



HAL
open science

Problèmes de contact avec frottement dans les structures minces élastiques et solutions faibles de processus de rafles

Patrick Ballard

► **To cite this version:**

Patrick Ballard. Problèmes de contact avec frottement dans les structures minces élastiques et solutions faibles de processus de rafles. XIXe Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-00461546

HAL Id: hal-00461546

<https://hal.science/hal-00461546>

Submitted on 15 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Problèmes de contact avec frottement dans les structures minces élastiques et solutions faibles de processus de rafles

P. BALLARD

*Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique,
31, chemin Joseph Aiguier, 13402 MARSEILLE Cédex 20*

Résumé :

Les équations d'équilibre linéarisées de fils élastiques rectilignes, poutres droites, membranes ou plaques élastiques ne couplent pas les composantes normales et tangentielles des déplacements. Lors de l'évolution quasi-statique au-dessus d'un obstacle rigide et fixe en présence de frottement de Coulomb, le déplacement normal est gouverné par une inéquation variationnelle tandis que le déplacement longitudinal obéit à un processus de rafle, dont la théorie a été développée par Moreau dans les années 70. Dans certains cas, le convexe mobile sous-jacent obéit à la condition de rétraction bornée et le processus de rafle peut être résolu par application directe des résultats de Moreau. Cependant, dans beaucoup d'autres cas, la condition de rétraction bornée n'est pas satisfaite et on montre que c'est lié à l'existence spontanée de discontinuités mobiles de vitesse longitudinale. Dans ces cas-là, la solution ne peut satisfaire la loi de Coulomb au sens ponctuel et l'on ne dispose que de solution faible du processus de rafle sous-jacent.

Abstract :

The linearized equilibrium equations for straight elastic strings, beams, membranes or plates do not couple tangential and normal components. In the quasi-static evolution occurring above a fixed rigid obstacle with Coulomb dry friction, the normal displacement is governed by a variational inequality whereas the tangential displacement is seen to obey a sweeping process, the theory of which was extensively developed by Moreau in the 70s. In some cases, the underlying moving convex set has bounded retraction and, in these cases, the sweeping process can be solved by directly applying Moreau's results. However, in many other cases, the bounded retraction condition is not fulfilled and this is seen to be connected to the possible event of moving velocity discontinuities. In such a case, there are no strong solutions and we have to cope with weak solutions of the underlying sweeping process.

Mots clés : Frottement de Coulomb, structures minces, processus de rafle, discontinuités mobiles

1 Position du problème

L'équilibre sans frottement d'un fil ou d'une poutre élastique (ou membrane ou plaque) au-dessus d'un obstacle rigide fournit un exemple archétypal d'inéquation variationnelle, dont la théorie a été développée dans les années 70. On s'intéresse ici à la situation où le frottement sec entre la structure élastique et l'obstacle doit également être pris en compte. Plus précisément, on se restreindra à la circonstance où les équations d'équilibre linéarisées sont utilisables et on considèrera le problème d'évolution quasi-statique associé à la loi de frottement de Coulomb. Une spécificité (confortable) de ces problèmes est que les équations d'équilibre linéarisées ne couplent pas les composantes transverses et longitudinales des déplacements. Il en résulte que le problème qui gouverne le déplacement transverse est le même que dans le cas sans frottement, à savoir une inéquation variationnelle à chaque instant. Sa résolution fournit la composante normale de la réaction exercée par l'obstacle et donc le seuil de la loi de frottement de Coulomb, qui dépend naturellement, en général, de la position et du temps. On constate alors que le problème d'évolution gouvernant le déplacement longitudinal fournit un exemple archétypal de processus de rafle dans un espace de Hilbert (en l'occurrence H^1), dont la théorie a été développée par Moreau [1] dans les années 70, en vue de l'étude de l'évolution des systèmes élasto-plastiques.

2 Forme générale du problème d'évolution

Considérons un fil élastique, uniformément tendu dans sa configuration de référence, et une base orthonormale $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ telle que \mathbf{e}_x soit colinéaire à la direction du fil. Un obstacle rigide et fixe est décrit par la fonction $y = \psi(x)$. Le fil est chargé par une distribution de force extérieure $f \mathbf{e}_x + g \mathbf{e}_y$, tandis que les déplacements

$u_0^p \mathbf{e}_x + v_0^p \mathbf{e}_y$, $u_1^p \mathbf{e}_x + v_1^p \mathbf{e}_y$ sont prescrits aux extrémités $x = 0, 1$. On note $u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y$ le champ de déplacement et $r \mathbf{e}_x + s \mathbf{e}_y$ la distribution de force de réaction exercée par l'obstacle sur le fil. En supposant les équations d'équilibre linéarisées légitimes, l'évolution quasi-statique du fil au-dessus de l'obstacle avec contact unilatéral et frottement de Coulomb, est gouvernée, sur l'intervalle de temps $[t_0, T]$, par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' + f + r = 0, & \text{dans }]0, 1[\times [t_0, T], \\ r(\hat{u} - \dot{u}) + \mu s(|\hat{u}| - |\dot{u}|) \geq 0, \quad \forall \hat{u} \in \mathbb{R}, & \text{dans }]0, 1[\times [t_0, T], \\ u(0) = u_0^p, \quad u(1) = u_1^p, & \text{dans } [t_0, T], \\ v'' + g + s = 0, & \text{dans }]0, 1[, \\ v - \psi \geq 0, \quad s \geq 0, \quad s(v - \psi) \equiv 0, & \text{dans }]0, 1[\times [t_0, T], \\ v(0) = v_0^p, \quad v(1) = v_1^p, & \text{dans } [t_0, T]. \end{array} \right. \quad (1)$$

où μ est le coefficient de frottement, supposé donné.

Les trois dernières lignes du système (1) gouvernent la composante transverse v du déplacement, et ne sont pas couplées avec les autres équations du système (1). De ce fait, v obéit, à chaque instant, à la même inéquation variationnelle que dans le cas plus usuel d'absence de frottement. Supposant ce problème résolu, la composante normale s de la réaction est maintenant une donnée dans l'étude du problème longitudinal, c'est-à-dire, celui des trois premières lignes du système (1). L'analyse détaillée du problème transverse gouverné par l'inéquation variationnelle permet d'établir la régularité que l'on peut attendre pour s . Comme on le verra dans la suite, la régularité de s joue un rôle crucial dans l'analyse du problème longitudinal.

Introduisant, pour tout $t \in [t_0, T]$, le sous-ensemble convexe fermé de $H^1(0, 1; \mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{C}(t) = \left\{ u \in H^1 \mid u(x=0) = u_0^p, \quad u(x=1) = u_1^p, \right. \\ \left. \text{et } \forall \varphi \in H_0^1, \quad \langle u'' + f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \leq \langle \mu s, |\varphi| \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \right\}, \quad (2)$$

et munissant H^1 du produit scalaire :

$$(\varphi \mid \psi)_{H^1} = \int_0^1 \overline{\varphi}'(x) \overline{\psi}'(x) dx + \varphi(0) \psi(0) + \varphi(1) \psi(1),$$

où :

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - x(\varphi(1) - \varphi(0)) \in H_0^1,$$

le problème d'évolution qui gouverne le déplacement longitudinal u peut s'écrire [2] sous la forme concise :

$$-\dot{u}(t) \in \partial I_{\mathcal{C}(t)}[u(t)],$$

après élimination de la force de réaction inconnue r . Dans cette inclusion différentielle, on a noté $I_{\mathcal{C}(t)}[\cdot]$ la fonction indicatrice de $\mathcal{C}(t)$ (qui vaut 0 en tout point de $\mathcal{C}(t)$ et $+\infty$ ailleurs), et $\partial I_{\mathcal{C}(t)}[\cdot]$ son sous-différentiel au sens du produit scalaire de H^1 défini ci-dessus, c'est-à-dire, le cône de toutes les normales sortantes à $\mathcal{C}(t)$ (qui est vide en tout point n'appartenant pas à $\mathcal{C}(t)$, et est réduit à $\{0\}$ en tout point intérieur, s'il y en a).

2.1 Solutions faibles de processus de rafle

Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{C}(t)$ une application multivoque définie sur l'intervalle de temps $[t_0, T]$ et dont les valeurs sont convexes fermées non vides. Un processus de rafle est le problème d'évolution défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\dot{u}(t) \in \partial I_{\mathcal{C}(t)}[u(t)], & \text{dans } [t_0, T], \\ u(t_0) = u_0, & \end{array} \right.$$

où $u_0 \in \mathcal{C}(t_0)$ est une condition initiale donnée. Ce problème d'évolution abstrait a été introduit et étudié par Jean Jacques Moreau [1] en vue de l'analyse des systèmes élasto-plastiques. En termes cinématiques, $\mathcal{C}(t)$ est un convexe mobile et $u(t)$ un point dans cet ensemble ($u(t) \in \mathcal{C}(t)$ puisque $\partial I_{\mathcal{C}(t)}[\cdot]$ est vide en tout point hors de $\mathcal{C}(t)$). Le problème d'évolution en jeu a donc une interprétation géométrique particulièrement claire lorsque $\mathcal{C}(t)$ est d'intérieur non-vide. En effet, lorsque $u(t)$ est un point intérieur, $\partial I_{\mathcal{C}(t)}[u(t)]$ est réduit à $\{0\}$ et le point $u(t)$ reste au repos jusqu'à ce qu'il soit rejoint par le bord de $\mathcal{C}(t)$. Il avance alors suivant une direction

normale intérieure, comme poussé par la frontière de $\mathcal{C}(t)$ de manière à rester dans le convexe. Le nom de « processus de raffe » donné par Jean Jacques Moreau, se réfère à cette expressive interprétation géométrique. Pour discuter de l'existence de solution d'un processus de raffe, il faut se donner des hypothèses de régularité pour l'application multivoque $\mathcal{C}(t)$. En fait, cette régularité n'est requise que dans les phases où le convexe $\mathcal{C}(t)$ se rétracte, entraînant alors potentiellement le point $u(t)$. Jean Jacques Moreau a défini et étudié la classe des applications multivoques $\mathcal{C}(t)$ à rétraction bornée [1]. En particulier, les applications multivoques $\mathcal{C}(t)$ à rétraction bornée admettent une limite à gauche $\mathcal{C}(t-)$, au sens de Kuratowski, pour tout $t \in]t_0, T]$ et une limite à droite $\mathcal{C}(t+)$, pour tout $t \in [t_0, T[$.

Si on se donne une subdivision (partition finie en intervalles de toutes sortes) arbitraire P de $[t_0, T]$, et notant I_i les intervalles correspondants (indicés suivant l'ordre successif) d'origine t_i (extrémité gauche appartenant ou non à I_i), on construit l'approximation constante par morceaux \mathcal{C}_P de \mathcal{C} à l'aide de la définition :

$$\mathcal{C}_P(I_i) = \mathcal{C}_i = \begin{cases} \mathcal{C}(t_i) & \text{si } t_i \in I_i, \\ \mathcal{C}(t_i+) & \text{si } t_i \notin I_i. \end{cases}$$

Étant donnée la condition initiale $u_0 \in \mathcal{C}(t_0)$, l'algorithme de « rattrapage » s'appuie sur les projections successives :

$$u_{i+1} = \text{proj}(u_i, \mathcal{C}_{i+1}),$$

pour construire l'approximation constante par morceaux $u_P : [t_0, T] \rightarrow H$, définie par :

$$u_P(I_i) = u_i.$$

Il s'agit tout simplement d'une version de l'algorithme d'Euler implicite adapté à l'inclusion différentielle en jeu. Supposant l'application multivoque $\mathcal{C}(t)$ à rétraction bornée, Moreau montre dans [1] que la suite généralisée u_P (P parcourant toutes les subdivisions de $[t_0, T]$), converge *fortement* dans H , *uniformément* pour $t \in [t_0, T]$, vers une fonction $u : [t_0, T] \rightarrow H$ que Moreau baptise *solution faible* du processus de raffe. Il prouve ensuite que cette solution faible $u : [t_0, T] \rightarrow H$ est à variation bornée et est solution du processus de raffe au sens des « mesures différentielles » [1]. Si $\mathcal{C}(t)$ est non seulement à rétraction bornée, mais à rétraction absolument continue, alors la solution $u : [t_0, T] \rightarrow H$ est absolument continue et est alors solution forte du processus de raffe au sens où :

$$-\dot{u}(t) \in \partial I_{\mathcal{C}(t)}[u(t)], \quad \text{pour presque tout } t \in [t_0, T].$$

L'évolution quasi-statique du fil élastique au-dessus d'un obstacle rigide en présence de frottement de Coulomb fournit un exemple naturel de processus de raffe dans l'espace de Hilbert $H = H^1$. Dans certains cas, il s'avère que le convexe mobile du processus de raffe sous-jacent satisfait la condition de rétraction bornée, et les résultats de Moreau garantissent la convergence de l'algorithme de rattrapage vers une solution faible qui est aussi forte, au sens des mesures différentielles. Plus intéressant, il est facile d'exhiber un problème d'évolution pour le fil élastique où le convexe mobile sous-jacent *ne satisfait pas* la condition de rétraction bornée. Conservant le point-de-vue du calcul numérique, de tels exemples requièrent l'extension de la définition de solution faible de processus de raffe pour une classe d'application multivoque $\mathcal{C}(t)$ plus large que celles à rétraction bornée. Comme l'algorithme de rattrapage requiert l'existence d'une limite à droite $\mathcal{C}(t+)$, il s'avère que la classe des $\mathcal{C}(t)$ appropriée pour définir la notion de solution faible de processus de raffe en général est exactement la classe des applications $\mathcal{C}(t)$ à valeurs convexes fermées admettant une limite à gauche, au sens de Kuratowski, pour tout $t \in]t_0, T]$ et une limite à droite $\mathcal{C}(t+)$, pour tout $t \in [t_0, T[$. De telles applications sont caractérisées par la condition que, pour tout $x \in H$, la fonction :

$$t \mapsto \text{proj}[x; \mathcal{C}(t)]$$

est réglée (c'est-à-dire, limite uniforme d'une suite de fonctions constantes par morceaux, ou bien—et c'est équivalent—admettant une limite à gauche et à droite en tout point). Ces applications multivoques sont exactement les applications multivoques réglées pour une topologie métrisable et complète sur la classe des parties convexes fermées non-vides de H , appelée topologie de Wijsman (c'est la topologie la moins faible engendrée par les fonctions d'ensemble $C \rightarrow d(x, C)$ quand x parcourt H). On les appellera, en bref, applications multivoques Wijsman-réglées.

Les solutions faibles de processus de raffe basés sur des applications Wijsman-réglées satisfont à toutes les propriétés générales établies par Moreau dans le cas plus restreint des applications multivoques à rétraction bornée. Un exemple de solution faible de processus de raffe basé sur une application Wijsman-réglée, qui n'est pas une fonction à variation bornée sera donnée dans la suite de ce texte. En revanche, on peut exhiber des applications Wijsman-réglées $\mathcal{C}(t)$ telles que le processus de raffe associé puisse ne pas avoir de solution faible [2].

3 Problèmes de contact avec frottement pour le fil élastique

On rappelle que le déplacement longitudinal du fil élastique est gouverné par un processus de rafle par le convexe mobile (2). On peut montrer [2] qu'une condition suffisante pour que cette application multivoque $\mathcal{C}(t)$ soit à rétraction bornée est :

$$\begin{aligned} u_0^p, u_1^p &\in BV([t_0, T]; \mathbb{R}), \\ f &\in BV([t_0, T]; H^{-1}), \\ s &\in BV([t_0, T]; \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Si les deux premières lignes concernent la régularité des données du problème d'évolution, la dernière ligne concerne la régularité de la solution du problème transverse et ne peut donc être contrôlée directement. Il peut néanmoins arriver qu'elle soit satisfaite et dans ce cas les résultats de Moreau fournissent une unique solution :

$$u \in BV([t_0, T]; H^1).$$

Si la régularité des données permet de remplacer « variation bornée » partout par « absolue continuité », alors il en est de même pour la solution, et dans ce cas, la vitesse \dot{u} est dans $H^1(0, 1; \mathbb{R})$, pour presque tout $t \in [t_0, T]$, et est donc spatialement continue.

Cependant, il peut arriver que la condition $s \in BV([t_0, T]; \mathcal{M})$ tombe en défaut. Un exemple est fourni par le problème suivant. On considère un fil rectiligne tendu juste au-dessus d'un fil plat. L'extrémité amont $x = 0$ est encadrée. Une force ponctuelle d'amplitude unité est alors exercée au milieu du fil. Supposant le coefficient de frottement assez grand (supérieur à 2), un déplacement d'une unité vers l'aval est prescrit sur l'autre extrémité $x = 1$ du fil. La force ponctuelle est alors déplacée vers l'amont à vitesse constante (voir la figure 1).

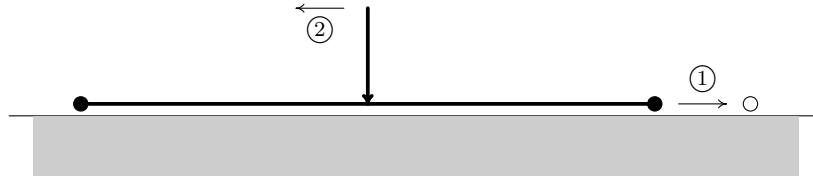


FIG. 1 – Contact frottant d'un fil élastique sur un sol rigide.

Plus précisément, cela revient à étudier le problème de l'évolution quasi-statique du fil avec les données suivantes : $\psi \equiv 0$, $u_0^p = v_0^p = v_1^p \equiv 0$ et u_1^p est la fonction qui prend la valeur 0 à $t = 0$ et 1 pour tout $t > 0$. On considère également la distribution de force extérieure :

$$f = \delta_{x=1/2-t}.$$

L'unique solution du problème transverse est donnée par $v \equiv 0$, qui entraîne $s \equiv -f$. Comme, pour tout $t_1 < t_2 \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \|\delta_{t_2} - \delta_{t_1}\|_{\mathcal{M}} &= 2, \\ \|\delta_{t_2} - \delta_{t_1}\|_{H^{-1}} &= \sqrt{t_2 - t_1} \sqrt{1 - (t_2 - t_1)}, \end{aligned}$$

on dispose pour s de la régularité suivante :

$$\begin{aligned} s &\notin BV([0, 1/3]; \mathcal{M}), & s &\notin BV([0, 1/3]; H^{-1}), \\ s &\notin C^0([0, 1/3]; \mathcal{M}), & s &\in C^0([0, 1/3]; H^{-1}). \end{aligned}$$

Cette régularité n'est pas assez forte pour garantir que le processus de rafle sous-jacent soit à rétraction bornée et donc pour utiliser les résultats de Moreau. Il est cependant toujours possible de considérer une subdivision arbitraire de $[t_0, T]$, de procéder aux projections successives de l'algorithme de rattrapage, puis d'essayer de passer à la limite sur les subdivisions. Dans l'exemple en jeu, on obtient une convergence forte dans H^1 , uniforme par rapport à $[t_0, T]$, vers la fonction :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 - t, \\ \frac{x + t - 1/2}{t + 1/2}, & \text{si } 1/2 - t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

qui est donc solution faible du processus de rafle. Cependant, le champ des vitesses associé :

$$\dot{u}(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < 1/2 - t, \\ \frac{1-x}{(t+1/2)^2}, & \text{si } 1/2 - t < x \leq 1, \end{cases}$$

présente une discontinuité spatiale localisée sous la charge (voir la figure 2). De ce fait, cette solution faible n'est pas dans $BV([0, 1/3]; H^1)$, et l'application multivoque $\mathcal{C}(t)$ sous-jacente ne peut donc pas être à rétraction bornée dans l'espace de Hilbert H^1 . Notons au passage que la valeur de la vitesse juste sous le chargement n'est pas définie, de sorte que l'on ne peut vérifier que la loi de Coulomb est satisfaite ponctuellement.

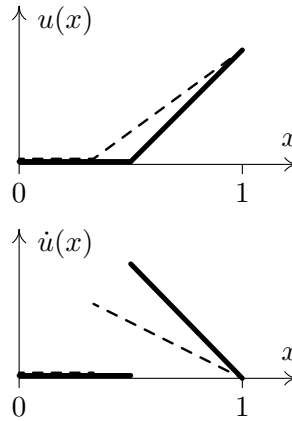


FIG. 2 – Déplacement et vitesse longitudinaux à l'instant initial et à un instant ultérieur (pointillés).

Le concept de solution faible correspond à l'introduction de subdivisions de l'intervalle de temps et aux positions discrètes de la charge associées à ces subdivisions. Une manière alternative de procéder est « d'étaler » un peu la charge, au moyen d'une convolution spatiale avec une approximation de l'identité. Cela suffit à obtenir $s \in BV([t_0, T]; \mathcal{M})$ et donc à garantir que le convexe mobile sous-jacent est à rétraction bornée (et même lipschitzienne) et donc à assurer l'existence d'une solution forte, dont la vitesse est, en particulier, dans H^1 (et donc continue) à chaque instant. Cela pose naturellement la question de l'existence d'une limite, lorsque la régularisation tend vers l'identité, et de l'éventualité que cette limite coïncide avec la solution faible, c'est-à-dire la limite des problèmes discrétisés en temps.

À ce sujet, considérons l'exemple d'un chargement d'amplitude $1/(2\varepsilon)$, homogène sur l'intervalle spatial $[1/2 - t - \varepsilon, 1/2 - t + \varepsilon]$, où $0 < \varepsilon < 1/6$. On vérifie facilement que la solution forte du processus de rafle sous-jacent est :

$$u_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq x_\varepsilon(t), \\ \frac{\mu}{4\varepsilon}(x - x_\varepsilon(t))^2, & \text{si } x_\varepsilon(t) \leq x \leq \frac{1}{2} - t + \varepsilon, \\ 1 + \frac{\mu}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{2} - t + \varepsilon - x_\varepsilon(t) \right) (x - 1), & \text{si } \frac{1}{2} - t + \varepsilon \leq x \leq 1. \end{cases}$$

où :

$$x_\varepsilon(t) = 1 - \sqrt{\left(\frac{1}{2} + t - \varepsilon\right)^2 + \frac{4\varepsilon}{\mu}} \in \left[\frac{1}{2} - t - \varepsilon, \frac{1}{2} - t + \varepsilon\right].$$

On constate alors sur cet exemple que u_ε converge vers u quand ε tends to 0, fortement dans H^1 , uniformément par rapport à $t \in [0, 1/3]$.

L'étude de u_ε fournit une explication d'une particularité étonnante de la solution u du problème non-régularisé : bien que le coefficient de frottement ait été choisi assez grand pour empêcher tout glissement, l'énergie élastique associée à u décroît strictement au cours du temps. Ce fait peut s'expliquer de la manière suivante. La solution u_ε du problème régularisé présente toujours du glissement, et on peut vérifier que la dissipation accumulée (l'intégrale sur le temps de la puissance de la force de frottement) tend, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, non pas vers zéro, mais vers une valeur finie. Il est donc cohérent que la solution faible u du problème « limite » conserve une trace de cette dissipation, bien que ne présentant pas de glissement elle-même.

4 Remplacer le fil par une poutre

Remplacer le fil par une poutre élastique dans le problème d'évolution (1) laisse inchangées les trois premières lignes, les modifications n'affectant que le problème gouvernant le déplacement transverse v . En particulier, l'équation d'équilibre satisfaite par v est maintenant d'ordre 4. La composante normale s de la force de réaction, qui est maintenant obtenue par la résolution d'une inéquation variationnelle associée à l'opérateur biharmonique, peut dorénavant être « une masse de Dirac mobile » alors même que toutes les données du problème sont C^∞ par rapport à l'espace et au temps (comme dans l'exemple représenté sur la figure 3). Cela signifie en

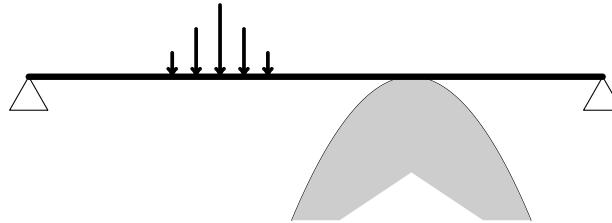


FIG. 3 – Contact frottant d'une poutre simplement appuyée.

particulier que, dans le cas de la poutre, il faut s'attendre à l'apparition spontanée de discontinuités mobiles de vitesse longitudinale alors même que les données sont aussi régulières que l'on veut.

L'utilisation de résultats fins sur la régularité des solutions d'inéquation variationnelle associée à l'opérateur biharmonique permettent d'établir que si les données :

$$\begin{aligned} u_0^p, u_1^p, v_0^p, v_1^p &: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \\ f, g &: [t_0, T] \rightarrow H^{-1}, \end{aligned}$$

sont des fonctions réglées, alors le convexe mobile $\mathcal{C}(t)$ associé au processus de rafle gouvernant le problème longitudinal, est Wijsman-réglé, de sorte que l'on peut poser le problème de l'existence d'éventuelle solution faible. Ce résultat vaut d'ailleurs aussi bien dans le cas du fil que de la poutre. Cependant, ces hypothèses de régularité sont trop faibles pour permettre de garantir l'existence d'une solution faible.

Références

- [1] Moreau JJ. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *Journal of Differential Equations*, **26**, 169–203, 1977.
- [2] Ballard P. Frictional contact problems for thin elastic structures and weak solutions of sweeping process. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* (soumis), 2009.