HAL
open science

Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam / France

Annie Bessot, Claude Comiti

To cite this version:

Annie Bessot, Claude Comiti. Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam / France. 2008. hal-00464582

HAL Id: hal-00464582

https://hal.science/hal-00464582v1

Preprint submitted on 28 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

(2008) In Coulange L. & Hache C. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, 171-193

Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam / France

Annie Bessot et Claude Comiti

DIAM, Laboratoire LIG

Résumé

Nous présentons brièvement le contexte dans lequel ces études comparatives se sont développées : dix-sept ans de coopération interuniversitaire entre l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh (UPHCM) et l'Université Joseph Fourier (UJF, Grenoble 1) dont l'évolution a permis la création à l'UPHCM d'un pôle vietnamien de formation de haut niveau en didactique des mathématiques (Master 2 et depuis 2008 École doctorale).

Puis nous résumons les caractéristiques au Viêt-Nam de l'organisation et du fonctionnement de l'école, de la formation des enseignants de mathématiques et de la recherche en éducation.

Nous cherchons enfin à identifier, non seulement les principaux apports pour la recherche en didactique des mathématiques des analyses comparatives mais aussi les grandes questions qu'elles suscitent. Nous nous appuyons pour ce faire sur certaines des thèses en cotutelle entre l'UPHCM et l'UJF qui ont de façon plus ou moins explicite mis en relation des analyses didactiques des deux systèmes éducatifs France et Viêt-Nam.

Mots Clefs

Étude comparative, comparaison synchronique, comparaison diachronique, noosphère, praxéologie mathématique à enseigner, praxéologie mathématique enseignée, ingénierie didactique

Introduction

C'est en 1989 que la demande du Viêt-Nam d'aide à une rénovation de son système d'enseignement des disciplines scientifiques est prise en considération par le MAE français. Considérée par ce dernier comme susceptible de permettre une avancée de la francophonie dans ce pays, elle est alors institutionnalisée par son inscription au plan pluriannuel (1990-95) de coopération mixte franco-vietnamien, et soutenue financièrement.

De 1989 à 1995, se déroulent de nombreuses actions, qui portent toutes sur la formation des enseignants des établissements universitaires de formation des maîtres en didactique des disciplines scientifiques. Ces actions aboutissent, en mars 1995, à la tenue d'un Premier Colloque Régional des Pays Francophones d'Asie du Sud-Est « Didactique des Disciplines

scientifiques et formation des enseignants », qui marque une étape importante dans l'expression de besoins propres au pays.

Dès les années 1996, de grands projets sont en cours au Viêt-Nam, sur le système éducatif en général et tout particulièrement sur l'enseignement des disciplines scientifiques (qui se concrétiseront par la réforme des années 2000). Le besoin de personnes ressources expertes en analyse et évaluation de curriculums, ainsi qu'en élaboration d'ingénierie d'enseignement et de formation se manifeste fortement. La demande vietnamienne est de permettre à des enseignants d'universités chargées de la formation des enseignants (Ecole Normale Supérieure (ENS) et Université Pédagogique (UP)) repérés pour leurs compétences et leur volonté d'innovation, d'acquérir une qualification universitaire de haut niveau (doctorat) ainsi que les outils indispensables pour assumer des responsabilités au sein du système éducatif de leur pays.

Notons que c'est la réponse de notre équipe à cette demande par la direction de thèses en cotutelle qui aboutira à la création, à l' Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville, en 2001 du 1e master de Didactique Des Mathématiques (DDM), puis en 2008, à celle de la 1e formation doctorale en DDM[1].

Le choix de centrer les sujets des thèses en cotutelle sur des études comparatives date de cette époque. Il répond à la volonté de :

- réinvestir tout en les mettant à l'épreuve dans un autre contexte les résultats de la communauté de recherche en didactique des mathématiques,
- répondre aux besoins du système éducatif vietnamien, notamment en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, en mettant à disposition des partenaires de nouveaux outils scientifiques afin de leur permettre de s'en saisir pour conduire eux-mêmes des études sur leur propre système éducatif,
- créer, par leur travail sur le système éducatif du Viêt-Nam, les conditions d'une insertion ultérieure rapide des nouveaux docteurs dans la communauté scientifique de leur pays, par des publications sur des sujets vifs et par leurs capacités d'intervention dans les débats et actions en cours : recherches, nouveaux programmes, nouveaux manuels, …

C'est ainsi que Lê Thi Hoai Châu étudiera l'introduction de l'enseignement des vecteurs dans les programmes vietnamiens de 1990, Nguyen Chi Thanh s'intéressera à la viabilité d'un enseignement d'algorithmique et de programmation dans le contexte des programmes

[1] Pour plus de détail, on pourra consulter Comiti , Tran Van et al. (à paraître).

du lycée de 2000, Vu Nhu Tu Huong, aux interrelations entre probabilités et statistiques dans les programmes du lycée de 2006. Lê Van Tien et Lê Thai Bao ThienTrung s'interrogeront sur la reprise au sein du domaine de l'analyse de savoirs anciens dans le passage du collège au lycée, comme le fera Doan Huu Hai dans le domaine de la géométrie dans l'espace. Quant à Nguyen Ai Qoc et Tran Luong Cong Khanh, ils questionneront la différence institutionnelle des choix effectués au Viêt-Nam et en France pour l'enseignement d'un même objet mathématique (résolution des équations du second degré ou calcul intégral). Enfin Bui Thi Khanh Hang posera un problème de formation, celui des enseignants de physique des deux pays à propos de l'enseignement de la notion d'énergie.

Dans cette communication, destinée à ouvrir un débat sur l'apport des recherches comparatives à la didactique des mathématiques, nous proposerons, à partir d'exemples issus de quelques unes de ces thèses, des éléments de réponses aux questions suivantes.
Lors d'une étude comparative de deux systèmes d'enseignement qu'est-il pertinent de comparer ? Qu'est-ce que cela nous apprend ?
Mais il nous a semblé indispensable auparavant, puisque les recherches comparatives sur lesquelles nous allons nous appuyer confrontent l'enseignement des mathématiques en France et au Viêt-Nam, de présenter brièvement la genèse de l'enseignement des mathématiques au Viêt-Nam.

I. La genèse de l'enseignement des mathématiques au Viêt-Nam[2]

I.1 Le Viêt-Nam confucéen

C'est au Xe siècle que le Viêt-Nam a conquis son indépendance, se libérant de la domination féodale chinoise. La dynastie des Ly institue un état monarchique centralisé en réponse à une triple nécessité : la construction et l'entretien d'un réseau de digues très étendu afin de contrôler les inondations du delta du fleuve rouge, la sauvegarde de l'indépendance nationale et la fin des luttes paysannes. Afin de répondre à cette triple nécessité, elle met en place une administration centralisée et institue, au XIe siècle, les premiers concours mandarinaux. Il s'agit de recruter les fonctionnaires de grade supérieur par des concours ouverts à tous sauf aux comédiens et aux femmes !

[2] D'après Bessot, Comiti 2006.

Les concours régionaux décernent des titres à ceux qui ont ensuite le droit de se présenter à la capitale pour passer les concours impériaux décernant les titres de docteur. Il y a beaucoup de candidats et très peu d'élus, à peine une centaine sur plusieurs milliers dans les concours régionaux ; seulement un peu plus de 2000 titres de docteur ont été délivrés en dix siècles. Les lettrés confucéens, candidats malheureux aux concours deviennent précepteurs, écrivains publics et maîtres d'école. L'école (maître unique, classe unique), entretenue par les familles riches est laissée à l'initiative privée. Son but est de préparer aux concours : on y apprend à lire, écrire, réciter par cœur des textes classiques en chinois, puis à disserter sur les thèmes traditionnels de la doctrine confucéenne et à composer des poèmes.

Or les épreuves de concours pour recruter les mandarins ne comportent pas d'épreuve mathématique, même si l'ouvrage *Daiu Viet Su Ki Toàn Thu*[3] relève quelques épreuves contenant des mathématiques en 1077, 1261, 1373, 1404, 1437, 1475, 1477, 1483, 1507, 1722 et 1762. Ces épreuves, servant à recruter des scribes, pour les affaires concernant les taxes, les salaires, les constructions… portent essentiellement sur la division en parties égales ou en parties représentant des proportions différentes ainsi que sur les calculs d'aires et de volumes. Dans les sujets[4], figurent non seulement des données nécessaires, mais aussi des données superflues existant dans la réalité. Les candidats doivent rédiger de façon littéraire leur réponse aux questions et leur interprétation des données superflues.

Remarquons de plus que ces épreuves se dérouleront, jusqu'au XIXe en chinois classique alors que se développe, dès le XVIIe toute une littérature en *nôm*, système d'idéo-phonogrammes formés à partir des sinogrammes et qu'Alexandre de Rhodes (1591-1660) sur la base du travail de missionnaires portugais et espagnols, met au point une écriture romanisée de cette langue, le *quôc ngu,* qui deviendra bien plus tard un outil de démocratisation de l'éducation, puisque plus simple à apprendre que l'écriture vietnamienne traditionnelle (le *nôm*) qui nécessite un apprentissage préalable du chinois.

Par ailleurs, les lettrés ne représentent qu'un nombre infime de la population, la grande majorité des habitants étant des paysans. Il n'y a donc pas d'école pour tous, et même dans celles qui préparent aux concours, pas véritablement d'enseignement de mathématiques.

[3] Compilation d'annales historiques, à partir du premier ouvrage historique conservé (Lê Van Huu, 1212), complété par Ngo Si Lien en 1479 et par Pham Cong Tru et Lê Hi au 18ième siècle

[4] Tels qu'on les trouve dans un manuel de Pham Huu Chung paru au XVIIe et conservé jusqu'à maintenant.

I.2 L'époque coloniale

Dans la deuxième moitié du XIXe, le Viêt-Nam doit faire face à l'agression colonialiste française, la monarchie et les mandarins composent avec l'ennemi, les lettrés mobilisent les paysans et organisent la résistance. La colonisation sonne la défaite du confucianisme, en même temps que les traductions chinoises des œuvres comme celles de Rousseau et de Montesquieu introduisent deux notions qui lui sont étrangères : celle de science et celle de démocratie.

a. De 1905 à 1930 : substitution de l'enseignement en français à l'enseignement en chinois

L'enseignement en chinois est supprimé. Toutes les écoles d'Indochine doivent utiliser la langue française. Des générations nouvelles d'intellectuels, issues de la bourgeoisie vietnamienne, formées à l'école française, apprennent la physique, l'algèbre, la biologie, la géographie, en même temps que les systèmes électoraux et les constitutions républicaines. Mais plus de 90% des vietnamiens restent illettrés. Le nombre d'écoles par district ou par province est très faible, de l'ordre de 5 ou 6. Le Viêt-Nam ne compte que 20 collèges installés dans quelques grandes villes et provinces. Il n'y a que 5 lycées pour tout le pays, dont 2 au Nord, un au Centre et 2 au Sud, dont deux sont réservés aux enfants français ou aux enfants de familles mandarines ou de familles riches. Le programme des mathématiques est alors plus ou moins le programme français ; les manuels viennent de France. Au niveau du lycée, il s'agit des manuels Brachet et Dunarque, Brachet étant alors inspecteur général en Indochine.

c. De 1930 à 1945 : vers l'écriture de traités scientifiques en langue vietnamienne

L'année 1930 voit la création du parti communiste indochinois et l'arrivée du marxisme au Viêt-Nam comme instrument de libération, après l'échec des luttes des lettrés confucéens et d'intellectuels issus de la bourgeoisie contre le régime colonial et féodal. Le marxisme va alors succéder au confucianisme, tout en considérant ce dernier et l'œuvre des lettrés comme un patrimoine national.

À cette époque, seulement quelques élèves vietnamiens très brillants sont boursiers en France et obtiennent un niveau mathématique universitaire.

Parmi eux, le Pr Hoàng Xuân Hãn, considéré comme le fondateur de la culture scientifique vietnamienne, propose, dès son séjour à l'Ecole Polytechnique de Paris, une traduction des termes scientifiques en vietnamien (*quôc ngu)*, et publie, en 1942, l'ouvrage de terminologie scientifique *Danh Tu Khoa Hoc* à partir duquel les manuels de mathématiques, physique et chimie de tous les niveaux pourront dorénavant être traduits.

C'est en 1940 que l'enseignement universitaire est ouvert, les élèves français ne pouvant rentrer en France à cause de la guerre.

I.3. Après 1945

a. L'influence française dans le développement de l'enseignement mathématique vietnamien

D'avril à juin 1945, le Pr. Hoàng Xuân Hãn alors ministre de l'éducation et des arts du gouvernement indépendant vietnamien de Hanoi, dirige l'élaboration d'un programme du lycée en vietnamien. Ce programme reprend le programme du lycée de l'époque coloniale, avec deux modifications: élargissement de l'algèbre dans les dernières classes de lycée vers l'analyse pour les deux sessions A et B, ajout des probabilités en A ; répartition de l'enseignement de l'algèbre, l'arithmétique, la géométrie descriptive, la trigonométrie, la mécanique et l'astronomie sur les 3 ans de lycée (au lieu de les réserver à la terminale).

En 1950, pour tenir compte des conditions de la guerre, intervient une première réforme, dans laquelle le nombre d'années de scolarité est réduit à 9 ans (4, 3, 2). Il en résulte pour l'enseignement des mathématiques la suppression des probabilités, de la géométrie analytique, l'analyse, l'arithmétique, la géométrie descriptive, la mécanique et l'astronomie. Ce programme allégé sera appliqué jusqu'en 1956.

b. L'influence du système éducatif soviétique

A partir des années 50, l'URSS et les pays communistes soutiennent la formation des étudiants et des chercheurs dans différentes disciplines et notamment en mathématiques, en offrant aux étudiants vietnamiens de nombreuses bourses d'études supérieures (licence, maîtrise et doctorat).

Suite aux accords de Genève (juillet 1954) et à la division temporaire qui en découle entre le Nord et le Sud, a lieu au Nord[5] une deuxième réforme, qui s'inspire du programme soviétique d'alors. Le programme des mathématiques au lycée vietnamien se rapproche du programme soviétique. Comme le système éducatif soviétique ne comporte que 10 ans (4, 3, 3), le programme mathématique soviétique est plus léger que le programme français. On y voit par exemple, l'arithmétique seulement en classes 5 et 6 mais pas en Terminale, comme alors en France. De plus, l'analyse, la mécanique et l'astronomie sont absents des programmes du secondaire. Le programme vietnamien conserve néanmoins en Terminale (alors classe 10) l'enseignement des éléments d'analyse que sont fonctions, limites,

[5] Au Sud, alors sous influence américaine, les programmes n'évoluent pas de la même façon.

dérivées et primitives. Ce programme de 10 ans s'inspirant du programme soviétique restera en vigueur au Nord de 1956 à 1980.

De même, l'enseignement des mathématiques au niveau universitaire, introduit pendant la résistance à partir de 1951, et élargi après les accords de Genève prend alors en compte les directives et les expériences russes.

Au début des années de la guerre contre les Américains, le 4 septembre 1965, le gouvernement demande au Ministère de l'éducation de créer des classes pour élèves doués en mathématiques. La même année, la première classe dite « spécialisée en mathématiques » est inaugurée à l'université de Hanoi. Par la suite, les classes spécialisés en mathématiques seront également ouvertes dans les meilleurs établissements du second degré, de tout le pays : les enseignants de ces classes sont choisis parmi les meilleurs, les effectifs sont plus légers que dans les classes ordinaires et les élèves y sont recrutés sur concours.

I.4 Les années de la réunification

On peut remarquer que le mouvement des mathématiques modernes, issu de l'école française de Bourbaki qui a influencé l'enseignement de presque tous les pays occidentaux dans la fin des années 60 n'a pas eu d'impact sur les programmes du Nord Viêt-Nam alors en guerre contre les Américains. De même, le Viêt-Nam n'a pas été davantage influencé lorsque ces pays ont réagi à ce mouvement.

En 1975, la guerre est terminée, le pays réunifié. Les mathématiciens du Sud formés dans les pays occidentaux comme la France, les USA, l'Allemagne, ainsi que les mathématiciens du Nord formés en URSS et dans les pays de l'Est construisent ensemble la culture mathématique vietnamienne.

Jusqu'en 1980, les programmes et les manuels du nord et du sud restent différents.

En 1980 se produit la troisième réforme[6] du système éducatif. Le nombre des années de scolarité est porté à 12 ans. La réforme se met en place de 1981 à 85 au primaire, de 86 à 89 au Collège, de 90 à 92 au Lycée (pour lequel trois manuels concurrents existent qui seront fusionnés en un seul en 2000).

En 2000, est amorcée une quatrième réforme, avec l'élaboration progressive, année par année, de nouveaux programmes qui :

[6] Qui concerne tout le pays réunifié en 1975, même si les collections de manuels diffèrent jusqu'alors.

- pour le collège « doivent contribuer à la rénovation de la méthode d'enseignement dans le but de rendre les élèves actifs dans leurs apprentissages et de les aider à établir, construire et développer une méthode d'apprentissage autonome et active dans la découverte et la résolution des problèmes » ;
- pour le lycée doivent suivre deux directives principales : « respecter globalement le programme précédent (suivi de 1990 à 1999) et alléger ce programme, c.a.d. abaisser le niveau exigé et simplifier certains contenus ».
Ces nouveaux programmes, donneront lieu à expérimentation avant que ne soient élaborés les manuels correspondants : de 2002 à 2005 pour les classes de collège et de 2006 à 2008 pour les deux sections des 3 années de lycées.

I.5 Quelques spécificités du système éducatif au Viêt-Nam aujourd'hui

Conséquence de l'influence confucéenne, dans la tradition culturelle vietnamienne, le savoir reste essentiellement conçu comme quelque chose de déjà existant qui doit être transmis. L'enfant est encore un être mineur dont l'avis n'est pas toujours pris en compte, même s'il existe des signes annonçant des changements en cours, comme par exemple les conseils donnés aux enseignants dans les derniers guides pédagogiques cités ci-dessus. Une place prépondérante est accordée à l'enseignant : c'est le maître, celui qui sait (*Si tu sais, tu prends la parole, si tu ne sais pas, adosse-toi au pilier et écoute),* à qui on doit un profond respect (ce qui se traduit notamment par l'importance de la fête des enseignants du 20 novembre).

Il y a unicité du manuel scolaire, la progression qui doit être suivie par l'ensemble des enseignants d'un même niveau de classe, dans tout le pays, étant précisée dans les guides du maître.

L'importance de la formation des enseignants fait qu'elle est confiée à des établissements universitaires (*Dai Hoc Su Pham*, traduit selon les lieux par « Ecole Normale Supérieure » ou « Université pédagogique ») dans lesquels les étudiants sont recrutés par un concours commun post-bac d'entrée à l'université. L'influence soviétique se maintient par la primauté accordée, non à la Didactique des Mathématiques mais à la Méthodologie de l'enseignement, comme l'indique le titre « Méthodologie de l'enseignement des mathématiques - Enseignement des contenus mathématiques fondamentaux », de l'ouvrage destiné aux étudiants de quatrième année de ces établissements, dans lequel sont justifiées

l'organisation et le contenu des leçons préconisés par l'institution pour chaque niveau d'enseignement.

L'accent est toujours mis sur la formation des élites, ce qui a pour conséquence une densité d'examens et de concours : examens de fin de premier et de deuxième semestre de chaque année scolaire, concours d'entrée au collège, concours d'entrée dans les lycées d'élite, concours de fin d'étude secondaire (correspondant à notre Bac) et enfin concours d'entrée dans les écoles supérieures et les universités. D'où l'existence d'une véritable institution de cours (collectifs ou particuliers) du soir et d'été pour préparer ces examens et concours conformément aux textes des annales publiées.

II. Lors d'une étude comparative de deux systèmes d'enseignement, que compare-t-on ? Pour quoi faire ?

II.1 Les évolutions des systèmes d'enseignement

Les praxéologies scolaires

> « peuvent être fortement naturalisées, au point de devenir complètement transparentes pour les sujets de l'institution qui les assument et les transmettent à travers leurs pratiques institutionnalisées » (Bosch, Gascon 2002)

La prise de distance nécessaire à la dénaturalisation de notre regard sur les praxéologies scolaires peut s'appuyer sur des analyses institutionnelles comparatives. On recourt alors méthodologiquement au croisement de deux axes : synchronique et diachronique.

> « L'analyse synchronique vise […] à :
> - mettre en évidence et caractériser les productions différentes et similaires de la transposition didactique d'un même objet de savoir […] ;
> - questionner les ressemblances et dissemblances institutionnelles en termes de conditions et de contraintes ;
> - initier un répertoire de praxéologies existantes et envisager leurs développements possibles.
>
> L'analyse *diachronique* nous permet de mettre en évidence l'évolution temporelle d'un système, évolution qui a abouti à son état actuel, et par conséquent, de mieux comprendre cet état (d'équilibre). » (Tran Luong C. K. 2006)

Loin d'une approche « cognitiviste » centrée sur les particularités des élèves et des professeurs, ce type de recherche situe donc le problème des difficultés des élèves et des professeurs dans l'ensemble de conditions et de contraintes qui pèsent sur l'enseignement des mathématiques au lycée.

Pour illustrer notre propos, nous nous appuyons sur deux exemples extraits de la thèse de Tran Luong Cong Khanh (2006). Ce dernier a conduit une étude comparative entre la France et le Viêt-Nam sur l'enseignement de la notion d'intégrale.

a. Une comparaison synchronique permettant de questionner l'un des systèmes d'enseignement

Le calcul de l'aire sous la courbe représentative d'une fonction (calcul d'une intégrale définie) est présent dans les deux institutions que sont les classes terminales de l'enseignement secondaire des deux pays.

- En France, la surface dont on doit calculer l'aire peut être donnée par un système d'inéquations, ce système assurant l'unicité de la surface « sous la courbe ».

- Au Viêt-Nam, une surface est toujours donnée par une phrase du genre : « On considère une surface plane délimitée par une courbe d'équation $y = f(x)$, la droite d'équation $y = ax + b$ et l'axe des abscisses ». Cette formulation n'assure pas l'unicité de la surface sous la courbe dont on doit calculer l'aire.

Le rapprochement de ces deux résultats issus de la comparaison institutionnelle a surpris Tran Luong Cong Khanh (inspecteur de mathématique dans son pays) et l'a conduit à formuler l'hypothèse de l'enseignement invisible d'un objet de savoir, celui d'une règle de contrat institutionnel, assurant l'unicité de la surface.

Pour mettre à l'épreuve cette hypothèse, Tran Luong Cong Khanh fait passer au Viêt-Nam à des élèves de classes 11 (avant l'enseignement du calcul intégral) et de classe 12 (après l'enseignement du calcul intégral) un questionnaire. Ce questionnaire porte sur les représentations graphiques possibles de « la surface plane délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, la droite d'équation $y = 2 - x$ et l'axe des abscisses », la surface étant décrite comme dans le calcul de l'aire sous la courbe représentative d'une fonction.

Nous donnons ci-après le texte de ce questionnaire.

On considère une surface plane délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, la droite d'équation $y = 2 - x$ et l'axe des abscisses. Pour chacune des figures ci-dessous, dire si elle peut ou non être une représentation graphique correspondant à la description ci-dessus.

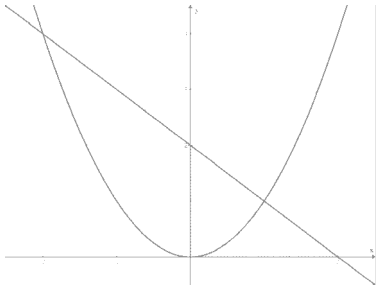

Figure 1

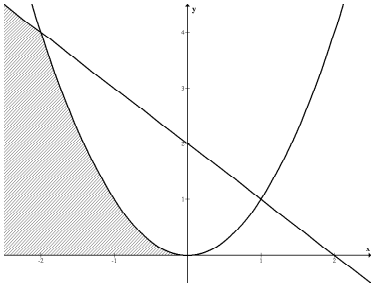

Figure 2

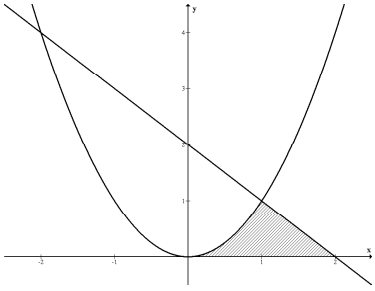

Figure 3

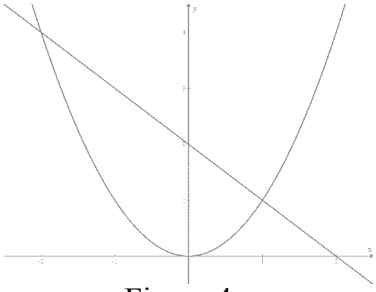

Figure 4

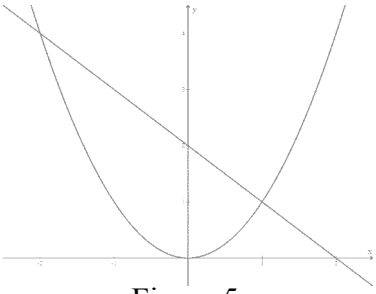

Figure 5

Les figures proposées sont mathématiquement les représentations graphiques *possibles* de « la surface plane délimitée par la parabole, la droite et l'axe des abscisses ».

Le tableau 1 donne les choix des surfaces selon le niveau scolaire.

Classes	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4	Figure 5
Classe 11 (73 élèves)	19/73 (26%)	19/73 (26%)	45/73 (62%)	9/73 (12%)	37/73 (51%)
Classe 12 (65 élèves)	6/65 (9%)	7/65 (11%)	60/65 (92%)	1/65 (1,5%)	1/65 (1 ,5%)

Tableau 1. Choix de la surface sous la courbe selon le niveau scolaire

Les choix des classes 11 se répartissent sur les différentes figures proposées, alors que ceux des classes 12 se concentrent sur la figure 3. On peut en déduire qu'en classe 12, seule la troisième figure est institutionnellement la réponse attendue pour le calcul d'aire par une intégrale. Les autres figures sont rejetées pour les raisons suivantes :

- Dans la première figure, un morceau de la parabole est contenu à l'intérieur de la surface.
- Dans la deuxième figure, la surface n'est pas finie, et son contour n'est pas fermé.
- Dans la quatrième figure, le contour de la surface est composé d'une partie de l'axe des coordonnées et l'axe des abscisses ne participe pas au contour de la surface.
- Dans la dernière surface (figure 5), l'axe des abscisses ne participe pas au contour de la surface.

Une règle de contrat didactique liée à la lecture graphique est bien apprise (donc enseignée) en classe 12 et ignorée avant.

Pour obtenir une unique surface, on doit respecter une règle graphique implicite que Tran Luong Cong Khanh formule brièvement comme suit :

- la surface plane dont on demande de calculer l'aire est le plus grand domaine borné (pas forcément connexe) dont le contour est fermé, et composé seulement des courbes qui le délimitent ;
- aucun morceau de ces courbes ne doit être enfermé dans la surface.

Cet exemple montre bien l'effet de dénaturalisation produit par une comparaison synchronique.

b. Exemple d'une comparaison diachronique

Classiquement en didactique, on découpe le temps selon les « grandes réformes » : Tran Luong Cong Khanh se place de ce point de vue et distingue trois périodes liés aux réformes successives du Lycée qui bien sûr ne coïncident pas en France et au Viêt-Nam.

	France	Viêt-Nam
Période 1	1970 – 80	1975-90
Période 2	1980- 2002	1990-2000
Période 3	2002 - 06	2000-2006

Tableau 2. Découpage du temps en trois périodes (grandes réformes)

Le tableau 3 montre la présence ou non de traces du calcul intégral approché dans les deux institutions selon la période.

	Terminale S France	Classe 12 Viêt-Nam
Période 1	Absence	Absence
Période 2	Présence dans cours et exercices : méthodes numériques	
Période 3 (Actuelle)	Présence dans exercices : encadrement numérique	

Tableau 3. Traces du calcul intégral approché en terminale selon le pays

En France, absent dans les programmes des années 1970, le calcul approché d'intégrale est officiellement introduit dans les programmes de la période 1980 – 2002. Quoique la méthode proposée par les programmes soit celle des rectangles, les manuels de l'époque présentent d'autres méthodes numériques comme la méthode du point milieu, la méthode des trapèzes, la méthode des tangentes.

Le programme de 2002 – 2006 n'aborde pas officiellement le calcul approché d'intégrale. Cependant les manuels de la période mobilisent dans la partie exercices l'encadrement numérique d'intégrale pour en déduire une valeur approchée de l'intégrale.

Au Viêt-Nam, le calcul approché d'intégrale est complètement absent durant les trois périodes d'enseignement considérées. L'encadrement numérique d'une intégrale existe rarement dans la partie exercices et ne sert jamais au calcul approché.

Pourquoi cette évolution en France et cette absence d'évolution au Viêt-Nam ?

Nous allons montrer comment des explications peuvent être recherchées à une plus haute échelle de détermination du système d'enseignement, c'est-à-dire aux deux niveaux « discipline » et « pédagogie » en menant l'étude comparative des noosphères des deux systèmes d'enseignement des mathématiques considérés.

II.2 Les Noosphères

> « La noosphère prend à sa charge l'élaboration d'un compromis entre l'institution d'enseignement et son environnement. […]
>
> Pour justifier des propositions sur l'enseignement d'un savoir, la noosphère doit se livrer à une analyse épistémologique - analyse des contenus et fonctionnement du savoir savant correspondant. Des discours apologétiques noosphériens présentent explicitement ou implicitement ses choix épistémologiques et didactiques. Les choix épistémologiques lui permettent de justifier la légitimité du savoir enseigné vis-à-vis de la communauté des mathématiciens. Les choix didactiques sont argumentés relativement à des contraintes sociales, tout particulièrement des contraintes internes au système d'enseignement.
>
> L'analyse des productions de la noosphère peuvent donc permettre d'éclairer les raisons de la présence, de l'absence, de la disparition ou de la transformation d'un objet dans l'institution d'enseignement.
>
> […] Nous faisons l'hypothèse qu'en première approximation, les discours apologétiques de la noosphère sont suffisants pour identifier des choix épistémologiques et didactiques sur les savoirs enseignés et par là les conditions et contraintes écologiques de la vie de [certains objets]. » (Lê Van T. 2001)

Les productions publiées aux moments historiques qui précédent ou accompagnent les changements curriculaires sont particulièrement intéressantes.

En effet, les moments historiques des changements curriculaires marquent le plus souvent une rupture entre deux époques de l'histoire de l'enseignement. Ce sont des périodes où la noosphère présente et défend explicitement ses propositions de rénovation, donc ses choix épistémologiques (discipline) et didactiques (pédagogique).

Les matériaux dont on dispose pour mener une étude comparative sont tout d'abord les programmes et les manuels.

À ce propos, une différence importante existe entre les deux EMS. Au Viêt-Nam, les programmes ne sont disponibles que pour les rédacteurs de manuels, les enseignants ne disposant que des manuels. De plus, c'est seulement durant une courte période de 10 ans qu'il y a eu en concurrence plusieurs manuels et seulement au lycée (trois équipes de rédacteurs de 1991 à 2000). Depuis 2000, il n'y a plus qu'un seul manuel par niveau. La conduite d'entretiens avec les rédacteurs de cet unique manuel peut être d'un grand intérêt pour l'étude de la noosphère vietnamienne (cf. Lê Van T. 2001). En France, les programmes sont disponibles aussi bien pour les enseignants que pour les rédacteurs de manuels.

Les matériaux comportent également les guides pour l'enseignant rédigés par les auteurs des manuels au Viêt-Nam, ou les textes d'accompagnement des programmes en France.
De plus, en France, on peut trouver les traces des débats entre les différents acteurs de la noosphère dans des articles publiés dans des revues comme celles de l'APMEP, les bulletins Inter-IREM, etc.
Par contre, au Viêt-Nam, il n'existe pas une telle publicité des débats. Mais, on dispose de l'ouvrage « Méthodologie de l'enseignement des mathématiques - Enseignement des contenus mathématiques fondamentaux », destiné aux étudiants de quatrième année des Écoles Normales Supérieures (ou Université pédagogique) et dans lequel sont justifiées l'organisation des leçons et du contenu des leçons préconisés par les décideurs des programmes.

L'exemple d'une étude des noosphères française et vietnamienne dans la thèse de Lê Van Tien

Lê Van Tien (2001) étudie dans sa thèse les liens entre fonction et équation au lycée en France et au Viêt-Nam. Pour cela, il tente en particulier de répondre à la question : pourquoi l'état actuel du domaine de l'analyse dans les deux institutions (Enseignement des Mathématiques au lycée en France et au Viêt-Nam) ?
L'analyse des programmes et des manuels lui permet de repérer les moments historiques des changements curriculaires importants dans les deux pays : 1980 pour la France (dite contre-réforme en référence à la réforme des mathématiques modernes), 1990 au Viêt-Nam (programme qui suit la réunification du pays et qui est accompagné du passage d'une scolarité de 10 ans à 12 ans pour l'ensemble du pays).

a. La contre-réforme en France (1980) manifeste une rupture fondamentale par rapport à la réforme bourbakiste des années 1970 : « les mathématiques ne sont plus conçues comme un univers de structures, mais comme un champ de résolution de problèmes ». L'une des conséquences pour l'enseignement est de mettre en avant le caractère expérimental des mathématiques et la nécessité d'articuler deux moments, expérimental et théorique, considérés comme distincts.
Le moment expérimental a aussi l'intérêt d'accorder à l'activité de l'élève une grande importance en accord avec les théories constructivistes de l'époque pour lesquelles cette activité est le moteur de l'apprentissage et qui sont le cadre idéologique des mouvements pédagogiques.
Dans l'esprit des initiateurs de la contre-réforme, l'activité expérimentale doit s'appuyer sur

la résolution de problèmes et sur l'observation de nombres et / ou de graphiques : elle doit déboucher sur la production d'énoncés ayant statut de conjectures et qui, par conséquent, devront être démontrées dans le moment théorique.

Dans ce contexte, l'Analyse est conçue par les initiateurs de la contre-réforme comme le domaine de l'approximation et des techniques de majorations – minorations.

Cependant, l'entrée dans cette Analyse demande de négocier une rupture avec la démarche algébrique et l'on peut prévoir de grandes difficultés pour faire vivre un tel enseignement : Legrand (1993) parle d'obstacle épistémologique.

Cette difficulté se traduit actuellement par une évolution des contenus et des pratiques en France :

- disparition de certains thèmes faisant intervenir des majorations et réduction de la complexité de l'approximation au lycée ;
- détournement de la notion d'expérimentation qui se traduit par l'importance de plus en plus grande de constats numériques et graphiques perdant leur statut de conjecture.

b. La réforme issue de la réunification du Viêt-Nam (1990)

Les caractéristiques fondamentales des choix épistémologiques de la réforme des années 1990 ne sont ni celles de la réforme des mathématiques modernes en France, ni celles de la contre-réforme. Cette réforme cherche à promouvoir dans l'enseignement l'aspect méthodique de l'univers mathématiques basé sur des règles de raisonnement, comme le montre clairement l'extrait suivant des commentaires du programme de 1980 :

> « Former et développer chez les élèves des capacités de la pensée logique, de la pensée algorithmique et de la pensée dialectique en leur fournissant les connaissances fondamentales sur les méthodes et règles du raisonnement et de la démonstration, des règles du calcul [algébrique], des règles de résolution des équations, les règles des transformations des expressions algébriques, des règles de représentation graphique des fonctions et certaines lois de la dialectique… ».

Dans ce contexte, l'Analyse est fortement algébrisée au sens où elle privilégie fortement le calcul exact.

Du point de vue pédagogique, bien que les auteurs de manuels attirent l'attention des enseignants sur la relation entre la présentation théorique et les travaux des élèves, le discours de l'enseignant continue à jouer un rôle fondamental dans l'enseignement des mathématiques. L'activité des élèves est conçue essentiellement comme l'application ou l'illustration de connaissances théoriques présentées par l'enseignant. La citation suivante

(qui décrit la méthode de l'enseignement moderne) illustre parfaitement cette conception pédagogique.

> 1. La méthode d'enseignement moderne est d'utiliser la méthode de dialogue entre professeur et élève. [...].
>
> Donc, il faut que l'enseignement des mathématiques soit très souple : la présentation théorique (discours de l'enseignant) alterne avec la pratique des élèves (les élèves résolvent des exercices, appliquent et illustrent l'étude théorique). Il nous semble qu'il ne faut pas appliquer la démarche suivant laquelle l'enseignant développe d'abord un discours pendant une heure, les élèves résolvent ensuite des exercices d'application. (p.9) (Livre de l'enseignant, Algèbre et analyse 11).

Les résultats de Lê Van Tien vont nourrir deux des thèses en co-tutelle suivantes, celle de Nguyen Chi Thanh (2005) et de Lê Thai Bao Thien Trung (2007).

c. Revenons au tableau 3 sur le calcul intégral approché des deux pays proposé par Tran Luong Cong Khanh et montrons en quoi le travail de comparaison des noosphères de Lê Van T. (2001) l'éclaire.

	Terminale S France	Classe 12 Viêt-Nam
Période 1	Absence	Absence
Période 2	Présence dans cours et exercices : méthodes numériques	
Période 3 (Actuelle)	Présence dans exercices : encadrement numérique	

Tableau 3. Traces du calcul intégral approché en terminale selon le pays

En France, la période 2 est marquée par la volonté noosphérienne de la contre-réforme d'introduire l'approximation comme un terrain d'expérimentation dans le domaine de l'analyse, ce qui permet de comprendre l'apparition en Terminale, comme objet d'enseignement, de méthodes de calcul approché, au-delà même de la seule méthode au programme, celle des rectangles.

Dans la période 3, le système résiste à cette introduction (obstacle de l'algébrisation) : disparition dans le cours des méthodes de calcul approché et réduction, au niveau seulement des exercices, à la production d'encadrement numérique pour donner une valeur approchée d'une intégrale.

Au Viêt-Nam, durant les trois périodes, la conception de l'enseignement des mathématiques au secondaire est celle d'un univers méthodique (règles de raisonnement et de calcul) et privilégie une analyse fortement algébrisée. Cette conception n'offre aucune place au calcul intégral non exact.

II.3 Les praxéologies à enseigner et les techniques mises en œuvres par les élèves

C'est au travers d'une analyse écologique et praxéologique des programmes et des manuels qu'est précisé le rapport institutionnel de chaque institution : enseignement secondaire en France (F) et enseignement secondaire au Viêt-Nam (V) à un même objet O. La comparaison des praxéologies à enseigner autour de cet objet d'enseignement révèle des différences mais aussi des points communs dans les transpositions du même savoir O.

Si l'on regarde alors de F le rapport institutionnel existant dans V, ce dernier, dénué d'intention didactique dans F, fait apparaître des objets qui vivent dans V mais non dans F : les praxéologies à enseigner dans V nous interrogent sur ce qui se passe dans F. Ceci conduit notamment à se demander si des praxéologies présentes dans une institution mais absentes dans l'autre peuvent y être viables et réciproquement (Chaachoua, Comiti à paraître).

On peut aussi se demander quelles influences ont les praxéologies enseignées dans chaque institution sur les techniques mises en œuvre par les élèves dans la résolution d'un même type de tâche et sur les éléments technologiques pris en compte

Cette comparaison peut alors permettre de mieux identifier certaines raisons des problèmes rencontrés dans la construction du rapport personnel des élèves dans F et dans V.

Nous prendrons comme exemple des apports d'une étude comparative des praxéologies à enseigner et des praxéologies apprises la thèse de Nguyen Ai Quoc (2006) : Analyse comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viêt-Nam et en France.

a. Les praxéologies à enseigner : étude des programmes et des manuels

Elles sont identifiées au travers de l'analyse de l'organisation des objets de savoir en jeu dans les programmes, manuels et guides de l'enseignant lorsqu'ils existent.

Le programme vietnamien est organisé autour de deux domaines : géométrie et algèbre, l'algèbre regroupant tous les thèmes non géométriques dont les fonctions, les statistiques, et l'algèbre proprement dite.

V	8 (4e)	9 (3e)	10 (2nde)
Domaine	Algèbre	Algèbre	Algèbre
Secteur	Addition, multiplication et division des polynômes	Fonctions et équations algébriques	Fonctions et équations algébriques
Thèmes	Factorisation de polynômes, identités	Fonction du premier ou second degré, équations du	Equations du premier degré et du second degré

	remarquables, équations et inéquation de degré1, équations équivalentes	second degré. Système d'équations de premier degré. Transformations équivalentes des systèmes d'équations.	paramétrées, équations avec des fractions rationnelles. Transformations équivalentes des équations.

Tableau 4. Les filiations dans V

L'algèbre est introduite, dès la classe 7, puis en classe 8, à partir de l'étude des polynômes à coefficients dans *R*. On étudie les opérations et les propriétés qui sont proches de celles de l'anneau *R[X],* où *x* est considérée comme variable et non comme indéterminée. Les techniques de factorisation de développement et de réduction sont justifiées par ces propriétés qui ne sont pas démontrées. Cependant, une analogie, justifiée par le fait que *x* est considérée comme variable, est faite avec les propriétés dans *R*. La notion d'équations équivalentes est introduite dès la classe 8, par l'égalité des ensembles de solutions. On introduit en classe 9 la résolution des équations de degré 2 par le discriminant. En classe 10, les équations sont interprétées comme égalité entre deux fonctions.

Dans le programme français, l'algèbre en tant que telle ne figure pas en tant que domaine. Les notions algébriques apparaissent comme des thèmes dans les domaines : travaux numériques au collège, calcul et fonctions en seconde et analyse en première.

F	3e	2nde	1e
Domaine	Travaux numériques	Calcul et fonctions	Analyse
Secteur	Calcul littéral	Fonctions et formules algébriques	Fonctions
Thèmes	Identités remarquables, Réduction, factorisation, équation de degré 1 et les équations s'y ramenant	Développement, réduction, systèmes d'équations du premier degré, inéquation et équation se ramenant au premier degré	Equations du second degré

Tableau 5. Les filiations dans F

Le thème des équations est traité au sein du domaine travaux numériques en classe de 4e et de 3e par le biais du calcul littéral. Le calcul littéral fournit les règles de développement, factorisations et des transformations équivalentes des équations. Contrairement au cas du Viêt-Nam, ces transformations équivalentes n'ont pas un statut officiel car la notion d'équations équivalentes n'est pas enseignée en France. C'est en classe de seconde qu'un lien avec les fonctions est fait. Il s'agit d'interpréter les équations à l'aide des égalités entre deux fonctions mais aucune allusion n'est faite au domaine de définition.

L'étude comparative des programmes montre une différence importante quant à l'introduction de l'algèbre. Alors que dans V où l'enseignement de l'algèbre est plus précoce on privilégie le statut objet de l'algèbre, on introduit dans F des notions algébriques sans les

définir dans le cadre de l'algèbre, pour les utiliser soit dans le calcul numérique, soit dans la résolution et la mise en équation de problèmes divers, et plus tard en analyse.

L'étude des manuels, depuis le travail proposé sur la factorisation jusqu'à la résolution de l'équation du second degré par le calcul du discriminant, est faite sous deux points de vue complémentaires : analyse écologique et analyse praxéologique. L'analyse praxéologique des manuels (basée sur l'analyse du cours et des exercices proposés) éclaire tout particulièrement l'économie scolaire des rapports institutionnels à l'objet « équation du second degré » dans chacune des institutions.

	V		F	
Sous-types de tâche majoritaires	**Classe 8** (4e) Résoudre des équations de degré supérieur ou égal à 2 déjà factorisées ou comportant un facteur commun	**Classe 9** (3e) Résoudre des équations données sous la forme ax2+bx+c=0 **Classe 10** (2nde) Résoudre équations paramétrées	**3e et 2nde** Résoudre des équations du 2e degré déjà factorisées ou comportant un facteur commun	**1e S** Résoudre des équations données sous la forme ax2+bx+c=0
Techniques	Factorisation Règles (identités remarquables, etc.)	Discriminant	Factorisation Règles (identités remarquable, etc.)	Discriminant

Tableau 6. Synthèse des praxéologies à enseigner

Cette synthèse montre notamment que dans V, le temps d'enseignement de la résolution des équations factorisées est beaucoup plus court que dans F, et l'étude des équations canoniques d'autant plus fondamentale qu'une grande place est faite, dans le programme de 10e, à l'étude des équations et inéquations du second degré paramétrées.

On constate également que, dans F, le choix est fait de consacrer plus de temps au bloc du savoir-faire, et en particulier à l'étude des différentes techniques de factorisation (les seules à être enseignées jusqu'en fin de seconde).

L'étude des manuels montre de plus que, bien que les blocs du savoir (θ, Θ) soient différents dans chacune des institutions - la théorie sous-jacente étant dans V celle de l'anneau factoriel *R[X]* des polynômes à coefficients dans *R*, et dans F, celle du corps des réels *R* - les blocs du savoir-faire (T, τ) sont semblables et la plupart des techniques τ enseignées, comparables.

On peut donc se demander comment influent sur les praxéologies apprises :

- dans V les éléments technologiques introduits lors de l'étude des polynômes et dans F les éléments technologiques introduits lors du travail sur le calcul littéral,
- la différence de temps passé, dans chacune des institutions, sur les techniques de factorisation et sur celle du discriminant.

b- Les techniques mises en œuvre par les élèves

Nous ne traiterons ici que la seconde question, en présentant ci-dessous, à titre d'exemple, les résultats d'élèves d'une classe de 10e spécialisée (46 élèves) dans V et de 1eS (24 élèves) dans F (classes considérées comme comparables car élèves « sélectionnés » dans les deux systèmes) pour trois sous-types de tâches caractéristiques de RESD.

Cas 1	**(-5x+1)(3x-7)=0**			
	10e dans V	Succès	1e S dans F	Succès
ProdN	**23**	19	**19**	16
Dév_Discr	**20**	8	5	2
Totaux	43	**62%**	24	**75%**

Tableau 7. Résolution optimale : annulation du produit

Cas 2	**(3-x)(x+2)+x+2=0**			
	10e dans V	Succès	1e S dans F	Succès
ProdN	10	9	**12**	12
Dév_Discr	**30**	17	**11**	4
Totaux	40	**65%**	23	**70%**

Tableau 8. Deux techniques concurrentes

Cas 1	**$2x^2+5x-7=0$**			
	10e dans V	Succès	1e S dans F	Succès
ProdN	7	5		
Dév_Discr	**35**	24	**21**	9
Totaux	42	**69%**	21	**43%**

Tableau 9. Résolution optimale : discriminant

On constate que :

- les techniques de factorisation sont, chaque fois que moins coûteuses que celle du discriminant, davantage présentes en classe de 1e qu'en classe de 10e.
- les techniques de développement suivies de calcul du discriminant sont très fortement majoritaires en 10e, même lorsqu'elles sont coûteuses, près de la moitié des élèves y recourant même lorsque l'équation à résoudre est donnée sous forme déjà factorisée (cas 1).

Mais si on s'intéresse maintenant à l'efficacité des techniques mises en œuvre en ce qui concerne les résultats obtenus :

- en 10e, bien que les techniques de factorisation soient fortement minoritaires, elles conduisent à un succès plus fort que celle du discriminant, pourtant majoritaire. Cela peut sans doute s'expliquer par le fait que les élèves de V capables d'analyser la forme de l'équation et de choisir la technique la mieux appropriée sont sans doute aussi ceux qui maîtrisent le mieux les différentes techniques et technologies enseignées.
- en 1e, la factorisation conduit le plus souvent au succès, le calcul du discriminant à l'échec environ 6 fois sur 10, ce qui pose problème dans le cas des équations données sous forme canonique ; on constate par ailleurs un nombre important de cas d'interruption lors de l'utilisation de la technique de développement dans le cas où les élèves veulent se ramener à la forme canonique.

Ce travail montre notamment que le double fait de privilégier, au Viêt-Nam, l'étude générale des polynômes (dont on ne se servira finalement plus) au détriment de la factorisation, puis le travail et la maîtrise d'une technique algorithmique (dans le but de traiter le cas des équations paramétrées), conduit à la naturalisation de la technique du discriminant, au détriment de techniques de factorisation parfois moins coûteuses, alors qu'en France, les élèves de 1^{e}S choisissent le plus souvent la technique la plus adéquate en fonction de la forme algébrique donnée.

Le rapport institutionnel dans V est donc tel que la technique du discriminant semble tuer définitivement la technique de factorisation. Ce n'est pas le cas dans F où les deux techniques coexistent en 1^{e}S, ce qui semble justifier a posteriori le travail effectué au collège sur les travaux numériques et le calcul littéral.

Il reste à se demander si l'on pourrait développer la réalité didactique existante dans chaque institution étudiée, par l'introduction de nouvelles technologies, de nouvelles techniques et

de nouveaux types de tâches de manière à obtenir un nouvel état stable dans lequel les praxéologies enseignées intégreraient à moindre coût les techniques de factorisation et du discriminant. Ceci pose la question de la fonction et de l'apport de l'ingénierie didactique dans les études comparatives.

III. Analyse comparative et ingénierie didactique

Nous chercherons à montrer comment s'articulent :

- la comparaison institutionnelle de deux systèmes d'enseignement
- la conception, la réalisation et l'analyse d'une ingénierie didactique dans l'un des systèmes.

La conception d'une ingénierie peut se nourrir des résultats de la comparaison institutionnelle des systèmes d'enseignements, par les différences et les invariances dans les transpositions didactiques d'un même savoir qu'elle met en évidence.

La réalisation d'une ingénierie didactique dans l'un des systèmes et son analyse permettent non seulement de poser des questions sur ce système mais aussi sur l'autre système, et favorisent ainsi l'émergence de questions génériques dont la pertinence est attestée dans l'autre système.

De plus, cela pose le problème général de la reproductibilité de l'ingénierie non seulement dans l'institution où elle a été réalisée mais aussi dans l'autre. La comparaison avec un autre système éducatif rend donc encore plus crucial ce problème.

L'exemple de l'étude de Lê Thai Bao Thien Trung (2007)

Lê Thai Bao Thien Trung étudie dans sa thèse les relations entre la notion de limite et la décimalisation des nombres réels. Il se réfère aux nombreux travaux qui étudient le plus souvent séparément soit la notion de limite soit la notion de nombre, sans aborder frontalement le problème de leurs interrelations.

L'analyse des travaux de référence concernant la notion de limite conduit Lê Thai Bao Thien Trung à retenir « l'horreur de l'infini » comme obstacle épistémologique principal à la construction de la notion de limite et à définir deux problématiques fondamentales sur la notion de limite, algébrique et approximation ; et dans la dernière problématique, deux points de vue : « approximation x » et « approximation f(x) »[7].

[7] Se rattachant à la problématique d'approximation, l'« approximation *x* » donne à l'approximation de la variable *x* un rôle prédominant pour approcher *f(x)* ; pour l'« approximation *f*(*x*) », le degré d'approximation de *f*(*x*) que l'on veut fixe le degré d'approximation pour *x*.

Le rapport institutionnel à la décimalisation des nombres réels reste inchangé depuis le collège au Viêt-Nam[8]. Il retrouve ainsi des résultats établis en France qui peuvent s'interpréter comme « la connaissance des nombres entiers se constitue en obstacle épistémologique pour l'acquisition des autres ensemble de nombres ». (Brousseau 1987)

Dans son ingénierie, Lê Thai Bao Thien Trung cherche à organiser dialectiquement deux passages :

- celui de l'ordre discret dans N à l'ordre dense (c'est-à-dire non discret) dans D et $D\infty$,
- celui du point de vue de l'« approximation x » à l'« approximation $f(x)$ » sur la notion de limite de fonction.

Le découpage, opéré par les noosphériens du XIXe siècle (Birebent 2001) dans les pratiques de calcul, aboutit à formuler deux problèmes « fondamentaux » de l'approximation, que nous pouvons relier à une problématique d'approximation de la notion de limite, approximation x pour le premier problème, approximation $f(x)$ pour le second.

Girard et Lentin (1964) énoncent comme suit ces deux problèmes dans leur manuel d'Arithmétique.

> On peut envisager, dans les questions d'approximation, deux problèmes principaux.
>
> 1°) Les erreurs commises sur les données étant bornées supérieurement par des nombres connus, on veut connaître une borne supérieure de l'erreur commise sur le résultat.
>
> 2°) On désire avoir un résultat avec une erreur qui ne dépasse pas une borne fixée à l'avance. On se propose d'évaluer les données avec une approximation suffisante pour qu'il en soit ainsi. (Girard et Lentin, p. 46)

L'ingénierie a été mise en place dans une classe 11 du Viêt-Nam où avait déjà été enseignée la notion de limite.

a. Ce qu'on apprend dans l'un des systèmes questionne génériquement l'autre

La première situation de l'ingénierie proposait une activité individuelle basée sur deux questions successives. Chacune des questions était suivie d'une conclusion construite collectivement par les élèves et l'enseignant. Nous donnons ci-après le canevas de cette situation.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$.

Question 1. Résoudre l'équation $f(x) = 1$. (travail individuel)

[8] Lê Thai Bao Thien Trung (2007) l'atteste par l'analyse des réponses à un questionnaire proposé à 174 élèves de seconde, 89 élèves de Terminale, 52 étudiants se destinant au professorat au collège, 26 étudiants de l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

• L'enseignant conclut collectivement avec les élèves en écrivant au tableau :
Df = R \{- 1 ; 0,3}
Il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x)$ soit égale à 1
Question 2. Donner trois valeurs de x telles que $f(x)$ appartienne à [0,99 ; 1,01]. (travail individuel)

L'enseignant organise une synthèse des réponses qu'il écrit au tableau.

La calculatrice CASIO fx-570MS est autorisée sans limitation sur l'usage des touches et des fonctions disponible

Le calcul à la main est autorisé.

Remarque pour le lecteur : $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$, la fonction f est prolongeable par continuité en x = 0,3, elle est strictement croissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

Nous présentons deux phénomènes issus de la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori* de la situation.

1. Pour les questions 1 et 2, la calculatrice est constamment utilisée non seulement dans l'exploration numérique, mais aussi dans les stratégies algébriques. La calculatrice cohabite avec le travail algébrique pour renforcer le contrat institutionnel de l'algèbre au travers du programme « EQN-1 Degré 2 » pour le calcul des racines et des touches ab/c et d/c qui rendent ou non acceptables les solutions trouvées : par exemple, l'affichage 0,3000001 n'est pas acceptable du fait de l'impossibilité du passage à une forme fractionnaire par appui de ces touches. Les solutions acceptables d'une équation du second degré sont donc des rationnels, un critère de validité étant que l'appui des touches ab/c et d/c après l'affichage décimal du calcul donne bien une fraction.

2. La question 2 recouvre un problème d'approximation.

Cependant, les élèves n'ont pas les moyens de la reconnaître comme telle. Par contre, ils peuvent aisément ramener celle-ci à des tâches algébriques apparemment classiques, cette interprétation étant renforcée par le contrat institutionnel fortement algébrisé dans l'enseignement secondaire vietnamien et actualisée par la question 1. Cette question cherche à déstabiliser les stratégies algébriques par leur coût et le risque d'erreur pour faire émerger une stratégie d'essais instrumentée par la calculatrice (appelée *Dx.Calculatrice* ou Exploration d'un domaine numérique de x avec la calculatrice). Tous les élèves sauf 4 recourent à une stratégie algébrique.

Algèbre des inéquations (*Inq*)	22
Algèbre des équations (*Eq*)	13
Exploration d'un domaine numérique de x avec la calculatrice[9] *Dx.Calculatrice*	4
Total	38

Tableau10. Stratégies algébriques et non algébriques observées

Les phénomènes 1 et 2 vont contre une idée commune qui serait que la calculatrice fait entrer dans un contrat de calcul approché. De plus, Lê Thai Bao Thien Trung montre qu'il y a une volonté institutionnelle au Viêt-Nam d'associer calculatrice et calcul approché (non exact).

Les observés de l'ingénierie attestent que non seulement l'usage de la calculatrice ne met pas les élèves dans un contrat de calcul approché et donc dans une problématique d'approximation mais au contraire qu'elle renforce le contrat algébrique en prenant en charge certains calculs numériques liés aux algorithmes algébriques (programme « EQN-1 Degré 2 » et touches ab/c et d/c)).

Il nous semble que ce résultat dépasse le cadre spécifique de l'enseignement des mathématiques au Viêt-Nam et qu'il questionne génériquement le rapport institutionnel au calcul numérique instrumenté par la calculatrice, aussi bien dans le domaine de l'analyse que de l'algèbre.

b. Le problème de la reproductibilité d'une ingénierie didactique dans un autre système

Le jeu fondamental de l'ingénierie repose sur la question « existe-t-il un meilleur couple (*x, f(x)*) ? », c'est-à-dire un couple tel que *f(x)* soit le plus proche de *nombre l* au travers de la recherche du meilleur couple (*x, f(x)*).

Voici une mise en scène possible d'un tel jeu :

Soit f une fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 0{,}1x - 0{,}02}{0{,}25x^2 - 0{,}01}$.

Proposer un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 3.

La classe a été divisée en 10 groupes de 4 élèves, une moitié des groupes travaillant avec x < 0,2 et l'autre avec x > 0,2.

Remarque pour le lecteur : $\lim\limits_{x \to 0{,}2} f(x) = 3$, la fonction f est prolongeable par continuité en x = 0,2, elle est strictement croissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

[9] Cette stratégie peut s'appuyer sur la question 1, avec la règle d'action « approximation *x* » suivante : « pour que *f(x)* soit proche de 1, *x* doit être proche de 0,3 ». Rappelons que 0,3 est une valeur interdite (question 1).

Les élèves proposent comme meilleurs couples des écritures décimales limitées, des fractions et des écritures décimales illimitées. L'ordre discret hérité de *N* règne dans *D*∞.

Quatre groupes (sur 10) de la classe observée ont produit des couples (x ; $f(x)$) en « écriture décimale illimitée ». Nous les donnons dans le tableau ci-après.

Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
0,1(9) et 2,(9)	0,19999…et 2,9999…	0,199(9) et 2,9(9)7	0,2(0)1 et 3,(0)1

Tableau 11. Types d'« écriture décimale illimitée »

Pour ces élèves, le nombre 0,1(9) (ou 0,1999…, écriture décimale illimitée ayant 9 comme période, noté *EDIP9*) est le plus proche de 0,2 et inférieur strictement à 0,2 (ordre discret dans *D*∞).

De plus, pour certains élèves, cette écriture est celle d'un irrationnel comme le montre l'interaction entre les élèves d'un groupe :

> E1: Avec le nombre 18/90 ? (d'après le brouillon : 0,1(9) = 0,1 +0,9x0,(1) =1/10 + 9/90 = 18/90)
>
> E2: Ce nombre est le plus proche de 0,2 ? (moqueur, car 18/90 = 0,2)
>
> E1: Alors, le nombre le meilleur est 17/90.
>
> E3: Non. Le nombre zéro virgule un neuf neuf neuf … est plus intéressant
>
> E1: Non. Le nombre 17/90, parce que si on prend 0,1999…, on ne peut pas savoir quelle est la fraction. Si on prend 0,1999…, c'est un nombre irrationnel
>
> E2: Cet irrationnel, c'est combien?
>
> E1: Cet irrationnel, nous ne savons pas comment le représenter. Donc, nous l'écrivons 0,1(9)
>
> (Extrait des lignes 12 à 19 du protocole du groupe 1 composé des 3 élèves H, V et B)

Ils produisent aussi une sorte d'infini - *fini* activée dans les écritures décimales illimitées comme 3,(0)1.

> P : et que signifie cette écriture ?
>
> E : Il y a une infinité de zéro et 1 à la fin.

La construction de la notion de limite ne peut pas éviter une (re)construction du nombre réel, en particulier ne peut pas éviter le problème de la décimalisation des nombres réels, outillée par les concepts de l'analyse et mettant au centre de cette reprise les écritures décimales illimitées.

L'un des projets de l'ingénierie est de faire rencontrer l'obstacle « horreur de l'infini » par l'activation d'écritures telles que 3,(0)1, 2,(9) ou 2,9999… pour mettre en place l'ordre dense de *R* en relation avec la notion de limite dans une problématique d'approximation.

Or cette rencontre dépend de l'existence d'un ostensif pour la période d'un décimal rationnel. Actuellement (ce n'était pas le cas dans les années 1980) un tel ostensif est absent en France.

Cela ne permet pas d'envisager la reproductibilité de l'ingénierie dans le système d'enseignement français sans modifications profondes et met ainsi en évidence des conditions écologiques à la reproductibilité.

Conclusion

Les apports des études comparatives des systèmes d'enseignement des mathématiques de deux pays

Tout travail didactique contient une dimension de comparaison à partir du moment où il prend en compte l'héritage d'autres études didactiques sur un sujet proche (comme l'a fait Lê Thai Bao ThienTrung dans son étude quand il se réfère aux recherches faites en France, en Belgique et en Espagne).

Mais ici, les travaux effectués comparent frontalement les systèmes éducatifs de deux pays et font émerger quatre apports fondamentaux.

1. Dénaturalisation du regard sur le fonctionnement scolaire d'une institution didactique (cf. Tran Luong Cong Khanh 2006)
2. Prise en compte de niveaux de détermination plus élevés que celui du domaine (cf. Lê Van Tien 2001)
3. Constitution d'un répertoire de praxéologies à enseigner et évaluation des praxéologies mathématiques et didactiques (cf. Nguyen Ai Quoc 2006)
4. Intervention dans un système éducatif particulier (ingénierie didactique) pour enrichir le questionnement sur l'autre système et faire émerger du générique (cf. Lê Thai Bao Thien Trung 2007)

> « Face à quelques obligations d'agir, en effet nous commençons par observer et analyser […] la manière de faire de quelque autrui […]. Puis nous évaluons ce qu'observation et analyse auront ainsi révélé […], avant de développer notre propre 'solution' en essayant d'améliorer, sur certains points jugés négativement, la 'solution' observée. » (Chevallard 1998)

Des questions qui restent ouvertes

Si la comparaison de deux systèmes éducatifs, par la constitution d'un répertoire de praxéologies et par les interrogations qu'elle suscite sur les raisons d'être de certaines de

ces praxéologies (par exemple, présents dans l'une des institutions et absent dans l'autre ou complète / incomplète), pousse à envisager un développement de la réalité didactique existante par la conception d'ingénierie didactique, elle ne donne pas, à elle toute seule, ces raisons d'être dont la recherche exige un questionnement épistémologique.

On l'a vu, la conduite de ces recherches s'appuie sur les outils théoriques issus de différents cadres théoriques, comme ceux de la TAD et de la TSD, qu'elle développe à son tour. Mais ces recherches n'ont pas permis jusqu'à présent d'avancées théoriques nouvelles. On peut alors se demander si les recherches comparatives des systèmes d'enseignement de pays différents ne nécessiteraient pas un développement théorique spécifique qui prendrait notamment en compte les caractéristiques culturelles spécifiques des pays.

Références

Bessot A., Comiti C. (2006) Some comparative Studies Between France and Vietnam Curriculums. in Leung, Graf and Lopez-Real (Eds) *Mathematics Education in different traditions: A comparative study in Asian and Western countries.* Springer : USA.

Birebent A. (2001) *Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français. Choix des calculs trigonométriques pour une ingénierie didactique en classe de première scientifique.* Thèse de l'Université Joseph Fourier.

Bosch M., Gascon J. (2002), Organiser l'étude. 2. Théories & Empiries, *Actes de la onzième école d'été de didactique des mathématiques,* 23 – 39, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau G., Brousseau N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* Document pour les enseignants et pour les formateurs. IREM de Bordeaux.

Bui Thi K. H. (2005) *Une étude didactique de la vie de l'énergie dans l'enseignement de la physique, en France et au Viêt-Nam. Des décalages entre savoirs à enseigner au Lycée et savoirs de la formation universitaires, peuvent-ils être source de difficultés pour les enseignants ?* Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville

Chaachoua H, Comiti C. (à paraître) L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. *Actes du 2ème congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*, Uzès, novembre 2007.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In Noirfalise (coordonné par) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*. Actes de l'Université de la Rochelle : IREM de Clermont-Ferrand.

Comiti C., Tran Van T., Birebent A., Bessot A. (à paraître) Comment créer les conditions d'une coopération réussie ? Une étude de cas. *Actes électroniques du colloque Espace Mathématique Francophone 2006* , Sherbrooke, Canada.

Doan Huu H. (2001) *L'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane. Une étude comparative entre deux institutions : la classe de seconde en France et la classe 11 au Viêt-nam.* Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville

Legrand M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères - IREM*, vol.10, pp.9-12.

Lê Thai Bao T.T. (2007) *Étude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement 'calculatrice'.* Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.
Version pdf de la thèse téléchargeable sur le site : http://hal.archives-ouvertes.fr/

Lê Thi H. C. (1997) *Étude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viêt-nam et la classe de seconde en France.* Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Lê Van T. (2001) *Étude didactique des liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-Nam.* Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Nguyen Ba K. et al. (1994) *Phuong phap day hoc mon toan - Day hoc nhung noi dung co ban*. Hanoi : NXBGD (Maison de l'édition).

Nguyen Chi T. (2005) *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice.* Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et l'École Normale Supérieure n°1 de Hanoi.

Nguyen Hai Q. (2006) *Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viêt-Nam et en France.* Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Tran Luong C. K. (2006) *La notion d'intégrale dans l'enseignement mathématique au lycée : une étude comparative entre la France et le Viêt-Nam*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.