4 / \log 3 \sim 1.2618$ deoarece sunt patru copii și fiecare reprezintă o treime din mărimea seminței. Ideea dimensiunilor fracționare s-a dovedit până la urmă mult mai puternică decât și-au imaginat creatorii ei, deoarece natura abundă de forme auto-reflexive (cum ar fi liniile de coastă) putând astfel caracteriza după acest criteriu o mare parte din mediul înconjurător.

Mai târziu, *Benoit Mandelbrot* a dat dimensiunii *Hausdorff-Besicovitch* numele de **dimensiune fractală**. Această dimensiune fractală a avut o deosebită valoare pentru matematicieni, aceștia fiind capabili acum să măsoare un adevărat univers de forme care înainte nu putea fi măsurat.

Aplicații ale fractalilor

Pentru a vă convinge de utilitatea tot mai mare și mai evidentă a fractalilor, enumerăm mai jos avantajele folosirii acestora:

- Fractalii pot cu ușurință reprezenta forțe similare ce acționează la mai multe niveluri ale scării, lucru ce nu poate fi realizat cu geometria liniară.
- Cu ajutorul unui calculator se poate realiza ușor o curbă fractală asociată unui set de date.
- Fractalii oferă o metodă de stocare a imaginilor și datelor mult mai compactă decât vectorii liniari.
- Dacă ecuațiile liniare dau greș în construirea unor sisteme intrinseci, imprevizibile și haotice, atunci realizarea acestora este posibilă cu ajutorul fractalilor.
- Cu ajutorul fractalilor, iregularitățile devin părți esențiale ale modelului, în loc să reprezinte zgomote ce trebuie eliminate.

Toate aceste avantaje prezentate mai sus (și suntem siguri că am enumerat doar o mică parte din totalul avantajelor) au dus la adoptarea fractalilor în multe domenii, cum ar fi: meteorologie, seismologie, cardiologie, economie ș.a.m.d. De altfel, în continuare vom explica mai pe larg aplicarea teoriei fractale, a haosului și a sistemelor dinamice în cadrul meteorologiei.

Aplicații ale fractalilor în meteorologie

Oricine poate prezice vremea cu o precizie de 100% și este sigur că vom obține o rată a corectitudinii (preciziei) de 60%, dacă se afirmă că vremea de mâine va fi ca și cea de azi.

Dacă ne vom folosi de fotografii luate din satelit, măsurători și date de pe tot cuprinsul globului, precum și de un supercomputer, vom atinge o rată a corectitudinii (preciziei) de 80%.

Dacă sunteți mirat că procentul de corectitudine (precizie) nu este mai mare, atunci trebuie să priviți modul în care un meteorolog își construiește presupunerile despre vreme.

Meteorologii se bazează în predicțiile lor pe **principiul cauzalității** (cauze identice produc efecte identice) dar, în practică, nu se poate afla cu precizie cum va fi vremea, deoarece este imposibilă situarea unui număr foarte mare de stații meteorologice în puncte arbitrar alese pe glob (și asta în fiecare zi). De aceea meteorologii au apelat la **principiul tare al cauzalității** (cauze similare produc efecte similare).

În ultimele decenii s-au realizat modele teoretice care, cu ajutorul unor ecuații matematice extrem de complicate, calculează (evident cu ajutorul calculatorului) posibilele evoluții ale vremii.

Acestor sisteme li se pun la dispoziție date despre vremea de pe tot cuprinsul globului (cum ar fi date despre presiunea atmosferică, temperatură, direcția vântului ș.a.m.d.), pe baza cărora calculează vremea rezultată cu ajutorul modelului subiacent.

Un sistem de predicție meteorologică poate fi ilustrat grafic așa cum se arată în figura 18.

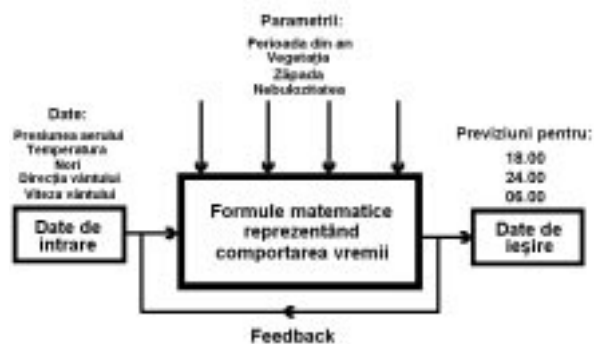


Figura 18: Sistem de predicție meteorologică

Termeni...

Dimensiune fractală: O măsură a neregularității sau asprimii unei forme; gradul în care forma "umple spațiul". Nu s-a găsit încă o definiție exactă a dimensiunii fractale, cu atât mai puțin o formulă generală pentru calcularea ei. În general, este estimată calculând raportul logaritmice al unor proprietăți la diferite scări.

Efectul fluturului: ideea că o mică schimbare în condițiile inițiale, cum ar fi un fluture care dă din aripi de cealaltă parte a *Globului*, poate crea o variație mare în condițiile finale, cum ar fi vremea de mâine. În termeni tehnici, aceasta se numește **dependența sensibilă de condițiile inițiale**.

Dacă privim înregistrările pe termen lung ale datelor climatice observăm existența ciclurilor autorefective, cum ar fi perioade mari de secetă (de exemplu înregistrările realizate pe fluviul *Nil* au relevat perioade de secetă de un mileniu, iar studiile efectuate asupra izotopilor din adâncurile mărilor indică variații de temperatură la un interval de mii de ani).

Aceste cicluri autorefective nu apar doar pe perioade mari de timp, ci și pe perioade mai mici, ca de exemplu o săptămână sau o lună (uneori chiar pe parcursul aceleiași zile).

Pentru caracterizarea acestui tip de date, tehnicile liniare nu ne oferă nici o cale ușoară de caracterizare; fenomenul pierzând orice aparență de structură cu cicluri îmbinate unul în altul (această structură fiind de fapt cel mai interesant de modelat).

De cealaltă parte avem varianta utilizării unei curbe fractale aproximată, pe care putem modela mult mai ușor caracterul de cicluri îmbinate unul în altul. Deși are mari dezavantaje la nivel punctiform (față de modelul liniar și aleator) ne sugerează mult mai exact caracterul esențial pe care îl are curba. Acest model nu este unul anticipativ, deci dacă este folosit pentru prezicerea vremii din următoarea dată de 1 decembrie (de exemplu), previziunea va fi statistic mai puțin exactă decât o previziune bazată pe mediile anuale.

Dar să vedem în continuare câteva afirmații care sunt adevărate doar în cazul datelor reale și a modelului fractal, nu și pentru modelul liniar și aleator:

- variația medie a temperaturii rămâne constantă în timp;
- variația medie a temperaturilor rămâne constantă într-o gamă foarte largă de scări;
- variația, exprimată ca și dimensiune fractală, este cuprinsă între 1.4 și 1.5;

În fiecare zi se cheltuiesc sume uriașe de bani pe echipamente computerizate care vor fi folosite pentru prezicerea vremii, cu toate acestea previziunile meteorologice sunt renumite tocmai pentru inexactitatea lor.

Nici folosirea fractalilor în jocul previziunilor meteorologice nu a adus îmbunătățiri spectaculoase, dar ei au fost de un mare ajutor explicând de ce ele nu dau rezultatele scontate.

În anul 1961, marele meteorolog **Eduard Lorentz** de la **M.I.T. (Massachusetts Institut of Technology)** a descoperit, oarecum din întâmplare, ceea ce a fost introdus în istorie

sub numele de **efectul fluturului**. Efectul fluturului este cunoscut mai exact ca **dependența sensibilă de condițiile inițiale** și este o caracteristică specifică sistemelor naturale și sociale complexe.

Fractalii în zilele noastre

Începând cu anii 1990 fractalii sunt folosiți pe scară largă, mai ales în domenii cum ar fi grafica pe calculator. Astfel, producții cinematografice importante își bazează efectele speciale pe fractali, iar sistemele grafice profesionale îi folosesc în realizarea diferitelor structuri naturale.

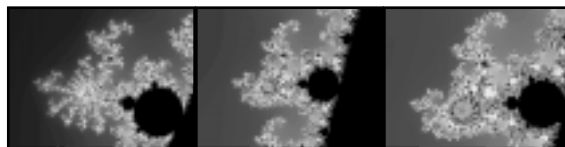
Dacă în trecut matematicienii și oamenii de știință "se temeau" de fractali, acum ei îi folosesc ca pe niște unelte indispensabile și de mare valoare pentru munca lor.

Prin urmare știința, matematica și tehnologia nu vor mai fi privite niciodată ca fiind domenii inestetice sau plictisitoare.

Odată cu dezvoltarea tehnicii de calcul, prin realizarea unor procesoare de interacțiuni tot mai rapide, instrumentele de desenare fractală vor deveni probabil parte integrată a tuturor sistemelor grafice pe calculator.

Bibliografie

1. **Karl-Heinz Becker, Michael Dorfler**, *Dynamical Systems and Fractals*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1983.
2. *Notices of the American Mathematical Society - Computers and Mathematics*, American Mathematical Society, March 1991, Volume 38, Number 3.
3. **Dick Oliver**, *Fractali*, Editura Teora, 1996.
4. **Jaz R. Hill**, *The Mandelbrot Set*, 1997
5. **Florin Munteanu**, *Între ordine și dezordine: o muchie a haosului*, 1997



Ciprian Ileană este student în anul II la Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj și poate fi contactat prin e-mail la adresa ciprian_il@yahoo.com.

Ioana-Maria Ileană este studentă în anul II la Universitatea Politehnica din București și poate fi contactată prin e-mail la adresa willow@email.ro.

Termeni...

Jocul haosului: Denumirea favorită a lui **Michael Barnsley** pentru algoritmul iterației aleatoare. Aceasta nu este o expresie tocmai exactă, pentru că algoritmul nu prezintă o comportare haotică în sensul strict al cuvântului. **Barnsley** folosește cuvântul haos înțelegând prin aceasta factorul aleator.

Echilibru: O stare stabilă, în care cantitatea de energie care intră într-un sistem este egală cu cantitatea de energie care iese din sistem. Majoritatea sistemelor studiate în știința haosului sunt departe de echilibru.

Știința haosului: studiul sistemelor haotice.