Descente par éclatements en K-théorie invariante par homotopie

Denis-Charles Cisinski

▶ **To cite this version:**

Denis-Charles Cisinski. Descente par éclatements en K-théorie invariante par homotopie. 2010. hal-00461940v2

HAL Id: hal-00461940

https://hal.science/hal-00461940v2

Preprint submitted on 12 Oct 2010 (v2), last revised 16 Jan 2013 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DESCENTE PAR ÉCLATEMENTS EN K-THÉORIE INVARIANTE PAR HOMOTOPIE

par

Denis-Charles Cisinski

Résumé. — Ces notes donnent une preuve de la représentabilité de la K-théorie invariante par homotopie dans la catégorie homotopique stable des schémas. (résultat annoncé par Voevodsky). On en déduit, grâce au théorème de changement de base propre en théorie de l'homotopie stable des schémas, un théorème de descente par éclatements en K-théorie invariante par homotopie.

Abstract. — These notes give a proof of the representability of homotopy invariant K-theory in the stable homotopy category of schemes (which was announced by Voevodsky). One deduces from the proper base change theorem in stable homotopy theory of schemes a descent by blow-ups theorem for homotopy invariant K-theory.

Introduction

La descente par éclatements pour la K-théorie invariante par homotopie a été prouvée par C. Haesemeyer [**8**] pour les schémas de caractéristique nulle. Il s'agit de l'un des ingrédients de la preuve de la conjecture de Weibel [**26**, Question 2.9], d'annulation de la K-théorie négative au delà de la dimension de Krull, pour les schémas de caractéristique nulle ; voir [**5**].

Nous prouvons ici la descente par éclatements pour la K-théorie invariante par homotopie pour les schémas noethériens de dimension de Krull finie (sans aucune restriction sur la caractéristique). L'argument invoqué ici n'utilise pas de résolution des singularités, mais consiste à démontrer un résultat intéressant en soit, annoncé par V. Voevodsky [**23**, Théorème 6.9] : la représentabilité de la K-théorie invariante par homotopie dans la catégorie homotopique stable des schémas de Morel et Voevodsky par le $S^1 \wedge \mathbf{G}_m$-spectre KGL. La descente par éclatements en K-théorie invariante par homotopie est alors un simple corollaire des théorèmes de changement de base lisse et de changement de base propre dans le cadre motivique, démontrés par J. Ayoub [**1**], et légèrement généralisés dans [**4**].

Pour terminer ces notes, en utilisant le fait que la K-théorie non-connective est invariante par homotopie modulo la p-torsion pour les schémas de caractéristique $p >$

0, on en déduit, sous l'hypothèse de l'existence d'une résolution des singularités *locale* pour les k-schémas de type fini, la conjecture de Weibel en caractéristique positive modulo p-torsion (d'après T. Geisser & L. Hesselholt [**6**], ainsi que A. Krishna [**11**], on peut aussi avoir des résultats à coefficients entiers, mais sous l'hypothèse de l'existence d'une résolution des singularités *globale*).

Dans ce qui suit, tous les schémas seront noethériens, de dimension de Krull finie.

1. Spectres invariants par homotopie

1.1. — Si E est un S^1-spectre, on notera $\pi_n(E)$ son n-ème groupe d'homotopie stable. Lorsque nous aurons envie de d'insister sur le point de vue cohomologique, nous écrirons

$$H^n(E) = \pi_{-n}(E)\,.$$

1.2. — Soit S un schéma. On considère la catégorie $\mathcal{E}(S)$ des préfaisceaux simpliciaux sur la catégorie des S-schéma lisses, munie de la structure de catégorie de modèles projective (voir par exemple [**2**, Proposition 4.4.16]). On désigne par $\mathcal{E}_\bullet(S)$ sa variante pointée. On note $Sp_{S^1}(S)$ la catégorie de modèles stable des S^1-spectres (symétriques) dans $\mathcal{E}_\bullet(S)$ (ou encore, de manière équivalente, la catégorie de modèles projective des préfaisceaux en S^1-spectres (symétriques) sur la catégorie des S-schémas lisses). La catégorie homotopique correspondante $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie triangulée engendrée par ses objets compacts. Une famille génératrice est donnée par la collection des (suspensions des) objets de la forme $\Sigma^\infty(X_+)$, où X parcourt la classe des S-schémas lisses. Si E est un S^1-spectre dans $\mathcal{E}_\bullet(S)$, on note, pour tout entier n et pour tout S-schéma lisse X,

$$H^n(E(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^\infty(X_+), \Sigma^n E)$$

le n-ème groupe de cohomologie de X à coefficients dans E. Un morphisme $E \longrightarrow F$ de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ est un isomorphisme si et seulement si, pour tout S-schéma lisse X, et pour tout entier n, il induit un isomorphisme de groupes abéliens $H^n(E(X)) \simeq H^n(F(X))$.

On dispose aussi de la sphère de Tate

$$T = S^1 \wedge \mathbf{G}_m$$

(où le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ est considéré ici comme un préfaisceau pointé par 1).

1.3. — Un préfaisceau en S^1-spectres E est dit *invariant par homotopie* si, pour tout S-schéma lisse X, et pour tout entier n, la projection $X \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow X$ induit un isomorphisme

$$H^n(E(X)) \simeq H^n(E(X \times \mathbf{A}^1))\,.$$

On note $\mathbf{Ho}_{\mathbf{A}^1}(Sp_{S^1}(S))$ la sous-catégorie pleine des S^1-spectres invariants par homotopie. Cette dernière catégorie peut être décrite comme une localisation de la catégorie triangulée $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ comme suit. Désignons par $\mathcal{A}$ la sous-catégorie localisante (i.e. stables par petites sommes quelconques, par suspensions et cosuspensions, ainsi que par extensions) de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ engendrée par les cônes des morphismes

$\Sigma^\infty(X \times \mathbf{A}^1_+) \longrightarrow \Sigma^\infty(X_+)$ (induits par les projections $X \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow X$). Alors le foncteur vers le quotient de Verdier correspondant

$$\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))/\mathcal{A}$$

admet un adjoint à droite pleinement fidèle dont l'image essentielle est précisément la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ formée des S^1-spectres invariants par homotopie. On peut calculer l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion

$$i : \mathbf{Ho}_{\mathbf{A}^1}(Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$$

de la manière suivante. On rappelle que l'on dispose d'un S-schéma cosimplicial $\Delta^\bullet_S$ défini par

$$\Delta^n_S = S \times \mathrm{Spec}\left(\mathbf{Z}[t_0, \ldots, t_n]/(t_0 + \cdots + t_n - 1)\right),$$

et qu'on a des isomorphismes (non canoniques) $\Delta^n_S \simeq \mathbf{A}^n_S$. Si E est un préfaisceau de S^1-spectres sur la catégorie des S-schémas lisses, on note $R_{\mathbf{A}^1}(E)$ le S^1-spectre défini par la formule

$$R_{\mathbf{A}^1}(E) = \mathbf{L}\varinjlim_n \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\Delta^n_{S\,+}), E)$$

où $\mathbf{RHom}$ désigne le hom interne de la catégorie $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$). On vérifie immédiatement que $R_{\mathbf{A}^1}(E)$ est invariant par homotopie, et que le foncteur $R_{\mathbf{A}^1}$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion ci-dessus. Autrement dit, le morphisme canonique

$$E \longrightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)$$

est le morphisme universel de E vers un préfaisceau de S^1-spectres invariant par homotopie.

On dira qu'un morphisme de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ est une $\mathbf{A}^1$-*équivalence* si son image par le foncteur $R_{\mathbf{A}^1}$ est un isomorphisme. On peut donc décrire la catégorie $\mathbf{Ho}_{\mathbf{A}^1}(Sp_{S^1}(S))$ comme la localisation de la catégorie $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ par la classe des $\mathbf{A}^1$-équivalences (le fonceur $R_{\mathbf{A}^1}$ étant alors le foncteur de localisation canonique).

Lemme 1.4. — *Soit C un objet compact de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. Le foncteur*

$$\mathbf{RHom}(C, -) : \mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$$

respecte les $\mathbf{A}^1$-équivalences. En particulier, pour tout préfaisceau de S^1-spectres E, on a un isomorphisme canonique

$$R_{\mathbf{A}^1}(\mathbf{RHom}(C, E)) \simeq \mathbf{RHom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E)).$$

Démonstration. — Pour un S-schéma lisse X et un préfaisceau de S^1-spectres E, on notera

$$E^X = \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(X_+), E).$$

Pour tout préfaisceau de S^1-spectres E, la projection $\mathbf{A}^1_S \longrightarrow S$ induit une $\mathbf{A}^1$-équivalence

$$E \longrightarrow E^{\mathbf{A}^1_S}.$$

En effet, le morphisme de multiplication $\mu : \mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{A}^1_S \longrightarrow \mathbf{A}^1_S$ induit un morphisme

$$E^{\mathbf{A}^1_S} \longrightarrow E^{\mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{A}^1_S} = (E^{\mathbf{A}^1_S})^{\mathbf{A}^1_S},$$

d'où un morphisme

$$h : \Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}) \wedge^{\mathbf{L}} E^{\mathbf{A}^1_S} \longrightarrow E^{\mathbf{A}^1_S},$$

lequel est une $\mathbf{A}^1$-homotopie de l'identité de $E^{\mathbf{A}^1}$ avec le morphisme composé

$$E^{\mathbf{A}^1_S} \longrightarrow E \longrightarrow E^{\mathbf{A}^1_S}.$$

Désignons par $\mathcal{A}'$ la sous-catégorie localisante de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ engendrée par les cônes de morphismes de la forme $C \longrightarrow C^{\mathbf{A}^1}$, pour C un objet compact. La remarque précédente montre que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ (où $\mathcal{A}$ est la sous-catégorie localisante introduite au numéro 1.3). On a en fait l'égalité $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. En effet, le morphisme de multiplication

$$\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}) \wedge \Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}) \longrightarrow \Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+})$$

induit un morphisme

$$\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}) \longrightarrow \Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+})^{\mathbf{A}^1_S},$$

lequel est une $\mathbf{A}^1$-homotopie (en termes d'espace des chemins) de l'identité de $\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+})$ avec le morphisme composé

$$\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}) \longrightarrow \Sigma^\infty(S_+) \longrightarrow \Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}).$$

Le même type de considérations montre plus généralement que, pour tout entier $n \geq 0$, et pour tout objet compact C de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, le cône du morphisme canonique $C \longrightarrow C^{\mathbf{A}^n_S}$ est dans $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Étant donné que $\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+})$ est compact, et que les objets compacts de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ sont stables par produit tensoriel (smash produit), le foncteur $E \longmapsto E^{\mathbf{A}^1_S}$ commute aux sommes quelconques, d'où l'on déduit que la classe $\mathcal{A}'$ contient en fait tous les cônes de morphismes de la forme $E \longrightarrow E^{\mathbf{A}^1_S}$.

Soit C un objet compact de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. Pour montrer que le foncteur correspondant $\mathbf{RHom}(C, -)$ respecte les $\mathbf{A}^1$-équivalences, il suffit donc à présent de vérifier que ce foncteur envoie $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}'$. Soit E un objet de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. On vérifie aussitôt que

$$\mathbf{RHom}(C, E^{\mathbf{A}^1_S}) \simeq \mathbf{RHom}(C, E)^{\mathbf{A}^1_S},$$

d'où on déduit la premère assertion du lemme.

Considérons à présent deux objets C et E de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, avec C compact. Les $\mathbf{A}^1$-équivalences étant stables par produit tensoriel, le spectre $\mathbf{RHom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E))$ est invariant par homotopie, ce qui implique que le morphisme canonique

$$\mathbf{RHom}(C, E) \longrightarrow \mathbf{RHom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E))$$

induit un morphisme non moins canonique

$$R_{\mathbf{A}^1}(\mathbf{RHom}(C, E)) \longrightarrow \mathbf{RHom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E)).$$

Le fait que ce dernier soit un isomorphisme résulte du fait que le morphisme évident $\mathbf{RHom}(C, E) \longrightarrow \mathbf{RHom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E))$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence, ce qui se voit de la manière suivante : l'objet C étant compact dans une catégorie homotopique stable, le foncteur $\mathbf{RHom}(C, -)$ commute aux colimites homotopiques, et donc ce morphisme est une colimite homotopique de morphismes de la forme

$$\mathbf{RHom}(C, E) \longrightarrow \mathbf{RHom}(C, E^{\mathbf{A}^n_S}),$$

lesquels sont tous des $\mathbf{A}^1$-équivalences. □

2. Représentabilité de la K-théorie invariante par homotopie

2.1. — On note K l'objet de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ représentant la K-théorie au sens de Thomason et Trobaugh [**21**, Définition 3.1] (laquelle, d'après [**21**, Proposition 3.10], coïncide avec celle de Quillen pour les schémas admettant une famille ample de fibrés en droites, en particulier, pour les schémas affines). On a donc, pour tout S-schéma lisse X, un isomorphisme canonique de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^n\Sigma^\infty(X_+), K(X)) \simeq K_n(X)$$

(avec $K_n(X) = 0$ si $n < 0$). Le spectre de K-théorie est un spectre en anneaux (un monoïde commutatif dans $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$) via le produit tensoriel (dérivé) des complexes parfaits.

On définit la *K-théorie invariante par homotopie naïve* $\mathbb{K}$ par la formule

$$\mathbb{K} = R_{\mathbf{A}^1}(K)\,.$$

La structure de spectre en anneaux sur K induit canoniquement une telle structure sur $\mathbb{K}$, de telle façon que le morphisme canonique $K \longrightarrow \mathbb{K}$ soit un morphisme de spectres en anneaux.

On choisit une présentation du groupe multiplicatif

$$\mathbf{G}_m = S \times \mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}[t, t^{-1}]\,,$$

et on note $b \in K_1(\mathbf{G}_m)$ la classe associée à la section inversible t, laquelle correspond à un morphisme

$$b : T = S^1 \wedge \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{R}\Omega^\infty(K)$$

dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{E}_\bullet(S))$.

On dispose alors du cup produit par la classe β en K-théorie et en K-théorie invariante par homotopie naïve.

$$b\cup : T \wedge^{\mathbf{L}} K \xrightarrow{\beta\wedge^{\mathbf{L}} 1_K} K \wedge^{\mathbf{L}} K \xrightarrow{\mu} K$$
$$b\cup : T \wedge^{\mathbf{L}} \mathbb{K} \xrightarrow{\beta\wedge^{\mathbf{L}} 1_{\mathbb{K}}} \mathbb{K} \wedge^{\mathbf{L}} \mathbb{K} \xrightarrow{\mu} \mathbb{K}$$

2.2. — Considérons à présent un spectre E dans $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, muni d'un morphisme $w : T \wedge^{\mathbf{L}} E \longrightarrow E$. À une telle donnée, nous allons associer deux nouveaux spectres, notés respectivement E^B et $E^\sharp$, et nous verrons ensuite qu'ils sont $\mathbf{A}^1$-équivalents ; voir le corollaire 2.7.

On commence par la construction de Bass-Thomason-Trobaugh E^B. Nous allons construire par récurrence une famille de morphismes

$$E = F_0 \longrightarrow F_{-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_k \longrightarrow F_{k-1} \longrightarrow \cdots\,.$$

Pour un objet C de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, on note $V(C)$ l'objet défini par le carré homotopiquement cocartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}), C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}), C) & \longrightarrow & V(C) \end{array}$$

Par fonctorialité, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m & \longrightarrow & \mathbf{A}^1_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}^1_S & \longrightarrow & S \end{array}$$

induit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}), C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}), C) & \longrightarrow & \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C) \end{array}$$

et par là, un morphisme canonique

$$V(C) \longrightarrow \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C)\,.$$

On note $U(C)$ la fibre homotopique de ce dernier, ce qui donne, par définition, un triangle distingué canonique

$$U(C) \longrightarrow V(C) \longrightarrow \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C) \longrightarrow \Sigma U(C)\,.$$

Si en outre on dispose d'un morphisme $\varphi : T \wedge^{\mathbf{L}} C \longrightarrow C$, alors, pour tout objet A de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, on a un morphisme canonique

$$T \wedge^{\mathbf{L}} \mathbf{RHom}(A, C) \longrightarrow \mathbf{RHom}(A, C)$$

correspondant par adjonction à l'image par le foncteur $\mathbf{RHom}(A, -)$ du morphisme $C \longrightarrow \mathbf{RHom}(T, C)$ induit par φ.

$$\mathbf{RHom}(A, C) \longrightarrow \mathbf{RHom}(A, \mathbf{RHom}(T, C)) \simeq \mathbf{RHom}(T \wedge^{\mathbf{L}} A, C)$$

Cette construction étant fonctorielle en A (et le smash produit par T commutant aux colimites homotopiques), on en déduit alors des morphismes naturels

$$T \wedge^{\mathbf{L}} V(C) \longrightarrow V(C) \quad \text{et} \quad T \wedge^{\mathbf{L}} U(C) \longrightarrow U(C)\,.$$

Le morphisme φ permet en outre de produire un morphisme canonique

$$C \longrightarrow U(C)$$

obtenu comme le morphisme composé

$$C \longrightarrow \mathbf{RHom}(T, C) \subset \Sigma^{-1}(\mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C)) \longrightarrow \Sigma^{-1}\Sigma U(C) = U(C)$$

(où $C \longrightarrow \mathbf{RHom}(T, C)$ est obtenu par transposition de φ). Nous pouvons alors définir F_k par la formule

$$F_{k-1} = U(F_k)\,.$$

On définit enfin la construction de Bass-Thomason-Trobaugh E^B par la formule

$$E^B = \mathbf{L}\varinjlim_{n \geq 0} F_{-n}\,.$$

On a alors, par construction, un morphisme canonique

$$E \longrightarrow E^B\,.$$

La construction de $E^\sharp$ est plus directe : on pose

$$E^\sharp = \mathbf{L}\varinjlim_{n\geq 0} \mathbf{RHom}(T^{\wedge n}, E)\,.$$

On a aussi, par construction, un morphisme canonique

$$E \longrightarrow E^\sharp\,.$$

On a, de manière tautologique (en regard de la construction donnée dans [**21**, preuve du lemme 6.3]), le résultat de représentabilité suivant.

Proposition 2.3. — *Le spectre K^B représente la K-théorie de Bass-Thomason-Trobaugh. Autrement dit, pour tout S-schéma lisse X, et pour tout entier n, on a un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^n\Sigma^\infty(X_+), K^B) \simeq K_n^B(X)\,,$$

où $K_n^B(X)$ désigne le n-ème groupe de K-théorie de Bass au sens de Thomason et Trobaugh [**21**, Définition 6.4].

2.4. — Le spectre de *K-théorie invariante par homotopie* (au sens de Weibel [**27, 21**]) est, par définition :

$$KH = R_{\mathbf{A}^1}(K^B)\,.$$

On a donc, pour tout S-schéma lisse X, et tout entier n, un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^n\Sigma^\infty(X_+), KH) \simeq KH_n(X)\,.$$

Afin de comprendre la K-théorie invariante par homotopie au sein de la théorie de l'homotopie des schémas, nous allons comparer le spectre KH et le spectre $I\!K^\sharp$.

Proposition 2.5. — *Sous les hypothèses de* 2.2*, si E est invariant par homotopie, alors il en est de même de E^B et de $E^\sharp$, et on a alors un isomorphisme canonique*

$$E^B \simeq E^\sharp\,.$$

Démonstration. — Les spectres invariants par homotopie forment une sous-catégorie localisante de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, et, si un spectre F est invariant par homotopie, il en est de même de $\mathbf{RHom}(C, F)$ pour tout objet C de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. On en déduit aussitôt, par examen des constructions de E^B et de $E^\sharp$, que ces derniers sont invariants par homotopie dès que c'est le cas pour E.

Si C est invariant par homotopie, on voit immédiatement que l'objet $V(C)$ construit au numéro 2.2 est canoniquement isomorphe à C, de sorte que le triangle distingué

$$U(C) \longrightarrow V(C) \longrightarrow \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C) \longrightarrow \Sigma U(C)$$

s'identifie au triangle distingué

$$\mathbf{RHom}(T, C) \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C) \longrightarrow \Sigma\mathbf{RHom}(T, C)$$

(correspondant à la décomposition $\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}) = \Sigma^\infty(S_+) \vee \Sigma^{-1}T$). Si, en outre, on a un morphisme $T \wedge^{\mathbf{L}} C \longrightarrow C$, sous ces identifications, le morphisme $C \longrightarrow U(C)$ n'est autre que le morphisme $C \longrightarrow \mathbf{RHom}(T, C)$ induit par adjonction. En appliquant ce qui précède aux objets $C = \mathbf{RHom}(T^{\wedge n}, E)$, on en déduit que les spectres E^B et $E^\sharp$ sont canoniquement isomorphes. □

Proposition 2.6. — *Soient E et F deux objet de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, munis de morphismes $w : T \wedge^{\mathbf{L}} E \longrightarrow E$ et $w' : T \wedge^{\mathbf{L}} F \longrightarrow F$. On suppose donné un morphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ tel que le carré suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc} T \wedge^{\mathbf{L}} E & \xrightarrow{1_T \wedge \varphi} & T \wedge^{\mathbf{L}} F \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w'} \\ E & \xrightarrow[\varphi]{} & F \end{array}$$

Si le morphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence, alors il en est de même des morphismes induits $\varphi^B : E^B \longrightarrow F^B$ et $\varphi^\sharp : E^\sharp \longrightarrow F^\sharp$.

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du lemme 1.4. □

Corollaire 2.7. — *Sous les hypothèses de* 2.2*, on a des isomorphismes canoniques dans $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$:*

$$R_{\mathbf{A}^1}(E^B) \simeq R_{\mathbf{A}^1}(E)^B \simeq R_{\mathbf{A}^1}(E)^\sharp \simeq R_{\mathbf{A}^1}(E^\sharp)\,.$$

Démonstration. — Comme $E^B \longrightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)^B$ (resp. $E^\sharp \longrightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)^\sharp$) est une $\mathbf{A}^1$-équivalence dont le but est invariant par homotopie, son image par le foncteur $R_{\mathbf{A}^1}$ est un isomorphisme de même but (à isomorphisme canonique près). Ce corollaire résulte donc de l'identification de $R_{\mathbf{A}^1}(E)^B$ et de $R_{\mathbf{A}^1}(E)^\sharp$. □

Corollaire 2.8. — *Il existe des isomorphismes canoniques $KH \simeq I\!K^B \simeq I\!K^\sharp$.*

2.9. — On rappelle qu'un préfaisceau de S^1-spectres E sur la catégorie des S-schémas lisses a la *propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich* si $E(\varnothing) \simeq 0$, et si, pour tout carré cartésien de S-schémas lisses

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ U & \xrightarrow[j]{} & X \end{array}$$

avec j une immersion ouverte, et f un morphisme étale, induisant un isomorphisme $f^{-1}(X - U)_{\mathrm{red}} \simeq (X - U)_{\mathrm{red}}$, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E(X) & \longrightarrow & E(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(U) & \longrightarrow & E(U \times_X V) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien (on rappelle que cette condition est équivalente à la propriété de descente formulée en terme d'hyper-recouvrements ; voir [**24, 25**]).

On vérifie facilement que si E vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich, alors il en est de même de $\mathbf{RHom}(C, E)$ pour tout préfaisceau de S^1-spectres C (il suffit de le vérifier dans le cas où $C = \Sigma^\infty(X_+)$ pour X lisse sur S). En outre, les préfaisceaux de S^1-spectres vérifiant la propriété de descente

relativement à la topologie de Nisnevich forment une sous-catégorie localisante de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. Cela implique que, si E vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich, il en est de même de $R_{\mathbf{A}^1}(E)$, ainsi que, lorsque cela a un sens, de E^B et de $E^\sharp$.

Corollaire 2.10. — *Le spectre $\mathbb{K}^\sharp$ vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich.*

Démonstration. — En vertu des théorèmes d'excision et de localisation [**21**, 7.1 et 7.4], on sait déjà que le spectre K^B (et donc aussi, d'après ce qui précède, KH) vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich (on pourrait aussi invoquer directement [**21**, Théorème 10.8]). Le corollaire résulte donc de l'identification de $\mathbb{K}^\sharp$ avec KH. □

2.11. — Soit $Sp_T Sp_{S^1}(S)$ la catégorie des T-spectres dans la catégorie $Sp_{S^1}(S)$. Les objets de $Sp_T Sp_{S^1}(S)$ sont des collections $E = (E_n, \sigma_n)_{n\geq 0}$, où, pour $n \geq 0$, E_n est un objet de $Sp_{S^1}(S)$, et $\sigma_n : T \wedge E_n \longrightarrow E_{n+1}$ est un morphisme de S^1-spectres. On définit, à partir de la structure de catégorie de modèles stable sur $Sp_{S^1}(S)$, une structure de catégorie de modèles T-stable sur $Sp_T Sp_{S^1}(S)$, de sorte la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie triangulée ; voir [**9, 2**]. On note

$$\Omega^\infty_T : Sp_T Sp_{S^1}(S) \longrightarrow Sp_{S^1}(S)$$

le foncteur d'évaluation en zéro $E \longmapsto E_0$. C'est un foncteur de Quillen à droite, et donc, sont adjoint à gauche,

$$\Sigma^\infty_T : Sp_{S^1}(S) \longrightarrow Sp_T Sp_{S^1}(S)$$

est un foncteur de Quillen à gauche. On a donc une adjonction dérivée :

$$\mathbf{L}\Sigma^\infty_T : \mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S)) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S)) : \mathbf{R}\Omega^\infty_T .$$

Par construction de $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$, le smash produit par T est une équivalence de catégories, ce qui donne un sens à l'expression $T^{\wedge n} \wedge^{\mathbf{L}} E$ pour tout entier $n < 0$. Étant donnée une propriété $\mathcal{P}$ portant sur les objets de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, on dira qu'un objet E de $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ a la propriété $\mathcal{P}$ si, pour tout entier $n \leq 0$, le préfaisceau en S^1-spectres $\mathbf{R}\Omega^\infty_T(T^{\wedge n} \wedge^{\mathbf{L}} E)$ a la propriété $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$.

On désigne par $\mathcal{SH}(S)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ formée des objets vérifiant la propriété d'invariance par homotopie ainsi que la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich. On vérifie aisément (par comparaison des propriétés universelles) que la catégorie $\mathcal{SH}(S)$ est canoniquement équivalente à la catégorie homotopique stable des schémas construite en termes de T-spectres ou encore de $\mathbf{P}^1$-spectres dans la littératutre [**10, 15, 2**]. Le foncteur d'inclusion $\mathcal{SH}(S) \longrightarrow \mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ admet un adjoint à gauche que nous noterons

$$\gamma : \mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathcal{SH}(S) .$$

2.12. — Soit E un préfaisceau de S^1-spectres sur la catégorie des S-schémas lisses, muni d'un morphisme $w : T \wedge E \longrightarrow E$. On lui associe un T-spectre

$$\underline{E} = (E_n, \sigma_n)_{n\geq 0}$$

en posant $E_n = E$ et $\sigma_n = w$ pour tout $n \geq 0$. Le morphisme w induit un morphisme

$$\underline{w} : T \wedge^{\mathbf{L}} \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$$

dans $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$, lequel s'avère être un isomorphisme. En outre, on a alors un isomorphisme canonique

$$E^\sharp \simeq \mathbf{R}\Omega^\infty_T(\underline{E})$$

dans la catégorie $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ (cela résulte par exemple de [**9**, Propositions 4.6 et 4.7], ou bien encore de [**2**, Théorème 4.3.61]). Il en découle que, étant donnée une propriété raisonnable $\mathcal{P}$ des objets de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ (par exemple, la propriété de descente pour une topologie t, ou bien la propriété d'invariance par homotopie), pour que $\underline{E}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ en tant qu'objet de $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$, il faut et il suffit que $E^\sharp$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ en tant qu'objet de $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$.

En considérant le spectre de K-théorie (resp. le spectre de K-théorie invariante par homotopie naïve) muni du cup produit par la classe u (cf. 2.1), on obtient donc un objet $\underline{K}$ (resp. $\underline{\mathbb{K}}$) dans $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$. On a ainsi des isomorphismes :

$$K^\sharp \simeq \Omega^\infty_T(\underline{K}) \quad \text{et} \quad KH \simeq \mathbb{K}^\sharp \simeq \Omega^\infty_T(\underline{\mathbb{K}})\,.$$

On remarque que, en vertu des corollaires 2.7 et 2.10, le T-spectre $\underline{\mathbb{K}}$ vérifie les propriétés de descente relativement à la topologie de Nisnevich et d'invariance par homotopie, et qu'il représente la K-théorie invariante par homotopie dans $\mathcal{SH}(S)$.

On définit par ailleurs le T-spectre de K-théorie KGL par la formule

$$KGL = \gamma(\underline{K})\,.$$

Remarque 2.13. — Le T-spectre KGL correspond au spectre de K-théorie en théorie de l'homotopie des schémas considéré habituellement [**16, 17, 14, 19**], ce que l'on peut observer de la manière suivante.

Lorsqu'on travaille localement pour la topologie de Nisnevich (en fait, Zariski suffit) et modulo $\mathbf{A}^1$-équivalence, on a l'identification $S^1 \wedge \mathbf{G}_m \simeq \mathbf{P}^1$ (où $\mathbf{P}^1$ est considéré comme un espace pointé). Cela permet de décrire la catégorie $\mathcal{SH}(S)$ en termes de $\mathbf{P}^1$-spectres ; cf. [**2**, Théorème 4.3.40]. Le spectre $KGL = \gamma(\underline{K})$ correspond dans $\mathcal{SH}(S)$ au $\mathbf{P}^1$-spectre de K-théorie usuel, noté ici $\mathcal{K}$, obtenu à partir du morphisme pointé $\mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{R}\Omega^\infty(K)$ correspondant à la classe $\beta = [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}] - [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)]$ dans $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^1)$.

$$\beta : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^\infty \simeq B\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{Z} \times BGL_\infty \simeq \mathbf{R}\Omega^\infty(K)$$

(les identifications ci-dessus ont lieu dans la catégorie homotopique (instable) de Morel et Voevodsky [**12**, Propositions 3.9 et 3.10, page 139], et sachant que la K-théorie de Thomason-Trobaugh et la K-théorie de Quillen coïncident localement pour la topologie de Zariski). Autrement dit, $\mathcal{K}$ est défini comme le $\mathbf{P}^1$-spectre périodique déterminé par le cup produit par la classe β

$$\beta\cup : \mathbf{P}^1 \wedge^{\mathbf{L}} K \longrightarrow K\,.$$

Pour voir que l'identification $\mathbf{P}^1 \simeq S^1 \wedge \mathbf{G}_m$ identifie (au signe près) le morphisme β ci-dessus avec le morphisme b introduit au numéro 2.1, il suffit de traiter le cas où $S = \mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ (en utilisant par exemple [**12**, Propositions 3.14, page 140]). Or, dans ce

cas, chacun de ces deux morphismes correspond au choix d'un générateur de la partie libre du groupe abélien

$$K_1(\mathbf{Z}[t,t^{-1}]) \simeq \{\text{unités de } \mathbf{Z}[t,t^{-1}]\} \simeq \{\text{unités de } \mathbf{Z}\} \oplus \mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\,.$$

Ainsi, l'équivalence de catégories entre la catégorie homotopique stable des T-spectres et la catégorie homotopique stable des $\mathbf{P}^1$-spectres envoie KGL sur $\mathcal{K}$.

Proposition 2.14. — *Les T-spectres KGL et $\underline{\mathbb{K}}$ sont canoniquement isomorphes dans $\mathcal{SH}(S)$.*

Démonstration. — Comme $\underline{\mathbb{K}}$ vérifie les propriétés de descente relativement à la topologie de Nisnevich et d'invariance par homotopie, on a un isomorphisme canonique $\gamma(\underline{\mathbb{K}}) \simeq \underline{\mathbb{K}}$. Le morphisme $\underline{K} \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}$ étant une $\mathbf{A}^1$-équivalence terme à terme, il induit, d'après [**2**, Lemme 4.3.59], un isomorphisme après application du foncteur de localisation

$$KGL = \gamma(\underline{K}) \simeq \gamma(\underline{\mathbb{K}}) \simeq \underline{\mathbb{K}}\,,$$

ce qui implique l'assertion. □

Théorème 2.15 **(Voevodsky)**. — *Le T-spectre KGL représente la K-théorie invariante par homotopie dans $\mathcal{SH}(S)$: pour tout S-schéma lisse X, et tout entier n, on a un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\Sigma^n\Sigma_T^\infty(X_+), KGL) \simeq KH_n(X)\,.$$

Démonstration. — Cela découle aussitôt de la proposition précédente et de 2.12. □

Remarque 2.16. — Ce théorème de représentabilité permet de décrire la K-théorie invariante par homotopie comme la théorie cohomologique orientée universelle avec loi de groupe formelle multiplicative ; voir [**19, 14**]. Il permet aussi de décrire la K-théorie invariante par homotopie comme la théorie cohomologique représentée par le T-spectre de Snaith $\Sigma_T^\infty(\mathbf{P}_+^\infty)[\beta^{-1}]$ dans $\mathcal{SH}$; voir [**19, 7**].

Remarque 2.17. — Bien que le théorème 2.15 montre que le T-spectre de K-théorie KGL représente la K-théorie invariante par homotopie dans $\mathcal{SH}(S)$, lorsque S n'est pas régulier, nous ne savons rien de ce que l'objet $\mathbf{Z} \times BGL_\infty$ représente dans la catégorie homotopique instable $\mathcal{H}(S)$ (on s'attend cependant à ce que cela ait un rapport avec la K-théorie de Karoubi-Villamayor).

Corollaire 2.18. — *Si $q \geq 1$ est nilpotent dans $\mathcal{O}_S$, alors, pour tout S-schéma lisse X, et pour tout entier n, on a un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\Sigma^n\Sigma_T^\infty(X_+), KGL) \otimes \mathbf{Z}[1/q] \simeq K_n^B(X) \otimes \mathbf{Z}[1/q]\,.$$

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème précédent et de [**21**, Théorème 9.6]. □

3. Descente par éclatements abstraits

3.1. — En vertu de [**2**, Section 4.5], les catégories homotopiques stables $\mathcal{SH}(S)$ forment un 2-foncteur homotopique stable $\mathcal{SH}$ au sens de [**1**, Définition 1.4.1] (et même un dérivateur algébrique homotopique stable au sens de [**1**, Définition 2.4.13]). Étant donné un morphisme de schémas $f : S' \longrightarrow S$, on a donc un couple de foncteur adjoints

$$\mathbf{L}f^* : \mathcal{SH}(S) \rightleftarrows \mathcal{SH}(S') : \mathbf{R}f_*$$

(avec $\mathbf{L}f^*$ adjoint à gauche de $\mathbf{R}f_*$). Le foncteur $\mathbf{L}f^*$ est essentiellement déterminé par le fait qu'il commute aux colimites homotopiques et qu'il correspond au foncteur de changement de base par f : pour tout S-schéma lisse X, en posant $X' = S' \times_S X$, on a :

$$\mathbf{L}f^*\Sigma^\infty_T(X_+) = \Sigma^\infty_T(X'_+)\,.$$

Lorsque f est en outre lisse, le foncteur $\mathbf{L}f^*$ a aussi un adjoint à gauche

$$\mathbf{L}f_\sharp : \mathcal{SH}(S') \longrightarrow \mathcal{SH}(S)$$

essentiellement déterminé par le fait que, pour tout S'-schéma lisse X, on a

$$\mathbf{L}f_\sharp\Sigma^\infty_T(X_+) = \Sigma^\infty_T(X_+)\,.$$

Nous utiliserons de manière essentielle les faits suivants.

Théorème 3.2 **(Localisation)**. — *Soit $i : Z \longrightarrow S$ une immersion fermée, d'immersion ouverte complémentaire $j : U \longrightarrow S$. Pour tout objet E de $\mathcal{SH}(S)$, le carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}j_\sharp\mathbf{L}j^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{R}i_*\mathbf{L}i^*(E) \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien. Autrement dit, on a alors un triangle distingué canonique

$$\mathbf{L}j_\sharp\mathbf{L}j^*(E) \longrightarrow E \longrightarrow \mathbf{R}i_*\mathbf{L}i^*(E) \longrightarrow \Sigma\,\mathbf{L}j_\sharp\mathbf{L}j^*(E)\,.$$

En outre, les foncteurs

$$\mathbf{L}j_\sharp : \mathcal{SH}(U) \longrightarrow \mathcal{SH}(S) \quad \textit{et} \quad \mathbf{R}i_* : \mathcal{SH}(Z) \longrightarrow \mathcal{SH}(S)$$

sont pleinement fidèles.
En particulier, le foncteur

$$(\mathbf{L}j^*, \mathbf{L}i^*) : \mathcal{SH}(S) \longrightarrow \mathcal{SH}(U) \times \mathcal{SH}(Z)$$

est conservatif.

Démonstration. — Voir [**2**, Section 4.5.3]. □

Corollaire 3.3. — *Pour tout schéma X, l'immersion fermée $i : X_{\mathrm{red}} \longrightarrow X$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{L}i^* : \mathcal{SH}(X) \longrightarrow \mathcal{SH}(X_{\mathrm{red}})\,.$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du théorème précédent, puisque l'ouvert complémentaire de l'immersion fermée i est vide (sachant que $\mathcal{SH}(\varnothing) \simeq 0$). □

***Théorème 3.4* (Changement de base lisse).** — *Pour tout carré cartésien dans la catégorie des schémas,*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y' & \xrightarrow[v]{} & Y \end{array}$$

si le morphisme v est lisse, alors, pour tout objet E de $\mathcal{SH}(Y')$, le morphisme canonique

$$\mathbf{L}u_\sharp\, \mathbf{L}q^*(E) \longrightarrow \mathbf{L}p^*\, \mathbf{L}v_\sharp(E)$$

est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(X)$.
Par transposition, pour tout objet E de $\mathcal{SH}(X)$, le morphisme canonique

$$\mathbf{L}v^*\, \mathbf{R}p_*(E) \longrightarrow \mathbf{R}q_*\, \mathbf{L}u^*(E)$$

est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(Y')$.

Démonstration. — Voir [**2**, Proposition 4.5.48]. □

***Théorème 3.5* (Changement de base propre).** — *Pour tout carré cartésien de schémas,*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y' & \xrightarrow[v]{} & Y \end{array}$$

si le morphisme p est propre, alors, pour tout objet E de $\mathcal{SH}(X)$, le morphisme canonique

$$\mathbf{L}v^*\, \mathbf{R}p_*(E) \longrightarrow \mathbf{R}q_*\, \mathbf{L}u^*(E)$$

est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(Y')$.

Démonstration. — Voir [**1**, Corollaire 1.7.18] pour le cas où p est projectif. Le cas général en découle grâce au lemme de Chow ; voir [**4**, Proposition 2.3.11]. □

3.6. — On rappelle qu'un morphisme de schémas $p : X' \longrightarrow X$ est un *éclatement abstrait* de centre Z si p est propre, et si Z est un sous-schéma fermé tel que le morphisme induit

$$p^{-1}(X - Z)_{\mathrm{red}} \longrightarrow (X - Z)_{\mathrm{red}}$$

soit un isomorphisme. La topologie cdh est la topologie de Grothendieck sur la catégorie des schémas engendrée par les recouvrements cdh et par les recouvrements de la forme $Z \amalg X' \longrightarrow X$ pour tout éclatement abstrait $X' \longrightarrow X$ de centre Z. Nous renvoyons le lecteur à [**20**, Lemme 5.8 et Proposition 5.9] (dont les énoncés et les preuves sont tout-à-fait valables en inégales caractéristiques) pour une description civilisée des recouvrement cdh (à raffinement près).

Un préfaisceau de S^1-spectres E sur la catégorie des schémas vérifie la propriété de descente relativement à la topologie cdh si et seulement s'il vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich (2.9) et si, pour tout éclatement abstrait $p : X' \longrightarrow X$ de centre Z, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E(X) & \longrightarrow & E(X') \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(Z) & \longrightarrow & E(p^{-1}(Z)) \end{array}$$

est homotopiquement (co)cartésien ; voir [**24, 25**].

Proposition 3.7. — *Soit $p : X' \longrightarrow X$ un éclatement abstrait de centre Z. On considère le carré cartésien de schémas correspondant ci-dessous.*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(Z) & \xrightarrow{k} & X' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \xrightarrow[i]{} & X \end{array}$$

On note enfin $r = pk = iq : p^{-1}(Z) \longrightarrow X$. Alors, pour tout objet E de $\mathcal{SH}(X)$, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}p_* \, \mathbf{L}p^* E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}i_* \, \mathbf{L}i^* E & \longrightarrow & \mathbf{R}r_* \, \mathbf{L}r^* E \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien.

Démonstration. — Soit $j : U = X - Z \longrightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire de i. Par le théorème de localisation et par le théorème de changement de base lisse, l'image du carré considéré par le foncteur $\mathbf{L}j^*$ est le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}j^* E & \xrightarrow{=} & \mathbf{L}j^* E \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad ,$$

et, de même, en vertu des théorèmes de localisation de changement de base propre, son image par le foncteur $\mathbf{L}i^*$ est le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}i^* E & \longrightarrow & \mathbf{R}q_* \, \mathbf{L}q^* \, \mathbf{L}i^* E \\ {\scriptstyle =}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ \mathbf{L}i^* E & \longrightarrow & \mathbf{R}q_* \, \mathbf{L}q^* \, \mathbf{L}i^* E \end{array} \quad .$$

Les deux carrés ci-dessus étant trivialement homotopiquement cocartésiens, et les foncteurs $\mathbf{L}i^*$ et $\mathbf{L}j^*$ formant une famille conservative de foncteurs exacts (3.2), cela prouve la proposition. □

Proposition 3.8. — *Pour tout morphisme de schémas $f : S' \longrightarrow S$, le morphisme canonique*

$$\mathbf{L}f^*(KGL) \longrightarrow KGL$$

est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(S')$.

Démonstration. — Cela résulte aussitôt de la description de KGL comme le $\mathbf{P}^1$-spectre périodique associé au morphisme canonique $\mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{Z} \times BGL_\infty$; voir la remarque 2.13. □

Théorème 3.9. — *La K-théorie invariante par homotopie vérifie la propriété de descente relativement à la topologie cdh. En particulier, pour tout éclatement abstrait, de centre Z, $p : X' \longrightarrow X$, le carré cartésien de schémas*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(Z) & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

induit le carré homotopiquement (co)cartésien de S^1-spectres ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} KH(X) & \longrightarrow & KH(X') \\ \downarrow & & \downarrow \\ KH(Z) & \longrightarrow & KH(p^{-1}(Z)) \end{array}$$

Démonstration. — On sait que KH vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich. Pour vérifier la descente cdh, il suffit donc de montrer la propriété de Mayer-Vietoris relativement aux éclatements abstraits ; or, en vertu de la proposition précédente et du théorème 2.15, cela résulte de l'évaluation en X du carré homotopiquement (co)cartésien de la proposition 3.7 appliquée à $E = KGL$. □

Corollaire 3.10. — *Pour tout entier $q > 0$, la K-théorie de Bass-Thomason Trobaugh à coefficients dans $\mathbf{Z}[1/q]$ (resp. dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$) vérifie la propriété de descente relativement à la topologie cdh pour les $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$-schémas (resp. les $\mathbf{Z}[1/q]$-schémas).*

Démonstration. — Cela résulte du théorème 3.9 et de [**21**, Théorème 9.6]. □

En guise d'application, on en déduit la forme faible suivante de la conjecture de Weibel en caractéristique positive, sous l'hypothèse de l'existence locale de résolutions des singularités (on rappelle que cela n'est connu qu'en caractéristique nulle).

Théorème 3.11. — *Soit k un corps. On suppose que k admet une résolution locale des singularités dans le sens où, pour tout k-schéma de type fini X, il existe un recouvrement cdh $X' \longrightarrow X$ avec X' régulier. Alors, pour tout k-schéma de dimension de Krull $\leq d$, et pour tout X-schéma lisse U, on a*

$$KH_i(U) = 0 \quad \textit{pour tout } i < -d.$$

Si, sous les mêmes hypothèses, le corps k est de caractéristique $p > 0$, on a donc :

$$K_i^B(U) \otimes \mathbf{Z}[1/p] = 0 \quad \textit{pour tout } i < -d.$$

Démonstration. — Notons E le préfaisceau de S^1-spectres sur la catégorie des S-schémas de type fini défini par

$$U \longmapsto KH(U \times_S X)\,.$$

On déduit du théorème 3.9 que, pour tout k-schéma de type fini U, on a, pour tout entier n, un isomorphisme canonique

$$H^n_{\mathrm{cdh}}(U, E) = KH_{-n}(U)\,.$$

On dispose donc de la suite spectrale ci-dessous

$$E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{cdh}}(S, H^q(E)) \Rightarrow KH_{-p-q}(X)\,,$$

où $H^q(E)$ désigne le préfaisceau de groupes abéliens $U \longmapsto KH_{-q}(U \times_S X)$, et où $H^*_{\mathrm{cdh}}(X, F)$ désigne la cohomologie de X à coefficients dans le faisceau cdh associé à F. Or, pour $q > 0$, le faisceau cdh associé à $H^q(E)$ est isomorphe à zéro : comme on a supposé que k admet une résolution des singularités locale, il suffit de vérifier que $KH_{-q}(Y) = 0$ pour Y régulier, ce qui est bien connu. D'autre part, la dimension cohomologique cdh étant majorée par la dimension de Krull (voir l'appendice de [**20**]), on a $E_2^{p,q} = 0$ dès que $p > d$, et la suite spectrale ci-dessus converge fortement, ce qui achève la démonstration de la première assertion.

Dans le cas très hypothétique où k est un corps de caractéristique $p > 0$ qui admet une résolution des singularité locale au sens ci-dessus, on obtient la seconde assertion à partir de la première grâce à [**21**, Théorème 9.6]. □

Références

[1] J. Ayoub, *Six opérations de Grothendieck et cycles évanescents dans le monde motivique I*, Astérisque **314** (2007).

[2] ———, *Six opérations de Grothendieck et cycles évanescents dans le monde motivique II*, Astérisque **315** (2007).

[3] K. S. Brown, *Abstract homotopy and generalized sheaf cohomology*, Transactions of the A.M.S. **186** (1973), 419–458.

[4] D.-C. Cisinski, F. Déglise, *Triangulated categories of mixed motives*, preprint arXiv:0912.2110.

[5] G. Cortiñas, C. Haesemeyer, M. Schlichting, C. Weibel, *Cyclic homology, cdh-cohomology and negative K-theory*, Annals of Math. **167** (2008), no. 2, 549–573.

[6] T. Geisser, L. Hesselholt, *On the vanishing of negative K-groups*, Math. Ann. **348** (2010), 707–736.

[7] D. Gepner, V. Snaith, *On the motivic spectra representing algebraic cobordism and algebraic K-theory*, Documenta Math. **14** (2009), 359–396.

[8] C. Haesemeyer, *Descent properties of homotopy K-theory*, Duke Math. J. **125** (2004), 589–620.

[9] M. Hovey, *Spectra and symmetric spectra in general model categories*, J. Pure Appl. Alg. **165** (2001), 63-127.

[10] J.F. Jardine, *Motivic Symmetric Spectra*, Documenta Math. **5** (2000), 445–552.

[11] A. Krishna, *On the negative K-theory of schemes in finite characteristic* , Journal of Algebra **322** (2009), no. 6, 2118–2130.

[12] F. Morel, V. Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory of schemes*, Publ. Math. IHES **90** (1999), 45–143.

[13] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory*, in *Higher K-theories I*, Lecture Notes in Mathematics **341**, Springer, 1973, 85–147,

[14] I. Panin, K. Pimenov, O. Röndigs, *On Voevodsky's algebraic K-theory spectrum*, Baas, Nils A. (ed.) et al., Algebraic topology. The Abel symposium 2007. Proceedings of the fourth Abel symposium, Oslo, Norway, August 5–10, 2007. Abel Symposia, vol. 4, Springer, 2009, 279–330.

[15] J. Riou, *Catégorie homotopique stable d'un site suspendu avec intervalle*, Bull. Soc. Math. France **135** (2007), 495–547.

[16] ———, *Opérations sur la K-théorie algébrique et régulateurs via la théorie de l'homotopie des schémas*, Comptes Rendus Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007), 27–32.

[17] ———, *Algebraic K-theory,* $\mathbf{A}^1$*-homotopy and Riemann-Roch theorems*, preprint arXiv:0907.2710.

[18] M. Schlichting, *Negative K-theory of derived categories*, Math. Z. **253** (2006), no. 1, 97–134.

[19] M. Spitzweck, P.A. Østvær, *The Bott inverted infinite projective space is homotopy algebraic K-theory*, Bull. London Math. Soc. **41** (2009), 281–292.

[20] A. Suslin, V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, in *The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles (Banff, Canada, 1998)*, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 548, Kluwer, 2000, 117–189.

[21] R. Thomason, T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, in *The Grothendieck Festschrift III*, Birkhäuser, 1990, 247–435.

[22] V. Voevodsky, *Homology of schemes*, Selecta Mathematica, New Series, **2** (1996), no. 1, 111–153.

[23] ———, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. I (Berlin, 1998), Documenta Math. Extra Vol. I (1998), 579–604.

[24] ———, *Homotopy theory of simplicial presheaves in completely decomposable topologies*, J. Pure Appl. Alg. **214** (2010), 1384–1398.

[25] ———, *Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and cdh-topologies*, J. Pure Appl. Alg. **214** (2010), 1399–1406.

[26] C. Weibel, *K-theory and analytic isomorphism*, Invent. Math. **61** (1980), 177–197.

[27] ———, *Homotopy Algebraic K-theory*, Contemp. Math. **83** (1989), 461–488.

D.-C. Cisinski, Université Paul Sabatier, Institut de Mathématiques de Toulouse, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, France
E-mail : denis-charles.cisinski@math.univ-toulouse.fr
Url : http://www.math.univ-toulouse.fr/~dcisinsk/