



# Galbeni

Această problemă a fost rezolvată corect de către 53 dintre participanții la cea de-a treia rundă a **Concursului de Programare Agora**. Varianta cu trei grămezi de galbeni era destul de cunoscută, rezolvarea acesteia fiind prezentată în numărul 10/5 (mai 2000) al **GInfo**.

Putem considera primele trei grămezi și folosi algoritmul pentru a rămâne cu două grămezi. La aceste două grămezi vom adăuga cea de-a patra grămadă și apoi vom aplica același algoritm. Astfel, din primele patru grămezi am rămas cu două. La acestea vom adăuga cea de-a cincea grămadă și vom folosi același algoritm. Continuând în același mod, vom ajunge la ultima grămadă și vom rămâne, în final, cu numai două grămezi.

În continuare vom prezenta soluția problemei cu trei grămezi. Să presupunem că, la un moment dat, numărul galbenilor din cele trei grămezi este  $a$ ,  $b$  și  $c$ . Vom încerca să determinăm o secvență de operații astfel încât să obținem în cele trei grămezi  $a'$ ,  $b'$  și  $c'$  galbeni cu proprietatea  $\min(a', b', c') < \min(a, b, c)$ . Aplicând de mai multe ori această operație vom ajunge în situația în care minimul va ajunge la 0, deci vom rămâne cu numai două grămezi. Deoarece la fiecare pas minimul va scădea, numărul de galbeni dintr-o grămadă va ajunge după un număr finit de pași la 0.

Să presupunem că ne aflăm în configurația  $(a, b, c)$ . Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că  $a \leq b \leq c$ . (Dacă nu ne aflăm în această situație putem să permutăm grămezile.)

Vom transforma această configurație în  $(a', b', c')$  astfel încât  $b' = \text{rest}[b/a]$ . Este evident că  $b'$  este mai mic decât  $a$  (fiind restul unei împărțiri la  $a$ ), deci  $b' < \min(a, b, c)$  adică,  $\min(a', b', c') < \min(a, b, c)$ .

Pentru a realiza această transformare vom calcula  $x = [b/a]$ . Analizăm biții corespunzători reprezentării binare a lui  $x$ . Fiecare bit care are valoarea 1 poate fi "anulat", transformând configurația  $(a, b, c)$  în  $(2 \cdot a, b - a, c)$ . Pentru un bit care are valoarea 0 nu vom mai modifica valoarea  $b$ , ci va trebui doar să deplasăm cu o poziție la stânga biții din reprezentarea binară a lui  $a$ . Acest lucru se realizează prin transformarea configurației  $a, b, c$  în configurația  $(2 \cdot a, b, c - a)$ . După parcurgerea tuturor biților lui  $x$  vom obține în cea de-a doua grămadă  $\text{rest}[b/a]$  galbeni.

Vom demonstra în continuare că nu vom avea niciodată un număr negativ de galbeni în nici una dintre cele trei grămezi.

Este evident că numărul elementelor din prima grămadă se dublează la fiecare pas, deci aceasta nu va conține niciodată un număr negativ de galbeni.

Numărul elementelor din a doua grămadă scade permanent, dar în final are valoarea  $\text{rest}[b/a]$ , deci este un număr pozitiv. Ca urmare, nici ce-a de-a doua grămadă nu va conține un număr negativ de galbeni.

Numărul elementelor din cea de-a treia grămadă scade și el permanent. Vom calcula acum valoarea sa minimă. Este evident că avem  $a + b + c = a' + b' + c'$ . Mai știm că  $b' = \text{rest}[b/a]$ , deci avem  $a + b' + a \cdot x + c = a' + b' + c'$ , unde  $x = [b/a]$ . Scăzând valoarea  $b'$  din ambii membri obținem  $a \cdot (1 + x) + c = a' + c'$ . Pentru fiecare bit al lui  $x$ , valoarea  $a$  se dublează. Având în vedere că numărul biților lui  $x$  este  $[\log_2 x] + 1$ ,  $a'$  va avea cel mult valoarea  $2 \cdot x \cdot a$ . Ajungem astfel la inegalitatea  $a \cdot (x + 1) + c \leq 2 \cdot x \cdot a + c'$  sau  $c' \geq c - a \cdot (x - 1)$ . Știm că  $x = [b/a]$ , deci  $b \geq a \cdot x$ . Deoarece  $c \geq b$  avem  $c \geq a \cdot x$ . Astfel inegalitatea devine  $c' \geq a$ . Deoarece valoarea  $a$  este pozitivă, rezultă că și valoarea  $c'$  este pozitivă.

Deoarece numărul de elemente din nici una dintre cele trei grămezi nu poate ajunge negativ, este clar că algoritmul este corect și poate fi aplicat pentru a rezolva problema în varianta cu trei grămezi.

Vom porni cu primele trei grămezi și apoi, pe măsură ce numărul de elemente dintr-o grămadă va deveni zero, vom adăuga celelalte grămezi. Versiunea oficială a soluției acestei probleme este prezentată în continuare.

## Listing GOLD.CPP

```
#include <stdio.h>

long gold[1000], n;
FILE *f;

void ReadData(void) {
    f=fopen("GOLD.IN", "rt");
    fscanf(f, "%ld", &n);
    for (int i=0; i<n; i++)
        fscanf(f, "%ld", &gold[i]);
}

void ThreePiles(int& a, int& b, int& c) {
    int ia, ib, ic;
```



```

long *pa,*pb,*pc;
while (1){
    if (gold[a]>gold[b]){
        pa=&gold[ia=b];
        pb=&gold[ib=a];
    }
    else{
        pa=&gold[ia=a];
        pb=&gold[ib=b];
    }
    if (gold[c]>=*pb)
        pc=&gold[ic=c];
    else{
        pc=pb; ic=ib;
        if (gold[c]>=*pa)
            pb=&gold[ib=c];
        else{
            pb=pa; ib=ia;
            pa=&gold[ia=c];
        }
    }
    for (long x=*pb/(*pa);x;x>=1)
        if (x&1){
            *pb--*pa;
            *pa<=1;
            fprintf(f,"%d %d\n",ib+1,ia+1);
            if (!*pb){
                a=ia; b=ic;
                return;
            }
        }
        else{
            *pc--*pa;
            *pa<=1;
            fprintf(f,"%d %d\n",ic+1,ia+1);
            if (!*pc){
                a=ia; b=ib;
                return;
            }
        }
}

void ComputeAndWriteSolution(void){
    int a=0,b=1;
    f=fopen("GOLD.OUT","wt");
    for (int c=2;c<n;c++)
        ThreePiles(a,b,c);
    fclose(f);
}

void main(void){
    ReadData();
    ComputeAndWriteSolution();
}

```

## Au rezolvat corect:

Cristian Alexandrescu, Botoșani  
 Csaba Andras, Oradea  
 Marius Andrei, București  
 Mugurel Ionuț Andreica, București  
 Liviu-Cosmin Andreicuț, București  
 Victor Asavei, Dr. Tr. Severin  
 Mihai-Ioan Bădilă, Cugir  
 Cristian Băicoianu, Ploiești  
 Ciprian-Nicolae Baicu, Dr. Tr. Severin  
 Valentin Bisa, Lugoj  
 Denis Bogdănaș, Iași  
 Ciprian Cană, Vaslui  
 Adrian Cărcu, Bistrița  
 Alexandra-Elena Constantin, Ploiești  
 Horea Coroiu, Cluj-Napoca  
 Daniel Crișan, Râmnicu Vâlcea  
 Andrei Csibi, Cluj-Napoca  
 Vlad Dascălu, Bacău  
 Andrei David, Râmnicu Vâlcea  
 Radu Dondera, București  
 George Drumea, București  
 Octavian-Daniel Dumitran, București  
 Dan Ghinea, București  
 Claudiu Gruia, București  
 Mihai Hărănguș, Cluj-Napoca  
 Ioana-Maria Ileană, Alba Iulia  
 Liviu Lalescu, Craiova  
 Codruț-Lucian Lazăr, Câmpeni  
 Bogdan Lucaciu, Dr. Tr. Severin  
 Maximilian Machedon, București  
 Emilian Miron, Bacău  
 Cosmin-Silvestru Negruseri, Bistrița  
 Bogdan Nicolae, Sibiu  
 Sorin Otescu, Brașov  
 Mihai-Vlad Pantiș, Cluj-Napoca  
 Csaba Patcas, Oradea  
 Mihai Pătrașcu, Craiova  
 Liviu Păunescu, Constanța  
 Gabriel Pârvan, Râmnicu Sărat  
 Bogdan-Milovan Piloga, Timișoara  
 Valentin Pop, Carei  
 Mihail Popa, București  
 Dan Popovici, Arad  
 Cosmin Răianu, Constanța  
 Paul Rusu, Cluj-Napoca  
 Bogdan Stan, Câmpina  
 Mihai Stroe, București  
 Radu Ștefan, Brașov  
 Cristian Toth, Lugoj  
 Silviu-Gabriel Udrea, Târgu Jiu  
 Radu Vătavu, Suceava  
 Vlad Vâlceanu, Arad  
 Victor Vernescu, Constanța