



Geometrie 3D

Mihai Scorțaru

În acest articol vă vom prezenta câțiva algoritmi care necesită unele cunoștințe de geometrie în spațiu pentru a putea fi înțeleși. În cazul acestor algoritmi, geometria are un rol secundar, ei rezolvând, de fapt, probleme de analiză combinatorică.

Aplicația 1

Se dau patru puncte necoplanare. Să se determine numărul de plane care se află la distanță egală față de cele patru puncte.

Rezolvare

Deoarece cele patru puncte nu sunt coplanare, rezultă că nu există un plan egal depărtat de aceste puncte care să se afle de aceeași parte a acestora. Rezultă că mai avem de tratat două cazuri:

- un punct se află de o parte a planului și celelalte trei de cealaltă parte;
- de fiecare parte a planului se află câte două puncte.

În primul caz, presupunem că punctele A, B și C se află de o parte a planului P , iar punctul D se află de cealaltă parte. Punctele A, B și C nu pot fi coliniare pentru că, altfel, ar exista un plan care ar conține toate cele patru puncte. Rezultă că punctele A, B și C determină un plan P' unic și, deoarece distanța dintre punctele A, B, C și planul P trebuie să fie aceeași, mai rezultă că planul P' este paralel cu planul P . Pentru ca distanța de la punctul D la planul P să fie aceeași cu distanța de la A, B și C , planul P trebuie să treacă prin mijlocul perpendicularei coborâte din D pe planul P' . Astfel, am demonstrat că există un singur plan egal depărtat de punctele A, B, C și D care are punctele A, B și C de o parte a sa și punctul D de cealaltă parte. Analog se demonstrează existența a încă trei asemenea plane: unul care are de o parte punctele A, B și D , iar de cealaltă parte punctul C , unul care are de o parte punctele A, C și D , iar de cealaltă parte punctul B și unul care are de o parte punctele B, C și D , iar de cealaltă parte punctul A . Considerând piramida determinată de punctele A, B, C și D , cele patru plane determinate până acum sunt paralele cu fețele piramidei și trec prin mijloacele înălțimilor corespunzătoare acestor fețe.

În al doilea caz presupunem că punctele A și B se află de o parte a planului P , iar punctele C și D se află de cea-

laltă parte. Deoarece planul P trebuie să fie egal depărtat de punctele A și B , rezultă că el trebuie să fie paralel cu dreapta AB . În mod analog se demonstrează faptul că planul P trebuie să fie paralel cu dreapta CD . Deoarece A, B, C și D nu sunt coplanare, rezultă că dreptele AB și CD nu sunt paralele și nici concurente. Alegem două plane paralele care să treacă prin AB și CD . Este evident că aceste două plane sunt paralele cu planul P și trebuie să fie egal depărtate de el. Astfel am demonstrat că există un singur plan egal depărtat de punctele A, B, C și D care are punctele A și B de o parte și punctele C și D de cealaltă parte. Analog, se demonstrează existența a încă două asemenea plane: unul care are de o parte punctele A și C , iar de cealaltă parte punctele B și D și unul care are de o parte punctele A și D , iar de cealaltă parte punctele B și C . Considerând piramida determinată de punctele A, B, C și D , cele trei plane determinate acum sunt paralele cu o pereche de muchii opuse și sunt egal depărtate de acestea.

În concluzie, avem șapte plane care se află la distanță egală față de patru puncte necoplanare date.

Aplicația 2

Determinați numărul maxim de zone în care poate fi împărțit spațiul prin n plane.

Rezolvare

Numărul maxim de zone se obține atunci când oricare două dintre plane nu sunt paralele, oricare trei dintre ele nu au nici o dreaptă comună și oricare patru dintre ele nu au nici un punct comun.

Vom presupune că am dus k plane și am împărțit spațiul într-un număr maxim de zone prin această operație. Vom determina cu cât crește numărul de zone după ce considerăm și al $(k+1)$ -lea plan. Acest plan se va intersecta după k drepte cu planele deja existente, deoarece nu există perechi de plane paralele și oricare trei plane nu au drepte comune. Nici o pereche din cele k drepte nu sunt paralele,



deoarece nu există nici un grup de trei plane care să fie paralele cu o aceeași dreaptă. Nici un grup de trei din cele k drepte nu se intersectează în același punct deoarece nici un grup de patru dintre planele considerate nu trec prin același punct. Vom demonstra acum că cele k drepte împart noul plan în maximum $(k^2+k+2)/2$ zone. Astfel problema s-a redus la una de geometrie plană și anume problema determinării numărului maxim de zone în care poate fi împărțit un plan prin n drepte.

Planul va fi împărțit într-un număr maxim de zone dacă nu există nici o pereche de drepte paralele și nici un grup de trei drepte care să aibă un punct comun.

Presupunem că au fost duse k drepte; vom determina cu cât crește numărul de zone după ce considerăm cea de-a $(k+1)$ -a dreaptă. Această dreaptă se intersectează cu celelalte k drepte în k puncte, deci va fi împărțită în $k+1$ zone. În concluzie, noua dreaptă va trece prin $k+1$ zone ale planului. Ea va împărți fiecare din aceste zone în două, deci numărul de zone va crește cu $k+1$.

Notând cu P_k numărul de zone în care poate fi împărțit planul prin considerarea a k drepte, obținem $P_{k+1}=P_k+k+1$. Deoarece prima dreaptă împarte planul în două zone, avem $P_1=2$. Vom deduce că $P_n=2+2+3+4+\dots+n$. De aici obținem că $P_n=(1+2+3+\dots+n)+1=n\cdot(n+1)/2+1=(n^2+n+2)/2$.

Să revenim acum la problema în spațiu. Am demonstrat că al $(k+1)$ -lea plan va împărți spațiul în $(k^2+k+2)/2$ zone. Astfel, al $(k+1)$ -lea plan va intersecta $(k^2+k+2)/2$ zone ale spațiului, fiecare dintre aceste zone fiind împărțită în două, deci numărul de zone va crește cu $(k^2+k+2)/2$ după considerarea celui de-al $(k+1)$ -lea plan.

Notând cu S_k numărul de zone în care poate fi împărțit spațiul prin k plane, obținem $S_{k+1}=S_k+(k^2+k+2)/2$. Deoarece primul plan împarte spațiul în două zone, vom avea $S_1=2$.

Vom deduce că

$$S_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2 + k + 2}{2} = 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k + n - 1$$

Deoarece $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2 \cdot n - 1)}{6}$ și $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$, obținem

$$S_n = 2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2 \cdot n - 1)}{12} + \frac{n \cdot (n-1)}{4} + n - 1$$

$$S_n = 2 + \frac{(n-1) \cdot (2 \cdot n^2 - n + 3 \cdot n + 12)}{12} = \frac{n^3 + 5 \cdot n + 6}{6}.$$

Ca urmare, numărul maxim de zone în care poate fi împărțit spațiul prin n plane este $\frac{n^3 + 5 \cdot n + 6}{6}$.

Observație

Problema se poate generaliza pentru un hiperspațiu cu n dimensiuni, rezolvarea bazându-se pe reducerea problemei n -dimensionale, la una $(n-1)$ -dimensională. De exemplu, pentru hiperspațiul cu 4 dimensiuni, am putea defini problema împărțirii acestuia prin n spații tridimensionale.

Se observă destul de ușor că vom obține formula de recurență $H_{k+1}=H_k+(k^3+5 \cdot k+6)/6$, unde $H_1=2$.

Vom obține

$$H_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^3 + 5 \cdot k + 6}{6} = 2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + \frac{5}{6} \sum_{k=1}^{n-1} k + n - 1.$$

Folosind formula $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n^2 \cdot (n-1)^2}{4}$ obținem

$$H_n = 2 + \frac{n^2 \cdot (n-1)^2}{24} + \frac{5 \cdot n \cdot (n-1)}{12} + n - 1.$$

De aici avem

$$H_n = \frac{n^4 + 2 \cdot n^3 + n^2 + 10 \cdot n^2 - 10 \cdot n + 24 \cdot n + 24}{24} = \frac{n^4 + 2 \cdot n^3 + 11 \cdot n^2 + 14 \cdot n + 24}{24}.$$

Aplicația 3

Determinați numărul maxim de sfere care să fie tangente la toate cele patru plane ale unui tetraedru.

Rezolvare

Problema se reduce la a determina numărul de puncte egal depărtate de cele patru fețe ale tetraedrului. Aceste puncte vor fi centrele sferelor.

Locul geometric al punctelor egal depărtate de fețele unui diedru este un plan care trece prin muchia diedrului și care împarte unghiul diedru în două unghiuri egale. Acest plan poartă denumirea de **plan bisector** al diedrului.

Deoarece două plane care se intersectează formează două perechi de diedre opuse la vârf, rezultă că locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane care se intersectează este format din două plane care trec prin dreapta lor de intersecție.

Locul geometric al punctelor egal depărtate de fețele unui triedru este dreapta de intersecție a planelor bisectoare ale celor trei diedre ale triedrului. Această dreaptă de intersecție poartă denumirea de **bisectoare** a triedrului.

Deoarece trei plane care se intersectează formează patru perechi de triedre opuse la vârf, rezultă că locul geometric al punctelor egal depărtate de trei plane este format din patru drepte care trec prin punctul lor de intersecție.

Să considerăm acum planele P_1, P_2, P_3 și P_4 ale fețelor unui tetraedru. Considerăm triedrul interior tetraedrului format din planele P_1, P_2 și P_3 . Locul geometric al punctelor egal depărtate de aceste trei fețe este format din patru drepte d_1, d_2, d_3 și d_4 . Locul geometric al punctelor egal depărtate de planele P_1 și P_4 este format din două plane S_1 și S_2 . Este evident faptul că oricare dintre punctele de intersecție ale uneia dintre dreptele d_1, d_2, d_3 , și d_4 cu unul dintre planurile S_1 și S_2 va fi egal depărtat de planele P_1, P_2, P_3 și P_4 , și că nu mai există alte puncte cu această proprietate. Astfel, în general, se obțin opt puncte egal depărtate de fețele piramidei, deci avem opt sfere tangente la cele patru plane ale unui tetraedru.

Observație

Există cazuri în care unele dintre dreptele d_1, d_2, d_3 , și d_4 sunt paralele cu unul dintre planele S_1 și S_2 . În aceste cazuri numărul de sfere se reduce. De exemplu, în cazul unui tetraedru regulat avem doar cinci sfere tangente la cele patru fețe.