



**HAL**  
open science

# Descente propre en $K$ -théorie invariante par homotopie

Denis-Charles Cisinski

► **To cite this version:**

Denis-Charles Cisinski. Descente propre en  $K$ -théorie invariante par homotopie. 2010. hal-00461940v1

**HAL Id: hal-00461940**

**<https://hal.science/hal-00461940v1>**

Preprint submitted on 7 Mar 2010 (v1), last revised 16 Jan 2013 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# DESCENTE PROPRE EN $K$ -THÉORIE INVARIANTE PAR HOMOTOPIE

*par*

Denis-Charles Cisinski

---

**Résumé.** — Ces notes donnent une preuve de la représentabilité de la  $K$ -théorie invariante par homotopie dans la catégorie homotopique stable des schémas. (résultat annoncé par Voevodsky). On en déduit, grâce au théorème de changement de base propre en théorie de l'homotopie stable des schémas, des théorèmes de descente cohomologique en  $K$ -théorie invariante par homotopie (en particulier, on obtient la descente par éclatements en toutes caractéristiques). Le théorème d'uniformisation de Gabber implique alors un théorème d'annulation de la  $K$ -théorie invariante par homotopie modulo la torsion résiduelle, lequel, pour les schémas de caractéristique  $p > 0$ , donne la conjecture de Weibel modulo  $p$ -torsion.

**Abstract.** — These notes give a proof of the representability of homotopy invariant  $K$ -theory in the stable homotopy category of schemes (which was announced by Voevodsky). One deduces some cohomological descent theorems for homotopy invariant  $K$ -theory from the proper base change theorem in stable homotopy theory of schemes (in particular, we get descent by blow-ups in any characteristic). Gabber's uniformisation theorem implies then a vanishing theorem for homotopy invariant  $K$ -theory modulo residual torsion, which in turns gives Weibel's conjecture modulo  $p$ -torsion for schemes of characteristic  $p > 0$ .

## Table des matières

Introduction .....	2
1. Spectres invariants par homotopie .....	3
2. Représentabilité de la $K$ -théorie invariante par homotopie .....	6
3. Descente par éclatements abstraits .....	13
4. Excision galoisienne première à $\ell$ .....	16
5. $\ell'$ -descente en $K$ -théorie invariante par homotopie .....	25
6. Conjecture de Weibel modulo la torsion résiduelle .....	28
Références .....	29

## Introduction

La descente par éclatements pour la  $K$ -théorie invariante par homotopie a été prouvée par C. Haesemeyer [Hae04] pour les schémas de caractéristique nulle. Il s'agit de l'un des ingrédients de la preuve de la conjecture de Weibel [Wei80, Question 2.9], d'annulation de la  $K$ -théorie négative au delà de la dimension de Krull, pour les schémas de caractéristique nulle ; voir [CHSW08].

Nous prouvons ici la descente par éclatements pour la  $K$ -théorie invariante par homotopie pour les schémas noethériens de dimension de Krull finie (sans aucune restriction sur la caractéristique). L'argument invoqué ici n'utilise pas de résolution des singularités, mais consiste à démontrer un résultat intéressant en soit, annoncé par V. Voevodsky [Voe98, Théorème 6.9] : la représentabilité de la  $K$ -théorie invariante par homotopie dans la catégorie homotopique stable des schémas de Morel et Voevodsky par le  $S^1 \wedge \mathbf{G}_m$ -spectre  $KGL$ . La descente par éclatements en  $K$ -théorie invariante par homotopie est alors un simple corollaire des théorèmes de changement de base lisse et de changement de base propre dans le cadre motivique, démontrés par J. Ayoub [Ayo07a], et légèrement généralisés dans [CD09].

Suivant les résultats de descente prouvés par F. Déglise et par l'auteur de ces notes dans [CD09], on en déduit même que la  $K$ -théorie invariante par homotopie à coefficients rationnels a la propriété de descente propre (plus précisément, elle a la propriété de descente pour la  $h$ -topologie de Voevodsky). La seconde partie de ce texte consiste à raffiner ces critères de descente propre, afin de se rapprocher le plus possible d'un énoncé à coefficients entiers. Pour cela, on étudie la propriété de descente relativement à la  $\ell'$ -topologie de Gabber (avec  $\ell$  un nombre premier fixé) : on démontre que la  $K$ -théorie invariante par homotopie à coefficients dans  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$  a la propriété de  $\ell'$ -descente cohomologique, et on prouve que la  $\ell'$ -dimension cohomologique d'un schéma quasi-excellent est majorée par sa dimension de Krull (à coefficients dans  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ ). L'intérêt de ces résultats est que, d'après le théorème d'uniformisation locale dégagé par O. Gabber, tout schéma quasi-excellent de caractéristiques résiduelles premières à  $\ell$  est régulier localement pour la  $\ell'$ -topologie. Cela implique, via une suite spectrale de descente, le résultat d'annulation ci-dessous.

**Théorème A.** — *Soit  $S$  un schéma quasi-excellent de dimension  $\leq d$  et dont les caractéristiques résiduelles sont distinctes de  $\ell$ . Pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , on a*

$$KH_i(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} = 0 \quad \text{pour tout } i < -d.$$

En utilisant le fait que la  $K$ -théorie non-connective est invariante par homotopie modulo la  $p$ -torsion pour les schémas de caractéristique  $p$ , on en déduit la forme suivante de la conjecture de Weibel en caractéristique positive.

**Théorème B.** — *Soit  $S$  un schéma quasi-excellent, de caractéristique  $p > 0$ , et de dimension  $\leq d$ . On a alors, pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ ,*

$$K_i^B(X) \otimes \mathbf{Z}[1/p] = 0 \quad \text{pour tout } i < -d$$

(où  $K_i^B$  désigne le  $i$ -ème groupe de  $K$ -théorie au sens de Bass-Thomason-Trobaugh).

Signalons que la conjecture de Weibel, pour les schémas de type fini sur un corps de caractéristique  $p > 0$ , a été démontrée (à coefficients entiers) par T. Geisser et L. Hesselholt [GH08, Théorème 5.3]; leurs résultats sont cependant conditionnels à la résolution des singularités en caractéristique positive, tout en étant beaucoup plus précis (ils n'utilisent pas du tout les propriétés d'invariance par homotopie, ce qui permet de contrôler la  $p$ -torsion via l'homologie cyclique topologique et le complexe de de Rham-Witt).

Dans ce qui suit, tous les schémas seront noethériens, de dimension de Krull finie.

### 1. Spectres invariants par homotopie

**1.1.** — Si  $E$  est un  $S^1$ -spectre, on notera  $\pi_n(E)$  son  $n$ -ème groupe d'homotopie stable. Lorsque nous aurons envie de d'insister sur le point de vue cohomologique, nous écrivons

$$H^n(E) = \pi_{-n}(E).$$

**1.2.** — Soit  $S$  un schéma. On considère la catégorie  $\mathcal{E}(S)$  des préfaisceaux simpliciaux sur la catégorie des  $S$ -schémas lisses, munie de la structure de catégorie de modèles projective (voir par exemple [Ayo07b, Proposition 4.4.16]). On désigne par  $\mathcal{E}_\bullet(S)$  sa variante pointée. On note  $Sp_{S^1}(S)$  la catégorie de modèles stable des  $S^1$ -spectres (symétriques) dans  $\mathcal{E}_\bullet(S)$  (ou encore, de manière équivalente, la catégorie de modèles projective des préfaisceaux en  $S^1$ -spectres (symétriques) sur la catégorie des  $S$ -schémas lisses). La catégorie homotopique correspondante  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  est canoniquement munie d'une structure de catégorie triangulée engendrée par ses objets compacts. Une famille génératrice est donnée par la collection des (suspensions des) objets de la forme  $\Sigma^\infty(X_+)$ , où  $X$  parcourt la classe des  $S$ -schémas lisses. Si  $E$  est un  $S^1$ -spectre dans  $\mathcal{E}_\bullet(S)$ , on note, pour tout entier  $n$  et pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ ,

$$H^n(E(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^\infty(X_+), \Sigma^n E)$$

la  $n$ -ème groupe de cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $E$ . Un morphisme  $E \rightarrow F$  de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  est un isomorphisme si et seulement si, pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , et pour tout entier  $n$ , il induit un isomorphisme de groupes abéliens  $H^n(E(X)) \simeq H^n(F(X))$ .

On dispose aussi de la sphère de Tate

$$T = S^1 \wedge \mathbf{G}_m$$

(où le groupe multiplicatif  $\mathbf{G}_m$  est considéré ici comme un préfaisceau pointé par 1).

**1.3.** — Un préfaisceau en  $S^1$ -spectres  $E$  est dit *invariant par homotopie* si, pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , et pour tout entier  $n$ , la projection  $X \times \mathbf{A}^1 \rightarrow X$  induit un isomorphisme

$$H^n(E(X)) \simeq H^n(E(X \times \mathbf{A}^1)).$$

On note  $\mathbf{Ho}_{\mathbf{A}^1}(Sp_{S^1}(S))$  la sous-catégorie pleine des  $S^1$ -spectres invariants par homotopie. Cette dernière catégorie peut être décrite comme une localisation de la catégorie triangulée  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  comme suit. Désignons par  $\mathcal{A}$  la sous-catégorie localisante (i.e. stables par petites sommes quelconques, par suspensions et cosuspensions,

ainsi que par extensions) de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  engendrée par les cônes des morphismes  $\Sigma^\infty(X \times \mathbf{A}_+^1) \longrightarrow \Sigma^\infty(X_+)$  (induits par les projections  $X \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow X$ ). Alors le foncteur vers le quotient de Verdier correspondant

$$\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))/\mathcal{A}$$

admet un adjoint à droite pleinement fidèle dont l'image essentielle est précisément la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  formée des  $S^1$ -spectres invariants par homotopie. On peut calculer l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion

$$i : \mathbf{Ho}_{\mathbf{A}^1}(Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$$

de la manière suivante. On rappelle que l'on dispose d'un  $S$ -schéma cosimplicial  $\Delta_S^\bullet$  défini par

$$\Delta_S^n = S \times \text{Spec}(\mathbf{Z}[t_0, \dots, t_n]/(t_0 + \dots + t_n - 1)),$$

et qu'on a des isomorphismes (non canoniques)  $\Delta_S^n \simeq \mathbf{A}_S^n$ . Si  $E$  est un préfaisceau de  $S^1$ -spectres sur la catégorie des  $S$ -schémas lisses, on note  $R_{\mathbf{A}^1}(E)$  le  $S^1$ -spectre défini par la formule

$$R_{\mathbf{A}^1}(E) = \varinjlim_n \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\Delta_{S^+}^n), E)$$

où  $\mathbf{RHom}$  désigne le hom interne de la catégorie  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ . On vérifie immédiatement que  $R_{\mathbf{A}^1}(E)$  est invariant par homotopie, et que le foncteur  $R_{\mathbf{A}^1}$  est l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion ci-dessus. Autrement dit, le morphisme canonique

$$E \longrightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)$$

est le morphisme universel de  $E$  vers un préfaisceau de  $S^1$ -spectres invariant par homotopie.

On dira qu'un morphisme de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  est une  $\mathbf{A}^1$ -équivalence si son image par le foncteur  $R_{\mathbf{A}^1}$  est un isomorphisme. On peut donc décrire la catégorie  $\mathbf{Ho}_{\mathbf{A}^1}(Sp_{S^1}(S))$  comme la localisation de la catégorie  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  par la classe des  $\mathbf{A}^1$ -équivalences (le foncteur  $R_{\mathbf{A}^1}$  étant alors le foncteur de localisation canonique).

**Lemme 1.4.** — *Soit  $C$  un objet compact de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ . Le foncteur*

$$\mathbf{RHom}(C, -) : \mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$$

*respecte les  $\mathbf{A}^1$ -équivalences. En particulier, pour tout préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $E$ , on a un isomorphisme canonique*

$$R_{\mathbf{A}^1}(\mathbf{RHom}(C, E)) \simeq \mathbf{RHom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E)).$$

*Démonstration.* — Pour un  $S$ -schéma lisse  $X$  et un préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $E$ , on notera

$$E^X = \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(X_+), E).$$

Pour tout préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $E$ , la projection  $\mathbf{A}_S^1 \longrightarrow S$  induit une  $\mathbf{A}^1$ -équivalence

$$E \longrightarrow E^{\mathbf{A}_S^1}.$$

En effet, le morphisme de multiplication  $\mu : \mathbf{A}_S^1 \times_S \mathbf{A}_S^1 \longrightarrow \mathbf{A}_S^1$  induit un morphisme

$$E^{\mathbf{A}_S^1} \longrightarrow E^{\mathbf{A}_S^1 \times_S \mathbf{A}_S^1} = (E^{\mathbf{A}_S^1})^{\mathbf{A}_S^1},$$

d'où un morphisme

$$h : \Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1) \wedge^{\mathbf{L}} E^{\mathbf{A}_s^1} \longrightarrow E^{\mathbf{A}_s^1},$$

lequel est une  $\mathbf{A}^1$ -homotopie de l'identité de  $E^{\mathbf{A}^1}$  avec le morphisme composé

$$E^{\mathbf{A}_s^1} \longrightarrow E \longrightarrow E^{\mathbf{A}_s^1}.$$

Désignons par  $\mathcal{A}'$  la sous-catégorie localisante de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  engendrée par les cônes de morphismes de la forme  $C \longrightarrow C^{\mathbf{A}^1}$ , pour  $C$  un objet compact. La remarque précédente montre que  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  (où  $\mathcal{A}$  est la sous-catégorie localisante introduite au numéro 1.3). On a en fait l'égalité  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ . En effet, le morphisme de multiplication

$$\Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1) \wedge \Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1) \longrightarrow \Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1)$$

induit un morphisme

$$\Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1) \longrightarrow \Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1)^{\mathbf{A}_s^1},$$

lequel est une  $\mathbf{A}^1$ -homotopie (en termes d'espace des chemins) de l'identité de  $\Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1)$  avec le morphisme composé

$$\Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1) \longrightarrow \Sigma^\infty(S_+) \longrightarrow \Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1).$$

Le même type de considérations montre plus généralement que, pour tout entier  $n \geq 0$ , et pour tout objet compact  $C$  de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ , le cône du morphisme canonique  $C \longrightarrow C^{\mathbf{A}_s^n}$  est dans  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ . Étant donné que  $\Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1)$  est compact, et que les objets compacts de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  sont stables par produit tensoriel (smash produit), le foncteur  $E \longmapsto E^{\mathbf{A}_s^1}$  commute aux sommes quelconques, d'où l'on déduit que la classe  $\mathcal{A}'$  contient en fait tous les cônes de morphismes de la forme  $E \longrightarrow E^{\mathbf{A}_s^1}$ .

Soit  $C$  un objet compact de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ . Pour montrer que le foncteur correspondant  $\mathbf{RHom}(C, -)$  respecte les  $\mathbf{A}^1$ -équivalences, il suffit donc à présent de vérifier que ce foncteur envoie  $\mathcal{A}'$  dans  $\mathcal{A}$ . Soit  $E$  un objet de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ . On vérifie aussitôt que

$$\mathbf{RHom}(C, E^{\mathbf{A}_s^1}) \simeq \mathbf{RHom}(C, E)^{\mathbf{A}_s^1},$$

d'où on déduit la première assertion du lemme.

Considérons à présent deux objets  $C$  et  $E$  de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ , avec  $C$  compact. Les  $\mathbf{A}^1$ -équivalences étant stables par produit tensoriel, le spectre  $\mathbf{RHom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E))$  est invariant par homotopie, ce qui implique que le morphisme canonique

$$\mathbf{RHom}(C, E) \longrightarrow \mathbf{RHom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E))$$

induit un morphisme non moins canonique

$$R_{\mathbf{A}^1}(\mathbf{RHom}(C, E)) \longrightarrow \mathbf{RHom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E)).$$

Le fait que ce dernier soit un isomorphisme résulte du fait que le morphisme évident  $\mathbf{RHom}(C, E) \longrightarrow \mathbf{RHom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E))$  est une  $\mathbf{A}^1$ -équivalence, ce qui se voit de la manière suivante : l'objet  $C$  étant compact dans une catégorie homotopique stable, le foncteur  $\mathbf{RHom}(C, -)$  commute aux colimites homotopiques, et donc ce morphisme est une colimite homotopique de morphismes de la forme

$$\mathbf{RHom}(C, E) \longrightarrow \mathbf{RHom}(C, E^{\mathbf{A}_s^n}),$$

lesquels sont tous des  $\mathbf{A}^1$ -équivalences.  $\square$

## 2. Représentabilité de la $K$ -théorie invariante par homotopie

**2.1.** — On note  $K$  l'objet de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  représentant la  $K$ -théorie au sens de Thomason et Trobaugh [TT90, Définition 3.1] (laquelle, d'après [TT90, Proposition 3.10], coïncide avec celle de Quillen pour les schémas admettant une famille ample de fibrés en droites, en particulier, pour les schémas affines). On a donc, pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , un isomorphisme canonique de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^n \Sigma^\infty(X_+), K(X)) \simeq K_n(X)$$

(avec  $K_n(X) = 0$  si  $n < 0$ ). Le spectre de  $K$ -théorie est un spectre en anneaux (un monoïde commutatif dans  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ ) via le produit tensoriel (dérivé) des complexes parfaits.

On définit la  $K$ -théorie invariante par homotopie naïve  $\mathbb{K}$  par la formule

$$\mathbb{K} = R_{\mathbf{A}^1}(K).$$

La structure de spectre en anneaux sur  $K$  induit canoniquement une telle structure sur  $\mathbb{K}$ , de telle façon que le morphisme canonique  $K \rightarrow \mathbb{K}$  soit un morphisme de spectres en anneaux.

On choisit une présentation du groupe multiplicatif

$$\mathbf{G}_m = S \times \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[t, t^{-1}],$$

et on note  $b \in K_1(\mathbf{G}_m)$  la classe associée à la section inversible  $t$ , laquelle correspond à un morphisme

$$b : T = S^1 \wedge \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{R}\Omega^\infty(K)$$

dans  $\mathbf{Ho}(\mathcal{E}_\bullet(S))$ .

On dispose alors du cup produit par la classe  $\beta$  en  $K$ -théorie et en  $K$ -théorie invariante par homotopie naïve.

$$\begin{aligned} b \cup : T \wedge^{\mathbf{L}} K &\xrightarrow{\beta \wedge^{\mathbf{L}} 1_K} K \wedge^{\mathbf{L}} K \xrightarrow{\mu} K \\ b \cup : T \wedge^{\mathbf{L}} \mathbb{K} &\xrightarrow{\beta \wedge^{\mathbf{L}} 1_{\mathbb{K}}} \mathbb{K} \wedge^{\mathbf{L}} \mathbb{K} \xrightarrow{\mu} \mathbb{K} \end{aligned}$$

**2.2.** — Considérons à présent un spectre  $E$  dans  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ , muni d'un morphisme  $w : T \wedge^{\mathbf{L}} E \rightarrow E$ . À une telle donnée, nous allons associer deux nouveaux spectres, notés respectivement  $E^B$  et  $E^\sharp$ , et nous verrons ensuite qu'ils sont  $\mathbf{A}^1$ -équivalents; voir le corollaire 2.7.

On commence par la construction de Bass-Thomason-Trobaugh  $E^B$ . Nous allons construire par récurrence une famille de morphismes

$$E = F_0 \rightarrow F_{-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_k \rightarrow F_{k-1} \rightarrow \cdots$$

Pour un objet  $C$  de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ , on note  $V(C)$  l'objet défini par le carré homotopiquement cocartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1), C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1), C) & \longrightarrow & V(C) \end{array}$$

Par functorialité, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m & \longrightarrow & \mathbf{A}_S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}_S^1 & \longrightarrow & S \end{array}$$

induit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1), C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}_{S^+}^1), C) & \longrightarrow & \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m^+}), C) \end{array}$$

et par là, un morphisme canonique

$$V(C) \longrightarrow \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m^+}), C).$$

On note  $U(C)$  la fibre homotopique de ce dernier, ce qui donne, par définition, un triangle distingué canonique

$$U(C) \longrightarrow V(C) \longrightarrow \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m^+}), C) \longrightarrow \Sigma U(C).$$

Si en outre on dispose d'un morphisme  $\varphi : T \wedge^{\mathbf{L}} C \longrightarrow C$ , alors, pour tout objet  $A$  de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ , on a un morphisme canonique

$$T \wedge^{\mathbf{L}} \mathbf{RHom}(A, C) \longrightarrow \mathbf{RHom}(A, C)$$

correspondant par adjonction à l'image par le foncteur  $\mathbf{RHom}(A, -)$  du morphisme  $C \longrightarrow \mathbf{RHom}(T, C)$  induit par  $\varphi$ .

$$\mathbf{RHom}(A, C) \longrightarrow \mathbf{RHom}(A, \mathbf{RHom}(T, C)) \simeq \mathbf{RHom}(T \wedge^{\mathbf{L}} A, C)$$

Cette construction étant fonctorielle en  $A$  (et le smash produit par  $T$  commutant aux colimites homotopiques), on en déduit alors des morphismes naturels

$$T \wedge^{\mathbf{L}} V(C) \longrightarrow V(C) \quad \text{et} \quad T \wedge^{\mathbf{L}} U(C) \longrightarrow U(C).$$

Le morphisme  $\varphi$  permet en outre de produire un morphisme canonique

$$C \longrightarrow U(C)$$

obtenu comme le morphisme composé

$$C \longrightarrow \mathbf{RHom}(T, C) \subset \Sigma^{-1}(\mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m^+}), C)) \longrightarrow \Sigma^{-1}\Sigma U(C) = U(C)$$

(où  $C \longrightarrow \mathbf{RHom}(T, C)$  est obtenu par transposition de  $\varphi$ ). Nous pouvons alors définir  $F_k$  par la formule

$$F_{k-1} = U(F_k).$$

On définit enfin la construction de Bass-Thomason-Trobaugh  $E^B$  par la formule

$$E^B = \mathbf{L}\varinjlim_{n \geq 0} F_{-n}.$$

On a alors, par construction, un morphisme canonique

$$E \longrightarrow E^B.$$

La construction de  $E^\sharp$  est plus directe : on pose

$$E^\sharp = \mathbf{L}\varinjlim_{n \geq 0} \mathbf{RHom}(T^{\wedge n}, E).$$

On a aussi, par construction, un morphisme canonique

$$E \longrightarrow E^\sharp.$$

On a, de manière tautologique (en regard de la construction donnée dans [TT90, preuve du lemme 6.3]), le résultat de représentabilité suivant.

**Proposition 2.3.** — *Le spectre  $K^B$  représente la  $K$ -théorie de Bass-Thomason-Trobaugh. Autrement dit, pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , et pour tout entier  $n$ , on a un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^n \Sigma^\infty(X_+), K^B) \simeq K_n^B(X),$$

où  $K_n^B(X)$  désigne le  $n$ -ème groupe de  $K$ -théorie de Bass au sens de Thomason et Trobaugh [TT90, Définition 6.4].

**2.4.** — Le spectre de  $K$ -théorie invariante par homotopie (au sens de Weibel [Wei89, TT90]) est, par définition :

$$KH = R_{\mathbf{A}^1}(K^B).$$

On a donc, pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , et tout entier  $n$ , un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^n \Sigma^\infty(X_+), KH) \simeq KH_n(X).$$

Afin de comprendre la  $K$ -théorie invariante par homotopie au sein de la théorie de l'homotopie des schémas, nous allons comparer le spectre  $KH$  et le spectre  $K^\sharp$ .

**Proposition 2.5.** — *Sous les hypothèses de 2.2, si  $E$  est invariant par homotopie, alors il en est de même de  $E^B$  et de  $E^\sharp$ , et on a alors un isomorphisme canonique*

$$E^B \simeq E^\sharp.$$

*Démonstration.* — Les spectres invariants par homotopie forment une sous-catégorie localisante de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ , et, si un spectre  $F$  est invariant par homotopie, il en est de même de  $\mathbf{RHom}(C, F)$  pour tout objet  $C$  de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ . On en déduit aussitôt, par examen des constructions de  $E^B$  et de  $E^\sharp$ , que ces derniers sont invariants par homotopie dès que c'est le cas pour  $E$ .

Si  $C$  est invariant par homotopie, on voit immédiatement que l'objet  $V(C)$  construit au numéro 2.2 est canoniquement isomorphe à  $C$ , de sorte que le triangle distingué

$$U(C) \longrightarrow V(C) \longrightarrow \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C) \longrightarrow \Sigma U(C)$$

s'identifie au triangle distingué

$$\mathbf{RHom}(T, C) \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{RHom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C) \longrightarrow \Sigma \mathbf{RHom}(T, C)$$

(correspondant à la décomposition  $\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}) = \Sigma^\infty(S_+) \vee \Sigma^{-1}T$ ). Si, en outre, on a un morphisme  $T \wedge^{\mathbf{L}} C \longrightarrow C$ , sous ces identifications, le morphisme  $C \longrightarrow U(C)$  n'est autre que le morphisme  $C \longrightarrow \mathbf{RHom}(T, C)$  induit par adjonction. En appliquant ce qui précède aux objets  $C = \mathbf{RHom}(T^{\wedge n}, E)$ , on en déduit que les spectres  $E^B$  et  $E^\sharp$  sont canoniquement isomorphes.  $\square$

**Proposition 2.6.** — Soient  $E$  et  $F$  deux objet de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ , munis de morphismes  $w : T \wedge^{\mathbf{L}} E \rightarrow E$  et  $w' : T \wedge^{\mathbf{L}} F \rightarrow F$ . On suppose donné un morphisme  $\varphi : E \rightarrow F$  tel que le carré suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} T \wedge^{\mathbf{L}} E & \xrightarrow{1_T \wedge \varphi} & T \wedge^{\mathbf{L}} F \\ w \downarrow & & \downarrow w' \\ E & \xrightarrow{\varphi} & F \end{array}$$

Si le morphisme  $\varphi : E \rightarrow F$  est une  $\mathbf{A}^1$ -équivalence, alors il en est de même des morphismes induits  $\varphi^B : E^B \rightarrow F^B$  et  $\varphi^\sharp : E^\sharp \rightarrow F^\sharp$ .

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement du lemme 1.4.  $\square$

**Corollaire 2.7.** — Sous les hypothèses de 2.2, on a des isomorphismes canoniques dans  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  :

$$R_{\mathbf{A}^1}(E^B) \simeq R_{\mathbf{A}^1}(E)^B \simeq R_{\mathbf{A}^1}(E)^\sharp \simeq R_{\mathbf{A}^1}(E^\sharp).$$

*Démonstration.* — Comme  $E^B \rightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)^B$  (resp.  $E^\sharp \rightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)^\sharp$ ) est une  $\mathbf{A}^1$ -équivalence dont le but est invariant par homotopie, son image par le foncteur  $R_{\mathbf{A}^1}$  est un isomorphisme de même but (à isomorphisme canonique près). Ce corollaire résulte donc de l'identification de  $R_{\mathbf{A}^1}(E)^B$  et de  $R_{\mathbf{A}^1}(E)^\sharp$ .  $\square$

**Corollaire 2.8.** — Il existe des isomorphismes canoniques  $KH \simeq \mathbb{K}^B \simeq \mathbb{K}^\sharp$ .

**2.9.** — On rappelle qu'un préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $E$  sur la catégorie des  $S$ -schémas lisses a la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich si, pour tout carré cartésien de  $S$ -schémas lisses

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

avec  $j$  une immersion ouverte, et  $f$  un morphisme étale, induisant un isomorphisme  $f^{-1}(X - U)_{\text{red}} \simeq (X - U)_{\text{red}}$ , le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E(X) & \longrightarrow & E(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(U) & \longrightarrow & E(U \times_X V) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

On vérifie facilement que si  $E$  vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich, alors il en est de même de  $\mathbf{RHom}(C, E)$  pour tout préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $C$  (il suffit de le vérifier dans le cas où  $C = \Sigma^\infty(X_+)$  pour  $X$  lisse sur  $S$ ). En outre, les préfaisceaux de  $S^1$ -spectres vérifiant la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich forment une sous-catégorie localisante de

$\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ . Cela implique que, si  $E$  vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich, il en est de même de  $R_{\mathbf{A}^1}(E)$ , ainsi que, lorsque cela a un sens, de  $E^B$  et de  $E^\sharp$ .

**Corollaire 2.10.** — *Le spectre  $\mathbb{K}^\sharp$  vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich.*

*Démonstration.* — En vertu des théorèmes d’excision et de localisation [TT90, 7.1 et 7.4], on sait déjà que le spectre  $K^B$  (et donc aussi, d’après ce qui précède,  $KH$ ) vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich (on pourrait aussi invoquer directement [TT90, Théorème 10.8]). Le corollaire résulte donc de l’identification de  $\mathbb{K}^\sharp$  avec  $KH$ .  $\square$

**2.11.** — Soit  $Sp_T Sp_{S^1}(S)$  la catégorie des  $T$ -spectres dans la catégorie  $Sp_{S^1}(S)$ . Les objets de  $Sp_T Sp_{S^1}(S)$  sont des collections  $E = (E_n, \sigma_n)_{n \geq 0}$ , où, pour  $n \geq 0$ ,  $E_n$  est un objet de  $Sp_{S^1}(S)$ , et  $\sigma_n : T \wedge E_n \rightarrow E_{n+1}$  est un morphisme de  $S^1$ -spectres. On définit, à partir de la structure de catégorie de modèles stable sur  $Sp_{S^1}(S)$ , une structure de catégorie de modèles  $T$ -stable sur  $Sp_T Sp_{S^1}(S)$ , de sorte la catégorie homotopique  $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$  est canoniquement munie d’une structure de catégorie triangulée ; voir [Hov01, Ayo07b]. On note

$$\Omega_T^\infty : Sp_T Sp_{S^1}(S) \rightarrow Sp_{S^1}(S)$$

le foncteur d’évaluation en zéro  $E \mapsto E_0$ . C’est un foncteur de Quillen à droite, et donc, sont adjoint à gauche,

$$\Sigma_T^\infty : Sp_{S^1}(S) \rightarrow Sp_T Sp_{S^1}(S)$$

est un foncteur de Quillen à gauche. On a donc une adjonction dérivée :

$$\mathbf{L}\Sigma_T^\infty : \mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S)) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S)) : \mathbf{R}\Omega_T^\infty.$$

Par construction de  $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ , le smash produit par  $T$  est une équivalence de catégories, ce qui donne un sens à l’expression  $T^{\wedge n} \wedge^{\mathbf{L}} E$  pour tout entier  $n < 0$ . Étant donnée une propriété  $\mathcal{P}$  portant sur les objets de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ , on dira qu’un objet  $E$  de  $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$  a la propriété  $\mathcal{P}$  si, pour tout entier  $n \leq 0$ , le préfaisceau en  $S^1$ -spectres  $\mathbf{R}\Omega_T^\infty(T^{\wedge n} \wedge^{\mathbf{L}} E)$  a la propriété  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ .

On désigne par  $\mathcal{SH}(S)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$  formée des objets vérifiant la propriété d’invariance par homotopie ainsi que la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich. On vérifie aisément (par comparaison des propriétés universelles) que la catégorie  $\mathcal{SH}(S)$  est canoniquement équivalente à la catégorie homotopique stable des schémas construite en termes de  $T$ -spectres ou encore de  $\mathbf{P}^1$ -spectres dans la littérature [Jar00, Rio07a, Ayo07b]. Le foncteur d’inclusion  $\mathcal{SH}(S) \rightarrow \mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$  admet un adjoint à gauche que nous noterons

$$\gamma : \mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S)) \rightarrow \mathcal{SH}(S).$$

**2.12.** — Soit  $E$  un préfaisceau de  $S^1$ -spectres sur la catégorie des  $S$ -schémas lisses, muni d’un morphisme  $w : T \wedge E \rightarrow E$ . On lui associe un  $T$ -spectre

$$\underline{E} = (E_n, \sigma_n)_{n \geq 0}$$

en posant  $E_n = E$  et  $\sigma_n = w$  pour tout  $n \geq 0$ . Le morphisme  $w$  induit un morphisme

$$\underline{w} : T \wedge^{\mathbf{L}} \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$$

dans  $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ , lequel s'avère être un isomorphisme. En outre, on a alors un isomorphisme canonique

$$E^\sharp \simeq \mathbf{R}\Omega_T^\infty(\underline{E})$$

dans la catégorie  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  (cela résulte par exemple de [Hov01, Propositions 4.6 et 4.7], ou bien encore de [Ayo07b, Théorème 4.3.61]). Il en découle que, étant donnée une propriété raisonnable  $\mathcal{P}$  des objets de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$  (par exemple, la propriété de descente pour une topologie  $t$ , ou bien la propriété d'invariance par homotopie), pour que  $\underline{E}$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  en tant qu'objet de  $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ , il faut et il suffit que  $E^\sharp$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  en tant qu'objet de  $\mathbf{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ .

En considérant le spectre de  $K$ -théorie (resp. le spectre de  $K$ -théorie invariante par homotopie naïve) muni du cup produit par la classe  $u$  (cf. 2.1), on obtient donc un objet  $\underline{K}$  (resp.  $\underline{\mathbb{K}}$ ) dans  $\mathbf{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ . On a ainsi des isomorphismes :

$$K^\sharp \simeq \Omega_T^\infty(\underline{K}) \quad \text{et} \quad KH \simeq \mathbb{K}^\sharp \simeq \Omega_T^\infty(\underline{\mathbb{K}}).$$

On remarque que, en vertu des corollaires 2.7 et 2.10, le  $T$ -spectre  $\underline{\mathbb{K}}$  vérifie les propriétés de descente relativement à la topologie de Nisnevich et d'invariance par homotopie, et qu'il représente la  $K$ -théorie invariante par homotopie dans  $\mathcal{SH}(S)$ .

On définit par ailleurs le  $T$ -spectre de  $K$ -théorie  $KGL$  par la formule

$$KGL = \gamma(\underline{K}).$$

**Remarque 2.13.** — Le  $T$ -spectre  $KGL$  correspond au spectre de  $K$ -théorie en théorie de l'homotopie des schémas considéré habituellement [Rio07b, Rio09, PPR07, SØ09], ce que l'on peut observer de la manière suivante.

Lorsqu'on travaille localement pour la topologie de Nisnevich (en fait, Zariski suffit) et modulo  $\mathbf{A}^1$ -équivalence, on a l'identification  $S^1 \wedge \mathbf{G}_m \simeq \mathbf{P}^1$  (où  $\mathbf{P}^1$  est considéré comme un espace pointé). Cela permet de décrire la catégorie  $\mathcal{SH}(S)$  en termes de  $\mathbf{P}^1$ -spectres ; cf. [Ayo07b, Théorème 4.3.40]. Le spectre  $KGL = \gamma(\underline{K})$  correspond dans  $\mathcal{SH}(S)$  au  $\mathbf{P}^1$ -spectre de  $K$ -théorie usuel, noté ici  $\mathcal{K}$ , obtenu à partir du morphisme pointé  $\mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{R}\Omega^\infty(K)$  correspondant à la classe  $\beta = [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}] - [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)]$  dans  $\text{Pic}(\mathbf{P}^1)$ .

$$\beta : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^\infty \simeq B\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{Z} \times BGL_\infty \simeq \mathbf{R}\Omega^\infty(K)$$

(les identifications ci-dessus ont lieu dans la catégorie homotopique (instable) de Morel et Voevodsky [MV99, Propositions 3.9 et 3.10, page 139], et sachant que la  $K$ -théorie de Thomason-Trobaugh et la  $K$ -théorie de Quillen coïncident localement pour la topologie de Zariski). Autrement dit,  $\mathcal{K}$  est défini comme le  $\mathbf{P}^1$ -spectre périodique déterminé par le cup produit par la classe  $\beta$

$$\beta \cup : \mathbf{P}^1 \wedge^{\mathbf{L}} K \longrightarrow K.$$

Pour voir que l'identification  $\mathbf{P}^1 \simeq S^1 \wedge \mathbf{G}_m$  identifie (au signe près) le morphisme  $\beta$  ci-dessus avec le morphisme  $b$  introduit au numéro 2.1, il suffit de traiter le cas où  $S = \text{Spec } \mathbf{Z}$  (en utilisant par exemple [MV99, Propositions 3.14, page 140]). Or,

dans ce cas, chacun de ces deux morphismes correspond au choix d'un générateur de la partie libre du groupe abélien

$$K_1(\mathbf{Z}[t, t^{-1}]) \simeq \{\text{unités de } \mathbf{Z}[t, t^{-1}]\} \simeq \{\text{unités de } \mathbf{Z}\} \oplus \mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$$

Ainsi, l'équivalence de catégories entre la catégorie homotopique stable des  $T$ -spectres et la catégorie homotopique stable des  $\mathbf{P}^1$ -spectres envoie  $KGL$  sur  $\mathcal{K}$ .

**Proposition 2.14.** — *Les  $T$ -spectres  $KGL$  et  $\underline{\mathcal{K}}$  sont canoniquement isomorphes dans  $\mathcal{SH}(S)$ .*

*Démonstration.* — Comme  $\underline{\mathcal{K}}$  vérifie les propriétés de descente relativement à la topologie de Nisnevich et d'invariance par homotopie, on a un isomorphisme canonique  $\gamma(\underline{\mathcal{K}}) \simeq \underline{\mathcal{K}}$ . Le morphisme  $\underline{K} \rightarrow \underline{\mathcal{K}}$  étant une  $\mathbf{A}^1$ -équivalence terme à terme, il induit, d'après [Ayo07b, Lemme 4.3.59], un isomorphisme après application du foncteur de localisation

$$KGL = \gamma(\underline{K}) \simeq \gamma(\underline{\mathcal{K}}) \simeq \underline{\mathcal{K}},$$

ce qui implique l'assertion.  $\square$

**Théorème 2.15 (Voevodsky).** — *Le  $T$ -spectre  $KGL$  représente la  $K$ -théorie invariante par homotopie dans  $\mathcal{SH}(S)$  : pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , et tout entier  $n$ , on a un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\Sigma^n \Sigma_T^\infty(X_+), KGL) \simeq KH_n(X).$$

*Démonstration.* — Cela découle aussitôt de la proposition précédente et de 2.12.  $\square$

**Remarque 2.16.** — Ce théorème de représentabilité permet de décrire la  $K$ -théorie invariante par homotopie comme la théorie cohomologique orientée universelle avec loi de groupe formelle multiplicative ; voir [SØ09, PPR07]. Il permet aussi de décrire la  $K$ -théorie invariante par homotopie comme la théorie cohomologique représentée par le  $T$ -spectre de Snaith  $\Sigma_T^\infty(\mathbf{P}_+^\infty)[\beta^{-1}]$  dans  $\mathcal{SH}$  ; voir [SØ09, GS09].

**Remarque 2.17.** — Bien que le théorème 2.15 montre que le  $T$ -spectre de  $K$ -théorie  $KGL$  représente la  $K$ -théorie invariante par homotopie dans  $\mathcal{SH}(S)$ , lorsque  $S$  n'est pas régulier, nous ne savons rien de ce que l'objet  $\mathbf{Z} \times BGL_\infty$  représente dans la catégorie homotopique instable  $\mathcal{H}(S)$  (on s'attend cependant à ce que cela ait un rapport avec la  $K$ -théorie de Karoubi-Villamayor).

**Corollaire 2.18.** — *Si  $q \geq 1$  est nilpotent dans  $\mathcal{O}_S$ , alors, pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , et pour tout entier  $n$ , on a un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\Sigma^n \Sigma_T^\infty(X_+), KGL) \otimes \mathbf{Z}[1/q] \simeq K_n^B(X) \otimes \mathbf{Z}[1/q].$$

*Démonstration.* — Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème précédent et de [TT90, Théorème 9.6].  $\square$

### 3. Descente par éclatements abstraits

**3.1.** — En vertu de [Ayo07b, Section 4.5], les catégories homotopiques stables  $\mathcal{SH}(S)$  forment un 2-foncteur homotopique stable  $\mathcal{SH}$  au sens de [Ayo07a, Définition 1.4.1] (et même un dérivateur algébrique homotopique stable au sens de [Ayo07a, Définition 2.4.13]). Étant donné un morphisme de schémas  $f : S' \rightarrow S$ , on a donc un couple de foncteur adjoints

$$\mathbf{L}f^* : \mathcal{SH}(S) \rightleftarrows \mathcal{SH}(S') : \mathbf{R}f_*$$

(avec  $\mathbf{L}f^*$  adjoint à gauche de  $\mathbf{R}f_*$ ). Le foncteur  $\mathbf{L}f^*$  est essentiellement déterminé par le fait qu'il commute aux colimites homotopiques et qu'il correspond au foncteur de changement de base par  $f$  : pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , en posant  $X' = S' \times_S X$ , on a :

$$\mathbf{L}f^* \Sigma_T^\infty(X_+) = \Sigma_T^\infty(X'_+).$$

Lorsque  $f$  est en outre lisse, le foncteur  $\mathbf{L}f^*$  a aussi un adjoint à gauche

$$\mathbf{L}f_{\sharp} : \mathcal{SH}(S') \rightarrow \mathcal{SH}(S)$$

essentiellement déterminé par le fait que, pour tout  $S'$ -schéma lisse  $X$ , on a

$$\mathbf{L}f_{\sharp} \Sigma_T^\infty(X_+) = \Sigma_T^\infty(X_+).$$

Nous utiliserons de manière essentielle les faits suivants.

**Théorème 3.2 (Localisation).** — Soit  $i : Z \rightarrow S$  une immersion fermée, d'immersion ouverte complémentaire  $j : U \rightarrow S$ . Pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{SH}(S)$ , le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}j_{\sharp} \mathbf{L}j^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{R}i_* \mathbf{L}i^*(E) \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien. Autrement dit, on a alors un triangle distingué canonique

$$\mathbf{L}j_{\sharp} \mathbf{L}j^*(E) \rightarrow E \rightarrow \mathbf{R}i_* \mathbf{L}i^*(E) \rightarrow \Sigma \mathbf{L}j_{\sharp} \mathbf{L}j^*(E).$$

En outre, les foncteurs

$$\mathbf{L}j_{\sharp} : \mathcal{SH}(U) \rightarrow \mathcal{SH}(S) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}i_* : \mathcal{SH}(Z) \rightarrow \mathcal{SH}(S)$$

sont pleinement fidèles.

En particulier, le foncteur

$$(\mathbf{L}j^*, \mathbf{L}i^*) : \mathcal{SH}(S) \rightarrow \mathcal{SH}(U) \times \mathcal{SH}(Z)$$

est conservatif.

*Démonstration.* — Voir [Ayo07b, Section 4.5.3]. □

**Corollaire 3.3.** — Pour tout schéma  $X$ , l'immersion fermée  $i : X_{\text{red}} \rightarrow X$  induit une équivalence de catégories

$$\mathbf{L}i^* : \mathcal{SH}(X) \rightarrow \mathcal{SH}(X_{\text{red}}).$$

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement du théorème précédent, puisque l'ouvert complémentaire de l'immersion fermée  $i$  est vide (sachant que  $\mathcal{SH}(\emptyset) \simeq 0$ ).  $\square$

**Théorème 3.4 (Changement de base lisse).** — *Pour tout carré cartésien dans la catégorie des schémas,*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

si le morphisme  $v$  est lisse, alors, pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{SH}(Y')$ , le morphisme canonique

$$\mathbf{L}u_{\sharp} \mathbf{L}q^*(E) \longrightarrow \mathbf{L}p^* \mathbf{L}v_{\sharp}(E)$$

est un isomorphisme dans  $\mathcal{SH}(X)$ .

Par transposition, pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{SH}(X)$ , le morphisme canonique

$$\mathbf{L}v^* \mathbf{R}p_*(E) \longrightarrow \mathbf{R}q_* \mathbf{L}u^*(E)$$

est un isomorphisme dans  $\mathcal{SH}(Y')$ .

*Démonstration.* — Voir [Ayo07b, Proposition 4.5.48].  $\square$

**Théorème 3.5 (Changement de base propre).** — *Pour tout carré cartésien de schémas,*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

si le morphisme  $p$  est propre, alors, pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{SH}(X)$ , le morphisme canonique

$$\mathbf{L}v^* \mathbf{R}p_*(E) \longrightarrow \mathbf{R}q_* \mathbf{L}u^*(E)$$

est un isomorphisme dans  $\mathcal{SH}(Y')$ .

*Démonstration.* — Voir [Ayo07a, Corollaire 1.7.18] pour le cas où  $p$  est projectif. Le cas général en découle grâce au lemme de Chow ; voir [CD09, Proposition 2.3.11].  $\square$

**3.6.** — On rappelle qu'un morphisme de schémas  $p : X' \rightarrow X$  est un *éclatement abstrait* de centre  $Z$  si  $p$  est propre, et si  $Z$  est un sous-schéma fermé tel que le morphisme induit

$$p^{-1}(X - Z)_{\text{red}} \longrightarrow (X - Z)_{\text{red}}$$

soit un isomorphisme. La topologie cdh est la topologie de Grothendieck sur la catégorie des schémas engendrée par les recouvrements cdh et par les recouvrements de la forme  $Z \amalg X' \rightarrow X$  pour tout éclatement abstrait  $X' \rightarrow X$  de centre  $Z$ . Nous renvoyons le lecteur à [SV00, Lemme 5.8 et Proposition 5.9] (dont les énoncés et les preuves sont tout-à-fait valables en inégales caractéristiques) pour une description civilisée des recouvrements cdh (à raffinement près).

Un préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $E$  sur la catégorie des schémas vérifie la propriété de descente relativement à la topologie cdh si et seulement s'il vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich et si, pour tout éclatement abstrait  $p : X' \rightarrow X$  de centre  $Z$ , le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E(X) & \longrightarrow & E(X') \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(Z) & \longrightarrow & E(p^{-1}(Z)) \end{array}$$

est homotopiquement (co)cartésien ; voir [Voe00a, Voe00b].

**Proposition 3.7.** — Soit  $p : X' \rightarrow X$  un éclatement abstrait de centre  $Z$ . On considère le carré cartésien de schémas correspondant ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(Z) & \xrightarrow{k} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

On note enfin  $r = pk = iq : p^{-1}(Z) \rightarrow X$ . Alors, pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{SH}(X)$ , le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}p_* \mathbf{L}p^* E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}i_* \mathbf{L}i^* E & \longrightarrow & \mathbf{R}r_* \mathbf{L}r^* E \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien.

*Démonstration.* — Soit  $j : U = X - Z \rightarrow X$  l'immersion ouverte complémentaire de  $i$ . Par le théorème de localisation et par le théorème de changement de base lisse, l'image du carré considéré par le foncteur  $\mathbf{L}j^*$  est le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}j^* E & \xrightarrow{=} & \mathbf{L}j^* E \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} ,$$

et, de même, en vertu des théorèmes de localisation de changement de base propre, son image par le foncteur  $\mathbf{L}i^*$  est le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}i^* E & \longrightarrow & \mathbf{R}q_* \mathbf{L}q^* \mathbf{L}i^* E \\ = \downarrow & & \downarrow = \\ \mathbf{L}i^* E & \longrightarrow & \mathbf{R}q_* \mathbf{L}q^* \mathbf{L}i^* E \end{array} .$$

Les deux carrés ci-dessus étant trivialement homotopiquement cocartésiens, et les foncteurs  $\mathbf{L}i^*$  et  $\mathbf{L}j^*$  formant une famille conservative de foncteurs exacts (3.2), cela prouve la proposition.  $\square$

**Proposition 3.8.** — *Pour tout morphisme de schémas  $f : S' \rightarrow S$ , le morphisme canonique*

$$\mathbf{L}f^*(KGL) \rightarrow KGL$$

*est un isomorphisme dans  $\mathcal{SH}(S')$ .*

*Démonstration.* — Cela résulte aussitôt de la description de  $KGL$  comme le  $\mathbf{P}^1$ -spectre périodique associé au morphisme canonique  $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{Z} \times BGL_\infty$ ; voir la remarque 2.13.  $\square$

**Théorème 3.9.** — *La  $K$ -théorie invariante par homotopie vérifie la propriété de descente relativement à la topologie cdh. En particulier, pour tout éclatement abstrait, de centre  $Z$ ,  $p : X' \rightarrow X$ , le carré cartésien de schémas*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(Z) & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

*induit le carré homotopiquement (co)cartésien de  $S^1$ -spectres ci-dessous.*

$$\begin{array}{ccc} KH(X) & \longrightarrow & KH(X') \\ \downarrow & & \downarrow \\ KH(Z) & \longrightarrow & KH(p^{-1}(Z)) \end{array}$$

*Démonstration.* — On sait que  $KH$  vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich. Pour vérifier la descente cdh, il suffit donc de montrer la propriété de Mayer-Vietoris relativement aux éclatements abstraits; or, en vertu de la proposition précédente et du théorème 2.15, cela résulte de l'évaluation en  $X$  du carré homotopiquement (co)cartésien de la proposition 3.7 appliquée à  $E = KGL$ .  $\square$

**Corollaire 3.10.** — *Pour tout entier  $q > 0$ , la  $K$ -théorie de Bass-Thomason Trobaugh à coefficients dans  $\mathbf{Z}[1/q]$  (resp. dans  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ ) vérifie la propriété de descente relativement à la topologie cdh pour les  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ -schémas (resp. les  $\mathbf{Z}[1/q]$ -schémas).*

*Démonstration.* — Cela résulte du théorème 3.9 et de [TT90, Théorème 9.6].  $\square$

#### 4. Excision galoisienne première à $\ell$

Dans cette section, on fixe une fois pour toute un nombre premier  $\ell$ .

**4.1.** — On rappelle que la  $h$ -topologie est la topologie de Grothendieck sur la catégorie des schémas engendrée par la prétopologie engendrée par les morphismes de type fini  $X' \rightarrow X$  qui sont universellement submersifs (*i.e.* des épimorphismes topologiques universels); voir [Voe96].

On dira qu'un morphisme de schémas  $X' \rightarrow X$  est  $\ell'$ -couvrant s'il est couvrant pour la  $h$ -topologie, et si, pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe un point  $x'$  de  $X'$  au-dessus de  $x$ , tel que  $\kappa(x')/\kappa(x)$  soit une extension finie de degré premier à  $\ell$ .

On vérifie aussitôt que les morphismes  $\ell'$ -couvrants définissent une prétopologie sur la catégorie des schémas. La topologie de Grothendieck correspondante est appelée la  $\ell'$ -topologie.

On appellera  $\ell'$ -faisceaux les faisceaux pour la  $\ell'$ -topologie.

**4.2.** — Un  $\ell'$ -recouvrement de forme normale est une famille formée de deux morphismes de schémas

$$\{X' \longrightarrow X, Z \longrightarrow X\}$$

telle que  $Z \longrightarrow X$  soit une immersion fermée rare, et telle que le morphisme  $X' \longrightarrow X$  admette une factorisation de la forme

$$X' \xrightarrow{q} V \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} X$$

où  $p$  est un éclatement abstrait de centre  $Z$ ,  $f$  est un recouvrement Nisnevich, et  $q$  est un morphisme plat, fini et surjectif de degré premier à  $\ell$  (ce par quoi on entend que  $q$  est plat, fini et surjectif, et que, pour tout point maximal  $\eta'$  de  $X'$ ,  $\eta = q(\eta')$  est un point maximal de  $V$ , et  $\kappa(\eta')/\kappa(\eta)$  est une extension finie de degré premier à  $\ell$ ). Il est clair que tout  $\ell'$ -recouvrement de forme normale est une famille couvrante pour la  $\ell'$ -topologie.

**Proposition 4.3.** — Pour tout schéma  $X$ , tout  $\ell'$ -recouvrement de  $X$  admet un raffinement de la forme

$$\{X' \longrightarrow X, Z' \longrightarrow X\}$$

induit par un  $\ell'$ -recouvrement de forme normale

$$\{X' \longrightarrow X, Z \longrightarrow X\}$$

et un  $\ell'$ -recouvrement  $Z' \longrightarrow Z$ .

*Démonstration.* — Soit  $u : X'' \longrightarrow X$  un  $\ell'$ -recouvrement. L'assertion de cette proposition est locale pour la topologie cdh. On peut donc toujours supposer que  $X$  est intègre et que  $u$  est séparé. On peut alors choisir un ouvert dense de  $X$  au-dessus duquel  $u$  est plat. En utilisant le théorème de platification de Raynaud-Gruson [RG71, Première Partie, Théorème 5.2.2], on peut se ramener de la sorte au cas où  $u$  est plat et quasi-fini. En vertu du théorème principal de Zariski, on peut alors choisir une compactification de  $u$  :

$$X'' \xrightarrow{u''} X''' \xrightarrow{u'} X$$

avec  $u''$  une immersion ouverte, et  $u'$  un morphisme fini et surjectif. Il suffit d'autre part de prouver la proposition localement sur  $X$  pour la topologie de Nisnevich. On peut donc supposer de plus que  $X$  est hensélien. Le schéma  $X'''$  est alors une union disjointe finie de  $X$ -schémas henséliens finis. Soit  $X'$  la réunion des composantes irréductibles de  $X'''$  dont le point fermé appartient à  $X''$ . Alors  $X'$  est contenu dans  $X''$ , et est à la fois ouvert et fermé dans  $X''$  (puisque c'est le cas dans  $X'''$ ). En outre, aucun point de  $X'' - X'$  ne domine le point fermé de  $X''$ . Quitte à remplacer  $X''$  par  $X'$ , on peut donc supposer que  $u$  est fini, surjectif et plat, auquel cas la proposition est triviale.  $\square$

**4.4.** — Soit  $G$  un groupe fini d'ordre premier à  $\ell$ . Un carré  $\ell'$ -distingué de groupe  $G$  est un carré cartésien de schémas de la forme

$$(4.4.1) \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{h} & Y \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

dans lequel  $p$  est un morphisme propre et surjectif,  $i$  est une immersion fermée, le groupe  $G$  agissant sur  $X'$  au-dessus de  $X$ , de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées.

- (i) Le morphisme  $p$  est fini au-dessus de  $X - Z$ .
- (ii) Le morphisme  $(Y - T)/G \rightarrow X - Z$  est radiciel et  $\ell'$ -couvrant.
- (iii) Le morphisme  $Y - T \rightarrow (Y - T)/G$  est plat.

Un carré  $\ell'$ -distingué de groupe  $G$  comme ci-dessus est dit *pseudo-galoisien* si  $Z$  est rare dans  $X$  et si de plus le morphisme  $Y - T \rightarrow (Y - T)/G$  est un revêtement galoisien de groupe  $G$ .

**Exemple 4.5.** — Tout carré cartésien de la forme (4.4.1) dans lequel  $p$  est un éclatement abstrait de centre  $Z$  est un carré  $\ell'$ -distingué de groupe trivial.

**Exemple 4.6.** — Soit  $X$  un schéma normal quasi-excellent, de corps de fonctions  $K$ , et soit  $L$  une extension pseudo-galoisienne finie de  $K$  de groupe  $G$  (c'est-à-dire composée d'une extension purement inséparable finie et d'une extension galoisienne finie de groupe  $G$ ). Si  $[L : K]$  est premier à  $\ell$ , alors on dispose canoniquement d'un carré  $\ell'$ -distingué de groupe  $G$  de la forme (4.4.1) dans lequel  $Y$  désigne la normalisation de  $X$  dans  $L$ , et  $Z$  un fermé rare en dehors duquel  $p$  est plat.

**Proposition 4.7.** — Pour tout carré  $\ell'$ -distingué de groupe  $G$  de la forme (4.4.1), la famille  $\{Y \rightarrow X, Z \rightarrow Z\}$  est  $\ell'$ -couvrante.

C'est immédiat.

**4.8.** — Fixons un schéma  $S$ . On considérera le site des  $S$ -schémas de type fini muni de la  $\ell'$ -topologie. Pour un  $S$ -schéma  $X$ , on note  $L(X)$  le  $\ell'$ -faisceaux d'ensemble associé à  $X$  (comme la  $\ell'$ -topologie n'est pas sous-canonique, il y a lieu de distinguer  $X$  de  $L(X)$ ).

**Proposition 4.9.** — Soit  $G$  un groupe fini d'ordre premier à  $\ell$ . Pour tout carré  $\ell'$ -distingué de groupe  $G$  de la forme (4.4.1), le carré commutatif de  $\ell'$ -faisceaux correspondant

$$(4.9.1) \quad \begin{array}{ccc} L(T)/G & \longrightarrow & L(Y)/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(Z) & \longrightarrow & L(X) \end{array}$$

est bicartésien (i.e. à la fois cartésien et cocartésien). Si, de plus,  $p : Y \rightarrow X$  est fini, avec  $X$  normal et  $Z$  rare dans  $X$ , alors le morphisme  $L(Y)/G = L(Y/G) \rightarrow X$  est un isomorphisme de  $\ell'$ -faisceaux.

*Démonstration.* — La preuve consiste à suivre *mutatis mutandis* la démonstration de [CD09, Proposition 3.3.18]. Nous la laissons à titre d'exercice pour le lecteur.  $\square$

**4.10.** — Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie de modèles stable.

On dit qu'un objet  $E$  de  $\mathcal{M}$  est  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -local si, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{M}$ , le groupe abélien  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{M})}(A, E)$  est un  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -module.

Si  $G$  est un groupe, et  $E$  un objet de  $\mathcal{M}$  muni d'une action de  $G$ , on note  $E^{hG}$  l'objet des points fixes homotopiques de  $E$  sous l'action de  $G$  (i.e. la limite homotopique de  $E$ , vu comme un foncteur de  $G$  dans  $\mathcal{M}$ ). Lorsque  $E$  est en outre  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -local, si  $G$  est fini et d'ordre premier à  $\ell$ , peut calculer  $E^{hG}$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$  comme l'image du projecteur

$$(4.10.1) \quad p : E \rightarrow E, \quad x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.x.$$

En particulier, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{M}$ , on a alors un isomorphisme canonique

$$(4.10.2) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{M})}(A, E^{hG}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{M})}(A, E)^G,$$

où  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{M})}(A, E)^G$  désigne l'ensemble des invariants de  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{M})}(A, E)$  sous l'action de  $G$ .

Soit  $E$  un préfaisceau de  $S^1$ -spectres (resp. de complexes de groupes abéliens) sur la catégorie des  $S$ -schémas de type fini. Pour tout  $S$ -schéma de type fini, on note  $\mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(X, E)$  le  $S^1$ -spectre (resp. le complexe) des sections globales dérivées de  $E$  (ou plutôt de son  $\ell'$ -faisceau associé) pour la  $\ell'$ -topologie. De même, on note  $H_{\ell'}^n(X, E)$  le  $n$ -ème groupe d'hypercohomologie de  $X$  à coefficients dans (le  $\ell'$ -faisceau associé à)  $E$ , de sorte que

$$(4.10.3) \quad H_{\ell'}^n(X, E) = H^n(\mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(X, E)).$$

On verra parfois implicitement les préfaisceaux de complexes de groupes abéliens comme des préfaisceaux de  $S^1$ -spectres (via la version stable de la correspondance de Dold-Kan), de façon que tout énoncé portant sur les préfaisceaux de  $S^1$ -spectres sera librement utilisé pour les préfaisceaux de complexes de groupes abéliens.

**Corollaire 4.11.** — Soit  $C$  un préfaisceau de complexes de  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -modules sur la catégorie des  $S$ -schémas de type fini. Pour tout carré  $\ell'$ -distingué de groupe  $G$  (4.4.1), le carré

$$(4.11.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(X, C) & \longrightarrow & \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(Y, C)^{hG} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(Z, C) & \longrightarrow & \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(T, C)^{hG} \end{array}$$

est homotopiquement cartésien dans la catégorie dérivée de la catégorie des  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -modules. En particulier, on a une suite exacte longue de la forme

$$(4.11.2) \quad H_{\ell'}^n(X, C) \longrightarrow H_{\ell'}^n(Z, C) \oplus H_{\ell'}^n(Y, C)^G \longrightarrow H_{\ell'}^n(T, C)^G \longrightarrow H_{\ell'}^{n+1}(X, C).$$

Si, de plus,  $p : Y \longrightarrow X$  est fini, avec  $X$  normal et  $Z$  rare dans  $X$ , alors on a :  $H_{\ell'}^n(X, C) \simeq H_{\ell'}^n(Y, C)^G$ .

*Démonstration.* — On peut supposer que  $C$  est un complexe de faisceaux de  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -modules vérifiant la propriété de descente relativement à la  $\ell'$ -topologie (voir par exemple [Ayo07b, 4.4]), de sorte que, pour tout  $S$ -schéma  $W$ , on ait

$$C(W) = \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(W, C).$$

Pour tout  $S$ -schéma  $W$ , muni d'une action d'un groupe fini  $G$  d'ordre premier à  $\ell$ , on a alors

$$\mathrm{Hom}(L(W)/G, C) \simeq C(W)^G \simeq C(W)^{hG}.$$

Pour un  $S$ -schéma  $W$ , notons  $\mathbf{Z}_{(\ell)}(W)$  le  $\ell'$ -faisceau de  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -modules librement engendré par  $W$ . Alors, pour tout carré  $\ell'$ -distingué de groupe  $G$  de la forme (4.4.1), il résulte de la proposition 4.9 que le carré commutatif de  $\ell'$ -faisceaux de  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -modules

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_{(\ell)}(T)_G & \longrightarrow & \mathbf{Z}_{(\ell)}(Y)_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z}_{(\ell)}(Z) & \longrightarrow & \mathbf{Z}_{(\ell)}(X) \end{array}$$

est cocartésien, les flèches horizontales étant des monomorphismes, ce qui en fait un carré bicartésien de  $\ell'$ -faisceaux de  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -modules, et donc un carré homotopiquement cartésien dans la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des  $\ell'$ -faisceaux de  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -modules. En en déduit aussitôt le corollaire.  $\square$

**Définition 4.12.** — Un préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $E$ , sur la catégorie des  $S$ -schémas de type fini, est *fortement  $\ell'$ -excisif* (resp.  *$\ell'$ -excisif*) si  $E(\emptyset)$  est acyclique, et si, pour tout groupe fini  $G$  d'ordre premier à  $\ell$ , et pour tout carré  $\ell'$ -distingué (resp. pour tout carré  $\ell'$ -distingué pseudo-galoisien) de groupe  $G$  de la forme (4.4.1), le carré

$$(4.12.1) \quad \begin{array}{ccc} E(X) & \longrightarrow & E(Y)^{hG} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(Z) & \longrightarrow & E(T)^{hG} \end{array}$$

est homotopiquement cartésien dans la catégorie homotopique stable des  $S^1$ -spectres.

**Lemme 4.13.** — *On suppose ici que  $S$  est quasi-excellent.*

Soit  $E$  un préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -locaux sur la catégorie des  $S$ -schémas de type fini. On se donne un entier  $d \geq 0$ , et un entier  $n$ , tels que les conditions suivantes sont vérifiées.

- (i) Pour tout  $S$ -schéma  $X$  de type fini et de dimension  $< d$ ,  $H^i(E(X)) = 0$  pour  $n - 1 \leq i \leq n$ .

(ii) Le préfaisceau  $E$  est  $\ell'$ -excisif.

Alors, pour tout morphisme fini, plat, et surjectif,  $p : Y \rightarrow X$ , de degré premier à  $\ell$ , avec  $X$  de type fini sur  $S$  et de dimension de Krull  $\leq d$ , le morphisme

$$p^* : H^n(E(X)) \rightarrow H^n(E(Y))$$

est injectif.

*Démonstration.* — Nos hypothèses impliquent que, pour tout carré  $\ell'$ -distingué pseudo-galoisien de groupe  $G$  de la forme (4.4.1), avec  $X$  de dimension  $\leq d$  et  $Z$  rare dans  $X$ , on a un monomorphisme

$$(4.13.1) \quad H^n(E(X)) \rightarrow H^n(E(Y))^G.$$

En outre, pour tout entier  $i$ , le foncteur  $H^i(E(-))$  envoie les sommes finies de schémas sur des produits directs finis de groupes abéliens. Soit  $p : Y \rightarrow X$  un morphisme vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On peut remplacer  $X$  par son normalisé (et  $p$  par son image inverse sur le dit normalisé), puis normaliser  $Y$  à son tour, pour se ramener au cas où  $X$  et  $Y$  sont normaux et connexes. Soit  $K$  le corps des fonctions de  $X$ . Choisissons  $L$ , une extension pseudo-galoisienne de  $K$ , de degré premier à  $\ell$ , de groupe  $G$ . Quitte à prendre  $L$  assez grand, on peut supposer que  $Y$  est le normalisé de  $X$  dans  $L$ . Or, d'après l'exemple 4.6, le morphisme (4.13.1) est alors injectif, et donc, dans ce cas,  $p^* : H^n(E(X)) \rightarrow H^n(E(Y))$  est un monomorphisme.  $\square$

**4.14.** — On dira qu'un schéma  $X$  est de  $\ell'$ -dimension cohomologique  $\leq d$  si, pour tout préfaisceau de  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -modules  $F$  sur la catégorie des  $X$ -schémas de type fini, on a  $H_{\ell'}^n(X, F) = 0$  pour tout  $n > d$ .

**Théorème 4.15.** — Soit  $X$  un schéma quasi-excellent de dimension de Krull  $\leq d$ . Alors  $X$  est de  $\ell'$ -dimension cohomologique  $\leq d$ .

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur la dimension de  $X$ . Le cas  $d < 0$  étant évident, on peut supposer que  $d \geq 0$ . Notons  $\alpha_*$  le foncteur d'oubli de la catégorie des  $\ell'$ -faisceaux sur la catégorie des  $X$ -schémas de type fini vers la catégorie des faisceaux de Nisnevich sur la catégorie des  $X$ -schémas de type fini. Pour un  $\ell'$ -faisceau de  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -modules  $F$ , on a une suite spectrale de la forme

$$E_2^{p,q} = H_{Nis}^p(X, \mathbf{R}^q \alpha_*(F)) \Rightarrow H_{\ell'}^{p+q}(X, F).$$

Or la restriction du faisceau  $\mathbf{R}^q \alpha_*(F)$  sur le petit site Nisnevich de  $X$  est supporté en dimension  $\leq d - q$  : en effet, si  $x$  est un point de  $X$  correspondant à un sous-schéma fermé de  $X$  de dimension  $> d - q$ , alors  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}^h$  est de dimension de Krull  $< q$ , et donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\mathbf{R}^q \alpha_*(F)_x = H_{\ell'}^q(\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}^h, F) = 0;$$

comme la dimension cohomologique pour la topologie de Nisnevich est majorée par la dimension de Krull, on en déduit que  $H_{Nis}^p(X, \mathbf{R}^q \alpha_*(F)) = 0$  pour  $p > d - q > 0$  ou pour  $p > 0$  et  $q \geq d$ . Il en résulte que, pour tout  $X$ -schéma de type fini  $U$  et de dimension de Krull  $\leq d$ , on a, pour  $n > d$ ,

$$H_{\ell'}^n(U, F) = H_{Nis}^0(U, \mathbf{R}^n \alpha_*(F)).$$

En particulier, pour  $n > d$ , la restriction du préfaisceau  $H_{\ell'}^n(-, F)$  aux  $X$ -schémas de dimension  $\leq d$  est un faisceau de Nisnevich.

D'autre part, si  $n > d$ , comme  $\mathbf{R}^n \alpha_*(F)$  est acyclique localement pour la  $\ell'$ -topologie, pour tout élément  $a$  de  $H_{\ell'}^n(X, F)$ , il existe un  $\ell'$ -recouvrement  $h : W \rightarrow X$  tel que  $h^*(a) = 0$ . On peut supposer, d'après la proposition 4.3 que  $h$  est de la forme

$$W = X' \amalg Z' \rightarrow X,$$

où  $X' \rightarrow X$  est un morphisme admettant une factorisation de la forme

$$X' \xrightarrow{q} V \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} X,$$

avec  $p$  un éclatement abstrait de centre  $Z$  (rare dans  $X$ ),  $f$  un recouvrement Nisnevich, et  $q$  un morphisme plat, fini et surjectif de degré premier à  $\ell$ , et où  $Z' \rightarrow X$  se factorise par un  $\ell'$ -recouvrement de  $Z$ . L'hypothèse de récurrence implique que  $H_{\ell'}^i(U, F) = 0$  pour  $n - 1 \leq i \leq n$  et  $U = Z, p^{-1}(Z)$ . La longue suite exacte (4.11.2) implique donc que le morphisme

$$p^* : H_{\ell'}^n(X, F) \rightarrow H_{\ell'}^n(Y, F)$$

est injectif. Comme  $f$  est un recouvrement de Nisnevich, le morphisme

$$f^* : H_{\ell'}^n(Y, F) \rightarrow H_{\ell'}^n(V, F)$$

est lui aussi injectif. Or d'après le lemme 4.13 (appliqué à une résolution injective de  $F$  dans la catégorie des  $\ell'$ -faisceaux de  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -modules, le corollaire 4.11 assurant la propriété de  $\ell'$ -excision), le morphisme

$$q^* : H_{\ell'}^n(V, F) \rightarrow H_{\ell'}^n(X', F)$$

est injectif, et donc  $a = 0$ . □

**Corollaire 4.16.** — *On suppose que  $S$  est quasi-excellent. Soit  $X$  un  $S$ -schéma de type fini. Pour toute petite famille de préfaisceaux de  $S^1$ -spectres  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -locaux  $\{E_i\}_{i \in I}$  sur la catégorie des  $S$ -schémas de type fini, le morphisme canonique*

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(X, E_i) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(X, \bigoplus_{i \in I} E_i)$$

*est inversible dans la catégorie homotopique stable des  $S^1$ -spectres.*

*Démonstration.* — Posons  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ . On a alors une suite spectrale de la forme

$$(4.16.1) \quad E_2^{p,q} = H_{\ell'}^p(X, H^q(E)) \Rightarrow H_{\ell'}^{p+q}(X, E).$$

Il résulte du théorème 4.15 que cette suite spectrale converge fortement. De même, on a une suite spectrale fortement convergente de la forme

$$(4.16.2) \quad E_2^{p,q} = \bigoplus_{i \in I} H_{\ell'}^p(X, H^q(E_i)) \Rightarrow \bigoplus_{i \in I} H_{\ell'}^{p+q}(X, E_i).$$

Le morphisme évident de la suite spectrale (4.16.2) vers la suite spectrale (4.16.1) induit un isomorphisme sur les termes de type  $E_2^{p,q}$  (comme on le voit facilement en appliquant par exemple [SGA4, Exposé VI, Corollaire 5.3]), ce qui implique notre assertion. □

**Proposition 4.17.** — *On suppose que  $S$  est quasi-excellent. Soit  $E$  un préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -locaux sur la catégorie des  $S$ -schémas. Pour tout carré  $\ell'$ -distingué de groupe  $G$  (4.4.1), le carré*

$$(4.17.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(X, E) & \longrightarrow & \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(Y, E)^{hG} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(Z, E) & \longrightarrow & \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(T, E)^{hG} \end{array}$$

*est homotopiquement cartésien dans la catégorie homotopique stable des  $S^1$ -spectres.*

*Si, de plus,  $p : Y \rightarrow X$  est fini, avec  $X$  normal et  $Z$  rare dans  $X$ , alors on a :  $\mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(X, E) \simeq \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(Y, E)^{hG}$ .*

*Démonstration.* — La catégorie homotopique stable des  $\ell'$ -faisceaux de  $S^1$ -spectres est une catégorie triangulée, naturellement munie d'une t-structure : un  $\ell'$ -faisceau de  $S^1$ -spectres  $E$  est  $\geq 0$  si, pour tout  $S$ -schéma  $X$ , on a  $H_{\ell'}^n(X, E) = 0$  pour tout entier  $n < 0$ . On a donc, pour tout  $\ell'$ -faisceau de  $S^1$ -spectres  $E$  un triangle distingué de la forme

$$\tau^{\leq 0} E \longrightarrow E \longrightarrow \tau^{> 0} E \longrightarrow \tau^{\leq 0}[1],$$

où  $\tau^{\leq 0}$  et  $\tau^{> 0}$  désignent les foncteurs de troncation évidents (on adopte ici des conventions cohomologiques). Le cœur de cette t-structure est naturellement équivalent à la catégorie abélienne des  $\ell'$ -faisceaux en groupes abéliens sur la catégorie des  $S$ -schémas de type fini. Il résulte facilement du corollaire 4.16 que la flèche canonique

$$\mathbf{L}\varinjlim_n \tau^{\leq n} E \longrightarrow E$$

est un isomorphisme. De même, on déduit du théorème 4.15 que la flèche canonique

$$E \longrightarrow \mathbf{R}\varprojlim_n \tau^{> -n} E$$

est un isomorphisme. La catégorie des  $\ell'$ -faisceaux de  $S^1$ -spectres  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -locaux tels que (4.17.1) soit homotopiquement cartésien est stable par limites homotopiques (c'est évident), ainsi que stable par colimites homotopiques (cela résulte du corollaire 4.16). Par conséquent, pour prouver que (4.17.1) est homotopiquement cartésien, il suffit de considérer le cas où  $E$  est concentré en degré 0 pour la t-structure canonique, auquel cas cela résulte de la première assertion du corollaire 4.11. Pour prouver, sous nos hypothèses supplémentaires, l'isomorphisme  $\mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(X, E) \simeq \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(Y, E)^{hG}$ , on se ramène comme ci-dessus au cas où  $E$  est concentré en degré 0, et on conclut avec la seconde assertion du corollaire 4.11.  $\square$

**Théorème 4.18.** — *Soit  $S$  un schéma quasi-excellent. Soit  $E$  un préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -locaux sur la catégorie des  $S$ -schémas de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) Le préfaisceau  $E$  vérifie la propriété de  $\ell'$ -descente cohomologique : pour tout  $S$ -schéma de type fini  $X$ , et pour tout  $\ell'$ -hyper-recouvrement  $\mathcal{X} \rightarrow X$ , le morphisme

$$(4.18.1) \quad E(X) \longrightarrow E(\mathcal{X}) = \mathbf{R}\varprojlim_n E(\mathcal{X}_n)$$

est inversible dans la catégorie homotopique stable des  $S^1$ -spectres.

(b) Le préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $E$  a la propriété de descente cohomologique pour la topologie de Nisnevich et est fortement  $\ell'$ -excisif.

(c) Le préfaisceau de  $S^1$ -spectres  $E$  a la propriété de descente cohomologique pour la topologie de Nisnevich et est  $\ell'$ -excisif.

*Démonstration.* — La condition (a) équivaut à affirmer que, pour tout  $S$ -schéma de type fini  $X$ , la flèche canonique

$$E(X) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\ell'}(X, E)$$

est un isomorphisme dans la catégorie homotopique stable des  $S^1$ -spectres. Le fait que (a) implique (b) n'est donc qu'une reformulation de la proposition 4.17. Comme il est clair que (b) implique (c), il reste donc à prouver que (c) implique (a).

Soit  $u : E \rightarrow E'$  un morphisme de préfaisceaux de  $S^1$ -spectres tel que  $E'$  vérifie la condition (a), et induisant une équivalence faible stable localement pour la  $\ell'$ -topologie (un tel morphisme existe, d'après [Ayo07b, 4.4]), et désignons par  $C$  le cône de  $u$ . Si  $E$  vérifie la condition (c), comme  $E'$  a la même propriété, on voit que  $C$  vérifie la condition (c). De plus,  $E$  vérifie la condition (a) si et seulement si c'est aussi le cas pour  $C$ . On peut donc remplacer  $E$  par  $C$ . Autrement, il suffit de prouver que, si  $E$  vérifie la condition (c) et est acyclique localement pour la  $\ell'$ -topologie, alors, pour tout  $S$ -schéma  $X$ , le  $S^1$ -spectre  $E(X)$  est acyclique (*i.e.*  $H^n(E(X)) = 0$  pour tout entier  $n$ ). Sous ces hypothèses, nous allons prouver par récurrence sur la dimension de Krull  $d$  de  $X$  que, pour tout entier  $n$ ,  $H^n(E(X)) = 0$ . Comme  $E$  vérifie la propriété de descente Nisnevich, le préfaisceau  $H^n(E(-))$  envoie les sommes finies de  $S$ -schémas de type fini sur des produits finis, et ce pour tout entier  $n$ . En particulier, le cas où  $X$  est de dimension  $< 0$  est évident. On peut donc supposer que  $d \geq 0$ .

Désignons par  $C_d$  la sous-catégorie pleine de la catégorie des  $S$ -schémas de type fini et de dimension de Krull  $\leq d$ . On considère  $C_d$  comme un site, avec la topologie induite par la topologie cdh (cela a un sens, car tout recouvrement cdh d'un schéma  $X$  de dimension  $\leq d$  admet un raffinement de la forme  $X' \rightarrow X$ , avec  $X'$  de dimension  $\leq d$ ; voir [SV00, 5.8, 5.9 et 12.4]). La propriété (c) implique que  $E$  vérifie la propriété de descente relativement à la topologie cdh. On en déduit que, pour tout  $S$ -schéma de type fini  $X$ , on a

$$H^n(E(X)) = H_{\text{cdh}}^n(X, E)$$

pour tout entier  $n$ . Pour prouver le théorème, il suffit par conséquent de démontrer que la restriction de  $E$  à  $C_d$  est acyclique localement pour la topologie cdh.

Soit  $X$  un  $S$ -schéma dans  $C_d$ , et soit  $a$  un élément de  $H^n(E(X))$ . Vu que  $E$  est acyclique localement pour la  $\ell'$ -topologie, il existe un  $\ell'$ -recouvrement  $h : W \rightarrow X$  tel que  $h^*(a) = 0$ . Comme  $E(Z)$  est acyclique pour tout  $S$ -schéma  $Z$  de dimension  $\leq d$ , en vertu de la proposition 4.3, on peut supposer que  $h$  est un  $\ell'$ -recouvrement

de forme normale. Il résulte alors aussitôt du lemme 4.13 que l'on peut supposer que  $h$  est un recouvrement cdh.  $\square$

### 5. $\ell'$ -descente en $K$ -théorie invariante par homotopie

**5.1.** — On rappelle ici la théorie des  $KGL$ -modules, ainsi que les functorialités disponibles dans ce contexte ; nous renvoyons le lecteur à [CD09, 12.3] pour des énoncés et des constructions plus précis.

Le  $\mathbf{P}^1$ -spectre  $KGL$  est un monoïde commutatif. On note  $\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)(S)$  la catégorie homotopique stable des  $KGL$ -modules dans la catégorie des  $\mathbf{P}^1$ -spectres au-dessus de  $S$  (localisation de la catégorie des  $KGL$ -modules par les  $\mathbf{A}^1$ -équivalences stables). On dispose donc d'un foncteur

$$(5.1.1) \quad \mathcal{SH}(S) \longrightarrow \mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)(S), \quad E \longmapsto KGL \wedge_S^{\mathbf{L}} E,$$

adjoint à gauche du foncteur d'oubli (lequel est conservatif)

$$(5.1.2) \quad \mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)(S) \longrightarrow \mathcal{SH}(S).$$

La catégorie  $\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)(S)$  est une catégorie triangulée à engendrement compact, monoïdale symétrique, et le foncteur (5.1.1) est exact et monoïdal symétrique. De plus, les six opérations de Grothendieck agissent sur la catégorie motivique  $\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)$ , de sorte que les foncteurs (5.1.1) et (5.1.2) commutent à  $\mathbf{L}f^*$  et  $\mathbf{R}f_*$  pour tout morphisme  $f$ , et à  $f_!$  et  $f^!$  pour tout morphisme séparé de type fini  $f$  ; voir [CD09, Proposition 4.2.12].

Les objets de  $\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)(S)$  seront appelés les  $KGL$ -modules sur  $S$ . Si  $E$  et  $F$  sont deux  $KGL$ -modules, on pose

$$\mathrm{Hom}_{KGL_S}(E, F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)(S)}(E, F).$$

D'après le théorème 2.15, on a donc, pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , et pour tout entier  $n$ , un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{KGL_S}(KGL \wedge_S^{\mathbf{L}} \Sigma_T^{\infty}(X_+), KGL[-n]) \simeq KH_n(X).$$

On fixe un nombre premier  $\ell$ , et on note  $\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)_{(\ell)}(S)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)(S)$  formée des  $KGL$ -modules  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -locaux. L'inclusion pleine  $\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)_{(\ell)}(S) \longrightarrow \mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)(S)$  admet un adjoint à gauche

$$\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)(S) \longrightarrow \mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)_{(\ell)}(S), \quad E \longmapsto E \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}.$$

Pour tous objets  $C$  et  $E$  de  $\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)(S)$ , avec  $C$  compact, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{KGL_S}(C, E) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} \simeq \mathrm{Hom}_{KGL_S}(C, E \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}).$$

La catégorie  $\mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)_{(\ell)}$ , des  $KGL$ -modules  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -locaux, forme une catégorie motivique au sens de [CD09], c'est-à-dire stable par les six opérations de Grothendieck.

**Proposition 5.2.** — *Pour tout  $\ell'$ -recouvrement  $f : X \longrightarrow Y$  entre schémas quasi-excellents, le foncteur*

$$\mathbf{L}f^* : \mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)_{(\ell)}(Y) \longrightarrow \mathbf{Ho}(KGL\text{-}Mod)_{(\ell)}(X)$$

est conservatif.

*Démonstration.* — Cette proposition est connue lorsque  $f$  est un recouvrement pour la topologie cdh; voir [CD09, Proposition 2.3.8]. En particulier, on peut supposer que  $Y$  est intègre. De plus, par un argument de localisation (cf. théorème 3.2), et par induction noethérienne, il suffit de prouver cette assertion génériquement sur  $Y$ . En particulier, grâce à la proposition 4.3, il suffit de traiter le cas où  $X$  et  $Y$  sont réguliers et connexes, et où  $f$  est fini, surjectif, et plat, tel que  $f_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y^d$ , avec  $d > 0$  un entier premier à  $\ell$ . Dans ce cas, pour tout  $KGL$ -module  $E$  sur  $Y$ , il existe un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : \mathbf{R}f_*\mathbf{L}f^*(E) \longrightarrow E,$$

naturel en  $E$ , tel que le composé

$$E \longrightarrow \mathbf{R}f_*\mathbf{L}f^*(E) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_f} E$$

soit la multiplication par  $d$ ; voir [CD09, Proposition 12.7.6]. Par conséquent, pour tout  $KGL$ -module  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -local  $E$  sur  $Y$ , si  $\mathbf{L}f^*(E) \simeq 0$ , alors  $E \simeq 0$ .  $\square$

**Corollaire 5.3.** — Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un  $\ell'$ -recouvrement radiciel entre schémas quasi-excellents. Le foncteur

$$\mathbf{L}f^* : \mathbf{Ho}(KGL\text{-Mod})_{(\ell)}(Y) \longrightarrow \mathbf{Ho}(KGL\text{-Mod})_{(\ell)}(X)$$

est une équivalence de catégories. En particulier, pour tout  $KGL$ -module  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -local  $E$  sur  $Y$ , le morphisme  $E \longrightarrow \mathbf{R}f_*\mathbf{L}f_*(E)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* — Cela résulte facilement de la proposition précédente et du théorème de changement de base propre 3.5 (voir la preuve de [CD09, Proposition 2.1.13]).  $\square$

**Corollaire 5.4.** — Soient  $Y$  un schéma (quasi-excellent), et  $G$  un groupe fini d'ordre premier à  $\ell$ . Pour tout revêtement galoisien  $f : X \longrightarrow Y$  de groupe  $G$ , et pour tout  $KGL$ -module  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -local  $E$  sur  $Y$ , le morphisme canonique

$$E \longrightarrow (\mathbf{R}f_*\mathbf{L}f_*(E))^{hG}$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* — Par changement de base lisse, comme  $\mathbf{L}f^*$  est conservatif (5.2) on voit qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque  $f$  est le revêtement trivial  $X = \coprod_{g \in G} Y \longrightarrow Y$ , auquel cas c'est évident.  $\square$

**Théorème 5.5.** — Soit  $G$  un groupe fini d'ordre premier à  $\ell$ . Pour tout carré  $\ell'$ -distingué de la forme (4.4.1) dans la catégorie des schémas quasi-excellents, et pour tout  $KGL$ -module  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ -local  $E$  sur  $X$ , on a un carré homotopiquement cartésien de  $KGL$ -modules

$$(5.5.1) \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & (\mathbf{R}p_*\mathbf{L}p^*(E))^{hG} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}i_*\mathbf{L}i^*(E) & \longrightarrow & (\mathbf{R}i_*\mathbf{R}q_*\mathbf{L}q^*\mathbf{L}i^*(E))^{hG} \end{array} .$$

*Démonstration.* — Soit  $j : U \rightarrow X$  l'immersion ouverte complémentaire de  $i$ . En vertu du théorème de localisation, il suffit de montrer que les images par  $\mathbf{L}j^*$  et  $\mathbf{L}i^*$  du carré (5.5.1) sont des carrés homotopiquement cartésiens de  $KGL$ -modules sur  $U$  et sur  $Z$  respectivement.

Par changement de base propre (3.5), on calcule que l'image de (5.5.1) par  $\mathbf{L}i^*$  est isomorphe au carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}i^*(E) & \longrightarrow & (\mathbf{R}q_* \mathbf{L}q^* \mathbf{L}i^*(E))^{hG} \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbf{L}i^*(E) & \longrightarrow & (\mathbf{R}q_* \mathbf{L}q^* \mathbf{L}i^*(E))^{hG} \end{array} .$$

De même, par changement de base lisse (3.4), on voit que, si  $\varphi : U' = U \times_X X' \rightarrow U$  désigne l'image inverse de  $p$  par  $j$ , l'image de (5.5.1) par  $\mathbf{L}j^*$  est isomorphe au carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}j^*(E) & \longrightarrow & (\mathbf{R}\varphi_* \mathbf{L}\varphi^* \mathbf{L}j^*(E))^{hG} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xlongequal{\quad} & 0 \end{array} .$$

Or il résulte des corollaires 5.3 et 5.4 que la flèche  $\mathbf{L}j^*(E) \rightarrow (\mathbf{R}\varphi_* \mathbf{L}\varphi^* \mathbf{L}j^*(E))^{hG}$  est un isomorphisme.  $\square$

**Corollaire 5.6.** — *Soit  $G$  un groupe fini d'ordre premier à  $\ell$ . Pour tout carré  $\ell'$ -distingué de la forme (4.4.1) dans la catégorie des schémas quasi-excellents, on a un carré homotopiquement cartésien de  $S^1$ -spectres*

$$(5.6.1) \quad \begin{array}{ccc} KH(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} & \longrightarrow & (KH(Y) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)})^{hG} \\ \downarrow & & \downarrow \\ KH(Z) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} & \longrightarrow & (KH(T) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)})^{hG} \end{array} .$$

En particulier, on a donc une suite exacte longue

$$KH_n(X)_{(\ell)} \rightarrow KH_n(Z)_{(\ell)} \oplus KH_n(Y)_{(\ell)}^G \rightarrow KH_n(T)_{(\ell)}^G \rightarrow KH_{n-1}(X)_{(\ell)},$$

où on a posé  $KH_n(-)_{(\ell)} = KH_n(-) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ .

*Démonstration.* — Cela résulte du théorème 2.15, en appliquant le foncteur sections globales dérivées  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{KGL_X}(KGL, -)$  au carré homotopiquement cartésien (5.5.1) pour  $E = KGL \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ .  $\square$

**Théorème 5.7.** — *La  $K$ -théorie invariante par homotopie à coefficients dans  $\mathbf{Z}_{(\ell)}$  vérifie la propriété de descente cohomologique pour la  $\ell'$ -topologie sur la catégorie des schémas quasi-excellents.*

*Démonstration.* — Cela résulte aussitôt du théorème 4.18 et du corollaire 5.6.  $\square$

## 6. Conjecture de Weibel modulo la torsion résiduelle

On fixe toujours, pour le moment, un nombre premier  $\ell$ .

**Théorème 6.1 (uniformisation locale de Gabber).** — *Soit  $X$  un schéma quasi-excellent de caractéristiques résiduelles distinctes de  $\ell$ . Pour tout sous-schéma fermé rare  $Z \subset X$ , il existe une famille finie de morphismes de type fini et surjectifs*

$$\{X_i \longrightarrow X\}_{i \in I}$$

*vérifiant les conditions suivantes.*

- (i) *Pour tout  $i \in I$ , le schéma  $X_i$  est régulier, et  $Z_i = X_i \times_X Z$  est le support d'un diviseur à croisements normaux (strict) dans  $X_i$ .*
- (ii) *Il existe un sous-schéma fermé rare  $Y \subset X$  tel que la famille*

$$\{Y \longrightarrow X\} \cup \{X_i \longrightarrow X\}_{i \in I}$$

*soit  $\ell'$ -couvrante.*

Voir [Gab05, III09] pour une idée de la démonstration. Une preuve complète devrait paraître bientôt [ILO].

**Corollaire 6.2.** — *Pour tout schéma quasi-excellent  $X$ , de caractéristiques résiduelles distinctes de  $\ell$ , il existe un  $\ell'$ -recouvrement  $X' \longrightarrow X$  avec  $X'$  régulier.*

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement du théorème précédent, par induction noethérienne.  $\square$

**Théorème 6.3.** — *Soit  $S$  un schéma quasi-excellent de dimension de Krull  $\leq d$  et de caractéristiques résiduelles distinctes de  $\ell$ . Pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ , on a alors*

$$KH_i(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} = 0 \quad \text{pour tout } i < -d.$$

*Démonstration.* — Notons  $E$  le préfaisceau de  $S^1$ -spectres sur la catégorie des  $S$ -schémas de type fini défini par

$$U \longmapsto KH(U \times_S X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}.$$

On déduit du corollaire 5.6 que  $E$  est  $\ell'$ -excisif, et donc que  $E$  vérifie la propriété de descente cohomologique pour la  $\ell'$ -topologie (théorème 4.18). Par conséquent, pour tout  $S$ -schéma de type fini  $U$ , on a, pour tout entier  $n$ , un isomorphisme canonique

$$H_{\ell'}^n(U, E) = KH_{-n}(U \times_S X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}.$$

On dispose donc de la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H_{\ell'}^p(S, H^q(E)) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} \Rightarrow KH_{-p-q}(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)},$$

où  $H^q(E)$  désigne le préfaisceau de groupes abéliens  $U \longmapsto KH_{-q}(U \times_S X)$ , et où  $H_{\ell'}^*(X, F)$  désigne la cohomologie de  $X$  à coefficients dans le  $\ell'$ -faisceau associé à  $F$ . Or, pour  $q > 0$ , le  $\ell'$ -faisceau associé à  $H^q(E)$  est isomorphe à zéro : en vertu du corollaire 6.2, il suffit de vérifier que  $KH_{-q}(Y) = 0$  pour  $Y$  régulier, ce qui est bien connu. D'autre part, le théorème 4.15 implique que,  $E_2^{p,q} = 0$  dès que  $p > d$ , et que la suite spectrale ci-dessus converge fortement, ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 6.4.** — Soit  $S$  un schéma quasi-excellent de dimension de Krull  $\leq d$ , et de caractéristique  $p > 0$ . On a alors, pour tout  $S$ -schéma lisse  $X$ ,

$$K_i^B(X) \otimes \mathbf{Z}[1/p] = 0 \quad \text{pour tout } i < -d.$$

*Démonstration.* — Il résulte aussitôt du théorème précédent appliqué à  $X$  pour tout nombre premier  $\ell \neq p$  que

$$KH_i(X) \otimes \mathbf{Z}[1/p] = 0 \quad \text{pour tout } i < -d.$$

Cela conclut, puisque, d'après [TT90, Théorème 9.6], la  $K$ -théorie non-connective des schémas de caractéristique  $p$  est invariante par homotopie modulo  $p$ -torsion, ce qui donne des isomorphismes  $K_n^B(X) \otimes \mathbf{Z}[1/p] \simeq KH_n(X) \otimes \mathbf{Z}[1/p]$ .  $\square$

### Références

- [SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270 & 305, Springer, 1972–1973.
- [Ayo07a] J. Ayoub, *Six opérations de Grothendieck et cycles évanescents dans le monde motivique (I)*, Astérisque **314** (2007).
- [Ayo07b] ———, *Six opérations de Grothendieck et cycles évanescents dans le monde motivique (II)*, Astérisque **315** (2007).
- [Bro73] K. S. Brown, *Abstract homotopy and generalized sheaf cohomology*, Transactions of the A.M.S. **186** (1973), 419–458.
- [CD09] D.-C. Cisinski, F. Déglise, *Triangulated categories of mixed motives*, preprint arXiv:0912.2110.
- [CHSW08] G. Cortiñas, C. Haesemeyer, M. Schlichting, C. Weibel, *Cyclic homology, cdh-cohomology and negative K-theory*, Annals of Math. **167** (2008), no. 2, 549–573.
- [Gab05] O. Gabber, *Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes*, Conference on honor of P. Deligne on the occasion of his 61st birthday, IAS, Princeton, October 2005; notes d'exposé disponible à l'adresse url <http://www.math.polytechnique.fr/~laszlo/gdtgabber/gdtgabber.html>, 2005.
- [GH08] T. Geisser, L. Hesselholt, *On the vanishing of negative K-groups*, preprint arXiv:0811.0652. À paraître dans *Math. Ann.*
- [GS09] D. Gepner, V. Snaith, *On the motivic spectra representing algebraic cobordism and algebraic K-theory*, Documenta Math. **14** (2009), 359–396.
- [Hae04] C. Haesemeyer, *Descent properties of homotopy K-theory*, Duke Math. J. **125** (2004), 589–620.
- [Hov01] M. Hovey, *Spectra and symmetric spectra in general model categories*, J. Pure Appl. Alg. **165** (2001), 63–127.
- [Ill09] L. Illusie, *On Gabber's refined uniformization*, notes d'exposés donnés à l'université de Tokyo, disponibles à l'adresse <http://www.math.u-psud.fr/~illusie/>, 2009.
- [ILO] L. Illusie, Y. Lazslo, F. Orgogozo, *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents*, Séminaire à l'École Polytechnique 2006–2008; livre en préparation.

- [Jar00] J.F. Jardine, *Motivic Symmetric Spectra*, Documenta Math. **5** (2000), 445–552.
- [MV99] F. Morel, V. Voevodsky,  $\mathbf{A}^1$ -homotopy theory of schemes, Publ. Math. IHES **90** (1999), 45–143.
- [Qui73] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory*, in *Higher K-theories I*, Lecture Notes in Mathematics **341**, Springer, 1973, 85–147,
- [PPR07] I. Panin, K. Pimenov, O. Röndigs, *On Voevodsky’s algebraic K-theory spectrum*, preprint arXiv:0709.3905.
- [RG71] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. **13** (1971), 1–89.
- [Rio07a] J. Riou, *Catégorie homotopique stable d’un site suspendu avec intervalle*, Bull. Soc. Math. France **135** (2007), 495–547.
- [Rio07b] ———, *Opérations sur la K-théorie algébrique et régulateurs via la théorie de l’homotopie des schémas*, Comptes Rendus Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007), 27–32.
- [Rio09] ———, *Algebraic K-theory,  $\mathbf{A}^1$ -homotopy and Riemann-Roch theorems*, preprint arXiv:0907.2710.
- [Sch06] M. Schlichting, *Negative K-theory of derived categories*, Math. Z. **253** (2006), no. 1, 97–134.
- [SØ09] M. Spitzweck, P.A. Østvær, *The Bott inverted infinite projective space is homotopy algebraic K-theory*, Bull. London Math. Soc. **41** (2009), 281–292.
- [SV00] A. Suslin, V. Voevodky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, in *The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles (Banff, Canada, 1998)*, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., Vol. **548**, Kluwer, 2000, 117–189.
- [TT90] R. Thomason, T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, in *The Grothendieck Festschrift III*, Birkhäuser, 1990, 247–435.
- [Voe96] V. Voevodsky, *Homology of schemes*, Selecta Mathematica, New Series, **2** (1996), no. 1, 111–153.
- [Voe98] ———,  $\mathbf{A}^1$ -homotopy theory, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. I (Berlin, 1998), Documenta Math. Extra Vol. I (1998), 579–604.
- [Voe00a] ———, *Homotopy theory of simplicial presheaves in completely decomposable topologies*, preprint arXiv:0805.4578.
- [Voe00b] ———, *Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and cdh-topologies*, preprint arXiv:0805.4576.
- [Wei80] C. Weibel, *K-theory and analytic isomorphism*, Invent. Math. **61** (1980), 177–197.
- [Wei89] ———, *Homotopy Algebraic K-theory*, Contemp. Math. **83** (1989), 461–488.