



HAL
open science

Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini.

Anne Parreau

► **To cite this version:**

Anne Parreau. Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini.. 2010. hal-00461218v1

HAL Id: hal-00461218

<https://hal.science/hal-00461218v1>

Preprint submitted on 3 Mar 2010 (v1), last revised 27 Sep 2011 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini.

Anne Parreau*

Abstract

Let Γ be a finitely generated group and G be a noncompact semisimple connected real Lie group with finite center. We consider the space $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ of conjugacy classes of semisimple representations of Γ into G , which is the maximal Hausdorff quotient of $\text{Hom}(\Gamma, G)/G$. We define the *translation vector* of an element g in G as the unique vector of minimal length in the closure of the set of projections into a fixed closed Weyl chamber $\bar{\mathfrak{C}}$ of the associated symmetric space X of the segments joining a point of X to its image by g . We construct a compactification of $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, induced by the marked translation vector spectrum, generalizing Thurston's compactification of the Teichmüller space. We show that the boundary points are projectivized marked translation vector spectra of actions of Γ on affine buildings with no global fixed point. An analogous result holds for any reductive group G over a local field.

Introduction.

Soit Γ un groupe infini, de type fini. Soit G un groupe de Lie semisimple réel, connexe, non compact, de centre fini.

On s'intéresse à l'espace $R(\Gamma, G) = \text{Hom}(\Gamma, G)$ des représentations de Γ dans G , muni de la topologie de la convergence simple et de l'action de G par conjugaison (au but). Si X est l'espace symétrique (sans facteur compact) associé à G , les représentations de Γ dans G peuvent être interprétées comme des actions isométriques de Γ sur X .

L'espace topologique quotient $R(\Gamma, G)/G$ n'est en général pas séparé. On le remplace donc par son plus gros quotient séparé $\mathcal{X}(\Gamma, G) = R(\Gamma, G) // G$, qui s'identifie naturellement (voir section 4.1, et [Par5] pour une preuve directe et des références), au sous-espace $R_{cr}(\Gamma, G)/G$ de $R(\Gamma, G)/G$ formé par les classes de représentations $\rho : \Gamma \rightarrow G$ *complètement réductibles* (cr), c'est-à-dire vérifiant la propriété géométrique suivante ([Serre]) : si ρ fixe un point α dans le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de X , alors il existe un point β dans

*Institut Fourier, Grenoble (avec le soutien de l'ANR Repsurf : ANR-06-BLAN-0311)

$\partial_\infty X$, opposé (i.e. joint par une géodésique dans X) à α , également fixé par ρ . Cette propriété géométrique équivaut à la propriété classique pour ρ d'être *semisimple* ou *réductive*, i.e. telle que la composante neutre de l'adhérence de Zariski de $\rho(\Gamma)$ est un groupe réductif, ou, de manière équivalente ([Ric]), d'être d'orbite $G \cdot \rho$ fermée dans $R(\Gamma, G)$. Cet espace est considéré de manière classique dans la littérature. Il est légèrement "plus gros" que l'image de $R(\Gamma, G)$ dans le quotient algébro-géométrique $R(\Gamma, \underline{G}) // \underline{G}$, où \underline{G} est un groupe algébrique tel que $G = \underline{G}(\mathbb{R})^0$ (voir section 4.1 pour plus de détails), qui est également souvent considéré comme espace de modules de représentations.

On s'intéresse aussi plus particulièrement au sous-espace $\mathcal{X}_{fd}(\Gamma, G)$ de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ formé des classes de représentations fidèles et discrètes.

Si Γ est le groupe fondamental d'une surface lisse \mathcal{S} connexe orientée fermée, de genre $g \geq 2$, et $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, alors X est le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 , et l'espace de Teichmüller \mathcal{T} des structures hyperboliques (marquées) sur la surface \mathcal{S} , qui est une cellule de dimension $6g - 6$, s'identifie naturellement à l'une des composantes connexes de l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, incluse dans $\mathcal{X}_{fd}(\Gamma, G)$.

Si $\Gamma = \pi_1(\mathcal{S})$ et $G = \mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$, alors la composante de Hitchin de l'espace des modules de G -fibrés plats sur la surface est une composante connexe de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, qui est une cellule de dimension $(2g - 2) \dim G$ [Hit], incluse dans $\mathcal{X}_{fd}(\Gamma, G)$ [Lab]. Pour $n = 3$ Goldman et Choï ont montré (voir [ChGo]) qu'elle s'identifie à l'espace \mathcal{P} des structures projectives réelles convexes (marquées) sur la surface \mathcal{S} .

Par contre, si Γ est un réseau irréductible d'un groupe de Lie H semi-simple réel, connexe, sans facteurs compacts, de centre fini, de rang supérieur ou égal à 2, le théorème de super-rigidité de Margulis entraîne que pour tout n , l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ est fini (voir [Mar], [Bass]).

Les réseaux des groupes de Lie réels semisimples (connexes, sans facteurs compacts, de centre fini) H de rang 1 non localement isomorphes à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (comme $\mathrm{SO}_0(n, 1)$ pour $n \geq 3$), s'ils n'ont pas de déformations non triviales en des réseaux dans H par les résultats de rigidité de Mostow (voir [Mos]), ont dans certains cas de riches espaces de déformations fidèles et discrètes dans d'autres groupes G , correspondant par exemple aux structures conformes ($G = \mathrm{SO}_0(n+1, 1)$) et projectives réelles ($G = \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$) marquées sur une variété M de groupe fondamental Γ (voir par exemple [JoMi]).

W. Thurston a construit une compactification de l'espace de Teichmüller (voir par exemple [FLP]). Plus généralement, Morgan et Shalen (cf. [MoSh], [Mor], [Chi]) puis Bestvina [Bes] et Paulin [Paul], ont généralisé la compactification de Thurston pour $\mathcal{X}_{fd}(\Gamma, G)$ avec $G = \mathrm{SO}_0(n, 1)$. Les points du bord proviennent d'actions de Γ sur des *arbres réels*, à "petits" (i.e. virtuellement cycliques) stabilisateurs d'arêtes. L'un des outils fondamentaux est le *spectre marqué des longueurs*.

Le but de ce travail est de généraliser cette compactification pour G de rang supérieur ou égal à 2. La possibilité d'une telle compactification a été envisagée auparavant par de nombreuses personnes (Gromov, Paulin [Pau2], Kleiner-Leeb, ...). En rang supérieur ou égal à 2, il convient de remplacer les arbres réels par une catégorie plus générale d'espaces métriques, les *immeubles affines*, ou encore *euclidiens*.

La notion de *cône asymptotique* (cf. [Gro1]) permet de construire, en utilisant des ultrafiltres, un espace métrique qui est la limite (quitte à extraire) de la suite des espaces métriques obtenus en divisant la distance d'un espace métrique par une suite de réels positifs tendant vers l'infini. Un cône asymptotique de l'espace symétrique de type non compact X est un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$ (où \mathbb{A} est un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G et \overline{W} le groupe de Weyl associé) [KILe]. Le procédé de passage au cône asymptotique permet de voir les dégénérescences de déformations de Γ dans G comme des actions de Γ sur des immeubles affines, sans point fixe global (voir [Pau3], [KaLe]). Les immeubles affines obtenus par ces dégénérescences ne sont ni discrets ni localement compacts.

Expliquons maintenant plus en détail le résultat présenté dans cet article.

Pour compactifier $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, on introduit (en section 3) un raffinement de la notion de spectre marqué des longueurs de translation, le *spectre marqué des vecteurs de translation*.

Soit \mathbb{A} un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G et W le groupe de Weyl associé. On se fixe une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} . A chaque segment dans X est associé un unique vecteur de même longueur de $\overline{\mathcal{C}}$, appelé son *type*. Le *vecteur de translation* $v(g)$ d'un élément g de G est l'unique vecteur de $\overline{\mathcal{C}}$ de longueur minimale dans l'adhérence dans $\overline{\mathcal{C}}$ de l'ensemble des types des segments joignant un point de X à son image. Algébriquement, c'est la "projection de Jordan" de g . Pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, cet invariant de conjugaison est égal à la suite décroissante des logarithmes des modules des valeurs propres de g . Sous sa forme algébrique, il est notamment utilisé dans [Ben] pour étudier le cône limite des sous-groupes discrets Zariski-denses de G . On peut définir de manière analogue le vecteur de translation d'une isométrie préservant le type des segments d'un immeuble affine.

Le *spectre marqué des vecteurs de translation* d'une action ρ de Γ sur X est l'application $v \circ \rho$ de Γ dans $\overline{\mathcal{C}}$. On considère alors l'application suivante

$$\nu : \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\Gamma, G) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{C}}^\Gamma \\ [\rho] & \mapsto & v \circ \rho \end{array} .$$

Soit $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ le projectifié de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, c'est-à-dire l'espace topologique quotient de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\}$ par multiplication dans \mathbb{R}_+ , et $\mathbb{P} : \overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ la projection canonique.

On démontre alors le théorème suivant (Thm. 4.2).

Théorème 1. *L'application continue*

$$\mathbb{P} \circ \mathcal{V} : \mathcal{X} - \mathcal{V}^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{P}\overline{\mathcal{E}}^\Gamma$$

induit une compactification $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma, G)$ de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, dont le bord $\partial_\infty \mathcal{X}(\Gamma, G) \subset \mathbb{P}\overline{\mathcal{E}}^\Gamma$ est formé de points de la forme $x = [v \circ \rho]$, où ρ est une action de Γ sur un immeuble affine de type (\mathbb{A}, W) (pas nécessairement discret), sans point fixe global.

L'action du groupe $\text{Out}(\Gamma)$ des automorphismes extérieurs de Γ sur $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ s'étend naturellement à $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Si on suppose que Γ n'a pas de sous-groupe d'indice fini possédant un sous-groupe abélien distingué infini (hypothèse notamment vérifiée si Γ est un sous-groupe discret fortement irréductible de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$), alors l'espace $\mathcal{X}_{fd}(\Gamma, G)$ des classes de représentations fidèles et discrètes complètement réductibles est un fermé de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ (section 5.3). La compactification de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ construite induit donc une compactification naturelle $\widetilde{\mathcal{X}}_{fd}(\Gamma, G)$ de $\mathcal{X}_{fd}(\Gamma, G)$. Dans ce cas, F. Paulin a démontré que les actions ρ dont proviennent les points du bord sont à stabilisateurs de germes d'appartements virtuellement résolubles (voir [Pau3]).

En particulier, lorsque Γ est un groupe de surface et $G = \text{PSL}_n(\mathbb{R})$, ceci donne une compactification de la composante de Hitchin de l'espace des modules de G -fibrés plats sur la surface. On a étudié dans [Par1] des exemples de dégénérescences de structures projectives réelles (correspondant au cas où $n = 3$), et calculé les spectres limites correspondants.

Terminons cette introduction par quelques mots sur la structure de la preuve. Les actions sur des immeubles affines sont obtenues par passage à des cônes asymptotiques, comme dans [Pau3] et [KaLe]. L'essentiel de la difficulté consiste ici, premièrement, à montrer la continuité du vecteur de translation par passage à un cône asymptotique (Prop. 3.5), et deuxièmement, que le spectre limite obtenu est non nul, fait essentiel pour cette compactification.

Cette dernière propriété est obtenue en utilisant un modèle algébrique pour le cône asymptotique. On peut en effet voir (d'après une communication orale de B. Leeb [Lee]) l'action limite comme provenant d'une représentation de Γ dans le groupe linéaire $\text{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, agissant sur son immeuble de Bruhat-Tits associé, où \mathbb{K}_ω est un corps valué, ni localement compact, ni à valuation discrète, obtenu à partir de \mathbb{R} par un procédé de passage à un cône asymptotique (en utilisant un ultrafiltre ω). Cette construction est détaillée dans la section 2. La non nullité du spectre découle alors de l'absence de point fixe global par [Par3].

On obtient également les résultats analogues dans le cadre où $G = \underline{G}(\mathbb{K})$ avec \mathbb{K} un corps local non-archimédien et \underline{G} un groupe algébrique réductif connexe défini sur \mathbb{K} , agissant sur son immeuble de Bruhat-Tits X associé.

Ce travail trouve son origine dans ma thèse [Par1], qui contient déjà l'essentiel des idées et des résultats intermédiaires. La compactification a été depuis considérablement élargie et améliorée.

Je remercie Frédéric Paulin pour ses nombreuses suggestions et corrections, ainsi que pour ses encouragements et sa disponibilité constante. Je remercie également Y. Benoist et A. Valette pour leurs corrections. Je remercie le Laboratoire de Mathématiques de l'Université Paris-Sud et le Laboratoire E. Picard de l'Université Toulouse III pour leur accueil.

1 Préliminaires.

1.1 Espaces métriques CAT(0).

Dans cette section, X désigne un espace métrique CAT(0). On renvoie par exemple à [BrHa] pour les définitions et propriétés relatives aux espaces métriques CAT(0) non démontrées ci-dessous.

Etant donnés deux points x et y de X , on notera $[x, y]$ ou bien xy l'unique segment géodésique joignant x à y . Etant donnés trois points x , y , et z de X avec $y, z \neq x$, on notera $\tilde{\sphericalangle}_x(y, z)$ l'angle de comparaison en x entre y et z , et $\sphericalangle_x(y, z)$ l'angle en x entre y et z .

L'espace X se décompose canoniquement en produit $X_0 \times X'$, où X_0 est le facteur de De Rham euclidien de X et X' est un espace métrique CAT(0) sans facteur euclidien, qui est propre si X l'est. Les isométries de X préserve cette décomposition (voir [BrHa, Thm II.6.15]).

Soit g une isométrie de X . La fonction *de déplacement* $d_g : x \mapsto d(x, gx)$ de X dans \mathbb{R}_+ est convexe. La *longueur (minimale) de translation* de g est le réel positif ou nul

$$\ell(g) = \inf_{x \in X} d_g(x).$$

On appellera *ensemble de déplacement minimal* de g et on notera $\text{Min}(g)$ le convexe fermé (éventuellement vide) formé des points x de X tels que $d(x, gx) = \ell(g)$. On dit que g est *semi-simple* si $\text{Min}(g)$ est non vide, *parabolique* sinon. Dans le premier cas, g fixe un point (est *elliptique*) si $\ell(g) = 0$ ou translate une géodésique (est *axiale*) si $\ell(g) > 0$.

Soit r une géodésique de X . On notera F_r la réunion des géodésiques parallèles à r . C'est un convexe de X , qui se décompose canoniquement en un produit $C_r \times r$, où C_r est un convexe de X et $\{x\} \times r$ est une géodésique parallèle à r pour tout x de C_r (cf. [BrHa, Thm II.2.14]). Si X est complet, alors F_r et C_r aussi. Soit g une isométrie de X . Si g envoie une géodésique r sur une géodésique parallèle, alors g préserve F_r et, en restriction à F_r , on a $g = (g', t)$ où g' est une isométrie de C_r et $t \in \mathbb{R}$ désigne la translation $r(s) \mapsto r(s + t)$ de r . On a $\ell(g) = \ell(g|_{F_r}) = \sqrt{\ell(g')^2 + t^2}$ et $\text{Min}(g) =$

$\text{Min}(g') \times r \subset F_r$. Dans le cas où g translate r , on a $t = \ell(g)$, en particulier g' est elliptique et $\text{Min}(g)$ est la réunion des géodésiques translatées par g .

Le groupe $\text{Isom}(X)$ des isométries de X est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés (qui est métrisable). Lorsque X est propre (i.e. si ses boules fermées sont compactes), elle coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, et le théorème d'Ascoli entraîne que le groupe topologique $\text{Isom}(X)$ est localement compact, et que, si x est un point de X et $M \geq 0$, alors l'ensemble des éléments g de $\text{Isom}(X)$ tels que $d(x, gx) \leq M$ est un compact (c'est-à-dire que $\text{Isom}(X)$ agit proprement sur X).

On obtient aisément les propriétés suivantes.

Lemme 1.1. *Soit $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\text{Isom}(X)$, de limite g . On a les propriétés suivantes.*

1. *La fonction de déplacement $d_{g_k} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ converge vers d_g uniformément sur les bornés de X .*
2. *La longueur de translation est semicontinue supérieurement, c'est-à-dire $\limsup_k \ell(g_k) \leq \ell(g)$.*
3. *Soit M l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $(x_k)_k$ dans X telles que $x_k \in \text{Min}(g_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors $M \subset \text{Min}(g)$.*

En particulier, si l'espace X est propre et si l'ensemble minimal $\text{Min}(g_k)$ de g_k est non vide et reste à distance bornée d'un point fixé de X , alors, quitte à extraire, $\text{Min}(g_k)$ converge vers $N \subset \text{Min}(g)$ non vide pour la topologie de Hausdorff pointée (pour laquelle on renvoie par exemple à [Gro2]), en particulier g est semisimple ; et $\ell(g) = \lim_k \ell(g_k)$. \square

On notera $\partial_\infty X$ le bord (à l'infini) de X et $r(\infty)$ le point du bord défini par un rayon géodésique r , qu'on appellera l'*extrémité* de r .

On suppose désormais que X est complet. L'espace $\overline{X} = X \cup \partial_\infty X$ est muni de la topologie des cônes. L'action du groupe des isométries de X s'étend continûment en une action continue sur le bord à l'infini de X . On notera $\sphericalangle_x(\xi, \xi')$ l'angle en un point x de X entre deux points ξ et ξ' de \overline{X} . On notera $\sphericalangle_T(\xi, \xi') = \sup_{x \in X} \sphericalangle_x(\xi, \xi')$ l'angle de Tits entre deux points ξ et ξ' de $\partial_\infty X$ (cf. [BrHa, def. II.9.4]). Si cet angle est égal à π , on dira que les points ξ et ξ' sont *opposés*. Si ξ^+ et ξ^- sont les extrémités d'une géodésique r , alors ξ et ξ' sont opposés et on notera $F_{\xi^- \xi^+} = F_r$.

Proposition 1.2 (Points fixes à l'infini d'une isométrie axiale). *Soit g une isométrie d'un espace métrique CAT(0) complet X translatant (non trivialement) une géodésique r . Notons ξ^- et ξ^+ les extrémités respectives de r en $-\infty$ et $+\infty$. Si g fixe un point z du bord de X , alors $\sphericalangle_T(\xi^-, z) + \sphericalangle_T(z, \xi^+) = \pi$. En particulier, si z est opposé à ξ^- , alors $z = \xi^+$.*

Démonstration. L'angle de Tits entre ξ^- et z est égal à la limite de l'angle $\angle_{r(t)}(\xi^-, z)$ quand t tend vers $-\infty$. Notons $\ell = \ell(g)$. L'angle $\angle_{r(t-n\ell)}(\xi^-, z)$ est égal à l'angle $\angle_{r(t)}(\xi^-, z)$ pour tout réel t et entier n , car g^n fixe ξ^- et z et envoie $r(t)$ sur $r(t-n\ell)$, donc $\angle_T(\xi^-, z) = \angle_{r(t)}(\xi^-, z)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De même, on a $\angle_T(z, \xi^+) = \angle_{r(t)}(z, \xi^+)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t , on a $\angle_{r(t)}(\xi^-, z) + \angle_{r(t)}(z, \xi^+) \geq \angle_{r(t)}(\xi^-, \xi^+) = \pi$ d'une part, et d'autre part $\angle_{r(t)}(z, r(t+\ell)) + \angle_{r(t+\ell)}(r(t), z) \leq \pi$ (car les trois points $r(t)$, $r(t+\ell)$ et z forment un triangle avec le sommet z à l'infini). Comme $\angle_{r(t)}(z, r(t+\ell)) = \angle_{r(t)}(z, \xi^+)$ et $\angle_{r(t+\ell)}(r(t), z) = \angle_{r(t+\ell)}(\xi^-, z) = \angle_{r(t)}(\xi^-, z)$, on en conclut que $\angle_T(\xi^-, z) + \angle_T(z, \xi^+) = \pi$. \square

1.2 Espaces symétriques.

Les espaces symétriques considérés dans cet article sont sans facteurs compacts. On renvoie par exemple à [Hel] et [Ebe] pour la définition des espaces symétriques sans facteurs compacts et pour leurs propriétés non démontrées ci-dessous.

Soit X un espace symétrique sans facteurs compacts. Rappelons que X est une variété riemannienne complète simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle, donc en particulier un espace métrique CAT(0) complet, propre. L'espace X se décompose canoniquement en produit riemannien d'un facteur euclidien X_0 (qu'on appellera aussi le facteur *trivial*), et d'un espace symétrique de type non compact X' . Les isométries de X préserve cette décomposition. On appellera groupe des *automorphismes* de X et on notera $G = \text{Aut}(X)$ la composante neutre du groupe des isométries de X agissant par translation sur le facteur euclidien. Le groupe G agit proprement et transitivement sur X et c'est un groupe de Lie réel. On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Si X est euclidien de dimension k , alors $\text{Aut}(X)$ est isomorphe au groupe abélien $(\mathbb{R}^k, +)$. Si X est de type non compact, alors le groupe de Lie $\text{Aut}(X)$ est semisimple, de centre trivial. Si $X = X_1 \times X_2$, alors $\text{Aut}(X)$ s'identifie canoniquement à $\text{Aut}(X_1) \times \text{Aut}(X_2)$. En particulier, le groupe de Lie $G = \text{Aut}(X)$ est donc le produit du groupe de Lie abélien $G_0 = \text{Aut}(X_0)$ et du groupe de Lie semisimple sans centre $G' = \text{Aut}(X')$. Si X' est un sous-espace totalement géodésique de X , alors X' est un espace symétrique sans facteur compact, et la composante neutre du stabilisateur de X' dans $\text{Aut}(X)$ agit sur X' par automorphismes.

On fixe un *plat* (sous-espace totalement géodésique euclidien) maximal (pour l'inclusion) \mathbb{A} de X , de groupe de Weyl \overline{W} , une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} , dite *fondamentale*, et on note $\partial\overline{\mathcal{C}}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de $\overline{\mathcal{C}}$. Tout plat maximal de X est l'image de \mathbb{A} par un automorphisme $g \in G$. Les restrictions à \mathbb{A} des éléments de G seront appelés *plats maximaux marqués* de X . En particulier, le groupe G agit transitivement sur les plats maximaux marqués.

On renvoie momentanément le lecteur à la section 1.4, pour la définition, commune aux espaces symétriques et aux immeubles affines, du type dans $\overline{\mathcal{C}}$, noté $\Theta(x, y)$ ou Θxy , d'un segment xy de X , du type de direction $\partial\Theta r \in \partial\overline{\mathcal{C}}$ d'une géodésique r de X , et du type $\partial\Theta\xi \in \partial\overline{\mathcal{C}}$ d'un point du bord ξ , ainsi que pour les propriétés communes aux espaces symétriques et aux immeubles affines.

Dans le cas des espaces symétriques, l'action de G est transitive sur les segments de type donné. Le stabilisateur dans G d'un point de X agit transitivement sur les géodésiques de type donné issues de ce point. L'action du groupe G sur le bord à l'infini est transitive sur les points de type donné. L'orbite $G\xi$ d'un point du bord ξ de X par G est égale à l'ensemble, noté $(\partial_\infty X)_\tau$, des points du bord de type $\tau = \partial\Theta\xi$, et s'identifie à la variété G/P , où P est le sous-groupe parabolique $\text{Stab}_G(\xi)$ de G . Le groupe G agit transitivement sur les couples de points du bord opposés, de types donnés.

Proposition 1.3. *Soit $\tau \in \partial\overline{\mathcal{C}}$ et τ^{opp} le type opposé. Pour tout $M > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout couple de points (ξ^-, ξ^+) de $\partial_\infty X$ avec $\partial\Theta(\xi^+) = \tau$ et $\partial\Theta(\xi^-) = \tau^{opp}$, pour tout p de X tel que $\angle_p(\xi^-, \xi^+) \geq \pi - \epsilon$, la distance de p à la réunion $F_{\xi^-\xi^+}$ des géodésiques de ξ^- à ξ^+ est inférieure ou égale à M .*

Démonstration. L'angle de Tits entre un point du bord de type τ et un point du bord de type opposé τ^{opp} ne peut prendre qu'un ensemble fini de valeurs $D(\tau, \tau^{opp})$, comprenant π . Soit $\epsilon(\tau)$ tel que $\pi - \epsilon(\tau) = \max(D(\tau, \tau^{opp}) - \{\pi\})$. Alors pour tous ξ^+ de type τ et ξ^- de type opposé, s'il existe $p \in X$ tel que $\angle_p(\xi^-, \xi^+) > \pi - \epsilon(\tau)$, on a $\angle_T(\xi^-, \xi^+) = \pi$ et donc $F_{\xi^-\xi^+}$ est non vide.

Supposons que la propriété est fautive. Alors il existe $M > 0$, une suite de points p_i dans X , et deux suites de points ξ_i^+ de type τ et ξ_i^- de type τ^{opp} dans $\partial_\infty X$ tels que $\angle_{p_i}(\xi_i^-, \xi_i^+) \rightarrow \pi$ et $d(p_i, F_{\xi_i^-\xi_i^+}) \geq M$. Pour i assez grand, $F_{\xi_i^-\xi_i^+}$ est non vide. Soit q_i la projection orthogonale de p_i sur $F_{\xi_i^-\xi_i^+}$. Quitte à appliquer des automorphismes, on peut supposer que q_i est une suite constante égale à q , ainsi que $\xi_i^- \equiv \xi^-$ et $\xi_i^+ \equiv \xi^+$. Si p_i reste à distance bornée de q , quitte à extraire p_i converge vers p à distance $\geq M$ de $F_{\xi^-\xi^+}$, avec $\angle_p(\xi^-, \xi^+) = \pi$, ce qui n'est pas possible. Sinon, comme on a $\angle_{p_i}(q, \xi^-) \leq \frac{\pi}{2}$ et $\angle_{p_i}(q, \xi^+) \leq \frac{\pi}{2}$ ces deux angles tendent vers $\frac{\pi}{2}$. Comme l'angle sous lequel sont vus q et ξ^+ croît de p_i à q , on choisit p'_i sur ce segment, restant à distance bornée supérieure à M de q et on aura $\angle_{p'_i}(q, \xi^+) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Quitte à extraire, p'_i converge vers un point p' à distance supérieure à M de sa projection q sur $F_{\xi^-\xi^+}$ avec $\angle_{p'}(\xi^+, q) = \frac{\pi}{2}$, ce qui n'est pas possible. \square

Remarque. Si X est un immeuble affine, on a mieux. Si pour un point p dans X on a $\angle_p(\xi^-, \xi^+) > \pi - \epsilon(\tau)$, alors on a $\angle_p(\xi^-, \xi^+) = \pi$ car $\angle_p(\xi^-, \xi^+) \in D(\tau, \tau^{opp})$ (par rigidité des angles, cf. section 1.3), donc $p \in F_{\xi^-\xi^+}$.

Soit a un point dans \overline{X} . Pour tout point p dans X , et pour tout réel positif D , on notera $O_a(p, D)$ l'ombre vue du point a de la boule de centre p et de rayon D , c'est-à-dire l'ensemble des extrémités dans le bord de X des géodésiques issues de a et passant à distance inférieure ou égale à D de p .

Proposition 1.4. *Soit ξ un point du bord de X et r une géodésique telle que $r(+\infty) = \xi$. Notons $\tau = \partial\Theta\xi$ et $\xi^- = r(-\infty)$. Les ombres $O_{\xi^-}(r(t), D)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $D > 0$, forment une base de voisinages de ξ dans $(\partial_\infty X)_\tau$.*

Démonstration. Soit $p = r(0)$. Les ombres $O_p(r(t), D)$, avec $t \in \mathbb{R}^+$ et $D > 0$, forment une base de voisinages de ξ dans $\partial_\infty X$. Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $D > 0$. On vérifie facilement que $O_{\xi^-}(r(t), D/2)$ est inclus dans $O_p(r(t), D)$. Soit $\varepsilon > 0$ donné par la proposition 1.3, pour $M = D$. Soit $0 < D' \leq \tan(\varepsilon) t$. Alors $O_p(r(t), D') \cap (\partial_\infty X)_\tau$ est inclus dans $O_{\xi^-}(r(t), D)$. En effet si z est dans $O_p(r(t), D') \cap (\partial_\infty X)_\tau$, alors $\angle_p(r(t), z) \leq \angle_p(r(t), z) \leq \arctan(D'/t) \leq \varepsilon$. Par conséquent, d'après la proposition 1.3, comme z est de type τ et ξ^- de type opposé, on a $d(p, F_{\xi^-z}) \leq D$ c'est-à-dire $p \in O_p(r(t), D)$. \square

Si r est une géodésique de X et $t \in \mathbb{R}$, il existe un automorphisme $g \in G$ de X , appelé *transvection* le long de r de longueur t , réalisant le transport parallèle le long de r de $r(s)$ à $r(s+t)$. Si $g \neq \text{id}$, l'ensemble de déplacement minimal $\text{Min}(g)$ de g est égal à la réunion F_r des géodésiques parallèles à r (qui sont translatées par g). De plus, le centralisateur $Z(g)$ de g dans G agit transitivement sur $\text{Min}(g)$ (voir par exemple [Ebe, Prop. 4.1.4]).

Dans le cas où X n'a pas de facteur euclidien, G est semisimple de centre trivial, et un élément g de G est semisimple (resp. elliptique) si et seulement si son image par la représentation adjointe (de G dans $\text{GL}(\mathfrak{g})$) est diagonalisable sur \mathbb{C} (resp. diagonalisable sur \mathbb{C} , à valeurs propres de module 1). On dit alors qu'un élément g de G est *unipotent* (resp. *hyperbolique*) si son image par la représentation adjointe a toutes ses valeurs propres égales à 1 (resp. est diagonalisable sur \mathbb{C} et à valeurs propres réelles positives).

Dans le cas général, on note X_0 le facteur euclidien de X , et $X = X_0 \times X'$ la décomposition associée. Soit g un élément de G . Alors $g = (g_0, g') \in G = \text{Aut}(X_0) \times \text{Aut}(X')$, et on a $\text{Min}(g) = X_0 \times \text{Min}(g')$ et $\ell(g) = \sqrt{\ell(g_0)^2 + \ell(g')^2}$. On a alors que g est semisimple (resp. on dira que g est *hyperbolique*) si et seulement si g' l'est, et g est elliptique (resp. on dira que g est *unipotent*) si et seulement si $g_0 = \text{id}$ et g' l'est. Les éléments hyperboliques de G sont exactement les transvections.

Pour tout g de G , il existe un unique triplet e, h, u dans G , appelé la *décomposition de Jordan* de g , tel que e, h et u sont respectivement elliptique, hyperbolique et unipotent, commutent deux à deux, et $g = hue$. On a alors $\ell(g) = \ell(h)$.

Proposition 1.5. *Soit g dans G de longueur de translation $\ell(g)$ strictement positive. Soient e, h et u ses composantes de Jordan, et $\varphi = eu$. Soit r une géodésique translatée par h . Soient $\xi^+ = r(+\infty)$ et $\xi^- = r(-\infty)$, qu'on appellera respectivement points fixes attractif et répulsif à l'infini de g . Le sous-espace totalement géodésique $F_g = \text{Min}(h) = F_r = F_{\xi^-\xi^+}$ est stabilisé par g, h, e, u et φ , et se décompose en produit $C_r \times r$, où C_r est un sous-espace totalement géodésique de X .*

1. *On a $h = (\text{id}, \ell(g))$, $\varphi = (\varphi, 0)$ et $g = (\varphi, \ell(g))$, en restriction à $F_g = C_r \times r$. En particulier, on a $d_g(p) = \sqrt{\ell(g)^2 + d(hp, gp)^2}$, pour p dans $\text{Min}(h)$.*
2. *Pour tout point p dans X , on a que $g^m p$ tend vers ξ^+ et que $g^{-m} p$ tend vers ξ^- quand m tend vers l'infini.*
3. *Pour tout point p dans F_g et tout $D > 0$, pour tout voisinage V de ξ^+ dans $G\xi^+$, il existe un entier $N > 0$ tel que, pour tout $m \geq N$, on a*

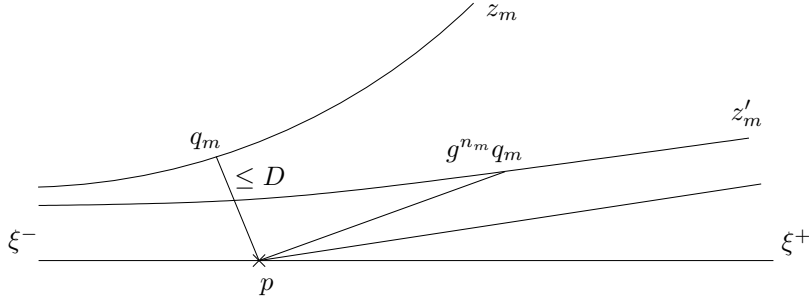
$$g^m(O_{\xi^-}(p, D)) \subset V$$

En particulier, ξ^+ est le seul point fixe de g opposé à ξ^- dans ∂X .

Démonstration. On a $\ell(\varphi) = 0$. Comme $\ell(h) = \ell(g) > 0$, la transvection h est non triviale, d'axe r , donc $\text{Min}(h) = F_r$, et en restriction à $F_g = \text{Min}(h) = C_r \times r$, on a $h = (\text{id}, \ell(h))$, et $\varphi = (\varphi', t)$, car φ commute avec h , donc préserve la décomposition. On a alors $\ell(\varphi) = \sqrt{\ell(\varphi')^2 + t^2} = 0$, donc $t = 0$ et $\varphi' = \varphi$ sur C . On a donc $g = (\varphi, \ell(h))$ sur F_g .

La deuxième affirmation est vraie pour tout p si et seulement si elle est vérifiée pour un point p de X . On choisit p dans $F_g \cap \text{Min}(e)$, qui est non vide (car e stabilise F_g). On peut supposer que r est la géodésique translatée par h d'origine p . Comme u est unipotent, la distance $d(h^m p, g^m p) = d(p, u^m p)$ est de l'ordre de $\log m$ (voir par exemple [LMR, (3.8) et (3.5)]). Or $h^m p = r(m\ell(h))$, donc la suite $g^m p$ tend vers ξ^+ , car $\frac{d(g^m p, r(m\ell(h)))}{m\ell(h)}$ tend vers 0.

Montrons maintenant la dernière affirmation. Soit $p \in F_{\xi^-\xi^+}$ et $D > 0$. Soit V un voisinage de ξ^+ dans son orbite $G\xi^+$. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(z_m)_m$ dans $O_{\xi^-}(p, D)$ et une suite croissante $(n_m)_m$ d'entiers avec $z'_m = g^{n_m} z_m \notin V$ pour tout m . Soit q_m dans $F_{\xi^- z'_m}$ tel que $d(p, q_m) \leq D$. D'après l'assertion 2, la suite $g^{n_m} p$ tend vers ξ^+ . Comme $d(g^{n_m} q_m, g^{n_m} p) \leq D$, la suite $g^{n_m} q_m$ tend également vers ξ^+ , et donc l'angle $\angle_p(\xi^+, g^{n_m} q_m)$ tend vers 0. Comme la suite $g^{n_m} q_m$ tend vers ξ^+ , l'angle $\angle_p(\xi^-, g^{n_m} q_m)$ tend vers π . Par les propriétés des angles dans un espace CAT(0), on en déduit que $\angle_{g^{n_m} q_m}(p, \xi^-)$ tend vers 0, puis que $\angle_{g^{n_m} q_m}(p, z'_m)$ tend vers π (car $\angle_{g^{n_m} q_m}(\xi^-, z'_m) = \pi$), puis que $\angle_p(g^{n_m} q_m, z'_m)$ tend vers 0. Comme, par l'inégalité triangulaire, l'angle $\angle_p(\xi^+, z'_m)$ est inférieur à la somme des deux angles $\angle_p(\xi^+, g^{n_m} q_m)$ et $\angle_p(g^{n_m} q_m, z'_m)$, qui tendent vers 0 par ce qui précède, le point z'_m tend vers ξ^+ , contradiction. \square



Espace symétrique associé à un groupe de Lie réel réductif. Soit G un groupe de Lie réel connexe. On suppose que l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G est réductive, c'est-à-dire somme directe de son centre \mathfrak{z} et d'un idéal \mathfrak{g}' semisimple, et que le groupe dérivé de G est de centre fini. Ces hypothèses sont notamment vérifiées si G est la composante neutre $\underline{G}(\mathbb{K})^0$ du groupe des \mathbb{K} -points d'un groupe algébrique \underline{G} réductif connexe défini sur \mathbb{K} , où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (cf. [Bor, 24.6 (d)]). Soit K un sous-groupe compact maximal de G . Alors l'espace homogène $X = G/K$ est un espace symétrique sans facteur compact, dit *associé* à G , pour toute métrique riemannienne G -invariante sur X (c'est-à-dire pour tout choix d'un produit scalaire sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G invariant par l'action adjointe de K). Cela découle de l'existence d'une involution de Cartan σ de (G, K) (voir [Bor, 24.6] et [Hel]). Le groupe G agit proprement, transitivement, par automorphismes, sur X , et transitivement sur les plats maximaux marqués.

1.3 Immeubles affines.

Les immeubles affines considérés dans cet article sont métriques, pas nécessairement localement compacts, ni discrets, c'est-à-dire qu'ils n'admettent pas nécessairement de structure de complexe (poly)simplicial (voir [Tit]). Pour leur définition, on renvoie à [Par2], où elle est étudiée en détail. On reprendra le vocabulaire et les notations de cet article, auquel on renvoie également pour les propriétés utilisées et non démontrées ci-dessous (notamment pour l'équivalence avec la définition de Kleiner-Leeb [KLe], dont on aura besoin pour le théorème 1.16).

On se fixe un espace vectoriel \mathbb{A} euclidien de dimension finie et un groupe de réflexions fini \overline{W} agissant sur \mathbb{A} (c'est-à-dire un sous-groupe fini d'isométries vectorielles de \mathbb{A} , engendré par des réflexions). On fixe également une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} . Soit W un groupe de réflexions affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, c'est-à-dire un sous-groupe d'isométries affines de \mathbb{A} , de projection vectorielle \overline{W} , tel qu'il existe a dans \mathbb{A} tel que $W = TW_a$, où W_a fixe a et T est un sous-groupe de translations de \mathbb{A} (ou, de manière équivalente, engendré par des réflexions affines).

Soit X un immeuble affine, modelé sur (\mathbb{A}, W) . On note \mathcal{A} son système

d'appartements marqués. On rappelle qu'un *automorphisme* de X est une bijection de X dans lui-même qui préserve \mathcal{A} . On rappelle que (X, d) est un espace métrique CAT(0). On utilisera essentiellement le résultat suivant.

Théorème 1.6. *Soit X un immeuble affine complet. Il existe une constante K telle que pour tout automorphisme h de X et pour tout x de X , on a $d(x, \text{Min}(h)) \leq Kd(x, hx)$. En particulier h est semisimple.*

Démonstration. Comme les automorphismes de X agissent par translation sur le facteur trivial de X , on se ramène au cas où X n'a pas de facteur trivial, c'est-à-dire où $(\mathbb{A}, \overline{W})$ est essentiel, et cela découle de [Par2, Théo. 4.1]. \square

Sous-immeubles. On dira qu'un groupe de réflexions (\mathbb{A}', W') est un *sous-groupe de réflexions* de (\mathbb{A}, W) si \mathbb{A}' est un sous-espace affine de \mathbb{A} et les éléments de W' sont les restrictions à \mathbb{A}' d'éléments de W stabilisant \mathbb{A}' . On dira alors qu'un immeuble (X', \mathcal{A}') modelé sur (\mathbb{A}', W') est un *sous-immeuble* de X si $X' \subset X$ et si les appartements marqués de X' sont les restrictions à \mathbb{A}' d'appartements marqués de X . Alors X' est un sous-espace convexe de (X, d) .

Par exemple, si X est un produit d'immeubles (X_i, \mathcal{A}_i) modelés sur (\mathbb{A}_i, W_i) , on vérifie facilement qu'en chaque point de X , les facteurs sont des sous-immeubles de X .

Un autre exemple fondamental est le suivant. Soit ρ une géodésique de X , incluse dans un appartement (ce qui est toujours le cas si \mathcal{A} est le système d'appartements maximal) et $X' = F_\rho$ la réunion des géodésiques parallèles à ρ . Alors X' est la réunion des appartements de X contenant $\rho(+\infty)$ et $\rho(-\infty)$ dans leur bord à l'infini. Soit u l'unique vecteur de $\overline{\mathcal{C}}$ tel que ρ est égale à $t \mapsto f(a + tu)$ pour un plat maximal marqué $f : \mathbb{A} \rightarrow X$ de X et un $a \in \mathbb{A}$ (autrement dit u est le type $\partial\Theta\rho$ de ρ , cf. section 1.4). Soit W' le sous-groupe des éléments de W fixant (vectoriellement) u . On peut démontrer (par exemple en suivant [KLLe, prop. 4.8.1]) que X' est un sous-immeuble de X modelé sur (\mathbb{A}, W') . Les plats maximaux marqués de X' sont les plats maximaux marqués $f : \mathbb{A} \rightarrow X$ de X tels que $t \mapsto f(tu)$ est une géodésique parallèle à ρ .

Immeuble d'un groupe algébrique réductif sur un corps local. On renvoie à [Tit2] pour ce qui suit. Soit \mathbb{K} un corps muni d'une valuation discrète non triviale, complet, à corps résiduel parfait (par exemple un corps local non archimédien). Soit \underline{G} un groupe algébrique réductif connexe défini sur \mathbb{K} . L'immeuble de Bruhat-Tits (élargi) $X = \mathcal{B}(\underline{G}, \mathbb{K})$ de \underline{G} sur \mathbb{K} est un immeuble affine complet. Il se décompose canoniquement en produit d'un facteur euclidien X_0 (correspondant à un tore déployé maximal du centre de \underline{G}) et des immeubles $X_i = \mathcal{B}(\underline{G}_i, \mathbb{K})$, où $\underline{G}_1, \dots, \underline{G}_m$ sont les facteurs presque

simples de \underline{G} . Il admet une structure de complexe polyédral (dont les facettes sont des produits du facteur euclidien X_0 , et des facettes des X_i , qui sont des simplexes). Le groupe $G = \underline{G}(\mathbb{K})$ agit continûment, par automorphismes de X , préservant la structure simpliciale, transitivement sur les appartements marqués, cocompactement sur X . Si \mathbb{K} est un corps local, alors G et X sont localement compacts et l'action de G sur X est propre.

1.4 Type des segments.

Dans cette section, X désigne ou bien un espace symétrique sans facteur compact, ou bien un immeuble affine. On fixe un plat maximal modèle \mathbb{A} de X , de groupe de Weyl (vectoriel) \overline{W} , et une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} , dite *fondamentale*. C'est un domaine fondamental strict pour l'action du groupe de Weyl \overline{W} sur \mathbb{A} . On note Θ la projection de \mathbb{A} dans $\overline{\mathcal{C}}$ correspondante, qui à un vecteur dans \mathbb{A} associe son *type* dans $\overline{\mathcal{C}}$. L'isométrie de $\overline{\mathcal{C}}$ dans elle-même qui à un vecteur v associe le type *opposé* $v^{opp} = \Theta(-v)$ est appelée l'*involution d'opposition* de $\overline{\mathcal{C}}$.

Si p et q sont deux points de X , il existe un unique vecteur de $\overline{\mathcal{C}}$, appelé le *type* du segment pq et noté $\Theta(p, q)$ ou Θpq , tel qu'il existe un plat maximal marqué $f : \mathbb{A} \rightarrow X$, et deux points A et B de \mathbb{A} , avec $f(A) = p$, $f(B) = q$ et $\overrightarrow{AB} = \Theta pq$. On a clairement $\|\Theta xy\| = d(x, y)$ et $\Theta yx = (\Theta xy)^{opp}$ pour tous x, y de X . Si p, q, q', p' dans X bordent un parallélogramme plat, alors on a $\Theta pq = \Theta p'q'$. Les automorphismes de X préservent le type des segments.

Remarque 1.7. *Lorsque X est l'espace associé à un groupe algébrique réductif connexe \underline{G} sur un corps local \mathbb{K} égal à \mathbb{R} ou ultramétrique, alors, pour g dans $G = \underline{G}(\mathbb{K})$, le vecteur $\Theta(x_0, gx_0) \in \overline{\mathcal{C}}$ s'identifie à la projection de Cartan de g (voir par exemple [Ben]).*

On renvoie à [Par4] pour de plus fines propriétés du type des segments. On utilisera notamment la propriété suivante.

Proposition 1.8. *Le type est 1-Lipschitz en chaque coordonnée, plus précisément pour tous x, y, x', y' de X , on a*

$$\|\Theta xy - \Theta x'y'\| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

En particulier, $\Theta : X \times X \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ est continue (voir [Par4]). □

Etant donné $g \in \text{Aut}(X)$, on note Θ_g l'application continue

$$\Theta_g : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \overline{\mathcal{C}} \\ x & \longmapsto & \Theta(x, gx) \end{array}$$

On utilisera la propriété suivante, qui découle de la proposition 1.8.

Proposition 1.9. *Soit $(g_k)_k$ une suite dans $\text{Aut}(X)$, convergeant vers un élément g de $\text{Aut}(X)$. Alors la suite des fonctions $\Theta_{g_k} : X \rightarrow \overline{\mathfrak{C}}$ converge uniformément vers la fonction $\Theta_g : X \rightarrow \overline{\mathfrak{C}}$ sur les bornés de X . \square*

Si X est trivial, alors $\mathbb{A} = X$, $\overline{W} = \{\text{id}\}$, $\overline{\mathfrak{C}} = \mathbb{A} = X$, et $\Theta xy = \overrightarrow{xy}$ pour tous x, y de X .

Si $X = X_1 \times X_2$ est un produit de deux espaces symétriques ou immeubles affines X_i . Alors $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$ où \mathbb{A}_i est un plat maximal de X_i , $\overline{W} = \overline{W}_1 \times \overline{W}_2$ où \overline{W}_i est le groupe de Weyl de \mathbb{A}_i , et $\overline{\mathfrak{C}} = \overline{\mathfrak{C}}_1 + \overline{\mathfrak{C}}_2$ où $\overline{\mathfrak{C}}_i$ est une chambre de Weyl fermée de \mathbb{A}_i . Les plats maximaux marqués $f : \mathbb{A} \rightarrow X$ de X sont de la forme $f = (f_1, f_2)$ où f_i est un plat maximal marqué de X_i . Si $\Theta_i : X_i \times X_i \rightarrow \overline{\mathfrak{C}}_i$ est le type des segments de X_i , on a

$$\Theta(x, y) = \Theta_1(x_1, y_1) + \Theta_2(x_2, y_2)$$

pour tous $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de X .

Soit X' un sous-espace symétrique ou un sous-immeuble de X . Soit \mathbb{A}' un plat maximal de X' , et \overline{W}' son groupe de Weyl, et $\overline{\mathfrak{C}}'$ une chambre de Weyl fermée de \mathbb{A}' . Alors \mathbb{A}' s'identifie à un sous-espace totalement géodésique de \mathbb{A} , et les éléments de \overline{W}' sont des restrictions à \mathbb{A}' d'éléments de \overline{W} stabilisant \mathbb{A}' . Par conséquent, si $\Theta' : X' \times X' \rightarrow \overline{\mathfrak{C}}'$ est le type des segments de X' , on a

$$\Theta = \Theta \circ \Theta'$$

en restriction à $X' \times X'$.

Notons $\partial\mathbb{A}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de \mathbb{A} , qu'on identifiera à l'ensemble des demi-droites de \mathbb{A} , muni de la distance angulaire, et $\partial : \mathbb{A} \rightarrow \partial\mathbb{A}$ la projection correspondante. Pour deux points τ, τ' dans $\partial\overline{\mathfrak{C}}$ (qui est l'ensemble noté Δ_{mod} dans [KILe]), on note $D(\tau, \tau')$ l'ensemble fini des angles possibles entre deux vecteurs unitaires v et v' de \mathbb{A} de types respectifs τ et τ' . Si X est un immeuble affine, alors pour tout x et tous y, z distincts de x dans X on a $\sphericalangle_x(y, z) \in D(\tau, \tau')$ avec $\tau = \partial\Theta xy$ et $\tau' = \partial\Theta xz$ (rigidité des angles). Le *type (de direction)* $\partial\Theta r$ d'une géodésique (ou d'un rayon) r est égal à $\partial\Theta(r(s), r(t))$ pour tout $s < t$. Deux géodésiques parallèles ont même type. Les automorphismes de X préservent le type des géodésiques. Deux rayons géodésiques asymptotes ont même type dans $\partial\overline{\mathfrak{C}}$. On peut donc définir le type (noté également $\partial\Theta$) dans $\partial\overline{\mathfrak{C}}$ des points du bord à l'infini de X . L'action de $\text{Aut}(X)$ sur le bord à l'infini préserve le type des points.

Si X est complet, le bord à l'infini de X , muni de la distance de Tits (donnée par l'angle de Tits), est isométrique à la réalisation géométrique modelée sur $(\partial\mathbb{A}, \overline{W})$ (cf. [Par2, section 2.6]) d'un immeuble sphérique, dont les chambres sont les bords des chambres de Weyl de X , et les appartements les bords des plats maximaux de X . Si ξ et ξ' sont deux points de $\partial_\infty X$, il existe un plat maximal de X les contenant dans son bord à l'infini. Pour tout point p de ce plat, on a $\sphericalangle_T(\xi, \xi') = \sphericalangle_p(\xi, \xi')$, qui est nécessairement

dans l'ensemble fini $D(\partial\Theta(\xi), \partial\Theta(\xi'))$. En particulier si $\triangleleft_T(\xi, \xi') = \pi$, alors il existe une géodésique dans X allant de ξ à ξ' .

On renvoie à la section 1.2 pour les propriétés supplémentaires vérifiés lorsque X est un espace symétrique sans facteur compact.

1.5 Modèle des normes pour SL_n .

Soit \mathbb{K} un corps muni d'une valeur absolue non triviale, soit égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} , soit ultramétrique. Soit $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on dira qu'une norme ν sur \mathbb{K}^n est une *bonne* norme si elle est *euclidienne*, c'est-à-dire si elle est de la forme $v \mapsto \sqrt{q(v)}$, où q est une forme quadratique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, définie positive sur \mathbb{K}^n . On dira qu'une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{K}^n est *adaptée* à ν si elle est *orthogonale* pour ν , c'est-à-dire si on a $\nu(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \nu(e_i)^2 |x_i|^2}$ pour tous x_1, \dots, x_n dans \mathbb{K} . La bonne norme *canonique* ν_0 de \mathbb{K}^n est la norme provenant du produit scalaire canonique.

Dans le cas où \mathbb{K} est ultramétrique, on dira qu'une norme ν sur \mathbb{K}^n est une norme *ultramétrique* si elle est vérifie l'inégalité triangulaire ultramétrique. On dira qu'une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{K}^n est *adaptée* à ν si on a $\nu(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \max_{i=1..n} \nu(e_i) |x_i|$ pour tous x_1, \dots, x_n dans \mathbb{K} . On dira qu'une norme ultramétrique est *adaptable* s'il existe une base de \mathbb{K}^n adaptée à ν . Si \mathbb{K} est un corps local, toute norme ultramétrique est adaptable (voir [GoIw]). On dira qu'une norme ν sur \mathbb{K}^n est une *bonne* norme si elle est ultramétrique et adaptable. La bonne norme *canonique* ν_0 de \mathbb{K}^n est la norme qui à $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ associe $\max_{i=1..n} |x_i|$.

On dit qu'une bonne norme ν est de *volume* 1 si on a $\prod_{i=1}^n \nu(e_i) = 1$ pour toute base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{K}^n adaptée à ν , de déterminant 1 (dans la base canonique). Le groupe $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ agit sur l'espace des normes par $g.\nu = \nu \circ g^{-1}$ pour $g \in G$ et ν une norme sur \mathbb{K}^n . Cette action préserve le sous-espace E_n des bonnes normes de volume 1. Le stabilisateur de ν_0 est $\mathrm{SO}(n)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le groupe $\mathrm{SU}(n)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$ si \mathbb{K} est ultramétrique et \mathcal{O} est son anneau des entiers ($\mathcal{O} = \{a \in \mathbb{K}, |a| \leq 1\}$).

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , l'espace E_n s'identifie à l'espace symétrique sans facteurs compacts associé à G . Dans le cas où \mathbb{K} est ultramétrique l'espace E_n est alors un immeuble affine (voir par exemple [Par2]), qui s'identifie à l'immeuble de Bruhat-Tits de G (voir [BrTi2, 2.11 et 2.11bis]).

Ce modèle est particulièrement bien adapté au passage au cône asymptotique (voir section 2). Rappelons quelques-unes de ses propriétés.

Le plat maximal modèle \mathbb{A} de E_n est identifié à l'hyperplan de \mathbb{R}^n formé par les vecteurs de somme des coordonnées nulle, et il est muni de la métrique induite par la métrique euclidienne canonique de \mathbb{R}^n . Le plat maximal marqué (voir sections 1.2 et 1.3 pour la définition des plats maximaux

marqués) de E_n associé à une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{K}^n de déterminant 1 est l'application $f_{\mathcal{E}}$ de \mathbb{A} dans E_n qui à $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ associe la (seule) bonne norme sur \mathbb{K}^n admettant \mathcal{E} pour base adaptée et valant $e^{-\alpha_i}$ sur e_i (qui est bien de volume 1). Tous les plats maximaux marqués de E_n sont de cette forme. On appellera plat maximal marqué *canonique* de X le plat maximal marqué associé à la base canonique. Pour toute base \mathcal{E} de déterminant 1 de \mathbb{K}^n et tout g dans G , on a $g \circ f_{\mathcal{E}} = f_{g\mathcal{E}}$.

Si ν et ν' sont deux bonnes normes de volume 1 et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de \mathbb{K}^n adaptée commune à ν et ν' , alors on a

$$d(\nu, \nu') = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \log \frac{\nu'}{\nu}(e_i) \right|^2}. \quad (1)$$

Notons d_{∞} la distance sur E_n donnée par $d_{\infty}(\nu, \nu') = \sup_{v \neq 0} \left| \log \frac{\nu'}{\nu}(v) \right|$ pour tous $\nu, \nu' \in E_n$. On a que d et d_{∞} sont équivalentes, car [Par2, prop. 3.12]

$$d_{\infty} \leq d \leq \sqrt{n} d_{\infty} \quad \text{sur } E_n. \quad (2)$$

Le point base x_0 est la bonne norme canonique ν_0 de \mathbb{K}^n . Soit N la norme canonique sur les endomorphismes de \mathbb{K}^n associée à ν_0 . Pour tout $g \in G$, on a $\sup_{v \neq 0} \frac{g\nu_0}{\nu_0}(v) = N(g^{-1})$ et donc

$$d_{\infty}(\nu_0, g\nu_0) = \max \{ \log N(g), \log N(g^{-1}) \} \leq (n-1) \log N(g) \quad (3)$$

Le lemme suivant sera utilisé en section 2.4.

Lemme 1.10. *Soit ν une bonne norme de volume 1 sur \mathbb{K}^n , et $g \in G$. On a*

$$d_{\infty}(\nu, g\nu) \leq \log \left(1 + e^{2d_{\infty}(\nu_0, \nu)} \max \{ N(g - \text{id}), N(g^{-1} - \text{id}) \} \right).$$

Démonstration. Pour tout v non nul de \mathbb{K}^n , on a $g\nu(v) \leq \nu(v) + \nu((g^{-1} - \text{id})v)$, et on a

$$\nu(hv) \leq e^{d_{\infty}(\nu_0, \nu)} \nu_0(hv) \leq e^{d_{\infty}(\nu_0, \nu)} N(h) \nu_0(v) \leq e^{2d_{\infty}(\nu_0, \nu)} N(h) \nu(v)$$

pour tout h de $\text{End}(\mathbb{K}^n)$. Donc $\sup_{v \neq 0} \frac{g\nu}{\nu}(v) \leq 1 + e^{2d_{\infty}(\nu_0, \nu)} N(g^{-1} - \text{id})$. On conclut en échangeant ν et $g\nu$. \square

1.6 Cônes asymptotiques.

Dans tout cet article, ω désigne un ultrafiltre sur \mathbb{N} , plus fin que le filtre de Fréchet (on renvoie à [Bou, Ch. 1] pour son existence et les propriétés rappelées ci-dessous), c'est-à-dire un ensemble de parties de \mathbb{N} vérifiant

1. L'ensemble vide n'est pas dans ω ;
2. Si A et B sont dans ω , alors $A \cup B$ aussi ;
3. Si A est dans ω et est inclus dans B , alors B est dans ω ;
4. Pour toute partie A de \mathbb{N} , l'ensemble ω contient soit A , soit son complémentaire (toute partition finie de \mathbb{N} a par conséquent un unique élément dans ω).
5. Aucune partie finie de \mathbb{N} n'est dans ω .

On peut aussi voir ω comme une mesure de probabilité finiment additive définie sur toutes les parties de \mathbb{N} , à valeurs dans $\{0, 1\}$, nulle sur les parties finies, avec $w(A) = 1 \Leftrightarrow A \in w$. Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans un espace topologique E quelconque admet $x \in E$ comme limite suivant l'ultrafiltre ω si pour tout voisinage V de x dans E , on a $x_k \in V$ pour ω -presque tout k . Cette limite est l'une des valeurs d'adhérences de la suite (x_k) , et elle est unique si E est séparé. On note alors $\lim_{\omega} x_k = x$. On fera un grand usage de la propriété fondamentale suivante : une suite contenue (ω -presque partout) dans un compact admet toujours une limite (unique) suivant l'ultrafiltre ω . On dit qu'une suite de réels (x_k) est ω -majorée (resp. ω -bornée) s'il existe un réel M tel que x_k est inférieur à M (resp. $-M \leq x_k \leq M$) ω -presque partout.

On renvoie par exemple à [KILe] pour plus de détails concernant les ultralimites de suites d'espaces métriques pointés et les cônes asymptotiques et les preuves des propriétés énoncées et non démontrées ci-dessous.

Soit $(X_k, d_k, *_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques pointés. On considère l'ensemble

$$X' = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k; d_k(*_k, x_k) \text{ est } \omega\text{-borné}\},$$

muni de la pseudo-distance d_{ω} définie par $d_{\omega}((x_k), (y_k)) = \lim_{\omega} d_k(x_k, y_k)$. L'espace métrique (X_{ω}, d_{ω}) quotient de X' par la relation "être à pseudo-distance d_{ω} nulle", pointé en la classe $*_{\omega}$ de $(*_k)_{k \in \mathbb{N}}$, est appelé *l'ultralimite* de la suite $(X_k, d_k, *_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Pour $(x_k)_k \in X'$, on note $[x_k]$ le point de X_{ω} associé.

Fait 1.11. *L'espace métrique X_{ω} est complet. [KILe, Lemma 2.4.2] \square*

On se fixe désormais un espace métrique X , une suite $(*_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans X , et une suite $(\lambda_k)_k$ de scalaires dans \mathbb{R}_+^* , tendant vers $+\infty$. On se donne également un groupe G agissant par isométries sur X . Le *cône asymptotique* de X , suivant l'ultrafiltre ω , par rapport à la suite de *points d'observation* $(*_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et à la suite de scalaires $(\lambda_k)_k$ est par définition l'ultralimite $(X_{\omega}, d_{\omega}, *_\omega)$ de la suite d'espaces métriques pointés $(X_k, d_k = \frac{1}{\lambda_k} d, *_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suivant l'ultrafiltre ω . On dira qu'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de X est

ω -bornée si elle est dans X' (c'est-à-dire, si $\frac{1}{\lambda_k}d(*_k, x_k)$ est ω -bornée). Remarquons que si X est euclidien, alors X_ω est isométrique à X (car il existe des applications de X dans lui-même envoyant un point donné sur $*_k$ et multipliant la distance par λ_k).

Rappelons qu'une application ψ de X dans lui-même est dite (α, C) -quasi-isométrique si pour tous x, y de X on a

$$\frac{1}{\alpha}d(x, y) - C \leq d(\psi(x), \psi(y)) \leq \alpha d(x, y) + C .$$

Soit (ψ_k) une suite d'applications (α, C) -quasi-isométriques de X dans lui-même, telle que $\psi_k(*_k)$ est une suite ω -bornée dans X . Alors son ω -limite ψ_ω , notée $[\psi_k]$ ou $\lim_\omega \psi_k$, est une application de X_ω dans lui-même, bien définie par $\psi_\omega(x_\omega) = [\psi_k(x_k)]$ pour tout $x_\omega = [x_k]$ dans X_ω . Elle est α -bilipschitzienne. En particulier, si ψ_k est une isométrie pour $(\omega$ -presque) tout k , alors ψ_ω aussi. On note G' l'ensemble des suites $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telles que $d_k(*_k, g_k *_k)$ est ω -borné. Pour $(g_k) \in G'$, on note $[g_k]$ l'isométrie associée de X_ω , qui à $[x_k]$ associe $[g_k x_k]$. On note G_ω le groupe formé par les isométries de ce type.

On suppose désormais que X est un espace métrique CAT(0).

Proposition 1.12. 1. Le cône asymptotique X_ω est CAT(0).

2. Pour tous $x_\omega = [x_k]$, $y_\omega = [y_k]$ et $z_\omega = [z_k]$ dans X_ω , on a

$$\tilde{\angle}_{x_\omega}(y_\omega, z_\omega) = \lim_\omega \tilde{\angle}_{x_k}(y_k, z_k) \quad \text{et} \quad \angle_{x_\omega}(y_\omega, z_\omega) \geq \lim_\omega \angle_{x_k}(y_k, z_k).$$

Démonstration. Le point 1 est le lemme 2.4.4 de [KLLe]. La première assertion du point 2 est facile à voir, en regardant les triangles de comparaison (car les angles restent inchangés par les homothéties du plan). La deuxième en découle, car $\tilde{\angle}_{x_k}(y_k, z_k) \geq \angle_{x_k}(y_k, z_k)$ pour tout k , donc $\tilde{\angle}_{x_\omega}(y_\omega, z_\omega)$ est supérieur ou égal à $\lim_\omega \angle_{x_k}(y_k, z_k)$, qui reste inchangé si on remplace y_k et z_k par y'_k et z'_k respectivement dans $[x_k, y_k]$ et $[x_k, z_k]$ pour tout k . On en déduit que pour tous y'_ω et z'_ω respectivement dans $[x_\omega, y_\omega]$ et $[x_\omega, z_\omega]$, on a $\tilde{\angle}_{x_\omega}(y'_\omega, z'_\omega) \geq \lim_\omega \angle_{x_k}(y_k, z_k)$, et on conclut en passant à la limite pour $y'_\omega \rightarrow x_\omega$ et $z'_\omega \rightarrow x_\omega$. \square

On dit qu'une suite (r_k) de géodésiques de X est ω -bornée si la suite $(r_k(0))$ l'est. On appelle ω -limite de la suite (r_k) et on note $[r_k]$ l'application de \mathbb{R} dans X_ω qui à t associe $[r_k(\lambda_k t)]$, dont on voit facilement que c'est une géodésique de X_ω .

Proposition 1.13. Les géodésiques de X_ω sont les ω -limites des géodésiques de X (voir par exemple [KLLe, 2.4.4]). \square

Corollaire 1.14. Soit r_k une suite ω -bornée de géodésiques de ω -limite r_ω . La ω -limite de la suite des projections orthogonales p_k sur r_k (qui à $[x_k]$ associe $[p_k(x_k)]$) est la projection orthogonale sur r_ω .

Démonstration. Soit (y_k) une suite ω -bornée dans X , et x_k la projection orthogonale de y_k sur r_k pour tout k . L'angle en $x_\omega = [x_k]$ entre $y_\omega = [y_k]$ et chacun des deux cotés de la géodésique r_ω est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ par la proposition 1.12 (2), donc x_ω est la projection orthogonale de y_ω sur r_ω . \square

Pour tout k , soient r_k et r'_k deux rayons géodésiques asymptotes de X . Supposons que les suites (r_k) et (r'_k) sont ω -bornées dans X . Alors les ω -limites r_ω et r'_ω des suites (r_k) et (r'_k) sont deux rayons géodésiques asymptotes de X_ω . L'application $(\partial X)^\mathbb{N} \rightarrow \partial X_\omega$, qui à la suite de terme $\alpha_k = r_k(\infty)$ associe $r_\omega(\infty)$, noté $[\alpha_k]$, est donc bien définie et surjective (car tout rayon de X_ω est ω -limite de rayons de X).

Le lemme suivant est l'analogie du lemme 1.1.

Lemme 1.15. *Soit g_i une suite "ω-bornée" d'isométries de X , alors si $g_\omega = \lim_\omega g_i = [g_i]$, on a*

- $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} d_{g_i} = d_{g_\omega}$.
- $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} \ell(g_i) \leq \ell(g_\omega)$.
- $[M_{g_i}] \subset M_{g_\omega}$.

En particulier si M_{g_i} reste à distance renormalisée ω -bornée de la suite de points d'observation, alors g_ω est semisimple et $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} \ell(g_i) = \ell(g_\omega)$. \square

On suppose dorénavant que X est ou bien un espace symétrique de type non compact, ou bien un immeuble affine, et que G est un sous-groupe fermé du groupe des automorphismes de X . On se fixe un plat maximal \mathbb{A} de X , de groupe de Weyl \overline{W} et une chambre de Weyl $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} . Une suite (f_k) de plats maximaux marqués de X est dite ω -bornée si la suite $(f_k(0))$ l'est, et son ω -limite est alors l'application $[f_k]$ de \mathbb{A} dans X_ω qui à a associe $[f_k(\lambda_k a)]$. On voit facilement que c'est une isométrie de \mathbb{A} dans X_ω .

Théorème 1.16 (Kleiner-Leeb). *Le cône asymptotique X_ω , muni du système d'appartements marqués formé par les ω -limites des suites ω -bornées de plats maximaux marqués de X , est un immeuble affine complet, de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$. Le groupe G_ω agit sur X_ω , par automorphismes d'immeuble. Si le groupe G agit cocompactement sur X , alors le groupe G_ω agit transitivement sur X_ω . Si G agit transitivement sur les plats maximaux marqués de X , alors G agit transitivement sur les appartements marqués de X_ω (voir [KLE]). \square*

Rappelons (cf. section 1.4) que Θ désigne l'application qui à un segment de l'espace X (resp. de l'immeuble affine X_ω) associe son type dans $\overline{\mathcal{C}}$. On a en particulier les propriétés suivantes.

Proposition 1.17 (Continuité asymptotique de Θ). *Pour tous points $x_\omega = [x_k]$ et $y_\omega = [y_k]$ de X_ω , on a $\Theta(x_\omega, y_\omega) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \Theta(x_k, y_k)$ dans $\overline{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. Soit $u \in \bar{\mathcal{C}}$ la limite suivant ω de la suite $u_k = \frac{1}{\lambda_k} \Theta(x_k, y_k)$ (qui est ω -bornée car $\frac{1}{\lambda_k} d(x_k, y_k)$ l'est). Pour tout k , soit f_k un plat maximal marqué tel que $f_k(0) = x_k$ et $f_k(\lambda_k u_k) = f_k(\Theta(x_k, y_k)) = y_k$. Alors la suite (f_k) est ω -bornée, et son ω -limite f est un appartement marqué de X_ω tel que $f(0) = [x_k] = x_\omega$ et $f(u) = [f_k(\lambda_k u)] = y_\omega$, car pour tout k on a $\frac{1}{\lambda_k} d(f_k(\lambda_k u_k), f_k(\lambda_k u)) = d_{\mathbb{A}}(u_k, u)$, qui tend vers 0. Par définition du type, on a donc $u = \Theta(x_\omega, y_\omega)$. \square

Proposition 1.18. *Soit r_ω une géodésique de X_ω . Il existe une suite (r_k) ω -bornée de géodésiques de X de type constant $\partial\Theta(r_\omega)$ telle que $[r_k] = r_\omega$. Si le groupe G agit cocompactement sur X et transitivement sur les plats maximaux marqués de X , alors le groupe G_ω agit transitivement sur les géodésiques de X_ω de type donné.*

Démonstration. Soit u le type de r_ω , qui est un vecteur unitaire de la chambre de Weyl $\bar{\mathcal{C}}$. Soit f_ω un appartement marqué tel que pour tout réel t , on a $r_\omega(t) = f_\omega(tu)$. Soit (f_k) une suite ω -bornée de plats maximaux marqués de X tels que $f_\omega = [f_k]$ et soit r_k la géodésique $t \mapsto f_k(tu)$ (de type constant u). On a alors $[r_k] = r_\omega$ par définition de la ω -limite de la suite (f_k) . La seconde assertion découle immédiatement de la transitivité des actions de G_ω sur X_ω et sur les appartements marqués. \square

1.7 La méthode de compactification utilisée.

Dans ce paragraphe, on donne la méthode de compactification d'un espace topologique qui sera utilisée en section 4 (voir aussi [MoSh]). Soit \mathcal{E} un espace topologique.

Définition 1.19. *Une compactification de \mathcal{E} est une paire $(g, \tilde{\mathcal{E}})$, où $\tilde{\mathcal{E}}$ est un espace topologique compact et $g : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ un homéomorphisme sur son image, avec $g(\mathcal{E})$ ouvert et dense dans $\tilde{\mathcal{E}}$. Le complémentaire de $g(\mathcal{E})$ dans $\tilde{\mathcal{E}}$ est appelé le bord (à l'infini) de $\tilde{\mathcal{E}}$ et noté $\partial_\infty \tilde{\mathcal{E}}$.*

Remarque. Pour qu'un espace topologique admette une compactification (métrisable), il est nécessaire qu'il soit localement compact (à base dénombrable), en particulier séparé.

On suppose désormais que \mathcal{E} est localement compact, non compact.

On pose $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{\infty\}$, muni de la topologie étendant celle de \mathcal{E} où les complémentaires des compacts de \mathcal{E} forment une base de voisinages de ∞ . Alors $(\text{id}, \hat{\mathcal{E}})$ est une compactification de \mathcal{E} , appelée *compactification d'Alexandroff* de \mathcal{E} . Si \mathcal{E} est métrisable, dénombrable à l'infini, ou, de manière équivalente, si \mathcal{E} est à base dénombrable, alors $\hat{\mathcal{E}}$ est métrisable.

Soit C un espace topologique séparé. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow C$. On dira que $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow C$ est un *prolongement* de f à $\tilde{\mathcal{E}}$ si $\tilde{f} \circ g = f$. Le prolongement continu est unique s'il existe. On dit qu'une compactification (g_1, \mathcal{E}_1) de \mathcal{E}

est *plus fine* qu'une compactification (g_2, \mathcal{E}_2) de \mathcal{E} si g_2 possède un (unique) prolongement continu h à \mathcal{E}_1 (qu'on appellera le *morphisme canonique*). On a alors $h(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$ et $h(\partial_\infty \mathcal{E}_1) = \partial_\infty \mathcal{E}_2$. Les compactifications \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont *isomorphes* (i.e. \mathcal{E}_1 est plus fine que \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_2 est plus fine que \mathcal{E}_1) si et seulement si h est un homéomorphisme. La compactification d'Alexandroff est la compactification la moins fine.

Compactifier hors d'un compact. Soit K un compact de \mathcal{E} et \mathcal{F} le complémentaire de $\overset{\circ}{K}$ dans \mathcal{E} . Soit $(h, \tilde{\mathcal{F}})$ une compactification de \mathcal{F} . Soit $\tilde{\mathcal{E}}$ l'espace topologique obtenu en recollant K et $\tilde{\mathcal{F}}$ sur le fermé ∂K au moyen de $h|_{\partial K}$, et g l'application de \mathcal{E} dans $\tilde{\mathcal{E}}$, égale à id sur K et à h sur \mathcal{F} . On voit facilement que $(g, \tilde{\mathcal{E}})$ est une compactification de \mathcal{E} , dite *induite* par $(h, \tilde{\mathcal{F}})$, dont le bord $\partial_\infty \tilde{\mathcal{E}}$ s'identifie à celui de $\tilde{\mathcal{F}}$. Si $(h, \tilde{\mathcal{F}})$ provient (par restriction) d'une compactification $(g, \tilde{\mathcal{E}})$ de \mathcal{E} , alors la compactification de \mathcal{E} induite par $(h, \tilde{\mathcal{F}})$ est isomorphe à la compactification de départ $(g, \tilde{\mathcal{E}})$.

Compactification induite par une application continue. Soit C un espace topologique séparé et f une application continue de \mathcal{E} dans C d'image relativement compacte. Soit $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de \mathcal{E} . Soit g l'application continue de \mathcal{E} dans $\hat{\mathcal{E}} \times C$ qui à x associe $(x, f(x))$, et $\tilde{\mathcal{E}}$ l'adhérence de $g(\mathcal{E})$, qui est compacte, et de la forme $\tilde{\mathcal{E}} = g(\mathcal{E}) \cup (\{\infty\} \times B)$ avec $B \subset C$. Alors $(g, \tilde{\mathcal{E}})$ est une compactification de \mathcal{E} , dite *associée à* ou *induite par* f , dont le bord s'identifie à $B \subset C$. Soit C' un autre espace topologique séparé et $h : C \rightarrow C'$ continue. Alors $f' = h \circ f$ induit une compactification $(g', \tilde{\mathcal{E}}')$ de \mathcal{E} moins fine que $\tilde{\mathcal{E}}$.

Plus généralement, supposons que $f : E \rightarrow C$ est seulement définie sur le complémentaire $\mathcal{E} - A$ d'une partie relativement compacte A de \mathcal{E} , continue, et d'image relativement compacte à l'infini, i.e il existe un compact K de E tel que $f(E - K)$ est relativement compact dans C . Alors, d'après ce qui précède, pour tout compact K de \mathcal{E} contenant A dans son intérieur avec $f(E - \overset{\circ}{K})$ compact, f définit une compactification $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F} = \mathcal{E} - \overset{\circ}{K}$, donc une compactification $\tilde{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} , dite *induite par* f . Cette compactification ne dépend pas du choix de K (à isomorphisme près).

Si \mathcal{E} et C sont à base dénombrable, alors $\tilde{\mathcal{E}}$ est métrisable. Une suite x_n de \mathcal{E} converge dans $\tilde{\mathcal{E}}$ vers un point b du bord de $\tilde{\mathcal{E}}$ identifié à $B \subset C$ si et seulement si x_n sort de tout compact de \mathcal{E} et $f(x_n)$ converge vers b dans C .

2 Modèle algébrique du cône asymptotique.

Cette section est consacrée à montrer que, si $G = \text{SL}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et si X_ω est un cône asymptotique de l'espace symétrique de type non compact X associé à G , alors X_ω s'identifie par un isomorphisme équivariant

à l'immeuble de Bruhat-Tits Δ_ω du groupe linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$ (théorème 2.7), pour un corps valué \mathbb{K}_ω qu'on construit préalablement. Ce résultat nous a été communiqué par B. Leeb [Lee].

La preuve repose sur l'utilisation du modèle des normes euclidiennes sur \mathbb{K}^n pour X et du modèle des normes ultramétriques sur \mathbb{K}_ω^n pour Δ_ω (voir section 1.5). L'isomorphisme équivariant de X_ω dans Δ_ω est construit en associant de manière naturelle à toute suite ω -bornée de normes euclidiennes sur \mathbb{K}^n une norme ultramétrique sur l'espace vectoriel \mathbb{K}_ω^n .

Le résultat analogue dans le cas où $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, avec \mathbb{K} un corps ultramétrique, où X est l'immeuble de Bruhat-Tits de G , s'obtient de la même manière, grâce au modèle des normes ultramétriques pour X . Le vocabulaire des "bonnes normes" de volume 1 sur \mathbb{K}^n pour l'espace X (voir section 1.5) permet un traitement uniforme et simultané de ces deux cas.

On suppose donc que \mathbb{K} est un corps valué ou bien égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} ou bien ultramétrique. On note $|\cdot|$ la valeur absolue de \mathbb{K} . On se fixe un ultrafiltre ω sur \mathbb{N} plus fin que le filtre de Fréchet, et une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels positifs (supérieurs à 1) tendant vers l'infini.

Si E est un ensemble, on notera E^* son *ultraproduit*, c'est-à-dire l'ensemble des suites d'éléments de E , modulo égalité ω -presque partout. On note $\langle a_k \rangle$ la classe de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ modulo égalité ω -presque partout. L'ensemble E se plonge canoniquement dans son ultraproduit E^* via les suites constantes. On identifiera E et son image lorsque cela n'engendre pas de confusion.

2.1 Le corps \mathbb{K}_ω .

Comme \mathbb{K} est un corps, son ultraproduit \mathbb{K}^* , muni de l'addition et de la multiplication terme à terme, est un corps.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la relation \leq définie, pour tous $a = \langle a_k \rangle$ et $b = \langle b_k \rangle$ dans \mathbb{R}^* , par

$$a \leq b \text{ si et seulement si } a_k \leq b_k \text{ } \omega\text{-presque partout}$$

fait de \mathbb{R}^* un corps totalement ordonné. De plus, pour tout a positif dans \mathbb{R}^* , il existe un unique élément \sqrt{a} positif de \mathbb{R}^* de carré a .

Soit v l'application de \mathbb{K}^* privé de 0 dans $[-\infty, +\infty]$ qui à $a = \langle a_k \rangle$ associe $v(a) = -\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \log |a_k|$ (qui est bien définie car a_k est non nul pour ω -presque tout k). Pour $a = \langle a_k \rangle \in \mathbb{K}^*$, notons $|a|_\lambda = e^{-v(a)} = \lim_\omega |a_k|^{1/\lambda_k}$. On a les propriétés suivantes, i.e. v est une pseudo-valuation de \mathbb{K}^* , triviale sur \mathbb{K} , et $|\cdot|_\lambda$ est la pseudo-valeur absolue ultramétrique sur \mathbb{K}^* associée à v (à valeurs dans $[0, +\infty]$).

Proposition 2.1.

1. $v(\langle t \rangle) = 0$ (ou encore $|\langle t \rangle|_\lambda = 1$) pour tout $t \in \mathbb{K}$ non nul.

2. $v(ab) = v(a) + v(b)$ (ou encore $|ab|_\lambda = |a|_\lambda |b|_\lambda$) pour tous a, b dans \mathbb{K}^* tels que $v(a), v(b) > -\infty$.
3. $v(a + b) \geq \min \{v(a), v(b)\}$ (ou encore $|a + b|_\lambda \leq \max(|a|_\lambda, |b|_\lambda)$) pour tous a, b dans \mathbb{K}^* .

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a de plus les propriétés suivantes,

4. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $0 \leq b \leq a$, on a $v(a) \leq v(b)$ (ou encore $|b|_\lambda \leq |a|_\lambda$).
5. Pour tous a et b positifs dans \mathbb{R}^* , on a $|a + b|_\lambda = \max(|a|_\lambda, |b|_\lambda)$.
6. Pour tous a_1, \dots, a_n positifs dans \mathbb{R}^* , on a $\left| \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right|_\lambda = \max_{i=1 \dots n} |a_i|_\lambda$.

Démonstration. Les affirmations 1 et 2 sont faciles à démontrer. L'assertion 3 est claire dans le cas où \mathbb{K} est ultramétrique. Supposons maintenant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'assertion 4 est immédiate. Montrons l'assertion 3. Soient $(a_k), (b_k)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On peut supposer que $|b_k| \leq |a_k|$ ω -presque partout. On a alors $|a_k + b_k| \leq 2|a_k|$ ω -presque partout, c'est-à-dire $0 \leq \langle |a_k + b_k| \rangle \leq 2\langle |a_k| \rangle$, d'où $v(\langle a_k + b_k \rangle) \geq v(\langle a_k \rangle)$ par 4, 2 et 1, donc on a le résultat souhaité. L'affirmation 5 découle de 4 et 3, et 6 découle de 5 et 2 (qui entraîne que $|\sqrt{a}|_\lambda = \sqrt{|a|}_\lambda$ pour tout élément a positif de \mathbb{R}^*). \square

Les éléments a de \mathbb{K}^* tels que $|a|_\lambda < +\infty$ forment un sous-anneau de \mathbb{K}^* qu'on notera \mathbb{K}' . Les éléments a de \mathbb{K}^* tels que $|a|_\lambda = 0$ forment un idéal maximal de \mathbb{K}' qu'on notera \mathbb{K}_0 . On notera \mathbb{K}_ω le corps quotient de l'anneau \mathbb{K}' par son idéal maximal \mathbb{K}_0 . Si $(a_k)_k$ est une suite dans \mathbb{K} telle que la suite $|a_k|^{1/\lambda_k}$ est ω -majorée dans \mathbb{R} , on note $[a_k]$ l'élément de \mathbb{K}_ω associé. Le corps \mathbb{K} se plonge canoniquement dans \mathbb{K}_ω via les suites constantes. On identifiera \mathbb{K} et son image lorsque cela n'engendre pas de confusion.

L'application de \mathbb{K}_ω privé de 0 dans \mathbb{R} induite par v est une valuation de \mathbb{K}_ω , triviale sur \mathbb{K} , qu'on notera également v . L'application de \mathbb{K}_ω dans \mathbb{R}_+ induite par $|\cdot|_\lambda$ est la valeur absolue ultramétrique sur \mathbb{K}_ω associée à v . On la notera également $|\cdot|_\lambda$.

On notera que, si d_k désigne la distance sur \mathbb{K} induite par la valeur absolue $|\cdot|^{1/\lambda_k}$ et d_ω désigne la distance sur \mathbb{K}_ω induite par la valeur absolue $|\cdot|_\lambda$, alors l'espace métrique pointé $(\mathbb{K}_\omega, d_\omega, 0)$ est l'ultralimite des espaces métriques pointés $(\mathbb{K}, d_k, 0)$ (en particulier \mathbb{K}_ω est complet).

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le corps \mathbb{K}_ω est totalement ordonné et la valuation v est compatible avec l'ordre.

Toutes les propriétés énoncées dans la proposition 2.1 ci-dessus sont encore vraies si on remplace \mathbb{K}^* par \mathbb{K}_ω .

2.2 L'espace vectoriel $V_\omega = \mathbb{K}_\omega^n$.

L'espace vectoriel $V = \mathbb{K}^n$ sur \mathbb{K} est muni de sa bonne norme canonique ν_0 (voir section 1.5). On note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique. L'ensemble V^* des suites de vecteurs de V , modulo égalité ω -presque partout, muni des opérations terme à terme, est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K}^* .

Notons $\eta_0 = \lim_\omega \nu_0^{1/\lambda_k}$ l'application de V^* dans $[0, +\infty]$ qui à $v = \langle v_k \rangle$ dans V^* associe

$$\eta_0(v) = \lim_\omega \nu_0(v_k)^{1/\lambda_k} = |\langle \nu_0(v_k) \rangle|_\lambda$$

ou encore $\log \eta_0(v) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \log \nu_0(v_k)$. On vérifie aisément que η_0 est une pseudo-norme ultramétrique sur V^* .

On dira qu'une suite de vecteurs v_k de V est ω -bornée (resp. ω -nulle) si $\nu_0(v_k)^{1/\lambda_k}$ est ω -borné dans \mathbb{R}_+ (resp. tend vers 0 suivant le filtre ω), autrement dit si le vecteur correspondant $v = \langle v_k \rangle$ de V^* est de pseudo-norme η_0 finie (resp. nulle). Les suites constantes sont clairement ω -bornées. On note V' (resp. V_0) le sous-espace vectoriel de V^* formé par les suites ω -bornées (resp. ω -nulles) dans V . L'espace vectoriel quotient $V_\omega = V'/V_0$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K}_ω et η_0 passe au quotient en une norme ultramétrique sur V_ω qu'on notera également η_0 . On note $[v_k]$ le vecteur de V_ω défini par une suite (v_k) ω -bornée de vecteurs dans V . Pour $i = 1 \dots n$, on notera $e^i = [e_i]$ le vecteur de V_ω défini par la suite constante égale au i -ième vecteur de la base canonique de V . La famille $\mathcal{E}^\omega = (e^1, \dots, e^n)$ forme une base de V_ω , qu'on appellera la base canonique de V_ω .

Proposition 2.2. *L'isomorphisme canonique de \mathbb{K}_ω -espaces vectoriels*

$$f : (\mathbb{K}_\omega)^n \xrightarrow{\sim} V_\omega$$

induit par la base \mathcal{E}^ω conserve la norme, c'est-à-dire que la norme $\eta_0 \circ f$ est la norme ultramétrique canonique sur $(\mathbb{K}_\omega)^n$, i.e., pour tout u de V_ω de coordonnées (a_1, \dots, a_n) dans la base canonique, on a

$$\eta_0(u) = \max_{i=1 \dots n} |a_i|_\lambda$$

Démonstration. Dans le cas où \mathbb{K} est ultramétrique, cela vient directement de l'expression de la bonne norme canonique ν_0 de $V = \mathbb{K}^n$, qui est

$$\nu_0(a_1, \dots, a_n) = \max_{i=1 \dots n} |a_i|$$

pour tous a_1, \dots, a_n dans \mathbb{K} .

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , pour tous $a_1 = [a_1^k], \dots, a_n = [a_n^k]$ dans \mathbb{K}_ω , on a, dans la base canonique de V_ω ,

$$\eta_0(a_1, \dots, a_n) = \left| \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i^k|^2} \right] \right|_\lambda = \left| \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho_i^2} \right|_\lambda$$

où $\rho_i = [|a_i^k|] \in \mathbb{R}_\omega$ pour tout i . On conclut par l'assertion 6 de la proposition 2.1. \square

2.3 Le groupe $SL_n(\mathbb{K}_\omega)$.

L'algèbre $\text{End}(V)$ des endomorphismes de $V = \mathbb{K}^n$ est munie de la norme d'endomorphismes N associée à la bonne norme canonique ν_0 de V . L'ensemble $\text{End}(V)^*$ des suites dans $\text{End}(V)$, modulo égalité ω -presque partout, muni des opérations terme à terme, est une algèbre sur le corps \mathbb{K}^* .

Notons $N^\omega = \lim_\omega N^{1/\lambda_k}$ l'application de $\text{End}(V)^*$ dans $[0, +\infty]$ qui à $u = \langle u_k \rangle$ dans $\text{End}(V)^*$ associe

$$N^\omega(u) = \lim_\omega N(u_k)^{1/\lambda_k} = |\langle N(u_k) \rangle|_\lambda .$$

On vérifie aisément que N^ω est une pseudo-norme ultramétrique sous-multiplicative sur l'algèbre $\text{End}(V)^*$. On dira qu'une suite d'endomorphismes u_k de V est ω -bornée dans $\text{End}(V)$ (resp. ω -nulle) si $N(u_k)^{1/\lambda_k}$ est ω -borné dans \mathbb{R}_+ (resp. tend vers 0 suivant le filtre ω), autrement dit si l'élément correspondant $u = \langle u_k \rangle$ de $\text{End}(V)^*$ est de pseudo-norme N^ω finie (resp. nulle). On note $\text{End}(V)'$ la sous-algèbre de $\text{End}(V)^*$ formé par les suites ω -bornées dans $\text{End}(V)$. On note $\text{End}(V)_0$ l'idéal de $\text{End}(V)'$ formé par les suites ω -nulles dans $\text{End}(V)$. Le quotient $\text{End}(V)_\omega = \text{End}(V)' / \text{End}(V)_0$ est une algèbre sur \mathbb{K}_ω , et N^ω passe au quotient en une norme ultramétrique sous-multiplicative sur $\text{End}(V)_\omega$ qu'on notera également N^ω . On note $[u_k]$ l'élément de $\text{End}(V)_\omega$ défini par une suite (u_k) ω -bornée dans $\text{End}(V)$.

Soit $u = \langle u_k \rangle$ dans $\text{End}(V)^*$. On lui associe canoniquement l'endomorphisme de V^*

$$\psi(u) : \langle v_k \rangle \mapsto \langle u_k(v_k) \rangle .$$

On note \tilde{N} la pseudo-norme d'endomorphismes sur $\text{End}(V^*)$ associée à la pseudo-norme η_0 de V^* . On a alors

Proposition 2.3. $\tilde{N}(\psi(u)) = N^\omega(u)$.

Démonstration. En effet, pour tout v de V^* ,

$$\eta_0(\psi(u)(v)) \leq N^\omega(u)\eta_0(v), \quad (4)$$

donc $\tilde{N}(\psi(u)) \leq N^\omega(u)$. De plus, si v_k est une suite de vecteurs de V , de normes $\nu_0(v_k) = 1$, telle que $\nu_0(v_k) \geq \frac{1}{2}N(u_k)\nu_0(v_k)$, alors si $v = \langle v_k \rangle \in V^*$, on a $\eta_0(\psi(u)(v)) \geq N^\omega(u)\eta_0(v)$, et donc $\tilde{N}(\psi(u)) \geq N^\omega(u)$. \square

Par conséquent, si la suite (u_k) est ω -bornée dans $\text{End}(V)$, c'est-à-dire si $N^\omega(u) < +\infty$, alors $\psi(u)$ conserve les sous-espaces V' des vecteurs de V^* de pseudo-norme η_0 finie et V_0 des vecteurs de V^* de pseudo-norme η_0 nulle. Par conséquent, $\psi(u)$ passe au quotient en un endomorphisme de $V_\omega = V' / V_0$, qu'on notera encore $\psi(u)$. De plus, si $N^\omega(u) = 0$, alors $\psi(u) = 0$ dans $\text{End}(V_\omega)$ par (4). L'application ψ passe donc au quotient en un morphisme de \mathbb{K}_ω -algèbres de $\text{End}(V)_\omega$ dans $\text{End}(V_\omega)$, qu'on notera également ψ . On résume les propriétés de ψ dans les propositions suivantes.

Proposition 2.4. Soit $u = [u_k]$ dans $\text{End}(V)_\omega$. On note $\psi(u)$ l'endomorphisme $[v_k] \mapsto [u_k(v_k)]$ de V_ω .

1. Soit $(a^{ij})_{ij}$ a matrice de $\psi(u)$ dans la base canonique \mathcal{E}^ω de V_ω , et $(a_k^{ij})_{ij}$ la matrice de u_k dans la base canonique de \mathbb{K}^n , pour tout k . Alors, pour tous i, j on a

$$a^{ij} = \left[a_k^{ij} \right]_k .$$

2. On a $\det \psi(u) = [\det u_k]$ dans \mathbb{K}_ω .

3. $\tilde{N}(\psi(u)) = N^\omega(u) = \max_{ij} |a^{ij}|_\lambda$. □

Proposition 2.5. 1. L'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \text{End}(V)_\omega & \longrightarrow & \text{End}(V_\omega) \simeq M_n(\mathbb{K}_\omega) \\ u & \mapsto & \psi(u) \end{array}$$

est un isomorphisme de \mathbb{K}_ω -algèbres normées.

2. Elle induit un isomorphisme de groupes

$$\psi : \text{SL}_n(\mathbb{K})_\omega \longrightarrow \text{SL}_n(\mathbb{K}_\omega) . \quad \square$$

Remarque 2.6. 1) Soit \underline{G} un sous-groupe algébrique de SL_n défini sur \mathbb{K} et $G = \underline{G}(\mathbb{K})$. Soit G_ω le sous-groupe de $\text{SL}_n(\mathbb{K})_\omega$ constitué par les classes de suites ω -bornées formées d'éléments de G . L'image du sous-groupe G_ω par ψ est alors incluse dans le sous-groupe $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega)$ de $\text{GL}(\mathbb{K}_\omega^n)$ (rappelons que le corps \mathbb{K} est canoniquement plongé dans le corps \mathbb{K}_ω via les suites constantes).

2) Soit Γ un groupe de type fini, et S une partie génératrice de Γ . Soit $\rho_k : \Gamma \longrightarrow \underline{G}(\mathbb{K})$ une suite de représentations, telles que pour tout $s \in S$, la suite $\rho_k(s)$ des images de s est ω -bornée dans $\text{SL}_n(\mathbb{K})$. Alors la suite ρ_k induit une représentation $\rho_\omega : \Gamma \longrightarrow G_\omega$ définie par $\rho_\omega(\gamma) = [\rho_k(\gamma)]$ pour tout γ de Γ . Par la remarque précédente $\psi \circ \rho_\omega$ est alors une représentation de Γ dans $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega) \subset \text{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$.

2.4 Cône asymptotique et immeuble de $\text{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$.

Dans cette sous-section, G désigne le groupe $\text{SL}_n(\mathbb{K})$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , l'espace X désigne l'espace symétrique associé à $G = \text{SL}_n(\mathbb{K})$. Dans le cas où \mathbb{K} est ultramétrique, l'espace X désigne l'immeuble de Bruhat-Tits de $G = \text{SL}_n(\mathbb{K})$. L'espace X sera identifié à l'espace des bonnes normes de volume 1 sur $V = \mathbb{K}^n$, avec pour point-base x_0 la bonne norme canonique ν_0 de \mathbb{K}^n (voir section 1.5).

On considère le cône asymptotique $(X_\omega, *, d_\omega)$ de $(X, x_0, d_k = \frac{1}{\lambda_k}d)$. On note \mathcal{A} le système d'appartements marqués de X_ω . On appellera appartement maximal marqué *canonique* de X_ω la ω -limite $f_\mathcal{E}^\omega$ de la suite constante $(f_\mathcal{E})$ égale au plat maximal marqué canonique de X (associé à la base canonique \mathcal{E} de $V = \mathbb{K}^n$).

On note $G_\omega = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})_\omega \subset \mathrm{End}(V)_\omega$ (voir ci-dessus). Rappelons qu'il s'agit du quotient du groupe G' des suites $(g_k)_k$ ω -bornées dans G , c'est-à-dire telles que la limite $\lim_\omega N(g_k)^{1/\lambda_k}$ est finie, modulo égalité ω -presque partout, par le sous-groupe distingué G_0 des suites $(g_k)_k$ telles que $N(g_k - \mathrm{id})^{1/\lambda_k}$ tend vers 0 suivant l'ultrafiltre ω .

Le groupe G_ω agit naturellement sur l'immeuble X_ω par automorphismes. En effet, par la formule (3) de la section 1.5, une suite $(g_k)_k$ est ω -bornée dans G (i.e. $N(g_k)^{1/\lambda_k}$ est ω -borné) si et seulement si $\frac{1}{\lambda_k}d(x_0, g_k x_0)$ est ω -borné, c'est-à-dire si la suite des isométries correspondantes de X est ω -bornée. De plus, si $\lim_\omega N(g_k - \mathrm{id})^{1/\lambda_k} = 0$, alors l'automorphisme de g'_ω de X_ω induit par la suite ω -bornée $(g_k)_k$ est l'identité. En effet, soit ν_k une suite ω -bornée dans X , et η_ω son ω -limite dans X_ω . D'après le lemme 1.10, on a

$$\frac{1}{\lambda_k}d_\infty(\nu_k, g_k \nu_k) \leq \log \left(1 + e^{\frac{2}{\lambda_k}d_\infty(\nu_0, \nu_k)} \max \left\{ N(g_k - \mathrm{id})^{\frac{1}{\lambda_k}}, N(g_k^{-1} - \mathrm{id})^{\frac{1}{\lambda_k}} \right\} \right)$$

(car $\alpha \log(1+t) \leq \log(1+t^\alpha)$ pour $t \geq 0$ et $0 < \alpha \leq 1$), donc, comme $\frac{1}{\lambda_k}d_\infty(\nu_0, \nu_k)$ est ω -borné et $N(g_k - \mathrm{id})^{\frac{1}{\lambda_k}}$, donc aussi $N(g_k^{-1} - \mathrm{id})^{\frac{1}{\lambda_k}}$, tend vers 0 suivant ω , on en déduit que $\frac{1}{\lambda_k}d_\infty(\nu_k, g_k \nu_k)$ tend vers 0 suivant ω . On a donc $g'_\omega \eta_\omega = \eta_\omega$, ce qui conclut.

Soit Δ_ω l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, qu'on identifie à l'ensemble des bonnes normes de volume 1, sur l'espace vectoriel $V_\omega = \mathbb{K}_\omega^n$ (voir section 1.5). On note \mathcal{A}' le système d'appartements marqués de Δ_ω .

On note ψ l'isomorphisme canonique de G_ω sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$ (voir prop. 2.5).

Théorème 2.7. *Pour tout $x_\omega = [\nu_k]$ dans X_ω , on note $\eta_{x_\omega} = \lim_\omega \nu_k^{1/\lambda_k}$ l'application de $V_\omega = \mathbb{K}_\omega^n$ dans $[0, +\infty]$ qui à $u = [u_k]$ associe $\lim_\omega \nu_k(u_k)^{1/\lambda_k}$. L'application*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} X_\omega & \longrightarrow & \Delta_\omega \\ x_\omega & \longmapsto & \eta_{x_\omega} \end{array}$$

est un isomorphisme d'immeubles affines, ψ -équivariant.

Démonstration. Montrons tout d'abord que φ est bien définie. Pour toute suite $x = (\nu_k)_k$ de normes sur $V = \mathbb{K}^n$, on note $\eta_x = \lim_\omega \nu_k^{1/\lambda_k}$ l'application de V^* dans $[0, +\infty]$ qui à $u = \langle u_k \rangle$ associe $\lim_\omega \nu_k(u_k)^{1/\lambda_k} = |\langle \nu_k(u_k) \rangle|_\lambda$. On voit facilement que η_x est une pseudo-norme ultramétrique sur V^* , c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés $\eta_x(au) = |a|_\lambda \eta_x(u)$ et $\eta_x(u+w) \leq$

$\max\{\eta_x(u), \eta_x(w)\}$. Si $x = x_0$ est la suite constante égale à la bonne norme canonique ν_0 sur V , alors $\eta_x = \eta_0$ est la pseudo-norme ultramétrique canonique sur V^* .

On note $d_\infty^\omega = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} d_\infty$, qui est un écart (à valeurs dans $[0, +\infty]$) sur l'espace $\mathcal{N}(V)^\mathbb{N}$ des suites de normes sur V , équivalent à d_ω sur $X^\mathbb{N}$, car, comme $d_\infty \leq d \leq \sqrt{n} d_\infty$ sur X (voir section 1.5, formule (2)), on a $d_\infty^\omega \leq d_\omega \leq \sqrt{n} d_\infty^\omega$ sur $X^\mathbb{N}$.

Soient $x = (\nu_k)$ et $y = (\nu'_k)$ deux suites de normes sur V , telles que l'écart $d_\infty^\omega(x, y)$ est fini. Soit $v = \langle \nu_k \rangle$ un élément de V^* . Pour tout k , on a

$$0 \leq e^{-d_\infty^\omega(\nu_k, \nu'_k)} \nu'_k(v_k) \leq \nu_k(v_k) \leq e^{d_\infty^\omega(\nu_k, \nu'_k)} \nu'_k(v_k)$$

dans \mathbb{R} . Par conséquent, on a

$$0 \leq \langle e^{-d_\infty^\omega(\nu_k, \nu'_k)} \rangle \langle \nu'_k(v_k) \rangle \leq \langle \nu_k(v_k) \rangle \leq \langle e^{d_\infty^\omega(\nu_k, \nu'_k)} \rangle \langle \nu'_k(v_k) \rangle$$

dans \mathbb{R}^* , et, en prenant la pseudo-valeur absolue $|\cdot|_\lambda$ de chaque terme, on obtient

$$0 \leq e^{-d_\infty^\omega(x, y)} \eta_y(v) \leq \eta_x(v) \leq e^{d_\infty^\omega(x, y)} \eta_y(v) \quad (5)$$

dans $[0, +\infty]$, grâce aux propriétés de la pseudo-valeur absolue (cf. Prop. 2.1).

Supposons que la suite $x = (\nu_k)$ est ω -bornée dans X , c'est-à-dire que $d_\infty^\omega(x_0, x) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} d_\infty(\nu_0, \nu_k)$ est fini. En appliquant (5) à $y = x_0$, on a que $\eta_x(v)$ est fini si et seulement si $\eta_0(v)$ est fini et $\eta_x(v) = 0$ si et seulement si $\eta_0(v) = 0$. Donc η_x passe au quotient en une norme ultramétrique sur V_ω .

La formule (5) implique également que si l'écart $d_\infty^\omega(x, y)$ est nul, alors $\eta_x = \eta_y$. Par conséquent, la norme η_x ne dépend que du point x_ω du cône asymptotique X_ω défini par la suite $x = (\nu_k)$. Il est clair que cette norme ultramétrique est égale à l'application η_{x_ω} de l'énoncé.

On a donc vérifié que l'application

$$\varphi : X_\omega \longrightarrow \mathcal{NU}(V_\omega)$$

est bien définie, où $\mathcal{NU}(V_\omega)$ désigne l'espace des normes ultramétriques sur V_ω , qui contient l'espace Δ_ω des bonnes normes de volume 1.

Il est clair que cette application est ψ -équivariante. Il suffit maintenant de montrer que l'image par ψ de l'appartement marqué canonique $f = f_\mathcal{E}^\omega$ de X_ω est l'appartement marqué canonique $f' = f_{\mathcal{E}^\omega}$ de Δ_ω . En effet, G_ω agit transitivement sur les appartements marqués de X_ω , qui recouvrent X_ω , et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$ agit transitivement sur les appartements marqués de Δ_ω , qui recouvrent Δ_ω . Or φ est ψ -équivariante et $\psi(G_\omega) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$ (par la prop. 2.5). On a donc

$$\varphi(\mathcal{A}) = \varphi(G_\omega \cdot f) = \varphi(G_\omega) \cdot \varphi \circ f = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega) \cdot f' = \mathcal{A}'$$

ce qui entraîne que $\varphi(X_\omega) = \Delta_\omega$ et que φ est un automorphisme d'immeubles.

Montrons donc que, si $f = f_{\mathcal{E}}^\omega : \mathbb{A} \rightarrow X_\omega$ est l'appartement marqué canonique de X_ω , alors l'application $\varphi \circ f$ est égale à l'appartement marqué canonique $f' = f_{\mathcal{E}^\omega}$ de Δ_ω .

Par définition, f est la ω -limite de la suite constante $(f_{\mathcal{E}})$ égale au plat maximal marqué canonique de X . Rappelons que $f_{\mathcal{E}}$ est le plat maximal marqué associé à la base canonique $\mathcal{E} = e_1, \dots, e_n$ de $V = \mathbb{K}^n$, et qu'on a $f(\alpha) = [f_{\mathcal{E}}(\lambda_k \alpha)]$ pour tout α de \mathbb{A} .

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un élément de \mathbb{A} . Notons ν_k l'image par $f_{\mathcal{E}}$ de $\lambda_k \alpha$, qui est l'unique bonne norme admettant \mathcal{E} pour base adaptée et vérifiant $\nu_k(e_i) = e^{\lambda_k \alpha_i}$ pour $i = 1 \dots n$. Par définition de f , on a que l'image de α par f est le point $x_\omega = [\nu_k]$ de X_ω associé à la suite (ν_k) . Soit $\eta_{x_\omega} = \varphi(x_\omega)$ la norme ultramétrique sur \mathbb{K}_ω^n associée à x_ω . Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ dans \mathbb{K}_ω^n avec $a_1 = [a_k^1], \dots, a_n = [a_k^n]$ dans \mathbb{K}_ω .

Dans le cas où \mathbb{K} est ultramétrique, on a

$$\begin{aligned} \eta_{x_\omega}(a) &= |[\nu_k(a_k^1, \dots, a_k^n)]|_\lambda = \left| \left[\max_{i=1 \dots n} e^{\lambda_k \alpha_i} |a_k^i| \right] \right|_\lambda \\ &= \left| \max_{i=1 \dots n} [e^{\lambda_k \alpha_i}] [|a_k^i|] \right|_\lambda = \max_{i=1 \dots n} e^{\alpha_i} |a_i|_\lambda \end{aligned}$$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on a

$$\begin{aligned} \eta_{x_\omega}(a) &= |[\nu_k(a_k^1, \dots, a_k^n)]|_\lambda = \left| \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n e^{\lambda_k \alpha_i} |a_k^i|^2} \right] \right|_\lambda \\ &= \left| \sqrt{\sum_{i=1}^n [e^{\lambda_k \alpha_i}] [|a_k^i|]^2} \right|_\lambda = \max_{i=1 \dots n} e^{\alpha_i} |a_i|_\lambda \end{aligned}$$

Par conséquent η_ω est l'image de α par l'appartement marqué f' associé à la base canonique \mathcal{E}^ω de \mathbb{K}_ω^n . \square

3 Vecteur de translation.

3.1 Vecteur de translation d'une isométrie.

Soit X un espace symétrique sans facteur compact et x_0 un point de X . Soit $G = \text{Aut}(X)$ le groupe des automorphismes de X . On fixe un plat maximal modèle \mathbb{A} de X , de groupe de Weyl \overline{W} , et une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} . Le type dans $\overline{\mathcal{C}}$ d'un segment $[x, y]$ de X est noté $\Theta(x, y)$ ou Θxy (voir section 1.4). Rappelons que c'est une application continue, et que les automorphismes de X préservent le type des segments.

Proposition 3.1. *Soit g dans G . L'adhérence dans $\overline{\mathcal{C}}$ de $\{\Theta(x, gx), x \in X\}$ contient un unique segment de longueur minimale (donc égale à la longueur*

de translation $\ell(g)$ de g), qu'on note $v(g)$, et qu'on appelle vecteur de translation de g .

Démonstration. L'existence est claire. On a $\|\Theta(x, gx)\| = d(x, gx) = d_g(x)$ pour tout x de X , donc la borne inférieure des longueurs de $\Theta(x, gx)$, pour $x \in X$, est égale à la longueur de translation $\ell(g) = \inf_{x \in X} d_g(x)$ de g . L'unicité découle donc du lemme ci-dessous et de la proposition 1.8.

Lemme 3.2. *Soit g dans G et $g = heu$ la décomposition de Jordan de g avec h hyperbolique, e elliptique et u unipotent commutant deux à deux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout p de X , si $d_g(p) \leq \ell(g) + \eta$, alors*

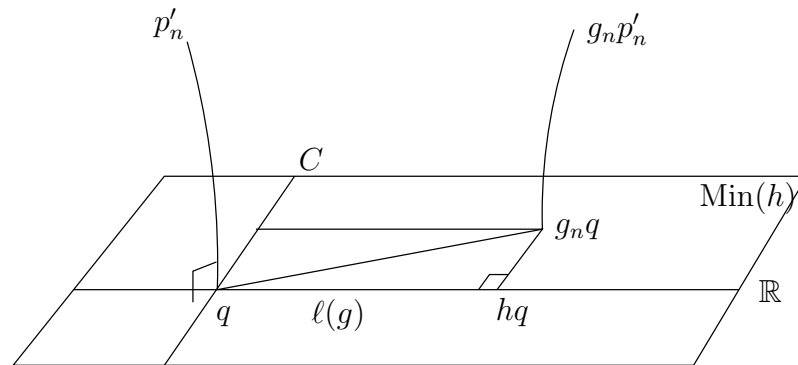
- (i) $d(p, \text{Min}(h)) \leq \varepsilon$,
- (ii) si q est la projection orthogonale de p sur $\text{Min}(h)$, alors $d(gq, hq) \leq \varepsilon$.
En particulier, on a $d(gp, hp) \leq 3\varepsilon$.

Preuve du lemme. C'est trivialement vrai si $\ell(g) = 0$, car alors $h = \text{id}$ et $\text{Min}(h) = X$. Supposons que $\ell(g)$ est strictement positif.

Rappelons que si q est la projection orthogonale d'un point p sur $\text{Min}(h)$ on a $d_g(q) \leq d_g(p)$ et $d_g(q) = \sqrt{\ell(g)^2 + d(gq, hq)^2}$ (cf prop. 1.5). Le (ii) en découle, en prenant $\eta \leq \varepsilon$.

Pour le (i), on fixe $\varepsilon > 0$ et on raisonne par l'absurde. Sinon il existe une suite p_n de points de X telle que $d_g(p_n)$ tend vers $\ell(g)$, et que $d(p_n, \text{Min}(h)) \geq \varepsilon$. On note q_n la projection orthogonale de p_n sur $\text{Min}(h)$. Alors $d(hq_n, gq_n)$ tend vers 0.

Fixons un point q de $\text{Min}(h)$. Comme le commutateur $Z(h)$ de h agit transitivement sur $\text{Min}(h)$ (voir par exemple [Ebe, Prop. 4.1.4]), on peut choisir une suite $z_n \in Z(h)$ telle que $z_n q_n = q$. Soit $p'_n = z_n p_n$ et $g_n = z_n g z_n^{-1}$ pour tout n . Alors $g_n q$ tend vers hq . Comme p'_n ne tend pas vers q , quitte



à extraire, le rayon géodésique r_n issu de q et passant par p'_n converge vers un rayon r orthogonal à $\text{Min}(h)$ en q , et son image r'_n par g_n converge vers un rayon r' issu de hq et orthogonal à $\text{Min}(h)$. Pour $0 < t < \varepsilon$ et n suffisamment grand, la distance $d_{g_n}(r_n(t))$ entre $r_n(t)$ et $r'_n(t)$ est comprise

entre $\ell(g_n) = \ell(g)$ et $d(p'_n, g_n p'_n) = d_{g_n}(p'_n) = d_g(p_n)$, qui converge vers $\ell(g)$. La distance entre $r(t)$ et $r'(t)$ est donc égale à $\ell(g) = d(q, hq)$. Par conséquent, la géodésique passant par $r(t)$ et $r'(t)$ est parallèle à celle passant par q et hq , qui est translatée par h . On a donc $r(t) \in \text{Min}(h)$, ce qui est impossible car r est orthogonal à $\text{Min}(h)$. \square

Fin de la preuve de la proposition 3.1. Par conséquent, si $p \in X$ est tel que $d_g(p) \leq \ell(g) + \eta$ et si q est la projection orthogonale de p sur $\text{Min}(h)$, alors la proposition 1.8 entraîne que $\|\Theta_g(p) - \Theta_g(q)\| \leq 2d(p, q) \leq 2\varepsilon$ et $\|\Theta_g(q) - \Theta_h(q)\| \leq d(gq, hq) \leq \varepsilon$. On en déduit que $\|\Theta_g(p) - \Theta_h(q)\| \leq 3\varepsilon$. On conclut en remarquant que le type du segment joignant un point q à son image par h est constant sur $\text{Min}(h)$, car, si q et q' sont dans $\text{Min}(h)$, alors q, hq, hq', q' bordent un parallélogramme plat. \square

Remarque. La notion de vecteur de translation est plus fine que celle de longueur de translation (car $v(g)$ est de norme $\ell(g)$). On remarque que v est invariante par conjugaison, et que, si g est semisimple, on a $v(g) = \Theta(x, gx)$ pour tout x de $\text{Min}(g)$. On a $v(g) = v(h)$ où h est la partie hyperbolique dans la décomposition de Jordan de g . Pour tout g , on a $v(g^N) = Nv(g)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. C'est donc en fait, bien que présenté différemment, le même invariant que celui noté $\lambda(g)$ dans [Ben].

Exemple. Pour $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, on peut choisir

$$\bar{\mathcal{C}} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}$$

et pour $g \in G$, on a alors que $v(g)$ est la suite des logarithmes des modules des valeurs propres de g , par ordre décroissant (car $v(g) = v(h)$ où h est la partie hyperbolique dans la décomposition de Jordan, c'est-à-dire diagonalisable à valeurs propres réelles positives, et les valeurs propres de h sont les modules des valeurs propres de g). Il ne reste plus qu'à calculer v pour une matrice d diagonale à coefficients positifs, ce qui est aisé car $x_0 = I \in \text{Min}(d)$.

Cette notion est définie de manière analogue pour les automorphismes d'un immeuble affine complet Δ (voir section 1.3), pour lesquels la situation est plus simple car ils sont tous semisimples (cf. Theo. 1.6). On note G le groupe $\text{Aut}(X)$. On fixe un plat maximal modèle \mathbb{A} de X , de groupe de Weyl \bar{W} , et une chambre de Weyl fermée $\bar{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} . Le type dans $\bar{\mathcal{C}}$ d'un segment $[x, y]$ de X est noté $\Theta(x, y)$ ou Θxy (voir section 1.4). Soit $g \in G$. Alors, par définition, $v(g) = \Theta(x, gx)$ pour un (tout) point x dans l'ensemble minimal de translation de g (qui est non vide car g est toujours semisimple). On a toujours $\|v(g)\| = \ell(g)$, v invariante par conjugaison, et $v(g^N) = Nv(g)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Si X est euclidien, alors on a $\bar{\mathcal{C}} = \mathbb{A} = X$, et tout automorphisme g de X est une translation de vecteur $v(g)$.

Supposons que $X = X_1 \times X_2$ est le produit de deux espaces symétriques ou immeubles affines X_i . Soit G_i le groupe des automorphismes de X_i . Soit $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ les plats maximaux de X_1 et X_2 tels que $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$, et $\overline{\mathfrak{C}}_1$ et $\overline{\mathfrak{C}}_2$ les chambres de Weyl fermées de \mathbb{A}_1 et \mathbb{A}_2 telles que $\overline{\mathfrak{C}} = \overline{\mathfrak{C}}_1 + \overline{\mathfrak{C}}_2$. Soit $v_i : G_i \rightarrow \overline{\mathfrak{C}}_i$ la fonction vecteur de translation de X_i . Alors tout automorphisme g de X est de la forme (g_1, g_2) où $g_i \in G_i$, et, d'après la section 1.4, on a

$$v(g) = v_1(g_1) + v_2(g_2). \quad (6)$$

Soit X' un sous-espace symétrique ou un sous-immeuble de X . Soit G' le groupe des automorphismes de X' . Soit $\overline{\mathfrak{C}}'$ une chambre de Weyl fermée de X' . Soit $v' : G' \rightarrow \overline{\mathfrak{C}}'$ la fonction vecteur de translation de X' . Si g est un automorphisme de X tel que $g' = g|_{X'}$ est un automorphisme de X' , alors, d'après la section 1.4, on a

$$v(g) = \Theta \circ v'(g') \quad (7)$$

Proposition 3.3. *Soit X un espace symétrique sans facteur compact (resp. un immeuble affine propre). Le groupe G des automorphismes de X est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. La fonction v de G dans $\overline{\mathfrak{C}}$ est continue.*

Remarque. Ceci entraîne que, lorsque X n'a pas de facteur euclidien, la longueur de translation est continue sur $\text{Isom}(X)_0$. Cette propriété n'est pas vraie pour tous les espaces métriques CAT(0). Par exemple, dans le plan euclidien, les translations non nulles sont limites de rotations.

Remarque. Pour $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, il s'agit de voir que les modules des valeurs propres dépendent continûment de la matrice A , ce qui est bien connu.

Dans le cas général, nous allons donner maintenant une démonstration purement géométrique, reposant sur la dynamique des isométries sur le bord à l'infini de X .

Démonstration. Soit $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans G , de limite g . Montrons que la suite des vecteurs de translation $v(g_k)$ de g_k possède une sous-suite convergeant vers $v(g)$ (cette propriété équivaut à la continuité de v en g).

Dans le cas où X est un immeuble affine, par le théorème 1.6, $\text{Min}(g_k)$ reste à distance bornée du point-base x_0 , et la conclusion est aisée. Considérons en effet une suite $(x_k)_k$ bornée dans X avec $x_k \in \text{Min}(g_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme l'espace X est propre, il existe une sous-suite $(x_{k_j})_j$ de $(x_k)_k$ qui converge vers $x \in X$. Le lemme 1.1 entraîne que x appartient à $\text{Min}(g)$. Par conséquent $\Theta_g(x) = v(g)$. La suite des fonctions $\Theta_{g_k} : X \rightarrow \overline{\mathfrak{C}}$ (cf. section 1.4) converge uniformément vers Θ_g sur les compacts de X (cf. prop.

1.9). Par conséquent la suite $v(g_{k_j}) = \Theta_{g_{k_j}}(x_{k_j})$ converge vers $\Theta_g(x) = v(g)$ dans $\overline{\mathcal{C}}$, ce qui conclut.

Dans le cas où X est un espace symétrique sans facteur compact, l'ensemble minimal de g_k peut être vide ou partir à l'infini. La démonstration est plus délicate.

Si $\ell(g) = 0$, alors, par semi-continuité supérieure de la longueur de translation, la longueur de translation $\ell(g_k)$ de g_k tend nécessairement vers 0 et donc $v(g_k) \rightarrow 0$ (car $v(g_k)$ est de longueur $\ell(g_k)$), ce qui conclut.

Supposons que la longueur de translation $\ell(g)$ de g est strictement positive. Soient ξ^+ et ξ^- comme dans la proposition 1.5, et $F = F_{\xi^-\xi^+}$ le sous-espace convexe fermé de X formé par la réunion des géodésiques de ξ^- à ξ^+ . Soit p un point de F . Soit $D > 0$ et $O_{\xi^-}(p, D)$ l'ombre sur le bord de X de la boule fermée $B(p, D)$, vue du point ξ^- , c'est-à-dire l'ensemble des extrémités (dans ∂X) des géodésiques issues de ξ^- , et passant à distance inférieure à D de p . C'est un voisinage de ξ^+ dans son orbite $G\xi^+$, qui est une variété (cf. section 1.2). Soit B une boule topologique fermée, contenue dans $O_{\xi^-}(p, D)$, contenant ξ^+ dans son intérieur. D'après la proposition 1.5, il existe N tel que l'image par g^N de $O_{\xi^-}(p, D)$ est incluse dans l'intérieur de B .

Si $v(g_k^N)$ tend vers $v(g^N)$ quand k tend vers l'infini, alors $v(g_k)$ tend vers $v(g)$ quand k tend vers l'infini car pour tout $h \in G$ on a $v(h^N) = Nv(h)$. Quitte à remplacer g par g^N et g_k par g_k^N , on peut supposer que $g(B)$ est inclus dans l'intérieur de B . Comme l'action de G sur $G\xi^+$ est continue, il existe K tel que pour $k \geq K$, on a $g_k(B) \subset B$. Comme g_k est continue sur B , elle admet alors un point fixe ξ_k^+ dans B par le théorème de Brouwer. Quitte à extraire, la suite ξ_k^+ tend vers un point z de B , qui est fixé par g . Comme ξ^+ est le seul point fixe de g dans B (cf prop. 1.5), on a $z = \xi^+$.

Soit h_k un élément de G fixant ξ^- et envoyant p sur un point de $F_{\xi^-\xi_k^+}$ à distance inférieure à D de p (qui existe car ξ_k^+ est dans $O_{\xi^-}(p, D)$), donc envoyant ξ^+ sur ξ_k^+ . Quitte à extraire, h_k tend vers $h \in G$. La suite $h_k^{-1}g_k h_k$ tend vers $h^{-1}gh$, et $v(h_k^{-1}g_k h_k) = v(g_k)$ et $v(g) = v(h^{-1}gh)$. On peut donc supposer, quitte à remplacer g_k par $h_k^{-1}g_k h_k$ et g par $h^{-1}gh$, que $\xi_k^+ = \xi^+$, c'est-à-dire que g_k fixe ξ^+ pour k suffisamment grand. On peut aussi supposer (en échangeant les rôles de ξ^+ et ξ^-) que g_k fixe le point ξ^- pour k suffisamment grand.

L'espace F se décompose en un produit direct $C \times \mathbb{R}$, et g agit sur $F = C \times \mathbb{R}$ comme $(g', \ell(g))$, où $\ell(g)$ désigne la translation $s \mapsto s + \ell(g)$ de \mathbb{R} et g' est une isométrie de C (avec $\ell(g') = 0$) (voir prop. 1.5). De même, g_k agit sur F comme (g'_k, t_k) , où g'_k est une isométrie de C et t_k la translation de longueur t_k de \mathbb{R} , et on a $\ell(g_k) = \sqrt{\ell(g'_k)^2 + t_k^2} \geq t_k$ (voir section 1.1). Comme g_k tend vers g , on a $t_k \rightarrow \ell(g)$ (par exemple en considérant la projection orthogonale sur $\{p\} \times \mathbb{R}$, qui est continue), donc $\ell(g_k)$ tend vers

$\ell(g)$. On en déduit que $\ell(g'_k)$ tend vers 0.

Les sous-espaces F , C et \mathbb{R} de X ci-dessus sont des espaces symétriques sans facteurs compacts. Soit $\overline{\mathfrak{C}}_F$ une chambre de Weyl fermée de F et $\overline{\mathfrak{C}}_C$ la chambre de Weyl fermée de C telle que $\overline{\mathfrak{C}}_F = \overline{\mathfrak{C}}_C \times \mathbb{R}$. Notons v_F (resp. v_C) la fonction vecteur de translation de F (resp. C) à valeurs dans $\overline{\mathfrak{C}}_F$ (resp. $\overline{\mathfrak{C}}_C$). D'après (6) et (7), on a $v_F(g_k) = v_C(g'_k) + t_k$ et $v(g_k) = \Theta(v_F(g_k))$. Comme $\Theta(t_k)$ tend vers $v(g)$ et $v_C(g'_k)$ tend vers 0, on en déduit que $v(g_k)$ tend vers $v(g)$, car Θ est continue. \square

Remarque 3.4. *Ce qu'on vient de faire démontre, en plus de la continuité de v , une propriété de "continuité des axes". Plus précisément si $(g_k)_k$ est une suite dans G convergent vers $g \in G$, alors*

1. *Si $v(g)$ est régulier, alors $\text{Min}(g_k)$ reste à distance bornée de x_0 et $\text{Min}(g_k)$ converge vers $\text{Min}(g)$ pour la topologie de Hausdorff pointée.*
2. *Dans le cas général, si $\ell(g) \neq 0$, il existe pour k suffisamment grand deux points opposés ξ_k^+ et ξ_k^- dans $\partial_\infty X$, fixés par g_k , tels que le sous-espace totalement géodésique $F_k = F_{\xi_k^- \xi_k^+}$ reste à distance bornée de x_0 , et $\xi_k^- \rightarrow \xi^-$ et $\xi_k^+ \rightarrow \xi^+$, où ξ^- et ξ^+ sont les points fixes attractif et répulsif de g dans $\partial_\infty X$ (c'est-à-dire, si g est axiale, ce qui est toujours le cas si X est un immeuble affine complet, les extrémités d'un axe de g , et sinon les points définis dans la prop. 1.5).*

3.2 Continuité asymptotique.

Soit X un espace symétrique sans facteur compact (resp. un immeuble affine complet). Soit ω un ultrafiltre sur \mathbb{N} plus fin que le filtre de Fréchet. Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$, et $(*_i)_i$ une suite de points de X . Soit $(X_\omega, *_\omega, d_\omega)$ le cône asymptotique de $(X, *_i, \frac{1}{\lambda_i} d)_i$ suivant l'ultrafiltre ω .

Proposition 3.5. *Soit (g_i) une suite dans G telle que la suite $\frac{1}{\lambda_i} d(*_i, g_i *_i)$ est ω -bornée. Soit g_ω l'isométrie de X_ω associée. Alors la suite $(\frac{1}{\lambda_i} v(g_i))_i$ a pour limite $v(g_\omega)$, dans $\overline{\mathfrak{C}}$, suivant l'ultrafiltre ω .*

Démonstration. Commençons par le cas où X est un immeuble affine, qui se traite simplement, de manière analogue à la preuve de la continuité de v . En utilisant de nouveau la propriété de majoration de la distance à l'ensemble minimal (voir 1.6), on a que $\frac{1}{\lambda_i} d(*_i, \text{Min}(g_i))$ est inférieur à $\frac{1}{\lambda_i} K d(*_i, g_i *_i)$ pour une certaine constante K , donc l'ensemble minimal de g_i reste à distance $d_i = \frac{1}{\lambda_i} d$ bornée (suivant l'ultrafiltre ω) de la suite de points-base $(*_i)$. Soit x_i dans $\text{Min}(g_i)$ restant à distance d_i bornée suivant ω de $*_i$. Soit $x_\omega = [x_i]$. Le lemme 1.15 entraîne que x_ω appartient à

$\text{Min}(g_\omega)$. Par conséquent $\Theta_{g_\omega}(x_\omega) = v(g_\omega)$. D'après la proposition 1.17, on a $\Theta_{g_\omega}(x_\omega) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} \Theta_{g_i}(x_i)$, donc $v(g_\omega) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} v(g_i)$.

Supposons maintenant que X est un espace symétrique sans facteur compact. Comme X_ω est un immeuble affine complet et g_ω un automorphisme de X_ω (cf. théorème 1.16), on sait que g_ω est semisimple, donc fixe un point ou translate une géodésique (voir théorème 1.6).

On voit facilement que $\lim_\omega \frac{\ell(g_i)}{\lambda_i} \leq \ell(g_\omega)$. Par conséquent, si g_ω fixe un point, on a $\lim_\omega \frac{\ell(g_i)}{\lambda_i} = \ell(g_\omega) = 0$, donc, comme $v(g_i)$ a pour norme $\ell(g_i)$ pour tout i , on a $\lim_\omega \frac{v(g_i)}{\lambda_i} = 0$, ce qui conclut.

On peut donc supposer dorénavant que g_ω translate une géodésique r_ω de X_ω . Quitte à conjuguer chaque g_i , on peut supposer pour simplifier les notations que la suite des points-base $(*_i)$ est constante égale à x_0 .

Soit r une géodésique de X telle que $r(0) = x_0$, de même type que r_ω . Alors, d'après la prop. 1.18, il existe une suite (h_i) dans G telle que $\frac{1}{\lambda_i} d(x_0, h_i x_0)$ est ω -borné et $h_\omega = [h_i]$ envoie $[r] : t \mapsto [r(\lambda_i t)]$ sur r_ω . Quitte à conjuguer chaque g_i par h_i , on peut donc supposer (toujours pour simplifier) que $r_\omega = [r]$. Notons $\xi^+ = r(+\infty)$, $\xi^- = r(-\infty)$ les extrémités de r .

Pour tout réel t et pour tout réel positif D , notons $O_{\xi^-}(t, D)$ l'ombre sur le bord de X de la boule fermée $B(r(t), D)$, vue du point ξ^- .

Lemme 3.6 (Contraction des ombres). *Pour tous réels strictement positifs D, t, ε , l'image par g_i de l'ombre $O_{\xi^-}(0, D)$ est incluse dans l'ombre $O_{\xi^-}(t, \varepsilon)$ pour ω -presque tout i .*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Sinon, il existe $D, t, \varepsilon > 0$ et une suite z_i dans ∂X avec $z_i \in O_{\xi^-}(0, D)$ et $g_i z_i \notin O_{\xi^-}(t, \varepsilon)$ ω -presque partout. Soit σ_i une géodésique de ξ^- à z_i telle que $d(r(0), \sigma_i(0)) \leq D$. Alors les géodésiques r_ω et $\sigma_\omega = [\sigma_i]$ de X_ω sont confondues sur $]-\infty, 0]$, car elles sont asymptotes en $-\infty$ et $d_\omega(r_\omega(0), \sigma_\omega(0)) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} d(r(0), \sigma_i(0)) = 0$ (la situation est représentée sur la figure 1).

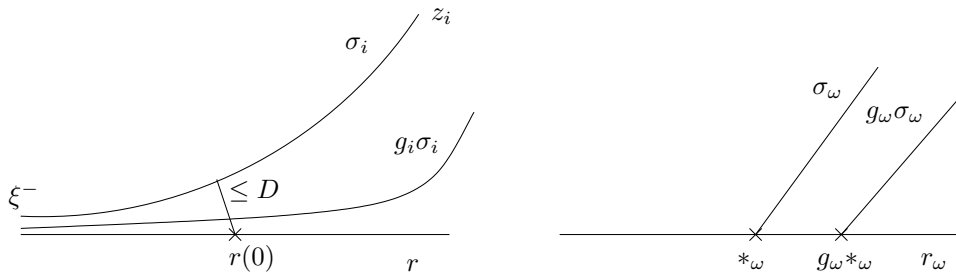


FIGURE 1 – Preuve du lemme 3.6.

On a donc $\angle_{*_{\omega}}(r_{\omega}(+\infty), g_{\omega}\sigma_{\omega}(+\infty)) = 0$ (où $*_{\omega}$ est le point-base de X_{ω}), donc, comme le passage au cône asymptotique augmente les angles (voir prop. 1.12, (2)), on en déduit que $\angle_{r(t)}(\xi^+, g_i z_i) \rightarrow_{\omega} 0$ (car $[r(t)] = *_{\omega}$). Par conséquent $\angle_{r(t)}(\xi^-, g_i z_i) \rightarrow_{\omega} \pi$, et donc (par la prop. 1.3), la distance du point $r(t)$ à la réunion F_i des géodésiques de ξ^- à $g_i z_i$ tend vers 0 suivant l'ultrafiltre ω . Or, par hypothèse, on a $d(r(t), F_i) \geq \varepsilon$ ω -presque partout, ce qui est contradictoire. \square

Suite de la preuve de la proposition 3.5. Soit $D > 0$. L'ombre $O_{\xi^-}(0, D)$ est un voisinage de ξ^+ dans son orbite $G\xi^+$. Comme $G\xi^+$ est une variété, elle contient donc une boule topologique euclidienne B contenant ξ^+ dans son intérieur. Comme les ombres $(O_{\xi^-}(t, \varepsilon))_{t, \varepsilon > 0}$ forment une base de voisinages de ξ^+ dans $G\xi^+$ (cf. Prop. 1.4), il existe t et ε strictement positifs tels que l'ombre $O_{\xi^-}(t, \varepsilon)$ est contenue dans B . D'après le lemme 3.6, on a alors, pour ω -presque tout i , que g_i conserve la boule B donc que g_i admet un point fixe ξ_i^+ dans $O_{\xi^-}(t, \varepsilon)$ par le théorème de Brouwer (car g_i est continue sur B).

Comme $\xi_{\omega}^+ = [\xi_i^+]$ est un point du bord de X_{ω} opposé à $[\xi^-] = r_{\omega}(-\infty)$ et fixé par l'isométrie g_{ω} , qui translate la géodésique r_{ω} , il est nécessairement égal à $r_{\omega}(+\infty) = [\xi^+]$ (voir prop. 1.2). On peut donc supposer, quitte à conjuguer chaque g_i , que $\xi_i^+ = \xi^+$, c'est-à-dire que g_i fixe ξ^+ pour ω -presque tout i . On peut aussi supposer (en échangeant les rôles de ξ^+ et ξ^-) que g_i fixe ξ^- pour ω -presque tout i .

Pour ω -presque tout i , on a que g_i préserve le sous-espace convexe fermé $F = F_{\xi^- \xi^+}$ formé par la réunion des géodésiques de ξ^- à ξ^+ . Ce sous-espace se décompose en un produit direct $C \times \mathbb{R}$ et g_i se décompose parallèlement en produit (g'_i, t_i) en restriction à $F = C \times \mathbb{R}$, où g'_i est une isométrie de C et t_i la translation $s \mapsto s + t_i$ de \mathbb{R} (voir section 1.1). Soit p_i l'image de x_0 par g_i et q_i sa projection orthogonale sur r . Alors $q_i = t_i x_0$. Comme

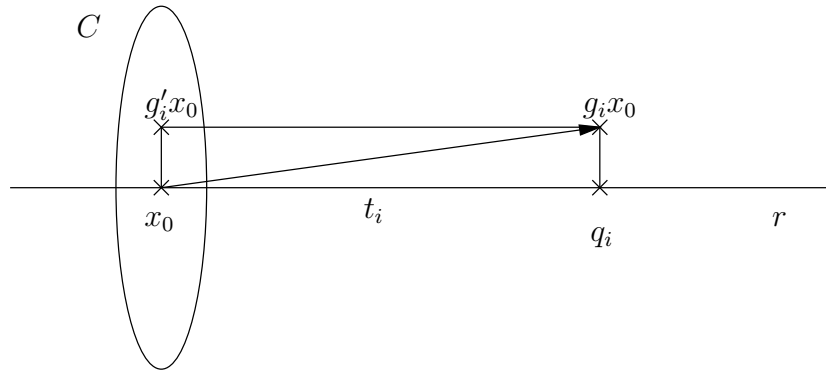


FIGURE 2 –

la limite de la suite des projections orthogonales sur r est la projection

orthogonale sur r_ω (voir le corollaire 1.14), on a que $q_\omega = [g_i]$ est égal à la projection orthogonale de $g_\omega *_\omega$ sur r_ω . Or $g_\omega *_\omega \in r_\omega$, donc on a $q_\omega = g_\omega *_\omega$. Par conséquent $\frac{1}{\lambda_i} d(x_0, g'_i x_0)$ tend vers 0 suivant ω , et donc $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} \ell(g'_i) = 0$. On en déduit que $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} \Theta(x_0, t_i x_0) = \Theta(*_\omega, g_\omega *_\omega) = v(g_\omega)$.

Les sous-espaces F et C de X sont des espaces symétriques sans facteurs compacts. Soit $\bar{\mathcal{C}}_F$ une chambre de Weyl fermée de F et $\bar{\mathcal{C}}_C$ la chambre de Weyl fermée de C telle que $\bar{\mathcal{C}}_F = \bar{\mathcal{C}}_C \times \mathbb{R}$. Notons v_F (resp. v_C) la fonction vecteur de translation de F (resp. C) à valeurs dans $\bar{\mathcal{C}}_F$ (resp. $\bar{\mathcal{C}}_C$). D'après (6) et (7), on a $v_F(g_i) = v_C(g'_i) + t_i$ et $v(g_i) = \Theta(v_F(g_i))$. Or on vient de voir que $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} v_C(g'_i) = 0$ et que $\lim_\omega \Theta(\frac{1}{\lambda_i} t_i) = v(g_\omega)$, donc on a $\frac{v(g_i)}{\lambda_i} \rightarrow_\omega v(g_\omega)$ car Θ est continue. \square

Remarque 3.7. *On a en fait démontré une propriété plus forte de “continuité asymptotique” des axes, c’est-à-dire, si (g_i) est une suite ω -bornée dans G et g_ω l’isométrie de X_ω associée, alors :*

1. *Si $v(g_\omega)$ est régulier, alors $\text{Min}(g_i)$ reste à distance $\frac{1}{\lambda_i} d$ bornée (suivant l’ultrafiltre ω) de $*_i$ et $\lim_\omega \text{Min}(g_i) = \text{Min}(g_\omega)$.*
2. *Dans le cas général, si $\ell(g_\omega) \neq 0$, il existe pour ω -presque tout i deux points opposés ξ_i^+ et ξ_i^- dans $\partial_\infty X$, fixés par g_i , tels que le sous-espace $F_i = F_{\xi_i^- \xi_i^+}$ reste à distance $\frac{1}{\lambda_i} d$ ω -bornée de $*_i$, et et $\xi_\omega^- = [\xi_i^-]$ et $\xi_\omega^+ = [\xi_i^+]$ sont les points fixes attractif et répulsif de g_ω dans ∂X_ω (en particulier $\lim_\omega F_i$ contient $\text{Min}(g_\omega)$).*

4 Compactification.

Soit Γ un groupe infini de type fini. Soit \mathbb{K} un corps local. Alors \mathbb{K} est ou bien égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} , ou bien ultramétrique. Soit \underline{G} un groupe algébrique linéaire connexe réductif défini sur \mathbb{K} . On peut supposer que \underline{G} est un sous-groupe algébrique défini sur \mathbb{K} de SL_n . Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on note $G = \underline{G}(\mathbb{K})^0$ la composante neutre du groupe des points rationnels sur \mathbb{K} de \underline{G} , et X l’espace symétrique sans facteur compact associé au groupe de Lie réel réductif G (voir section 1.2) (notons que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ le groupe G est le groupe des points réels du \mathbb{R} -groupe réductif connexe \underline{H} obtenu à partir de \underline{G} par restriction des scalaires). Dans le cas où le corps \mathbb{K} est non archimédien, on note $G = \underline{G}(\mathbb{K})$ le groupe des points rationnels sur \mathbb{K} de \underline{G} , et X l’immeuble de Bruhat-Tits (élargi) de \underline{G} sur \mathbb{K} , qui est un immeuble affine discret localement compact.

En particulier, X est un espace métrique CAT(0) propre, et G est un groupe de Lie analytique sur \mathbb{K} , donc un groupe topologique métrisable, agissant continûment, proprement, par automorphismes, et cocompactement sur X . On note x_0 un point-base de X et d la distance maximale $d(Gx, x_0)$ pour $x \in X$.

4.1 Espaces de représentations et quotient

On considère l'ensemble $R = R(\Gamma, G)$ des représentations de Γ dans G , muni de la topologie compacte-ouverte, qui est aussi celle de la convergence simple. L'espace R s'identifie à un sous-ensemble fermé de G^S par l'application qui à $\rho \in R$ associe $(\rho(s))_{s \in S}$. L'espace R est métrisable, à base dénombrable, localement compact. Le groupe G agit continûment sur R par conjugaison : pour $g \in G$ et $\rho \in R$, $\gamma \in \Gamma$ on a $g \cdot \rho(\gamma) = g\rho(\gamma)g^{-1}$.

L'espace topologique quotient usuel R/G n'étant en général pas séparé, on le remplace par son plus gros quotient séparé $\mathcal{X} = R // G$, qui peut être décrit, comme le montre ce qui suit, soit comme le quotient de R par une relation d'équivalence naturelle \sim , soit plus explicitement comme une rétraction sur un sous-espace naturel R_{cr}/G de R/G (la *semisimplification*).

Représentations complètement réductibles On dit que $\rho \in R$ est *complètement réductible* (cr) si, lorsque ρ fixe un point α dans le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de X , alors il existe un point β dans $\partial_\infty X$, opposé (i.e. joint par une géodésique dans X) à α , également fixé par ρ . Cette notion (introduite par J.P. Serre, voir [Serre]) pour les actions sur des immeubles sphériques) est peu restrictive, en particulier les représentations sans point fixe global dans le bord à l'infini de X , sauf éventuellement dans le bord du facteur translaté par G , sont cr. Elles comprennent les représentations Zariski-denses. Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$, une représentation est cr si et seulement si l'action linéaire sur \mathbb{K}^n associée est semi-simple.

Si la caractéristique du corps \mathbb{K} est nulle, alors ρ est cr si et seulement si la composante neutre de l'adhérence de Zariski de $\rho(\Gamma)$ est un groupe réductif ([Serre, Proposition 4.2]). Cela équivaut à demander que l'orbite $G \cdot \rho$ soit Zariski-fermée dans la variété algébrique $R(\Gamma, G)$ ([Ric]), ou encore que l'orbite $G \cdot \rho$ soit fermée dans $R(\Gamma, G)$ (voir par exemple [Bre]).

Plus gros quotient séparé On note l'espace R_{cr} le sous-espace (stable sous G) de R formé des représentations cr, et R_{cr}/G l'espace quotient, muni de la topologie quotient (qui coïncide avec la topologie induite par l'inclusion dans l'espace topologique quotient R/G [Bou, III, § 2, proposition 10]). Cet espace est à base dénombrable car R l'est.

Le résultat suivant est bien connu pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, résulte de [Ric], [Luna] et [RiSl], dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et de [Bre] pour \mathbb{K} de caractéristique 0. On en trouvera une démonstration directe, qui couvre aussi le cas de la caractéristique non nulle, dans [Par5], auquel on renvoie pour plus de détails, ainsi que pour une étude géométrique (et d'autres caractérisations naturelles) des représentations complètement réductibles.

Théorème 4.1. 1. *L'espace R_{cr}/G est séparé et localement compact.*

2. Toute orbite de G dans R contient dans son adhérence une unique orbite complètement réductible $\pi(\rho)$ (semisimplification).
3. La propriété $\overline{G \cdot \rho} \cap \overline{G \cdot \rho'} \neq \emptyset$ définit une relation d'équivalence $\rho \sim \rho'$ sur R . La projection G -invariante $\pi : R \rightarrow R_{cr}/G$ est continue, et induit un homéomorphisme h de l'espace quotient $R // G := R / \sim$ sur R_{cr}/G , tel que $\pi = h \circ p$, où $p : R \rightarrow R // G$ est la projection canonique. En particulier, $R // G$ (resp. R_{cr}/G) est le plus gros quotient séparé de R sous G (toute application continue G -invariante f de R vers un espace séparé factorise à travers p).

On notera au passage que la topologie quotient issue de la semisimplification π (utilisée dans la littérature) coïncide avec la topologie quotient usuelle de R_{cr}/G . On identifiera dorénavant $R // G$ et R_{cr}/G (et les projections p et π) via h . On notera cet espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ ou \mathcal{X} . On notera $[\rho]$ la classe de $\rho \in R$ pour \sim .

On remarquera que l'image dans \mathcal{X} d'un fermé G -stable F de R est un fermé (car F est stable par la semisimplification π)

Remarque (Lien avec le quotient algébro-géométrique). En caractéristique nulle, il est également classique de travailler avec le *quotient algébro-géométrique* $R(\Gamma, G) // \underline{G}$, qui est défini comme l'image de $R(\Gamma, G)$ dans le quotient algébro-géométrique $R(\Gamma, \underline{G}) // \underline{G}$ de la variété algébrique affine $R(\Gamma, \underline{G})$ sous l'action de \underline{G} .

L'espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ considéré dans cet article est un peu “plus gros” que $R(\Gamma, G) // \underline{G}$, dans le sens suivant. On peut identifier $R(\Gamma, \underline{G}) // \underline{G}$ à l'espace des \underline{G} -orbites Zariski-fermées dans $R(\Gamma, \underline{G})$, et $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ à l'espace des G -orbites fermées dans $R(\Gamma, G)$. La projection canonique $t : R(\Gamma, G) \rightarrow R(\Gamma, G) // \underline{G}$ factorise en l'application naturelle $P : G \cdot \rho \mapsto \underline{G} \cdot \rho$ de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ dans $R(\Gamma, G) // \underline{G}$. Cette application (continue et surjective) est fermée et à fibres finies (voir [Luna], [RiSl] pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et [Bre, 5.17] en caractéristique nulle).

Action de $\text{Out}(\Gamma)$ Le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ des automorphismes de Γ agit à droite, par précomposition (donc par homéomorphismes) sur l'espace R des représentations de Γ dans G . Cette action est continue et commute avec l'action de G , donc induit une action (par homéomorphismes) de $\text{Aut}(\Gamma)$ sur l'espace \mathcal{X} . Le groupe $\text{Int}(\Gamma)$ des automorphismes intérieurs de Γ agit trivialement sur \mathcal{X} , car, si $\gamma \in \Gamma$ et $\rho \in R$, alors $\rho \circ i_\gamma = \rho(\gamma) \cdot \rho$, et donc $[i_\gamma \cdot \rho] = [\rho]$, où $i_\gamma \in \text{Int}(\Gamma)$ désigne la conjugaison par γ . On obtient donc une action (par homéomorphismes) du groupe $\text{Out}(\Gamma) = \text{Aut}(\Gamma)/\text{Int}(\Gamma)$ des automorphismes extérieurs de Γ sur l'espace \mathcal{X} .

On va maintenant construire une compactification de \mathcal{X} , reposant sur la notion de vecteur de translation développée en section 3.

4.2 Spectre marqué des vecteurs de translation.

On fixe un plat maximal \mathbb{A} de X , de groupe de Weyl vectoriel \overline{W} , et une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} . L'action de G sur X préserve le type des segments, donc le vecteur de translation $v : G \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ est bien défini (voir section 3).

Le spectre marqué des vecteurs de translation d'une représentation ρ de Γ dans G est la fonction $v \circ \rho : \Gamma \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$. On munit l'espace $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ des fonctions de Γ dans $\overline{\mathcal{C}}$ de la topologie produit, qui est métrisable de type dénombrable (mais pas localement compacte). L'application \mathcal{V} de \mathcal{R} dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ qui à une représentation ρ associe son spectre $v \circ \rho$ est continue et invariante sous l'action de G , car le vecteur de translation v l'est (voir prop. 3.3). Elle passe donc au quotient en une application continue

$$\mathcal{V} : \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{C}}^\Gamma \\ [\rho] & \mapsto & v \circ \rho \end{array} .$$

Remarque (Spectre des longueurs). Dans toute cette section, on peut remplacer le spectre des vecteurs de translation \mathcal{V} par le spectre des longueurs de translation $\mathcal{L} = \|\mathcal{V}\|$

$$\mathcal{L} : \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^\Gamma \\ [\rho] & \mapsto & \ell \circ \rho \end{array}$$

où $\ell : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la longueur de translation des isométries de X (cf. section 1.1). Les compactifications obtenues alors sont moins fines.

4.3 Le théorème de compactification.

On rappelle que \mathcal{X} désigne le plus gros quotient séparé de l'espace $\mathbb{R} = \text{Hom}(\Gamma, G)$ sous G , qui s'identifie à l'espace \mathbb{R}_{cr}/G des classes de représentations complètement réductibles (section 4.1), et que $\mathcal{V} : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ est le spectre marqué des vecteurs de translation (section 4.2).

Soit $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ le projectifié de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, c'est-à-dire l'espace topologique quotient de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\}$ par la relation d'équivalence $u \simeq w$ si et seulement s'il existe un réel positif non nul t tel que $u = tw$. Cet espace est séparé, à base dénombrable (mais il n'est ni compact, ni localement compact). On note $[w]$ la classe dans $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ de $w \in \overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\}$, et \mathbb{P} la projection canonique de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\}$ dans $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, qui est continue et ouverte.

Théorème 4.2. *L'application continue*

$$\mathbb{P}\mathcal{V} = \mathbb{P} \circ \mathcal{V} : \mathcal{X} - \mathcal{V}^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma .$$

est "d'image relativement compacte à l'infini", i.e. il existe un compact \mathcal{K} de \mathcal{X} , contenant $\mathcal{V}^{-1}(0)$, tel que $\mathbb{P}\mathcal{V}(\mathcal{X} - \mathcal{K})$ est relativement compact.

En particulier, elle induit une compactification (métrisable) $\tilde{\mathcal{X}}$ de \mathcal{X} , dont le bord $\partial_\infty \tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}} - \mathcal{X}$ s'identifie à une partie de $\mathbb{P}\overline{\mathcal{E}}^\Gamma$, vérifiant la propriété suivante.

Une suite $[\rho_i]_i$ dans \mathcal{X} converge dans $\tilde{\mathcal{X}}$ vers un point $[w]$ de $\partial_\infty \tilde{\mathcal{X}} \subset \mathbb{P}\overline{\mathcal{E}}^\Gamma$ si et seulement si, d'une part, la suite $[\rho_i]_i$ sort de tout compact de \mathcal{X} , et, d'autre part, la suite $[v \circ \rho_i]_i$ des spectres projectifiés converge vers $[w]$ dans $\mathbb{P}\overline{\mathcal{E}}^\Gamma$.

Si $[w] \in \partial_\infty \tilde{\mathcal{X}}$, alors $[w] = [v \circ \rho]$ avec ρ une action de Γ sur un immeuble affine Δ de type (\mathbb{A}, W) , sans point fixe global. On peut de plus supposer que cette action provient d'une représentation ρ non bornée de Γ dans $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, où \mathbb{K}_ω est un corps valué ultramétrique et Δ est un sous-immeuble de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$ préservé par $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega)$.

Remarques. 1. La compactification obtenue ne dépend pas du choix du compact \mathcal{K} . Le corps \mathbb{K}_ω est complet mais sa valuation n'est pas a priori discrète (et l'immeuble impliqué n'est pas simplicial).

2. (Un critère de rigidité) En particulier, s'il n'existe pas d'action de Γ sans point fixe global sur un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, ou s'il n'existe pas de représentation ρ non bornée de Γ dans $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega)$ avec \mathbb{K}_ω corps valué ultramétrique, alors l'espace \mathcal{X} est compact.

3. (Injectivité du spectre) L'application \mathcal{V} n'est a priori pas injective sur \mathcal{X} tout entier, ne serait-ce que parce que toutes les représentations à valeurs dans un sous-groupe compact K de G ont le même spectre (nul). On renvoie à [DaKi] pour des résultats sur l'injectivité (qui n'est pas utilisée ici) du spectre des longueurs \mathcal{L} (donc de \mathcal{V}) et de son projectifié $\mathbb{P}\mathcal{L}$ (donc de $\mathbb{P}\mathcal{V}$) pour les représentations Zariski-denses dans G semisimple, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Avant de démontrer ce théorème, on introduit quelques outils de base venant de la géométrie CAT(0).

4.4 Fonctions de déplacement

On voit $\rho : \Gamma \rightarrow G$ comme une action de Γ sur X (l'espace CAT(0) associé à G). On appelle *fonction de déplacement* de ρ (relativement à la partie génératrice S) et on note d_ρ la fonction convexe continue $\sqrt{\sum_{s \in S} d_{\rho(s)}^2}$, c'est-à-dire la fonction

$$d_\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{\sum_{s \in S} d(x, \rho(s)x)^2}$$

On appelle *minimum de déplacement* de ρ (relativement à la partie génératrice S) et on note $\lambda(\rho)$ le nombre réel positif

$$\lambda(\rho) = \inf_{x \in X} d_\rho(x),$$

qui est un invariant de conjugaison. La fonction $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ va nous permettre de contrôler les représentations partant à l'infini dans le quotient \mathcal{X} , et de renormaliser le spectre des vecteurs \mathcal{V} .

Notons $\|\cdot\|_S$ la longueur des mots sur Γ associée à la partie génératrice finie S . La propriété suivante permet de majorer le spectre des longueurs de translation $\ell \circ \rho$ d'une représentation ρ en fonction de $\lambda(\rho)$ et de la longueur des mots.

Proposition 4.3. *Pour toute représentation $\rho : \Gamma \rightarrow G$, on a $\ell \circ \rho \leq \lambda(\rho)\|\cdot\|_S$ sur Γ .*

Démonstration. Soit $\gamma \in \Gamma$. Pour tout $x \in X$ on a $d(x, \rho(\gamma)x) \leq \|\gamma\|_S d_\rho(x)$. Donc $\ell(\rho(\gamma)) \leq \|\gamma\|_S d_\rho(x)$ pour tout x de X , d'où le résultat souhaité. \square

Pour tout réel positif D , notons \mathbb{R}_D l'ensemble des ρ de \mathbb{R} tels que $d_\rho(x_0) \leq D$, qui est un compact de \mathbb{R} (car l'action de G sur X est propre), et \mathcal{X}_D l'image par p continue du compact \mathbb{R}_D de \mathbb{R} , qui est un compact de \mathcal{X} . On démontre facilement la propriété suivante.

Proposition 4.4. *Si $\lambda(\rho) < D$ alors il existe $g \in G$ tel que $g \cdot \rho \in \mathbb{R}_{D+2d}$. En particulier $[\rho]$ est dans le compact \mathcal{X}_{D+2d} .* \square

Remarque. Il est clair que λ est semicontinue, mais elle n'est pas continue en général quand X est un espace CAT(0) quelconque (par exemple, pas dans le cas où X est le plan euclidien). On pourrait en fait démontrer avec un peu plus de travail (mais nous n'en avons pas vraiment besoin pour ce qui suit) que, dans le cadre où nous nous sommes placés ici (groupes réductifs sur les corps locaux agissant sur leurs espaces associés) λ est continue sur \mathbb{R} et passe au quotient en une fonction continue propre sur \mathcal{X} .

4.5 La démonstration du théorème de compactification 4.2

La preuve du théorème 4.2 repose essentiellement sur le lemme fondamental suivant, qui décrit le comportement asymptotique du spectre marqué des vecteurs de translation d'une suite de représentations partant à l'infini (sortant de tout compact) dans \mathcal{X} , et donne une bonne partie de ce qu'on veut.

Lemme 4.5. *Soit $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R} telle que $\lambda_i = \lambda(\rho_i) \rightarrow +\infty$. Alors, quitte à extraire, $\frac{1}{\lambda_i} v \circ \rho_i$ tend vers w dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, avec $w = v \circ \rho$ où ρ une action de Γ sur un immeuble affine Δ de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, sans point fixe global. On peut de plus supposer que cette action provient d'une représentation ρ non bornée de Γ dans $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, où \mathbb{K}_ω est un corps valué ultramétrique et que Δ est un sous-immeuble de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, préservé par $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega)$.*

En particulier, w n'est pas identiquement nul.

Démonstration. Comme G agit cocompactement sur X , quitte à conjuguer chaque représentation ρ_i , on peut supposer qu'il existe un point x_i de X , à distance bornée (par d) de x_0 , tel que $d_{\rho_i}(x_i) \leq \lambda(\rho_i) + \frac{1}{i}$. Soit ω un ultrafiltre sur \mathbb{N} , plus fin que le filtre de Fréchet. On considère le cône asymptotique X_ω de $(X, x_0, \frac{1}{\lambda_i}d)$ suivant l'ultrafiltre ω (voir section 1.6). C'est un immeuble affine complet de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$ (cf. Thm 1.16). Pour tout γ de Γ , on a $d(x_0, \rho_i(\gamma)x_0) \leq \|\gamma\|_S d_{\rho_i}(x_0) \leq \|\gamma\|_S (\lambda(\rho_i) + \frac{1}{i} + 2d)$, où $\|\cdot\|_S$ désigne la longueur des mots sur Γ associée à la partie génératrice finie S , donc la suite $\frac{1}{\lambda_i}d(x_0, \rho_i(\gamma)x_0)$, $i \in \mathbb{N}$, est bornée. On peut donc considérer l'action asymptotique ρ_ω de Γ sur X_ω , qui est définie par $\rho_\omega(\gamma)[x_i] = [\rho_i(\gamma)x_i]$ pour tous γ de Γ et $[x_i]$ de X_ω . Notons d_{ρ_ω} la fonction de déplacement de ρ_ω (voir section 4.4). Pour tout $y_\omega = [y_i] \in X_\omega$, on a $d_{\rho_\omega}(y_\omega) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_i}d_{\rho_i}(y_i)$, qui est supérieur ou égal à 1, avec égalité si $y_\omega = [x_i] = [x_0]$. Il en résulte que l'action ρ_ω n'a pas de point fixe global dans X_ω .

D'après la proposition 3.5 (continuité asymptotique de v), pour tout γ de Γ , on a $\frac{1}{\lambda_i}v(\rho_i(\gamma))$ converge vers $v(\rho_\omega(\gamma))$ dans $\overline{\mathcal{C}}$ suivant l'ultrafiltre ω . La suite $\frac{1}{\lambda_i}w_i$ converge donc dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, suivant l'ultrafiltre ω , vers $w = v \circ \rho_\omega$. En particulier il existe une sous-suite extraite de w_i convergeant vers w dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on peut supposer que G est un sous-groupe fermé auto-adjoint de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Donc que X est un sous-espace totalement géodésique passant par x_0 de l'espace symétrique E_n associé à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Dans le cas où \mathbb{K} est ultramétrique, on peut supposer que \underline{G} est un sous-groupe algébrique défini sur \mathbb{K} de SL_n , et d'après le théorème de plongement de Landvogt [Lan, Thm. 2.2.1], l'immeuble de Bruhat-Tits X de \underline{G} sur \mathbb{K} se plonge par une isométrie équivariante par G dans l'immeuble de Bruhat-Tits E_n de SL_n sur \mathbb{K} . On identifie X à son image dans E_n .

Le cône asymptotique X_ω de $(X, x_0, \frac{1}{\lambda_i}d)$ suivant l'ultrafiltre ω est donc un sous-immeuble du cône asymptotique E_ω de $(E_n, x_0, \frac{1}{\lambda_i}d)$ suivant l'ultrafiltre ω . D'après ce qui a été fait dans la section 2 (voir la proposition 2.5 et la remarque qui suit, et le théorème 2.7), l'action asymptotique provient en fait d'une représentation ρ_ω de Γ dans $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, où \mathbb{K}_ω est un corps valué ultramétrique et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$ agit sur son immeuble de Bruhat-Tits. Comme cette action n'a pas de point fixe global dans X_ω , donc dans E_ω , qui est un immeuble affine complet (cf. Thm 1.16), $\rho_\omega(\Gamma)$ n'est pas borné, et le spectre des longueurs de translations ne peut être nul (voir [Par3, Coro. 3]), donc w n'est pas identiquement nul. \square

On en déduit immédiatement la propriété suivante, qui permet de contrôler le spectre des longueurs \mathcal{L} (donc également celui des vecteurs \mathcal{V}) en fonction de λ , à l'infini de \mathcal{X} .

Corollaire 4.6. *Il existe une partie finie F de Γ , un réel $c > 0$ et un réel positif D_0 tels qu'on a la propriété suivante.*

Pour tout ρ de \mathbb{R} , si $\lambda(\rho) \geq D_0$, il existe $\gamma \in F$ tel que $\ell(\rho(\gamma)) > c\lambda(\rho)$.

Démonstration. Soit F_N , $N \in \mathbb{N}$ une suite croissante de parties finies recouvrant Γ . Sinon pour tout entier N non nul, il existe $\rho_N \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda(\rho_N) \geq N$ et pour tout γ de F_N on a $\frac{1}{\lambda}\ell(\rho_N(\gamma)) \geq \frac{1}{N}$. Donc $\frac{1}{\lambda}\ell \circ \rho_N$ tend vers 0 dans \mathbb{R}_+^Γ , ce qui est impossible par le lemme 4.5. \square

Remarques. 1) On a donc (pour $\lambda(\rho) \geq D_0$) l'encadrement

$$c\lambda(\rho) < \max_{\gamma \in F} \ell(\rho(\gamma)) \leq C\lambda(\rho)$$

où $C = \max_{\gamma \in F} \|\gamma\|_S$ (cf proposition 4.3).

2) Une autre conséquence directe du corollaire 4.6, que nous n'utiliserons pas, mais qui mérite d'être signalée, est que l'application "spectre marqué des vecteurs de translation" $\mathcal{V} : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{E}}^\Gamma$ est propre : en effet, si Q est un compact de $\overline{\mathfrak{E}}^\Gamma$, pour D supérieur à D_0 et à $\frac{1}{c} \max_{\gamma \in F, w \in Q} \|w(\gamma)\|$, on a que $\lambda < D$ sur $\mathcal{V}^{-1}(Q)$. Donc $\mathcal{V}^{-1}(Q)$ est inclus dans le compact \mathcal{X}_{D+2d} (proposition 4.4).

Fin de la preuve du théorème 4.2. Nous pouvons maintenant montrer l'existence du compact \mathcal{K} tel que $\mathbb{P}\mathcal{V}(\mathcal{X} - \mathcal{K})$ est inclus dans un compact. Il suffit de prendre $\mathcal{K} = \mathcal{X}_D$ pour $D \geq D_0 + 2d$ du corollaire 4.6. Notons $\mathcal{Y} = \mathcal{X} - \mathcal{K}$ et $Y = p^{-1}(\mathcal{Y}) = \mathbb{R} - p^{-1}(\mathcal{K})$.

D'après le corollaire 4.6, comme $\rho \in Y$ implique $\lambda(\rho) \geq D - 2d \geq D_0$ (d'après la proposition 4.4), on a que $\frac{1}{\lambda}V(Y)$ ne rencontre pas l'ensemble $\{w \in \overline{\mathfrak{E}}^\Gamma \mid \forall \gamma \in F, \|w(\gamma)\| \leq c\}$ qui est un voisinage de 0 dans $\overline{\mathfrak{E}}^\Gamma$ (en particulier \mathcal{K} contient $\mathcal{V}^{-1}(0)$). Donc l'adhérence C dans $\overline{\mathfrak{E}}^\Gamma$ de $\frac{1}{\lambda}V(Y)$ ne contient pas 0.

Or $\frac{1}{\lambda}V$ est d'image relativement compacte, car incluse dans le compact $\prod_{\gamma \in \Gamma} \{u \in \overline{\mathfrak{E}}; \|u\| \leq \|\gamma\|_S\}$ par la proposition 4.3.

Donc C est un compact de $\overline{\mathfrak{E}}^\Gamma - \{0\}$, et $\mathbb{P}(C)$ est un compact de $\mathbb{P}\overline{\mathfrak{E}}^\Gamma$, contenant $\mathbb{P}(\frac{1}{\lambda}V(Y)) = \mathbb{P}(V(Y)) = \mathbb{P}(\mathcal{V}(\mathcal{Y}))$, ce qui conclut.

La construction (purement topologique) de la compactification de \mathcal{X} induite par $\mathbb{P}\mathcal{V}$ définie hors d'un compact, continue, d'image relativement compacte à l'infini (à valeurs dans un compact hors d'un compact) est décrite en détail en section 1.7. Le reste des assertions du théorème 4.2 découle du lemme 4.5. \square

4.6 Action de $\text{Out}(\Gamma)$.

La compactification construite ci-dessus est intrinsèque, en particulier l'action naturelle sur \mathcal{X} du groupe $\text{Out}(\Gamma)$ des automorphismes extérieurs de

Γ se prolonge naturellement en une action sur le compactifié $\tilde{\mathcal{X}}$. Expliquons cela en détail : Le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ agit par précomposition sur l'espace $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ des fonctions de Γ dans $\overline{\mathcal{C}}$. Cette action induit une action (par homéomorphismes) sur $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, et la projection $\mathbb{P} : \overline{\mathcal{C}}^\Gamma \rightarrow \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ est $\text{Aut}(\Gamma)$ -équivariante. L'application $\mathcal{V} : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ est également $\text{Aut}(\Gamma)$ -équivariante, donc $\mathbb{P}\mathcal{V}$ aussi. Donc l'action de $\text{Aut}(\Gamma)$ sur \mathcal{X} se prolonge continument à \mathcal{X} par l'action naturelle ci-dessus sur $\partial_\infty \mathcal{X} \subset \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$. Comme $\text{Int}(\Gamma)$ agit trivialement sur \mathcal{X} , donc sur $\tilde{\mathcal{X}}$, l'action passe au quotient en une action de $\text{Out}(\Gamma)$ sur $\tilde{\mathcal{X}}$ par homéomorphismes.

5 Représentations fidèles et discrètes.

On dit qu'une représentation de Γ dans G est *fidèle et discrète* si elle est injective et d'image discrète. Remarquons qu'une représentation fidèle et discrète de Γ dans G n'a pas de point fixe global dans X , car Γ est infini et le stabilisateur d'un point est compact. On note $R_{fd}(\Gamma, G)$ ou R_{fd} l'espace des représentations fidèles et discrètes de Γ dans G .

5.1 L'hypothèse (H)

On dira qu'un groupe abstrait Γ *vérifie l'hypothèse (H)* s'il n'admet pas de sous-groupe d'indice fini contenant un sous-groupe abélien distingué infini. Si Γ' est un groupe commensurable à Γ (c'est-à-dire si $\Gamma \cap \Gamma'$ est d'indice fini dans Γ et dans Γ'), alors Γ vérifie (H) si et seulement si Γ' vérifie (H). Cette hypothèse n'est pas très restrictive dans notre cadre, comme le montrent les exemples suivants.

Si Γ est un sous-groupe discret Zariski-dense d'un groupe de Lie linéaire semisimple H , alors Γ vérifie (H) (voir [GoMi, Lemma 1.2]).

Ce qui suit montre que les groupes agissant de manière fidèle et discrète, par automorphismes, sans orbite finie au bord sur un espace symétrique sans facteur compact et sans facteur euclidien vérifient l'hypothèse (H).

On dira qu'un sous-groupe d'isométries d'un espace métrique $\text{CAT}(0)$ propre X est *non virtuellement parabolique* s'il n'a pas d'orbite finie dans le bord à l'infini de X , sauf éventuellement dans le bord du facteur euclidien X_0 de X , ou, de manière équivalente, s'il n'a pas de sous-groupe d'indice fini parabolique (i.e. admettant un point fixe global dans $\partial_\infty X - \partial_\infty X_0$). Si Γ' est un sous-groupe de $\text{Isom}(X)$ commensurable à Γ , alors Γ est (non) virtuellement parabolique si et seulement si Γ' l'est. Pour les sous-groupes de $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$, agissant sur son espace symétrique X sans facteur compact associé, cette notion correspond à celle de sous-groupe *fortement irréductible*, i.e. ne préservant pas de réunion finie de sous-espaces vectoriels propres non triviaux de \mathbb{R}^n .

Lemme 5.1. *On suppose que X est un espace symétrique sans facteur compact et que G agit par automorphismes de X . Soit Γ un sous-groupe discret de G , possédant un sous groupe abélien A distingué infini. Alors il y a deux possibilités.*

1. *A possède un élément parabolique non trivial. Alors Γ admet un point fixe global dans le bord à l'infini de X .*
2. *A n'a que des éléments semisimples. Alors $M = \bigcap_{a \in A} \text{Min}(a)$ est non vide et se décompose de manière canonique en un produit $C \times \mathbb{R}^k$ (avec $k > 0$ minimal), de telle manière que tous les éléments a de A opèrent sur M comme (id, a') , où a' est une translation de \mathbb{R}^k . Le groupe Γ stabilise M , préserve le bord de \mathbb{R}^k .*

En particulier le groupe Γ a une orbite finie dans le bord à l'infini de X .

Corollaire 5.2. *Si X est un espace symétrique sans facteur euclidien ni compact, et si G agit par automorphismes, alors un sous-groupe discret non virtuellement parabolique de G vérifie l'hypothèse (H). \square*

Preuve du lemme. Le premier point découle de [Ebe, Corollary 4.4.5]. Supposons maintenant que A n'a que des éléments semisimples. La première assertion du deuxième point découle de [BGS, Lemma 7.1]. Comme A contient au moins un élément non elliptique (car sinon, A est fini car il fixe M non vide point par point et est discret), alors $k \neq 0$. Comme A est distingué dans Γ , le groupe Γ stabilise M et préserve la décomposition $M = C \times \mathbb{R}^k$, donc préserve le bord de \mathbb{R}^k , qui est non vide car $k > 0$. Or le bord de \mathbb{R}^k est inclus dans un appartement de l'immeuble de Tits sphérique à l'infini de X , donc il ne rencontre qu'un nombre fini de facettes à l'infini. Le groupe Γ a donc une orbite finie dans le bord à l'infini. \square

5.2 Fermeture.

On suppose ici que Γ vérifie l'hypothèse (H) et que G est un groupe de Lie linéaire.

Théorème 5.3 (Goldman-Millson). *L'espace R_{fd} des représentations fidèles et discrètes de Γ dans G est un fermé de l'espace R des représentations de Γ dans G .*

Démonstration. Si R_{fd} est non vide, alors Γ est linéaire donc il contient un sous-groupe sans torsion Γ' d'indice fini, d'après le lemme de Selberg (voir par exemple [Alp]). Alors Γ' n'a pas de sous-groupe abélien distingué non trivial (car il vérifie (H) et n'a pas de sous-groupe fini non trivial), donc, par Goldman-Millson (voir [GoMi, Lemma 1.1]), l'espace $R_{fd}(\Gamma', G)$ est fermé.

Soit ρ_k une suite convergente de représentations fidèles et discrètes de Γ dans G , de limite ρ . La restriction de ρ à Γ' est donc fidèle et discrète.

L'intersection de $\ker \rho$ et Γ' est triviale, donc $\ker \rho$ est fini. Or $1 \in G$ n'est pas limite d'éléments d'ordre inférieur à une constante donnée. La restriction de ρ_k à $\ker \rho$ tend vers l'identité, donc est constante à partir d'un certain rang. Comme ρ_k est fidèle pour tout k , on en déduit que $\ker \rho$ est trivial, autrement dit que ρ est fidèle. De plus, on voit facilement qu'un sous-groupe de G contenant un sous-groupe discret d'indice fini est discret, donc ρ est discrète. \square

5.3 Compactification.

On suppose que le groupe Γ vérifie l'hypothèse (H).

Dans cette section on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et que $G = \underline{G}(\mathbb{K})^0$, où \underline{G} est un groupe algébrique linéaire connexe réductif défini sur \mathbb{K} , agissant sur son espace symétrique sans facteur compact associé X . (notons que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ le groupe G est le groupe des points réels du \mathbb{R} -groupe réductif connexe \underline{H} obtenu à partir de \underline{G} par restriction des scalaires).

Comme R_{fd} est un fermé de \mathbb{R} (Théorème 5.3), il est stable par semisimplification et l'espace $\mathcal{X}_{fd} = p(R_{fd}) = (R_{fd} \cap R_{cr})/G$ est donc un sous-espace fermé de l'espace $\mathcal{X} = R_{cr}/G$. En particulier il est séparé, localement compact, à base dénombrable.

La compactification $\widetilde{\mathcal{X}}$ de \mathcal{X} construite précédemment (Théorème 4.2) induit donc une compactification (métrisable) $\widetilde{\mathcal{X}}_{fd}$ de \mathcal{X}_{fd} (qui s'obtient en prenant simplement l'adhérence de \mathcal{X}_{fd} dans $\widetilde{\mathcal{X}}$, munie d'une action naturelle de $\text{Out}(\Gamma)$ (car \mathcal{X}_{fd} est stable sous $\text{Out}(\Gamma)$, donc son adhérence aussi).

En rang 1, cela redonne les compactifications connues ([FLP], [MoSh], [Bes], [Pau1]).

Si $x \in \partial_\infty \widetilde{\mathcal{X}}_{fd} \subset \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, alors $x = [v \circ \rho]$, où ρ est une action sans point fixe global de Γ sur un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, sans point fixe global. Dans ce cas, F. Paulin a démontré que cette action est à stabilisateurs de germes d'appartements virtuellement résolubles (voir [Pau3]).

Remarque. En fait, si on se restreint aux représentations fidèles et discrètes, on peut construire la compactification un peu plus directement. En effet, on peut montrer que les spectres de longueurs de représentations fidèles et discrètes sont non nuls (on peut se ramener par semisimplification à ρ d'adhérence de Zariski réductive, et cela découle alors du théorème de Burnside, voir par exemple [Bass], [Ben]) et que la fonction "minimum de déplacement" λ reste supérieure à $\varepsilon > 0$ sur R_{fd} . On montre alors de la même manière qu'en section 4.5 que $\frac{1}{\lambda}V(R_{fd})$ est d'adhérence compacte, incluse dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\}$. Le spectre projectifié $\mathbb{P}\mathcal{V}$ des vecteurs de translation est donc bien définie sur \mathcal{X}_{fd} tout entier et à valeurs dans un compact.

Références

- [Alp] R. Alperin, *An elementary account of Selberg's lemma*, L'Ens. Math. **33** (1987), 269-373.
- [BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Mathematics **61**, Birkhäuser 1985.
- [Bass] H. Bass, *Groups of integral representation type*, Pac. J. Math. **86** (1980), 15-51.
- [Ben] Y. Benoist, *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 1-47.
- [Bes] M. Bestvina, *Degenerations of the hyperbolic space*, Duke Math. J. **56** (1988), 143-161.
- [Bor] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, 126. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Bou] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1971.
- [Bre] R. J. Bremigan, *Quotients for algebraic group actions over non-algebraically closed fields*, J. Reine Angew. Math. **453** (1994), 21-47.
- [BrHa] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1999.
- [Bro] K. Brown, *Buildings*, Springer Verlag, 1989.
- [BrTi1] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.
- [BrTi2] F. Bruhat, J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. Fr. **112** (1984), 259-301.
- [Chi] I.M. Chiswell, *Non standard analysis and the Morgan-Shalen compactification*, Quart. J. Math. Oxford **42** (1991), 257-270.
- [ChGo] S. Choi, W. M. Goldman, *Convex real projective structures on closed surfaces are closed*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 657-661.
- [DaKi] F. Dal'Bo, I. Kim, *Marked length rigidity for symmetric spaces*. Comment. Math. Helv. **77** (2002), 399-407.
- [Ebe] P. Eberlein, *Geometry of non-positively curved manifolds*, Chicago L. N. in Math., The Univ. of Chicago Press, 1996.

- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru (eds), *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Séminaire Orsay, Astérisque **66-67**, Soc. Math. France (1979).
- [GoIw] O. Goldman, N. Iwahori, *The space of p -adic norms*, Acta Math. **109** (1963), 137-177.
- [GoMi] W. M. Goldman, J. J. Millson, *Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space*, Invent. Math. **88** (1987) 495-520.
- [Gro1] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Cambridge Univ. Press, 1991.
- [Gro2] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, édité par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic, Fernand Nathan, 1981.
- [Hel] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [Hit] N. J. Hitchin, *Lie groups and Teichmüller space*, Topology **31** (1992), 449-473.
- [JoMi] D. Johnson, J. J. Millson, *Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds*, Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984), Progr. Math. **67**, Birkhäuser, 1987, 48-106.
- [KaLe] M. Kapovich, B. Leeb, *On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 582-603.
- [KILe] B. Kleiner, B. Leeb, *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces of higher rank*, Publ. Math. I.H.E.S. **86** (1997), 115-197.
- [Lab] F. Labourie, *Anosov flows, surface groups and curves in projective space*, Invent. Math. **165** (2006), 51-114.
- [Lan] E. Landvogt, *Some functorial properties of the Bruhat-Tits building.*, J. Reine Angew. Math. **518** (2000), 213-241.
- [Lee] B. Leeb, communication orale, 1997.
- [LMR] A. Lubotzky, S. Mozes, M.S. Raghunathan, *The word and Riemannian metrics on lattices of semisimple Lie groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 91, (2000), 5-53.
- [Luna] D. Luna, *Sur certaines opérations différentiables des groupes de Lie*, Amer. J. Math. **97** (1975), 172-181.
- [Mar] G. Margulis, *Discrete subgroups of semi-simple groups*, Ergeb. Math. Grenz. **17**, Springer Verlag, 1991.

- [Mor] J. Morgan, *Group actions on trees and the compactification of the space of classes of $SO(n, 1)$ -representations*, *Topology* **25**, (1986) 1-33.
- [MoSh] J. Morgan, P. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I, II, III*, *Ann. Math.* **122** (1985), 398-476, et **127** (1988), 403-519.
- [Mos] G.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces* *Ann. Math. Studies* **78**, Princeton Univ. Press, 1973.
- [Par1] A. Parreau, *Dégénérescences de sous-groupes discrets de groupes de Lie semisimples et actions de groupes sur des immeubles affines*, thèse de doctorat, Univ. Orsay, 2000.
- [Par2] A. Parreau, *Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries*, *Crystallographic groups and their generalizations* (Kortrijk, 1999), 263-302, *Contemp. Math.*, 262, Amer. Math. Soc., 2000.
- [Par3] A. Parreau, *Sous-groupes elliptiques de groupes linéaires sur un corps valué*, *J. Lie Theory* **13** (2003), 271–278.
- [Par4] A. Parreau, *La distance vectorielle dans les espaces symétriques et les immeubles affines*, en préparation.
- [Par5] *Espaces de représentations complètement réductibles*, prépublication arXiv :0906.3750.
- [Pau1] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, *Invent. Math.* **94** (1988), 53-80.
- [Pau2] F. Paulin, *De la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, Mémoire d’habilitation, ENS Lyon (Juin 1995).
- [Pau3] F. Paulin, *Dégénérescence de sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** (1997), no. 11, 1217-1220.
- [Ric] R. W. Richardson, *Conjugacy classes of n -tuples in Lie algebras and algebraic groups*, *Duke Math. J.* **57** (1988) 1-35.
- [RiSl] R. W. Richardson, P. J. Slodowy, *Minimum vectors for real reductive algebraic groups*, *J. London Math. Soc.* **42** (1990), 409–429.
- [Ron] M.A. Ronan, *Lectures on buildings*, *Persp. Math.* **7**, Academic Press, 1989.

- [Serre] J.-P. Serre, *Complète Reductibilité*, Séminaire Bourbaki 2003-2004, Astérisque **299**, Exp. No. 932, 195-217.
- [Tit] J. Tits, *Immeubles de type affine*, dans “Buildings and the geometry of diagrams”, Proc. CIME Como 1984, L. Rosati ed., Lect. Notes **1181**, Springer Verlag (1986), 159-190.
- [Tit2] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, Proc. Sympos. Pure Math. of the Amer. Math. Soc. **33** (1977), 29-69.

Anne PARREAU
Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS
Université J. Fourier, BP 74,
38402 Saint-Martin d’Hères (France).
Courrier électronique : `Anne.Parreau@ujf-grenoble.fr`