



O posibilă definiție ALGEBRICĂ a tipurilor ORDINALE

Tiberiu Socaciu

Vom încerca în cele ce urmează să realizăm o introducere algebrică a tipurilor de date ordinale din limbajul Pascal. Aparatul algebric folosit în articol este prezentat pe scurt la început. Considerăm că el este ușor comprehensibil de către orice elev cu abilități matematice peste medie.

Vom începe cu prezentarea unor definiții algebrice pe care le vom folosi în prezentarea unor explicații ulterioare.

Produs cartezian

Numim **produs cartezian** a două mulțimi A și B mulțimea $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Relație

Numim **relație** peste o mulțime M un triplet r de forma $r = (M, M, R)$, unde $R \subseteq M \times M$.

Notății

Pentru o relație $r = (M, M, R)$, vom considera următoarele notații echivalente:

- $(x, y) \in R$
- $x r y$.

Relație reflexivă

Spunem că o relație $r = (M, M, R)$ este **reflexivă** dacă $\forall x \in M: (x, x) \in R$.

Relație antisimetrică

Spunem că o relație $r = (M, M, R)$ este **antisimetrică** dacă $\forall x, y \in M: (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$.

Relație tranzitivă

Spunem că o relație $r = (M, M, R)$ este **tranzitivă** dacă $\forall x, y, z \in M: (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$.

Relație de ordine

Spunem că o relație r peste o mulțime M este o **relație de ordine** dacă îndeplinește simultan condițiile:

- r este reflexivă;
- r este antisimetrică;
- r este tranzitivă.

Relație totală

Spunem că o relație r peste o mulțime M este o **relație totală** dacă $\forall x, y \in M: (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.

Mulțime de ordine

Numim **mulțime ordonată** (sau **lanț**) o mulțime înzestrată cu o relație de ordine totală.

Morfism de ordine

Numim **morfism de ordine** de la mulțimea ordonată (M_1, r_1) la mulțimea ordonată (M_2, r_2) o funcție $f: M_1 \rightarrow M_2$ pentru care

$$\forall x, y \in M_1: x r_1 y \rightarrow f(x) r_2 f(y).$$

Izomorfism de ordine

Numim **izomorfism de ordine** un morfism de ordine care este bijectiv.

Mulțimi izomorfe

Spunem că două mulțimi ordonate sunt **izomorfe** dacă există între ele un izomorfism de ordine.

**Inversa unei relații**

Inversa unei relații $r = (M, M, R)$ se definește ca fiind $r^{-1} = (M, M, R^{-1})$, unde

$$(x, y) \in R^{-1} \rightarrow (y, x) \in R.$$

Relație diagonală

Relația diagonală (sau **relația de egalitate**) peste o mulțime M se definește ca fiind $= (M, M, A)$, unde

$$A = \{(x, x) \mid x \in M\}.$$

Negația unei relații

Negația unei relații $r = (M, M, R)$ se definește ca fiind

$$\neg r = (M, M, M \times M / R).$$

Intersecția a două relații

Având două relații $r_1 = (M, M, R_1)$ și $r_2 = (M, M, R_2)$ se definește **intersecția** lor ca fiind relația

$$r_1 \cap r_2 = (M, M, R_1 \cap R_2).$$

Mulțimea părților

Mulțimea părților unei mulțimi A se definește ca fiind mulțimea $\wp(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

Funcția maxim

Fie A o mulțime finită ordonată și B o submulțime nevidă a sa. Funcția $MAX: \wp(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$, astfel încât

$$\forall B \in \wp(A) \setminus \{\emptyset\}: MAX(B) \in B$$

și

$$\forall x \in B: x \leq MAX(B)$$

se numește **funcția maxim**, iar $MAX(B)$ se numește **maximul** mulțimii B .

Funcția minim

Funcția minim se definește analog: $MIN: \wp(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$, astfel încât

$$\forall B \in \wp(A) \setminus \{\emptyset\}: MIN(B) \in B$$

și

$$\forall x \in B: x \geq MIN(B)$$

Mulțimile succesorilor și predecesorilor

Fie A o mulțime ordonată. Spunem că mulțimile $S(x)$ și $P(x)$ sunt **mulțimile succesorilor** lui x , respectiv ale **predecesorilor** lui x , unde

$$S(x) = \{y \in A \mid x \leq y, x \neq y\}$$

și

$$P(x) = \{y \in A \mid x \geq y, x \neq y\}.$$

Tipuri de date

Se știe că una din posibilele definiții ale tipului de date este cea a unui triplet de forma:

$$(Mulțime_de_valori, Operații_și_relații, Reprezentarea_valorilor_în_memorie).$$

Practic, dacă facem abstracție de cea de-a treia componentă, tipurile de date pot fi privite ca structuri algebrice (adică mulțimi suport înzestrate cu o mulțime de operații cu diferite arități).

Tipuri ordinale**Tip ordinal**

Numim tip **ordinal** un lanț izomorf cu o mulțime finită de numere întregi.

Propoziție

Fie T un tip ordinal. Atunci:

- T este finit;
- $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists ORD: T \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ un izomorfism de ordine.

Exercițiu

Demonstrați propoziția de mai sus.

Observație

Funcția ORD este predefinită în *Pascal*.

Observație

Relația de ordine totală " \leq " este predefinită în *Pascal* și se notează cu " $<=$ ".

Notaii

- Inversa relației " $<=$ " este notată în *Pascal* cu " $>=$ ".
- Relația diagonală se notează în *Pascal* cu " $=$ ".
- Negația relației " $=$ " se notează în *Pascal* cu " $<>$ ".

Observație

Relațiile definite anterior sunt predefinite în *Pascal*.

Relații de ordine strictă

Definim două **relații de ordine strictă** astfel:

- " $<$ " := " $<=$ " \cap " $<>$ ";
- " $>$ " := " $>=$ " \cap " $<>$ ".

Observație

Relațiile definite anterior sunt predefinite în *Pascal*.

Funcțiile succesor și predecesor

Funcțiile

$$SUCC: T \setminus MAX(T) \rightarrow T \setminus MIN(T)$$

și

$$SUCC: T \setminus MAX(T) \rightarrow T \setminus MIN(T)$$

date de

$$SUCC(x) = MIN(S(x))$$

și

$$PRED(x) = MAX(P(x))$$

poartă numele de funcția **succesor** și de funcția **predecesor**.

Observație

Funcțiile prezentate sunt predefinite în limbajul *Pascal*.

Propoziție

Pentru orice x pentru care funcțiile sunt definite, avem:

- $SUCC(x) > x$;

- $PRED(x) < x$;
- $SUCC(PRED(x)) = x$;
- $PRED(SUCC(x)) = x$;
- $ORD(SUCC(x)) = ORD(x) + 1$;
- $ORD(PRED(x)) = ORD(x) - 1$.

Exercițiu

Demonstrați propoziția de mai sus. Care sunt condițiile pe care trebuie să le respecte argumentul x în fiecare din cele șase cazuri?

Tipurile ordinale ale limbajului Pascal

Tipuri enumerare

În cazul tipurilor enumerare, lanțul se definește explicit prin intermediul unei liste de identificatori:

$$(e_1, e_2, \dots, e_k),$$

unde

$$ORD(e_i) = i - 1.$$

Tipuri subdomeniu

În cazul tipurilor subdomeniu, lanțul se definește implicit prin intermediul capetelor subdomeniului:

$$a..b,$$

unde a și b au același tip ordinal A . În acest caz elementele mulțimii sunt:

$$\{x \in A \mid a \leq x \wedge x \leq b\},$$

iar

$$ORD(x) = ORD_A(x) - ORD_A(a).$$

Tipul Boolean

Tipul Boolean este un tip enumerare predefinit:

$$\text{Boolean} = (\text{false}, \text{true}).$$

Tipul întreg

Tipul întreg este un tip subdomeniu predefinit:

$$\text{Integer} = -\text{Maxint}.. \text{Maxint},$$

unde Maxint este o constantă dependentă de implementare.

Observații

- Trebuie remarcat faptul că în cazul tipului întreg, funcția ORD este funcție identică pe Integer , fiind un caz în care nu se respectă, din rațiuni de implementare, regulile stabilite.
- Limita inferioară pentru Integer are, în cele mai multe din cazuri, valoarea $-\text{Maxint} \pm 1$, datorită implementării folosind virgula fixă.

Tipul caracter

Tipul caracter este un tip subdomeniu predefinit:

$$\text{Char} = \text{CHR}(0) .. \text{CHR}(255),$$

unde funcția

$$\text{CHR}: 0..255 \rightarrow \text{Char}$$

este un izomorfism de ordine, a cărui inversă este funcția ORD .

Alte tipuri întregi

În implementările *Turbo/Borland Pascal* ale firmei *Borland* au fost definite și alte tipuri întregi: *Shortint*, *Byte*, *Word*, *Longint* care sunt compatibile (în sensul atribuirii) cu tipul întreg.

Exercițiu

Celelalte tipuri întregi (altele decât *Integer*) sunt sau nu ordinale? Justificați răspunsul.

Dl. Tiberiu Socaciu este licențiat și master al Facultății de Matematică, Universitatea "Babeș-Bolyai" Cluj. Este director IT la SC InfoData SRL Cluj, și poate fi contactat prin e-mail la adresa socaciu@inf.ro.

www.price.ro

Site-ul **www.price.ro** este un ghid online de prețuri pentru componente, periferice, accesorii și sisteme PC.

Vă este pusă la dispoziție o bază de date care conține ofertele celor mai importanți distribuitori din România.

Informațiile referitoare la produse cuprind denumirea, specificațiile, prețul, producătorul și firma distribuitor. Pentru fiecare distribuitor vă este pusă la dispoziție o pagină care conține modalitățile de contact și data la care a fost actualizată oferta acestuia.

Interfața este foarte prietenoasă, informațiile putând fi găsite foarte ușor.

Pentru a căuta un anumit produs va trebui să selectați mai întâi categoria din care acesta face parte (componente, periferice, accesorii etc.), și apoi familia din care face parte. De exemplu, dacă doriți să căutați un procesor veți selecta meniul **Componente** și apoi **Procesoare**. În acest caz veți putea alege prețul maxim, frecvența minimă, frecvența magistralei și platforma. Va fi afișată o listă ce conține informațiile care respectă cerințele specificate.

Aveți la dispoziție și un **Wish Basket** care va conține produsele pe care le doriți (și prețul total), precum și posibilitatea de a citi sau de a adăuga anunțuri de vânzare/cumpărare.

