HAL open science

Problème de Plateau, équations fuchsiennes et problème de Riemann-Hilbert

Laura Desideri

▶ To cite this version:

Laura Desideri. Problème de Plateau, équations fuchsiennes et problème de Riemann-Hilbert. 2009. hal-00460903

HAL Id: hal-00460903
https://hal.science/hal-00460903

Preprint submitted on 2 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Problème de Plateau, équations fuchsiennes et problème de Riemann–Hilbert

Laura Desideri

18 décembre 2009

Laura Desideri

Université Paris Diderot - Paris VII, Institut de Mathématiques de Jussieu
Projet Géométrie et Dynamique
UMR 7586, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05

E-mail : desideri@math.jussieu.fr
Url : http://people.math.jussieu.fr/~desideri

Résumé

Ce mémoire est consacré à la résolution du problème de Plateau à bord polygonal dans l'espace euclidien de dimension trois. Il s'appuie sur la méthode de résolution proposée par René Garnier dans un article publié en 1928 et qui a été oublié depuis, voire ignoré à l'époque. L'approche de Garnier est très différente de la méthode variationnelle, elle est plus géométrique et constructive, et permet d'obtenir des disques minimaux sans point de ramification. Cependant, elle est parfois très compliquée, voire obscure et incomplète. On retranscrit sa démonstration dans un formalisme moderne, tout en proposant de nouvelles preuves plus simples, et en en complétant certaines lacunes. Ce travail repose principalement sur l'utilisation plus systématique des systèmes fuchsiens et la mise en évidence du lien entre la réalité d'un système et sa monodromie.

La méthode de Garnier repose sur le fait que, par la représentation de Weierstrass spinorielle des surfaces minimales, on peut associer une équation fuchsienne réelle du second ordre, définie sur la sphère de Riemann, à tout disque minimal à bord polygonal. La monodromie de cette équation est déterminée par les directions orientées des côtés du bord. Le bon point de vue consiste à considérer des polygones pouvant avoir un sommet en l'infini. Pour résoudre le problème de Plateau, on est donc amené à résoudre un problème de Riemann–Hilbert. On procède ensuite en deux étapes : on construit d'abord, par déformations isomonodromiques, la famille de tous les disques minimaux dont le bord est un polygone de directions orientées données. Puis on montre, en étudiant les longueurs des côtés des bords polygonaux, qu'on obtient ainsi tout polygone comme bord d'un disque minimal.

Mots-clefs

Surfaces minimales ; équations fuchsiennes et systèmes fuchsiens ; problème de Riemann–Hilbert ; déformations isomonodromiques ; systèmes intégrables ; système de Schlesinger.

Classification mathématique par sujets (2010) 53A10, 34M03, 34M35, 34M50, 34M55, 34M56.

The Plateau problem, Fuchsian equations and the Riemann–Hilbert problem

Abstract

This dissertation is devoted to the resolution of the Plateau problem in the case of a polygonal boundary in the three-dimensional euclidean space. It relies on a method developped by René Garnier and published in 1928 in a paper which seems today to be totally forgotten. Even if Garnier's method is more geometrical and constructive than the variational one, it is sometimes really complicated, and even obscure or incomplete. We rewrite his proof with a modern formalism, we fill some gaps, and we propose some alternative easier proofs. This work mainly relies on a systematic use of Fuchsian systems and on the relation that we establish between the reality of such systems and their monodromy.

Garnier's method is based on the following result: using the spinorial Weierstrass representation for minimal surfaces, we can associate to each minimal disk with a polygonal boundary a real Fuchsian second order equation defined on the Riemann sphere. The monodromy of the equation is encoded by the oriented directions of the edges of the boundary. To solve the Plateau problem, we are thus led to solve a Riemann–Hilbert problem. Then, we proceed in two steps: first, by means of isomonodromic deformations, we construct the familly of all minimal disks with a polygonal boundary with given oriented directions. Then, by studying the edges's lengths of these polygonal boundaries, we show that every polygon is the boundary of a minimal disk.

Keywords

Minimal surfaces; Fuchsian equations and Fuchsian systems; the Riemann–Hilbert problem; isomomodromic deformations; integrable systems; Schlesinger system.

Mathematics Subject Classification (2010) 53A10, 34M03, 34M35, 34M50, 34M55, 34M56.

Table des matières

Introduction **7**

1 Surfaces minimales et équations fuchsiennes **15**
1.1 Surfaces minimales 15
1.2 Équations fuchsiennes et systèmes fuchsiens 23

2 L'équation associée à un disque minimal à bord polygonal **39**
2.1 Polygones dans l'espace euclidien de dimension trois 41
2.2 Monodromie et propriétés de réalité 43
2.3 Singularités apparentes 52
2.4 Caractérisation des équations fuchsiennes 53

3 Déformations isomonodromiques **59**
3.1 Les équations associées à un jeu de directions orientées 60
3.2 Passage d'une équation à un système d'équations 65
3.3 Les systèmes fuchsiens associés à un jeu de directions orientées 73
3.4 Équations fuchsiennes réelles 83

4 Rapports de longueurs des côtés **87**
4.1 La fonction « rapports des longueurs » $F_D(t)$ 89
4.2 La démonstration par récurrence 94
4.3 Les pseudo-chocs 102
4.4 Le cas réel 109

A Démonstrations de certains résultats utilisés au chapitre 4 **115**

Bibliographie **121**

Introduction

Ce mémoire a pour but de présenter, tout en l'améliorant, la résolution du problème de Plateau développée par René Garnier dans le cas d'un bord polygonal dans l'espace euclidien de dimension trois. Garnier a exposé cette méthode dans un article intitulé *Le Problème de Plateau* [Gar28]. Publié en 1928, c'est-à-dire environ deux ans avant les démonstrations du problème de Plateau obtenues indépendamment par Radó [Rad30] et Douglas [Dou31], cet article semble avoir été complètement oublié, voire ignoré à l'époque. Même si l'existence de cette résolution est aujourd'hui connue de certains spécialistes, lorsque j'ai commencé ma thèse (dont ce mémoire est un des résultats), personne ne semblait être en mesure de dire comment elle fonctionnait, ni même si elle était correcte ou non. Je propose ici une nouvelle présentation de cette preuve, qui contient à différents endroits de nouvelles démonstrations plus simples, et qui en complète certaines lacunes. Ce travail repose principalement sur l'utilisation plus systématique des systèmes fuchsiens et la mise en évidence du lien entre la réalité d'un tel système et sa monodromie. J'explicite ainsi un certain nombre de propriétés « cachées » que Garnier lui-même ne mentionne jamais, mais qui jouent pourtant un rôle essentiel dans le fonctionnement de sa démonstration, et qui nous donnent un nouveau point de vue sur son approche. Cette clarification des fondements de la preuve de Garnier m'a permis d'étendre facilement sa méthode au cas où l'espace ambiant est l'espace de Minkowski de dimension trois [1].

Les surfaces minimales sont les surfaces dont la courbure moyenne est partout nulle. Elles constituent les points critiques de la fonctionnelle d'aire pour les variations fixant le bord. La théorie des surfaces minimales a commencé au XVIIIe siècle, avec les débuts du calcul des variations, et connaît d'importantes avancées dans la seconde moitié du XIXe siècle, avec notamment la représentation due à Weierstrass de toute immersion conforme minimale à partir de deux fonctions holomorphes. À la fin du XIXe siècle et au début du XXe siècle, les mathématiciens s'intéressent au « problème de Plateau », du nom du physicien belge Joseph Plateau qui en 1873, a établi expérimentalement, par de très nombreuses expériences sur les films de savon, que toute courbe fermée de l'espace est le bord d'une surface minimale. L'énoncé mathématique du problème de Plateau est le suivant : *étant donné une courbe fermée connexe de Jordan de l'espace euclidien de dimension trois, montrer qu'il existe une surface minimale régulière et ayant la topologie d'un disque dont le bord soit la courbe fermée.* Au début des années 1930, Tibor Radó [Rad30] et Jesse Douglas [Dou31] obtiennent indépendamment par la méthode variationnelle les premiers résultats généraux (reconnus !) du problème de Plateau. Cependant, ils ne parviennent pas à exclure l'existence de points de ramification isolés à l'intérieur ou au bord du disque minimal. Il faut attendre les années 1970 pour obtenir une démonstration du problème de Plateau qui soit absolument complète.

La méthode de Garnier pour résoudre le problème de Plateau est très différente de

1. *Maximal disks with polygonal boundary in the Minkowski space*, en préparation.

la méthode variationnelle. Son article est d'ailleurs beaucoup plus long et technique que celui de Douglas, et le résultat qu'il obtient est en un sens plus faible, puisqu'il se limite aux contours polygonaux. Mais il obtient, contrairement à Douglas, une surface régulière partout. De plus, l'approche de Garnier est plus géométrique, elle s'inscrit dans la continuation des travaux de Weierstrass, Riemann, Schwarz et Darboux. Elle est également plus constructive que la méthode variationnelle.

La méthode de Garnier repose sur la correspondance de tout disque minimal à bord polygonal avec une équation fuchsienne réelle du second ordre définie sur la sphère de Riemann. Cette correspondance est antérieure aux travaux de Garnier. Elle est donnée par la représentation de Weierstrass, aujourd'hui dite spinorielle, des immersions conformes minimales. Cette équation fuchsienne semble être mentionnée pour la première fois, de manière indépendante et presque simultanée, dans un bref article de Karl Weierstrass [Wei66] publié au mois de décembre 1866, et lors d'une présentation posthume des travaux de Bernhard Riemann [Rie98] par Hattendorf le 6 janvier 1867 à la Société Royale de Göttingen. Riemann n'utilise pas la représentation de Weierstrass, mais deux représentations conformes (sphérique et plane) du même disque minimal. Gaston Darboux ([Dar89], chapitre XIII) étudie en détail cette équation associée à un disque minimal à bord polygonal, et expose les difficultés à surmonter pour être en mesure de résoudre le problème de Plateau. Au premier rang de celles-ci figure la détermination d'une équation fuchsienne à partir de sa monodromie : c'est le « problème de Riemann–Hilbert », qui deviendra bientôt le vingt-et-unième des vingt-trois problèmes proposés par David Hilbert au Congrès International de Paris en 1900. C'est seulement une vingtaine d'années après ces observations de Darboux que seront obtenues les premières solutions du problème de Riemann–Hilbert, par Plemelj [Ple08] et Birkhoff [Bir13] – solutions qui se sont d'ailleurs avérées bien plus tard erronées en général.

Garnier est un élève de Paul Painlevé. En 1912, il publie un article [Gar12] qui rassemble les résultats de sa thèse et dans lequel il étudie en particulier les déformations isomonodromiques d'équations fuchsiennes ayant un nombre arbitraire de singularités et aucune singularité logarithmique. Le système différentiel qui gouverne ces déformations, connu aujourd'hui sous sa forme hamiltonienne sous le nom de *système de Garnier*, est en un sens une généralisation de la sixième équation de Painlevé P_{VI}. En 1926, il propose une résolution du problème de Riemann–Hilbert [Gar26] basée sur l'étude du système Schlesinger au voisinage de ses singularités non mobiles, et de ses liens avec le système de Garnier. Les résultats obtenus dans ces deux articles lui permettent d'espérer être en mesure de lever les difficultés mises en évidence par Darboux pour la résolution du problème de Plateau. Il lui reste néanmoins encore beaucoup de travail à accomplir pour obtenir cette résolution [Gar28].

Depuis les années 1970, leurs liens avec des problèmes issus de la physique sont à l'origine de l'intérêt nouveau que suscitent les équations de Painlevé, et consécutivement, le système de Garnier. C'est à Kazuo Okamoto et à Hironobu Kimura que l'on doit la « redécouverte » du système de Garnier au début des années 1980 et, en particulier, la mise en évidence de sa structure hamiltonienne [Oka86]. Dans ce contexte, et grâce notamment aux travaux de Mikio Sato, Tetsuji Miwa et Michio Jimbo [SMJ79] sur le problème de Riemann–Hilbert et le système de Schlesinger, la résolution du problème de Plateau par Garnier revêt elle aussi un intérêt nouveau, avec entre autre la possibilité d'une simplification.

Résumé des chapitres

Le but principal de ce mémoire est la démonstration du théorème suivant. On se restreint aux polygones dont les directions orientées des côtés $(D_1, \ldots, D_{n+3})$ sont dans l'ensemble $\mathcal{D}^n$ (définition 2.2), *i.e.* on suppose qu'elles sont en position générique : deux directions quelconques d'un polygone ne sont pas colinéaires et trois directions quelconques ne sont pas coplanaires.

Théorème (Problème de Plateau à bord polygonal)**.** *Pour tout polygone P à $n+3$ côtés ($n \in \mathbb{N}^*$) de l'espace euclidien de dimension trois, ayant éventuellement un sommet en l'infini et dont les directions orientées des côtés sont dans l'ensemble $\mathcal{D}^n$, il existe une immersion conforme minimale $\mathcal{X}$ du demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+$ dans $\mathbb{R}^3$ dont le bord de l'image est le polygone P. De plus, si P a un sommet en l'infini, alors l'immersion $\mathcal{X}$ a un bout hélicoïdal en ce sommet.*

Après un premier chapitre introductif, on explicite au deuxième chapitre le lien qu'établit la méthode de Garnier entre la théorie des surfaces minimales et celles des équations fuchsiennes : on constitue en quelque sorte un dictionnaire entre ces deux domaines. Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à la résolution du problème de Plateau proprement dite. Au chapitre 3, pour toute collection $(D_1, \ldots, D_{n+3})$ de directions orientées, on construit la famille de tous les disques minimaux à bord polygonal (ayant éventuellement un sommet en l'infini) dont les directions orientées des côtés sont $(D_1, \ldots, D_{n+3})$. Au chapitre 4, on montre que tout polygone de directions orientées $(D_1, \ldots, D_{n+3})$ est obtenu à partir de cette famille, c'est-à-dire est le bord d'au moins un disque minimal.

Chapitre 1. Surfaces minimales et équations fuchsiennes On expose des aspects généraux de deux domaines *a priori* éloignés : d'une part sur les surfaces minimales de l'espace euclidien de dimension trois, d'autre part sur les équations et systèmes fuchsiens.

Le point essentiel en ce qui concerne les surfaces minimales est la représentation de Weierstrass que l'on appelle aujourd'hui spinorielle : tout couple de fonctions (G, H) holomorphes sur une surface de Riemann Σ et sans zéro commun définit une immersion conforme minimale de Σ (ou éventuellement de son revêtement universel) dans $\mathbb{R}^3$. Réciproquement, toute immersion conforme minimale d'une surface de Riemann dans $\mathbb{R}^3$ est obtenue par un tel couple de fonctions holomorphes.

Pour les équations et systèmes fuchsiens, on donne une introduction assez détaillée des notions de base telles que le comportement local au voisinage des singularités, la monodromie, le problème de Riemann–Hilbert et les déformations isomonodromiques. On introduit du point de vue des déformations isomonodromiques les deux systèmes complètement intégrables que sont le système de Garnier et le système de Schlesinger.

Chapitre 2. L'équation associée à un disque minimal à bord polygonal Ce chapitre n'est pas consacré à la résolution du problème de Plateau proprement dite. Il constitue plutôt une préparation à la méthode de Garnier, en associant à toute immersion conforme représentant un disque minimal à bord polygonal une équation fuchsienne du second ordre sur la sphère de Riemann. Cette correspondance est antérieure aux travaux de Garnier sur le problème de Plateau et remonte au moins à Darboux ([Dar89], chapitre XIII), et même à Riemann [Rie98] et Weierstrass [Wei66].

On considère une immersion conforme minimale $\mathcal{X} : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{R}^3$ du demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+ = \{x \in \mathbb{C} \mid \Im(x) > 0\}$ dans l'espace euclidien de dimension trois, dont l'image est

limitée par un polygone P à $n+3$ sommets. On note

$$t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 0,\ t_{n+2} = 1,\ t_{n+3} = \infty$$

les antécédents, qui sont réels, des sommets du polygone P par l'immersion $\mathcal{X}$. On associe à l'immersion $\mathcal{X}$ l'unique équation différentielle linéaire du second ordre (E^*) ayant comme système fondamental de solutions les données de Weierstrass spinorielles (G, H) de $\mathcal{X}$. On étudie cette équation, en traduisant des propriétés géométriques de l'immersion conforme minimale, en terme de propriétés analytiques de l'équation (E^*). Le but de ce chapitre est d'obtenir une caractérisation des équations (E^*) qui proviennent en ce sens d'un disque minimal à bord polygonal à $n+3$ côtés. On établit que cette caractérisation est donnée par trois conditions, que l'on note (i), (ii) et (iii). La première condition demande que l'équation soit fuchsienne et porte sur ses singularités et ses exposants. Ses singularités sont de deux natures : d'une part, les antécédents t_i des sommets de P, et d'autre part, les ombilics de l'immersion $\mathcal{X}$, qui définissent des singularités apparentes (*i.e.* en lesquelles les solutions de l'équation sont uniformes). Il y a au plus $n-1$ singularités apparentes. La deuxième condition concerne la monodromie. En appliquant le principe de réflexion de Schwarz, on détermine comment les données de Weierstrass sont transformées autour des singularités, et on montre ainsi que la monodromie de l'équation (E^*) est entièrement déterminée par les directions orientées $D = (D_1, \ldots, D_{n+3})$ des côtés du polygone P. La troisième condition impose que l'équation soit réelle, *i.e.* que ses coefficients soient analytiques réels.

Par contre, il n'y a aucune traduction naturelle des longueurs des côtés de P en terme de propriétés de l'équation (E^*).

On définit, pour tout $(n+3)$-uplet de directions orientées $D = (D_1, \ldots, D_{n+3})$ l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$ des équations satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii), où D est fixé. Cet ensemble est isomonodromique. Par construction, à toute équation de l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$ est associé au moins un disque minimal ayant un bord polygonal de directions orientées D. On définit le quotient $\mathcal{P}_D^n$ de l'ensemble des polygones à $n+3$ côtés de $\mathbb{R}^3$ dont les directions orientées des côtés sont D, par le groupe G des translations et des homothéties de rapport positif de $\mathbb{R}^3$. En fait, on montre que l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence par le groupe G de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\mathcal{P}_D^n$.

Pour toutes directions orientées $D = (D_1, \ldots, D_{n+3})$, il faut obtenir une description plus explicite de l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$, afin de pouvoir étudier la famille des polygones qu'il définit. Ceci passe principalement par la résolution d'un problème de Riemann–Hilbert (condition (ii)) et par l'étude de la condition de réalité (iii). C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3. Déformations isomonodromiques Étant donné un $(n+3)$-uplet de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$, le but initial de ce chapitre est de décrire explicitement l'ensemble d'équations $\mathcal{E}_D^n$. Ce faisant, on va se rendre compte qu'il est plus commode, voire nécessaire d'utiliser des systèmes fuchsiens à la place des équations fuchsiennes. Finalement, le résultat que l'on va obtenir, et qui nous sera utile pour conclure la résolution de problème de Plateau au chapitre suivant, est la description d'une famille de systèmes fuchsiens associés à D.

On commence par observer qu'il est plus naturel, tant du point de vue géométrique que dans la résolution du problème de Riemann–Hilbert, de considérer, non pas des polygones de $\mathbb{R}^3$, mais des polygones de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire d'autoriser un des sommets à être

en l'infini. On demande aux disques minimaux limités par de tels polygones d'avoir un bout hélicoïdal au sommet à l'infini. Du point de vue des équations fuchsiennes, cela revient à autoriser une singularité apparente de plus. On définit donc le quotient $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ de l'ensemble des polygones à $n+3$ côtés de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ dont les directions orientées des côtés sont données par D, par le groupe G. L'ensemble $\mathcal{P}_D^n$ est une partie de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$. On définit également l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ des équations différentielles linéaires du second ordre vérifiant une version plus générale de la condition (i) obtenue en autorisant une singularité apparente de plus, et les conditions (ii) et (iii). Comme précédemment, on trouve que l'ensemble d'équations $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ est en bijection l'ensemble des classes d'équivalence par le groupe G de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$.

Pour résoudre le problème de Plateau pour tout polygone, il faut donc montrer que l'ensemble des polygones associés à une équation de l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ est l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ tout entier. Un système de coordonnées sur l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ est donné par n rapports de longueurs de côtés. Il suffit donc de montrer que la fonction qui va de $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ dans $]0,+\infty[^n$ et qui à toute équation de $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ associe les rapports de longueurs des côtés du polygone qu'elle définit est surjective. Malheureusement, on n'a pas d'expression simple de ces longueurs.

En utilisant des systèmes fuchsiens, on établit une condition nécessaire et suffisante portant sur la monodromie d'une équation fuchsienne (ou d'un système fuchsien) pour que celle-ci soit réelle. Ce résultat n'apparaît pas dans l'article de Garnier, ni même seulement le fait qu'on ait besoin d'un tel résultat. Comme cette condition est vérifiée par la monodromie des équations de $\underline{\mathcal{E}}_D^n$, on obtient que les équations satisfaisant les conditions (i) et (ii) vérifient automatiquement la condition de réalité (iii). On en déduit que l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ est une famille isomonodromique $(E_D^*(t), t \in \pi^n)$ paramétrée par le n-uplet de singularités $t = (t_1, \dots, t_n)$ variant dans le simplexe

$$\pi^n = \left\{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 < \cdots < t_n < 0\right\}.$$

Elle est décrite par le système de Garnier $(\mathcal{G}_n)$. Toute équation $E_D^*(t)$ de cette famille admet un système fondamental de solutions $(G(x,t), H(x,t))$ qui est M-invariant et qui constitue les données de Weierstrass d'un disque minimal dont le bord est dans l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}_D^n$. Les rapports de longueur de ses côtés sont données par

$$r_i(t) = \frac{\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(|G(x,t)|^2 + |H(x,t)|^2\right) dx}{\displaystyle\int_0^1 \left(|G(x,t)|^2 + |H(x,t)|^2\right) dx}$$

$(i = 1, \dots, n)$. On définit la fonction « rapports des longueurs » $F_D(t)$ associée à un $(n+3)$-uplet de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$

$$F_D : \pi^n \to]0,+\infty[^n, \qquad F_D(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t)).$$

Comme le système de Garnier n'a pas la propriété de Painlevé, le comportement de la fonction $F_D(t)$ est difficile à déterminer. C'est la raison principale pour laquelle, contrairement à Garnier, on va travailler à présent uniquement avec des systèmes fuchsiens.

On définit l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ des systèmes fuchsiens du premier ordre vérifiant les conditions analogues pour les systèmes aux conditions (i), (ii) et (iii). On montre que l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ contient une famille isomonodromique de systèmes fuchsiens $(A_D(t), t \in \pi^n)$ qui est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence par le groupe G de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$. Cette famille est paramétrée par les singularités $t = (t_1, \dots, t_n)$ et elle est décrite par le système de Schlesinger, qui a la propriété de

Painlevé. On obtient de plus, et ceci ne figure pas non plus chez Garnier, que la solution $(A_1(t), \ldots, A_{n+2}(t))$ du système de Schlesinger correspondant à cette famille est holomorphe en tout point du simplexe π^n. L'introduction de l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ associé aux directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$ apporte un point de vue nouveau à la démonstration originelle de Garnier, puisque celui-ci ne voit les système fuchsiens que comme un outil transitoire permettant d'étudier les équations de l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$. Je vais au contraire définir et étudier la famille de disques minimaux associés aux directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$ à partir exclusivement de la famille $(A_D(t), t \in \pi^n)$.

Chapitre 4. Rapports de longueurs des côtés Le but de chapitre, qui conclut la résolution du problème de Plateau, est de montrer que l'ensemble des polygones associés à l'ensemble de systèmes $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ est l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ tout entier, c'est-à-dire d'établir le théorème suivant.

Théorème. *Étant donné un $(n+3)$-uplet de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$, la fonction « rapports des longueurs » $F_D : \pi^n \to]0, +\infty[^n$ est surjective.*

Je propose une démonstration de ce théorème très différente de celle Garnier, bien que j'utilise les mêmes outils que lui, à savoir l'étude de la famille $(A_D(t), t \in \pi^n)$ au bord du simplexe π^n et une récurrence portant sur le nombre $n+3$ de côtés des polygones. Par identification naturelle des simplexes π^n et $]0, +\infty[^n$, on peut définir une fonction $\widetilde{F}_D :]0, +\infty[^n \to]0, +\infty[^n$ associée à la fonction F_D. Pour montrer que la fonction F_D est surjective, je vais montrer que la fonction $\widetilde{F}_D$ est de degré 1, c'est-à-dire homotope à l'identité. L'étape la plus importante de ma démonstration est la preuve de la proposition 4.6 dont l'énoncé paraît naturel : la fonction $F_D(t)$ s'étend continûment à chacune des faces du bord du simplexe π^n (qui sont des simplexes de dimension inférieure). Chaque face est caractérisée par la « disparition » de certains t_i (qui ont fusionné avec la singularité suivante t_{i+1}). On affirme qu'alors la fonction $F_D(t)$ restreinte à chaque face est, à homéomorphisme près, la fonction « rapports des longueurs » $F_{D'} : \pi^k \to]0, +\infty[^k$ $(1 \leq k \leq n-1)$ définie par les directions orientées $D' \in \mathcal{D}^k$ obtenues à partir de D en « enlevant » les composantes D_i correspondant aux t_i qui ont disparu. Une fois que l'on a obtenu la proposition 4.6, il suffit pour conclure de faire une récurrence forte, dont l'hypothèse au rang $n-1$ est la suivante : pour tout entier $k \leq n-1$, pour tout jeu de directions orientées $D' \in \mathcal{D}^k$, la fonction $\widetilde{F}_{D'} :]0, +\infty[^k \to]0, +\infty[^k$ est de degré 1. On obtient ainsi au rang n pour tout $D \in \mathcal{D}^n$

$$\widetilde{F}_D\big|_{\partial(]0,+\infty[^n)} : \partial(]0, +\infty[^n) \to \partial(]0, +\infty[^n)$$

est de degré 1, ce qui assure, par le résultat de topologie de la proposition 4.5, que la fonction $\widetilde{F}_D :]0, +\infty[^n \to]0, +\infty[^n$ est de degré 1, et donc l'hérédité de la récurrence. L'initialisation au rang $n = 1$ (cas d'un bord quadrilatéral) est immédiate une fois que l'on a obtenu la proposition 4.6.

La majeure partie de ce chapitre est donc consacrée à la démonstration de la proposition 4.6. La partie difficile est d'obtenir la continuité de la fonction $F_D(t)$ au bord, et non pas son interprétation géométrique. On va s'appuyer sur des résultats généraux sur les singularités fixes du système de Schlesinger, que Garnier appelle les pseudo-chocs, c'est-à-dire en les points tels que $t_i = t_j$, $i \neq j$. Ces résultats sont une partie plus connue du travail de Garnier [Gar26], et sont développés et généralisés par Sato, Miwa et Jimbo [SMJ79]. On rappelle ces résultats, tout en les complétant dans l'optique d'étudier l'holomorphie

de la fonction $F_D(t)$ en ces singularités. Puis on applique cette étude générale aux solutions particulières du système de Schlesinger qui nous intéresse, c'est-à-dire au cas réel. En rassemblant et en adaptant les résultats généraux, on établit la proposition 4.6.

Chapitre 1

Surfaces minimales et équations fuchsiennes

On expose dans ce chapitre de manière indépendante des aspects généraux de deux domaines *a priori* éloignés : d'une part sur les surfaces minimales de l'espace euclidien de dimension trois, d'autre part sur les équations et systèmes fuchsiens.

1.1 Surfaces minimales

On s'intéresse dans cette section aux surfaces immergées dans l'espace euclidien de dimension trois $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle)$. On note (O, e_1, e_2, e_3) un repère orthonormal de $\mathbb{R}^3$. Dans toute cette section, Σ désigne une surface de Riemann quelconque, et $\widetilde{\Sigma}$ son revêtement universel.

Une immersion conforme $\mathcal{X} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ de la surface de Riemann Σ dans $\mathbb{R}^3$ est dite minimale si sa courbure moyenne est partout nulle. Rappelons que la courbure moyenne d'une immersion est la moitié de la trace de sa deuxième forme fondamentale.

Comme on va le voir, les résultats dont on aura besoin par la suite et que l'on introduit ici sont connus depuis longtemps. La plupart se trouvent, sous une forme un peu différente, dans [Dar89], excepté la description des surfaces minimales en terme de quaternions.

1.1.1 Représentation de Weierstrass

La représentation de Weierstrass est un outil fondamental dans l'étude des surfaces minimales. Elle permet à la fois de caractériser et de construire des surfaces minimales. Donnons tout d'abord une première forme, classique, de cette représentation.

Théorème 1.1. *Soit x_0 un point de la surface de Riemann Σ.*

Soient une fonction g méromorphe dans Σ et une 1-forme différentielle ω holomorphe dans Σ telles que

- *les zéros de ω sont d'ordre pair,*
- *g a un pôle d'ordre m en un point $a \in \Sigma$ si et seulement si ω a un zéro d'ordre $2m$ en a.*

Alors l'application $\mathcal{X}$ définie sur le revêtement universel $\widetilde{\Sigma}$ par

$$\mathcal{X}(x) = \Re \int_{x_0}^{x} \left(1 - g^2, i(1 + g^2), 2g\right) \omega$$

est une immersion conforme minimale de $\widetilde{\Sigma}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Réciproquement, si $\mathcal{X} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ est une immersion conforme minimale, alors il existe un point $\mathcal{X}_0$ dans $\mathbb{R}^3$, une fonction g méromorphe dans Σ et une 1-forme différentielle ω holomorphe dans Σ vérifiant les deux conditions ci-dessus tels que

$$\mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0 + \Re \int_{x_0}^{x} \left(1 - g^2, i(1+g^2), 2g\right) \omega.$$

Par définition, la 2-forme différentielle définie par

$$Q = \left\langle \frac{d^2\mathcal{X}}{dx^2}, N \right\rangle dx^2$$

est la différentielle de Hopf de l'immersion $\mathcal{X}$. Elle s'exprime en fonction des données (g, ω) par $Q = -\omega dg$. On peut voir facilement que la fonction g est le projeté stéréographique par rapport au pôle nord du vecteur de Gauss $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ de l'immersion $\mathcal{X}$. Les données géométriques de l'immersion $\mathcal{X}$ sont caractérisées par les données (g, ω) : sa métrique induite et sa seconde forme fondamentale sont

$$ds^2 = \left(1 + |g|^2\right)^2 |\omega|^2, \qquad \mathrm{II} = Q + \bar{Q}.$$

Cependant, la représentation qu'utilise Garnier, et que l'on va utiliser exclusivement dans ce mémoire, est la représentation aujourd'hui dite spinorielle des surfaces minimales. On verra ensuite à quelle structure de spin elle correspond. On pourra se reporter à [KS96] pour plus de détails sur la représetation spinorielle..

Théorème 1.2. *Soit x_0 un point de la surface de Riemann Σ.*

Pour tout couple $(G, H) : \Sigma \to \mathbb{C}^2$ de fonctions holomorphes dans Σ n'ayant aucun zéro commun, l'application $\mathcal{X}$ définie sur le revêtement universel $\widetilde{\Sigma}$ par

$$\mathcal{X}(x) = \Re \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} i\left(G(\xi)^2 - H(\xi)^2\right) \\ G(\xi)^2 + H(\xi)^2 \\ 2iG(\xi)H(\xi) \end{pmatrix} d\xi \tag{1.1}$$

est une immersion conforme minimale de $\widetilde{\Sigma}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Réciproquement, si $\mathcal{X} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ est une immersion conforme minimale, alors il existe un point $\mathcal{X}_0$ dans $\mathbb{R}^3$, et un couple $(G, H) : \Sigma \to \mathbb{C}^2$ de fonctions holomorphes sans zéro commun tels que

$$\mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0 + \Re \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} i\left(G(\xi)^2 - H(\xi)^2\right) \\ G(\xi)^2 + H(\xi)^2 \\ 2iG(\xi)H(\xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

Comme on utilisera exclusivement cette représentation, on l'appellera, contrairement à l'usage actuel, la représentation de Weierstrass et le couple de fonctions holomorphes (G, H) les données de Weierstrass de l'immersion $\mathcal{X}$. La correspondance entre les deux représentations précédentes est donnée par

$$g = -\frac{G}{H}, \qquad \omega = -iH^2 dx.$$

Le projeté stéréographique nord du vecteur de Gauss N est $-G/H$. La différentielle de Hopf est donnée par le Wronskien des fonctions G et H

$$Q = i\left(GH' - HG'\right) dx^2,$$

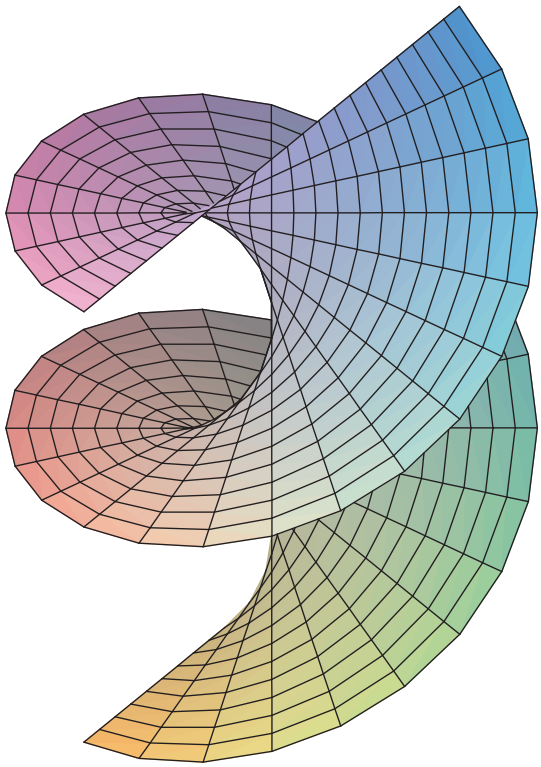

Figure 1.1 – Une hélicoide

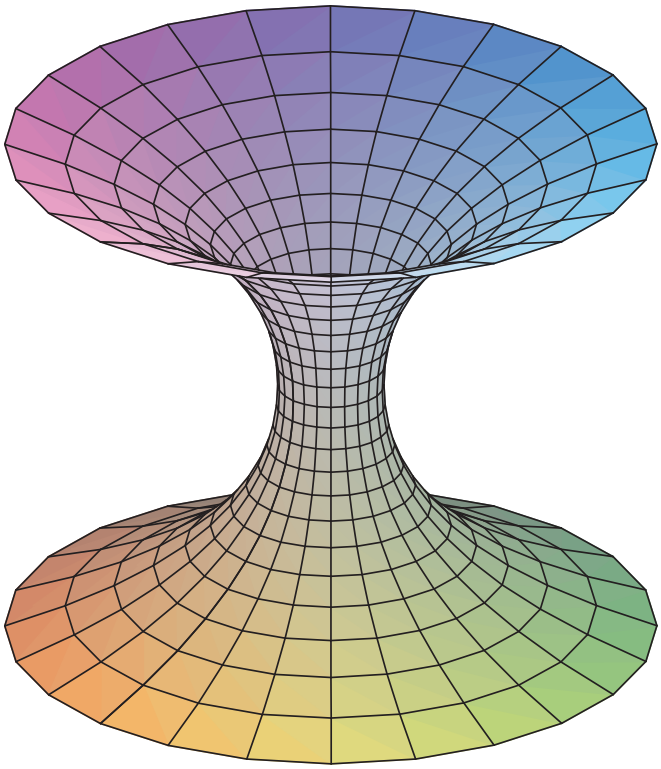

Figure 1.2 – Une caténoide

et la métrique induite et la seconde forme fondamentale par

$$ds^2 = \left(|G|^2 + |H|^2\right)^2 |dx|^2, \qquad \mathrm{II} = Q + \bar{Q}.$$

Exemple. Voici les exemples les plus classiques de surfaces minimales.

(i) Si les fonctions G et H sont proportionnelles, alors l'immersion associée définit une surface minimale contenue dans un plan (c'est même une équivalence). Si $\Sigma = \mathbb{C}$ et si les fonctions G et H sont constantes, on obtient un plan entier.

(ii) Si on choisit $\Sigma = \mathbb{C}^*$, $G(x) = 1$, $H(x) = 1/x$, on obtient une *hélicoïde*. L'immersion $\mathcal{X}$ est définie dans le revêtement universel de $\mathbb{C}^*$. Les hélicoïdes sont des surfaces réglées (figure 1.1).

(iii) Si on choisit $\Sigma = \mathbb{C}^*$, $G(x) = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $H(x) = e^{i\frac{\pi}{4}}/x$, on obtient une *caténoïde*. On peut montrer qu'alors l'immersion $\mathcal{X}$ est bien définie dans $\mathbb{C}^*$. Les caténoïdes sont les seules surfaces minimales de révolution (figure 1.2).

Comme on ne s'intéresse dans ce mémoire qu'aux disques minimaux, on choisit de les représenter dans le demi-plan supérieur ou demi-plan de Poincaré

$$\mathbb{C}_+ = \{x \in \mathbb{C} \mid \Im(x) > 0\}, \tag{1.2}$$

où $\Im(x)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe x. Il n'y a pas alors de problème de période, et toutes fonctions G et H holomorphes dans le demi-plan supérieur et non simultanément nulles définissent par la formule (1.1) une immersion $\mathcal{X}$ de $\mathbb{C}_+$ dans $\mathbb{R}^3$. La régularité des fonctions G et H au bord $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ du demi-plan supérieur dépend de la régularité de la courbe limitant la surface minimale.

On voit que l'immersion $\mathcal{X}$ ne change pas si on change le signe du couple (G, H). En fait, les données de Weierstrass (G, H) associées à une immersion conforme minimale $\mathcal{X}$ sont uniques au signe près. Par ailleurs, si on considère une autre représentation $\mathcal{X}_1 : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ de la même surface minimale, alors l'immersion $\mathcal{X}_1$ est la composée $\mathcal{X} \circ f$ de l'immersion $\mathcal{X}$ par une représentation conforme $f : \Sigma \to \Sigma$ de la surface de Riemann Σ dans elle-même. Les données de Weierstrass de l'immersion $\mathcal{X}_1$ sont alors

$$G_1 = \sqrt{\frac{df}{dx}}\, G \circ f, \quad H_1 = \sqrt{\frac{df}{dx}}\, H \circ f.$$

Lorsque la surface de Riemann Σ est le demi-plan supérieur, les fonctions f ci-dessus sont des applications de Möbius

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{où } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}).$$

Il suffit donc de fixer l'image de trois points par une immersion $\mathcal{X}$ pour la déterminer entièrement à partir de son image.

Remarquons que si la représentation de Weierstrass donne une description locale très simple des immersions conformes minimales, elle paraît *a priori* peu utile à la résolution du problème de Plateau. Il semble en effet difficile de déduire d'une courbe que l'on s'est fixée à l'avance des conditions sur les données de Weierstrass (G, H) qui assurent que l'immersion conforme minimale associée passe par cette courbe. On obtient au mieux le comportement local de (G, H) au voisinage des points de l'axe réel.

1.1.2 Surface minimale conjuguée et famille associée

Les coordonnées d'une immersion conforme minimale sont les parties réelles de fonctions holomorphes : elles sont donc harmoniques. Rappelons qu'à toute application harmonique f définie sur la surface de Riemann Σ, on peut associer une autre application harmonique f^*, qui est *a priori* définie dans le revêtement universel $\widetilde{\Sigma}$, telle que la fonction $f + if^*$ soit holomorphe dans $\widetilde{\Sigma}$ (f^* est définie à une constante additive près). L'application f^* est appelée l'application harmonique conjuguée de f. On peut ainsi introduire la définition suivante.

Définition 1.3. Soit $\mathcal{X} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ une immersion conforme minimale. Alors l'immersion conforme minimale $\mathcal{X}^* : \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sont les applications harmoniques conjuguées de celles de $\mathcal{X}$ est appelée *l'immersion conjuguée* de $\mathcal{X}$. Elle est définie à une translation près.

Si l'immersion $\mathcal{X}$ a pour données de Weierstrass (G, H), alors l'immersion conjuguée $\mathcal{X}^*$ s'écrit

$$\mathcal{X}^*(x) = \Im \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} i\left(G(\xi)^2 - H(\xi)^2\right) \\ G(\xi)^2 + H(\xi)^2 \\ 2iG(\xi)H(\xi) \end{pmatrix} d\xi,$$

et ses données de Weierstrass sont

$$e^{i\frac{\pi}{4}}G, \quad e^{i\frac{\pi}{4}}H.$$

Les immersions $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^*$ ont la même application de Gauss, et elles sont localement isométriques. Par exemple, la surface conjuguée d'une caténoïde est une hélicoïde, bien qu'elles ne soient pas globalement isométriques. Par ailleurs, l'équation différentielle des lignes de courbure de $\mathcal{X}$ est donnée par

$$\Re\left(GH' - HG'\right) dx^2 = 0,$$

et celle des lignes asymptotiques par

$$\Re\, i\left(GH' - HG'\right) dx^2 = 0.$$

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques sont donc échangées entre une surface minimale et sa conjuguée. Comme une surface minimale et sa conjuguée ont les mêmes géodésiques et la même application de Gauss, on en déduit donc le lemme suivant.

Lemme 1.4. *Soit une surface minimale $(\mathcal{M})$ de $\mathbb{R}^3$, et soit $(\mathcal{M}^*)$ sa surface minimale conjuguée. Si la surface $(\mathcal{M})$ contient un segment de droite de vecteur directeur v, alors ce segment correspond sur la surface $(\mathcal{M}^*)$ à une courbe plane contenue dans un plan normal à v et que la surface $(\mathcal{M}^*)$ coupe perpendiculairement.*

En effet, si $(\mathcal{S})$ est une surface immergée dans $\mathbb{R}^3$, alors les droites contenues dans $(\mathcal{S})$ sont exactement les courbes qui sont à la fois des lignes asymptotiques et des géodésiques de $(\mathcal{S})$. De même, les courbes tracées sur $(\mathcal{S})$ et contenues dans un plan que la surface $(\mathcal{S})$ coupe perpendiculairement sont exactement les courbes qui sont à la fois des lignes de courbure et des géodésiques de $(\mathcal{S})$.

Par exemple, les méridiens d'une caténoïde correspondent sur une hélicoïde conjuguée aux droites qui engendrent l'hélicoïde. Le cercle médian de la caténoïde correspond à la droite centrale de l'hélicoïde.

Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on peut définir l'immersion conforme minimale $\mathcal{X}_\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ de données de Weierstrass $\lambda(G, H)$. On a

$$\mathcal{X}_\lambda(x) = \Re(\lambda^2)\mathcal{X}(x) + \Im(\lambda^2)\mathcal{X}^*(x).$$

Si le scalaire λ est réel ou purement imaginaire, alors les immersions $\mathcal{X}_\lambda$ sont homothétiques à l'immersion $\mathcal{X}$. Lorsque le scalaire λ appartient au cercle unité $\mathbb{S}^1$, les immersions $\mathcal{X}_\lambda$ sont localement isométriques à l'immersion $\mathcal{X}$. La famille d'immersions conformes minimales $(\mathcal{X}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{S}^1}$ est appelée *famille associée* à l'immersion $\mathcal{X}$.

1.1.3 Principes de réflexion de Schwarz

Les deux propositions suivantes mettent en évidence certaines symétries apparaissant sur les surfaces minimales. Elles permettent également d'étendre les surfaces minimales ayant un bord au delà de celui-ci, lorsque ce bord contient un segment de droite ou une courbe contenue dans un plan que la surface coupe perpendiculairement. Ces résultats nous seront très utiles par la suite. On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}^+ = \{x \in \mathbb{D} \mid \Im(x) > 0\}$ et $\mathbb{D}^- = \{x \in \mathbb{D} \mid \Im(x) < 0\}$.

Proposition 1.5. *Soit une immersion conforme minimale $\mathcal{X} : \mathbb{D}^+ \to \mathbb{R}^3$. Si $\mathcal{X}$ s'étend continûment à l'intervalle $]-1, 1[= \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$, et si l'image par $\mathcal{X}$ de l'intervalle $]-1, 1[$ est un segment de droite, alors l'immersion $\mathcal{X}$ se prolonge à $\mathbb{D}^-$ par réflexion par rapport à cette droite et $\mathcal{X} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ est une immersion conforme minimale. De plus, deux points symétriques sur l'image $\mathcal{X}(\mathbb{D})$ ont des antécédents conjugués.*

Proposition 1.6. *Soit une immersion conforme minimale $\mathcal{X} : \mathbb{D}^+ \to \mathbb{R}^3$. Si $\mathcal{X}$ s'étend continûment à l'intervalle $]-1, 1[= \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$, et si l'image par $\mathcal{X}$ de l'intervalle $]-1, 1[$ est une courbe contenue dans un plan que la surface $\mathcal{X}(\mathbb{D}^+)$ coupe perpendiculairement, alors l'immersion $\mathcal{X}$ se prolonge à $\mathbb{D}^-$ par réflexion par rapport à ce plan et $\mathcal{X} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ est une immersion conforme minimale. De plus, deux points symétriques sur l'image $\mathcal{X}(\mathbb{D})$ ont des antécédents conjugués.*

On donnera une démonstration de ces propositions au chapitre 2.

Par le lemme 1.4, une réflexion axiale sur une surface minimale correspond sur la surface minimale conjuguée à une réflexion par rapport à un plan orthogonal à cet axe, et réciproquement.

1.1.4 Description quaternionique

Considérons l'isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans l'ensemble E^3 des matrices de $M(2, \mathbb{C})$ hermitiennes à trace nulle, qui identifie un vecteur $X = (X_1, X_2, X_3)^t \in \mathbb{R}^3$ avec la matrice $\widetilde{X}$ définie par

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} -X_3 & X_1 - iX_2 \\ X_1 + iX_2 & X_3 \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ induit sur E^3 le produit scalaire suivant

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(\widetilde{X}\widetilde{Y}\right),$$

et la norme euclidienne d'un vecteur X est donnée par l'opposé du déterminant de la matrice $\widetilde{X}$

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -\det \widetilde{X}.$$

Pour toute matrice $A \in SU(2)$, l'application

$$R_A : M \mapsto \bar{A}^t M A$$

est une isométrie directe de E^3 pour ce produit scalaire. On identifie $SO(E^3)$ avec le groupe $SO(3)$ des rotations de $\mathbb{R}^3$: pour toute matrice $A \in SU(2)$, on appelle aussi R_A la rotation correspondante dans $SO(3)$ et pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\widetilde{(R_A X)} = \bar{A}^t \widetilde{X} A.$$

On obtient le morphisme de groupe

$$\begin{aligned} R : \ SU(2) &\to SO(3) \\ A &\mapsto R_A \end{aligned}$$

qui est le revêtement à deux feuillets de $SO(3)$ par le groupe $Spin(3) \simeq SU(2)$. On peut expliciter ce morphisme : si $R \in SO(3)$ est une rotation d'angle φ et d'axe unitaire $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, alors les deux relevés de R sont A et $-A$ avec

$$A = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) I_2 - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} -\delta_3 & \delta_1 - i\delta_2 \\ \delta_1 + i\delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Rappelons que si on pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors pour toute matrice $M \in SU(2)$, on a

$$MJ = J\bar{M}. \tag{1.4}$$

La proposition suivante donne une propriété essentielle de la représentation de Weierstrass.

Proposition 1.7. *Soit $\mathcal{X} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ une immersion conforme minimale de données de Weierstrass $Y = (G, H)$. Soit une matrice A dans $SU(2)$. Alors le vecteur YA constitue les données de Weierstrass de l'immersion conforme minimale $R_A(\mathcal{X})$ image de l'immersion $\mathcal{X}$ par la rotation R_A.*

Démonstration. Supposons que l'immersion $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ soit donnée par le vecteur Y par la formule de Weierstrass (1.1) (*i.e.* $\mathcal{X}_0 = O$). Il suffit d'écrire l'immersion $\mathcal{X}$ en terme de matrices 2×2 :

$$\widetilde{\mathcal{X}}(x) = \begin{pmatrix} -\mathcal{X}_3(x) & \mathcal{X}_1(x) - i\mathcal{X}_2(x) \\ \mathcal{X}_1(x) + i\mathcal{X}_2(x) & \mathcal{X}_3(x) \end{pmatrix}.$$

Calculons $\mathcal{X}_1 + i\mathcal{X}_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1(x) + i\mathcal{X}_2(x) &= \frac{i}{2}\int_{x_0}^{x} \left(G(\xi)^2 - H(\xi)^2\right) d\xi - \frac{i}{2}\int_{x_0}^{x} \left(\overline{G}(\xi)^2 - \overline{H}(\xi)^2\right) d\bar{\xi} \\ &\quad + \frac{i}{2}\int_{x_0}^{x} \left(G(\xi)^2 + H(\xi)^2\right) d\xi + \frac{i}{2}\int_{x_0}^{x} \left(\overline{G}(\xi)^2 + \overline{H}(\xi)^2\right) d\bar{\xi} \\ &= i\int_{x_0}^{x} G(\xi)^2 d\xi + i\int_{x_0}^{x} \overline{H}(\xi)^2 d\bar{\xi}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\widetilde{\mathcal{X}}(x) = i\int_{x_0}^{x}\begin{pmatrix}-GH & -H^2\\ G^2 & GH\end{pmatrix}d\xi + i\int_{x_0}^{x}\begin{pmatrix}\overline{GH} & -\overline{G}^2\\ \overline{H}^2 & -\overline{GH}\end{pmatrix}d\bar{\xi},$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\widetilde{\mathcal{X}}(x) = i\int_{x_0}^{x} J\cdot Y(\xi)^t\cdot Y(\xi)d\xi + i\int_{x_0}^{x}\overline{Y}(\xi)^t\cdot\overline{Y}(\xi)\cdot Jd\bar{\xi}.$$

Par l'identité (1.4), on trouve

$$\bar{A}^t\widetilde{\mathcal{X}}(x)A = i\int_{x_0}^{x} J\cdot(Y(\xi)A)^t\cdot(Y(\xi)A)\,d\xi + i\int_{x_0}^{x}\overline{(Y(\xi)A)}^t\cdot\overline{(Y(\xi)A)}\cdot Jd\bar{\xi}.$$

Les données de Weierstrass YA définissent donc l'immersion conforme minimale $R_A(\mathcal{X})$. □

Lemme 1.8. *Soit $\mathcal{X}:\Sigma\to\mathbb{R}^3$ une immersion conforme minimale de données de Weierstrass $Y:\Sigma\to\mathbb{C}^2$. Soit γ une courbe continue tracée sur Σ. Alors*

- *l'image par l'immersion $\mathcal{X}$ de la courbe γ est un segment de droite si et seulement s'il existe une matrice $A\in SU(2)$ telle que le vecteur YA soit à valeurs réelles ou purement imaginaires le long de la courbe γ,*
- *l'image par l'immersion $\mathcal{X}$ de la courbe γ est une courbe contenue dans un plan que la surface coupe perpendiculairement si et seulement s'il existe une matrice $A\in SU(2)$ telle que le vecteur $e^{i\frac{\pi}{4}}YA$ soit à valeurs réelles ou purement imaginaires le long de la courbe γ.*

Démonstration. Soit $Y=(G,H)$ les données de Weierstrass de l'immersion $\mathcal{X}$. Pour la première assertion, on va montrer que l'image de la courbe γ par l'immersion $\mathcal{X}$ est un segment de droite dirigé par le vecteur de base $e_2=(0,1,0)$ si et seulement si les fonctions $G^2(x)$, $H^2(x)$ et $G(x)H(x)$ sont réelles le long de γ, c'est-à-dire si et seulement si les fonctions $G(x)$ et $H(x)$ sont toutes les deux réelles ou purement imaginaires. On en déduit alors la première assertion par la proposition 1.7.

La condition suffisante est immédiate. Pour la nécessité, il faut exprimer par exemple que le long de la courbe γ, la troisième composante $\mathcal{X}_3(x)$ de l'immersion est constante et que son application de Gauss $N(x)$ est orthogonale au vecteur e_2. Comme la projection stéréographique nord de $N(x)$ est $-G(x)/H(x)$, on obtient que le long de la courbe γ

$$\begin{cases}-G/H\in\mathbb{R}\\ GH\in\mathbb{R}\end{cases},\qquad \text{i.e. :}\quad\begin{cases}G\overline{H}=\overline{G}H\\ GH=\overline{GH}\end{cases}.$$

Ceci donne le résultat annoncé, puisque les données de Weierstrass $G(x)$ et $H(x)$ ne peuvent pas être simultanément nulles.

Pour la deuxième assertion, il suffit de considérer l'immersion conjuguée $\mathcal{X}^*$, qui a pour données de Weierstrass $e^{i\frac{\pi}{4}}Y$. Alors le lemme 1.4 nous permet de nous ramener au cas précédent. □

Comme on va le voir à la section 2.2, le lemme 1.8 permet de retrouver les principes de réflexion de Schwarz.

1.2 Équations fuchsiennes et systèmes fuchsiens

On présente dans cette section les notions de base de la théorie des équations et systèmes fuchsiens sur la sphère de Riemann. On se concentre particulièrement sur les équations fuchsiennes, on mentionnera les résultats analogues pour les systèmes d'équations à la fin de cette section. Pour une approche plus complète, ainsi que pour connaître les démonstrations des résultats énoncés, on pourra se reporter principalement à [IKSY91] –particulièrement pour les transformations isomonodromiques, que ce soit le système de Garnier ou le système de Schlesinger. Pour le problème de Riemann–Hilbert pour les systèmes fuchsiens, on pourra se référer à Anosov et Bolibruch [AB94], ou plus simplement à [Bea93] pour une présentation générale du problème et des résultats de Bolibruch.

On considère une équation différentielle linéaire du second ordre définie sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$D^2y + p(x)Dy + q(x)y = 0 \tag{E}$$

où $D = \frac{d}{dx}$ désigne la dérivation par rapport à la variable complexe $x \in \mathbb{P}^1$. On suppose que les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$. On note S l'ensemble des points en lesquels $p(x)$ ou $q(x)$ a un pôle

$$S = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

L'ensemble S est l'ensemble des singularités de l'équation (E). Les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ sont holomorphes dans l'ensemble

$$X := \mathbb{P}^1 \smallsetminus S.$$

Les solutions de l'équation (E) sont des fonctions *multi-formes* dans X, c'est-à-dire des fonctions holomorphes dans le revêtement universel $\widetilde{X}$ de l'ensemble X. Par abus de langage, on notera encore $y(x)$ une telle fonction. Ces solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. On appelle *système fondamental de solutions* un vecteur $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))$ dont les composantes forment une base de cet espace.

1.2.1 Étude locale

On commence par rappeler la théorie locale au voisinage de chaque singularité de l'équation (E). On en déduira ensuite une caractérisation globale des équations fuchsiennes.

Singularités régulières et singularités fuchsiennes

En général, les solutions de l'équation (E) ne sont pas uniformes au voisinage d'une singularité. On distingue certains types de singularités.

Définition 1.9. On dit qu'une singularité $x = x_0$ de l'équation (E) est *fuchsienne* si la fonction $p(x)$ a en $x = x_0$ un pôle d'ordre au plus 1 et la fonction $q(x)$ un pôle d'ordre au plus 2.

On définit une autre catégorie de singularités : on considère les singularités $x = x_0$ au voisinage desquelles toute solution a une croissance au plus polynomiale en $1/|x - x_0|$ quand $x \to x_0$. Comme *a priori* une solution de l'équation (E) a un point de branchement logarithmique en une singularité, il faut être plus précis dans cette définition.

Définition 1.10. On dit qu'une singularité $x = x_0$ de l'équation (E) est *régulière* si pour tout secteur S centré en x_0, pour tout revêtement $\widetilde{S}$ de ce secteur dans $\widetilde{X}$ et pour toute solution y de l'équation (E), la restriction $y_{|\widetilde{S}}$ a une croissance polynomiale en $1/|x - x_0|$ quand $x \to x_0,\ x \in S$.

Comme on va le voir, une singularité fuchsienne est toujours régulière. Pour les équations, la réciproque est également vraie ([Har64]), mais elle est fausse en général pour les systèmes d'équations.

Méthode de Fröbenius

La méthode de Fröbenius permet de décrire le comportement local des solutions de l'équation (E) au voisinage d'une singularité fuchsienne. On se place au point $x = 0$ en supposant qu'il est une telle singularité.

Si on cherche les solutions formelles de l'équation (E) de la forme

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

on se rend compte que le nombre complexe s ne peut prendre au plus que deux valeurs, qui sont les racines de l'équation quadratique

$$s^2 + (a-1)s + b, \tag{1.5}$$

avec

$$a = \lim_{x\to 0} xp(x), \quad b = \lim_{x\to 0} x^2 q(x).$$

L'équation (1.5) s'appelle l'*équation caractéristique* de l'équation (E) en la singularité fuchsienne $x = 0$. Ses racines s'appellent les *exposants* en $x = 0$. Si on les note s_1 et s_2 avec

$$\Re s_2 \leq \Re s_1,$$

alors on peut vérifier qu'il existe toujours une solution convergente (multi-valuée) $y_1(x)$ de l'équation (E) de la forme

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad b_0 = 1.$$

Pour expliciter une autre solution linéairement indépendante de $y_1(x)$, il faut distinguer deux cas :

- s'il existe également une solution convergente $y_2(x)$ de la forme

  $$y_2(x) = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad b_0 = 1,$$

  alors la singularité fuchsienne $x = 0$ est dite *non logarithmique*. En particulier, c'est toujours le cas si $s_1 - s_2$ n'est pas un entier naturel ;
- sinon, la singularité fuchsienne $x = 0$ est dite *logarithmique*, et la deuxième solution canonique en $x = 0$ est de la forme

  $$y_1(x)\log x + x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

On peut observer que la singularité fuchsienne $x = 0$ est non logarithmique si et seulement s'il existe un système fondamental de solutions $Y(x)$ dont la matrice de monodromie en $x = 0$ soit diagonale.

Les expressions que l'on vient de donner pour les solutions de l'équation (E) au voisinage d'une singularité fuchsienne montrent qu'une singularité fuchsienne est régulière.

Équations fuchsiennes

Il nous reste à étudier le point $x = \infty$. Pour cela, on fait le changement de variable $w = 1/x$ dans l'équation (E), et la nature du point $x = \infty$ est celle du point $w = 0$ dans la nouvelle équation. On montre ainsi facilement que le point $x = \infty$ est une singularité fuchsienne de l'équation (E) si et seulement si les fonctions

$$w^{-1}p\left(w^{-1}\right), \quad w^{-2}q\left(w^{-1}\right)$$

sont holomorphes au point $w = 0$. On pose alors

$$a_\infty = \lim_{w\to 0} w^{-1}p\left(w^{-1}\right), \quad b_\infty = \lim_{w\to 0} w^{-2}q\left(w^{-1}\right),$$

et l'équation caractéristique au point $x = \infty$ est

$$s^2 + (1 - a_\infty)s + b_\infty = 0.$$

Définition 1.11. On dit que l'équation (E) est une *équation fuchsienne* sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ si toutes ses singularités, y compris éventuellement le point en l'infini, sont fuchsiennes.

On obtient alors la caractérisation suivante des équations fuchsiennes.

Proposition 1.12. *L'équation (E) est fuchsienne sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$, de singularités $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = \infty$, si et seulement si ses coefficients sont de la forme*

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{x - x_i}, \qquad q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{(x - x_i)^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{x - x_i},$$

avec

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i = 0.$$

On range dans un tableau appelé *schéma de Riemann* les singularités fuchsiennes de l'équation (E), et les exposants θ_i^+ et θ_i^- en chaque singularité $x = x_i$:

$$\begin{pmatrix} x = x_1 & \cdots & x = x_n \\ \theta_1^+ & \cdots & \theta_n^+ \\ \theta_1^- & \cdots & \theta_n^- \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Proposition 1.13 (Relation de Fuchs)**.** *Supposons que l'équation (E) soit fuchsienne et que son schéma de Riemann soit donné par* (1.6)*. Alors la somme de tous les exposants de (E) ne dépend que du nombre de singularités, et plus précisément*

$$\sum_{i=1}^{n} (\theta_i^+ + \theta_i^-) = n - 2. \tag{1.7}$$

Démonstration. Il suffit d'écrire que la somme des résidus du coefficient $p(x)$ est nulle. Par la proposition 1.12, on a

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{x - x_i}$$

et par définition du résidu a_∞, on a

$$a_\infty = \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

D'après les équations caractéristiques en chacune des singularités, on déduit

$$a_i = 1 - \theta_i^+ - \theta_i^- \ (i = 1, \ldots, n-1), \quad a_\infty = 1 + \theta_n^+ + \theta_n^-,$$

ce qui permet de conclure. □

1.2.2 Équations projectivement équivalentes et schwarzien

Le schwarzien

Étant donné une fonction u non constante et méromorphe dans un ouvert U d'une surface de Riemann, le *schwarzien* de u par rapport à une coordonnée conforme x est donné par

$$S_x(u) = \left(\frac{u''}{u'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2$$

où $u' = \frac{du}{dx}$. Si z est une autre coordonnée conforme, alors $S_z(u) = S_z(x) + S_x(u)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2$. De plus, le schwarzien est invariant sous l'action de $PGL(2, \mathbb{C})$:

$$S_x\left(\frac{au+b}{cu+d}\right) = S_x(u) \qquad \text{pour tout } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

Ces deux propriétés assurent en particulier que le schwarzien $S_x(u)$ est identiquement nul si et seulement si la fonction u est une homographie $u(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Une fonction u est dite $PGL(2, \mathbb{C})$-multi-forme si deux branches arbitraires de $u(x)$ sont reliées par une homographie. Si une fonction est $PGL(2, \mathbb{C})$-multi-forme, alors son schwarzien est uniforme.

Relation avec les équations différentielles

Pour tout système fondamental de solutions $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))$ de l'équation (E), le schwarzien du rapport $u = \frac{y_1}{y_2}$ est indépendant du choix de $Y(x)$ et vaut

$$S_x\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = 2q(x) - \frac{1}{2}p(x)^2 - Dp(x). \tag{1.8}$$

Le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ est défini à partir de l'équation (E) à une homographie près.

Définition 1.14. La classe d'équivalence du rapport de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (E) est appelée *la solution projective* de l'équation (E). Deux équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes dans la sphère de Riemann sont dites *projectivement équivalentes* si elles ont la même solution projective.

Deux équations projectivement équivalentes ont le même ensemble de singularités. Deux équations (E_1) et (E_2) ayant le même ensemble de singularités S sont projectivement équivalentes si et seulement s'il existe une fonction $\Phi(x)$ holomorphe et jamais nulle dans le revêtement universel de l'ensemble $\mathbb{P}^1 \smallsetminus S$ telle que toute solution $y_2(x)$ de l'équation (E_2) soit obtenue par la multiplication d'une solution $y_1(x)$ de l'équation (E_1) par la fonction $\Phi(x)$. Si $p_i(x)$ et $q_i(x)$ désignent les coefficients de l'équation (E_i) $(i = 1, 2)$, alors on a

$$\begin{aligned} p_2(x) &= p_1(x) + 2\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \\ q_2(x) &= q_1(x) + p_1(x)\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} + \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)}. \end{aligned}$$

L'équation (E) est dite *de type* $SL(2, \mathbb{C})$ si son coefficient $p(x)$ est identiquement nul. Cette dénomination provient du fait que dans ce cas, sa monodromie est contenue dans $SL(2, \mathbb{C})$. Son coefficient $q(x)$ est alors la moitié du schwarzien du rapport de deux solutions linéairement indépendantes.

Si l'équation (E) est fuchsienne, alors toute équation projectivement équivalente à (E) qui soit également fuchsienne est obtenue par une fonction $\Phi(x)$ de la forme

$$\Phi(x) = \prod_{a \in S \smallsetminus \{\infty\}} (x - a)^{\theta_a}$$

où les θ_a sont des nombres complexes quelconques et l'ensemble S est l'ensemble des singularités de l'équation (E). Les différences des exposants en chaque singularité sont les mêmes pour deux équations fuchsiennes projectivement équivalentes.

1.2.3 Monodromie

On ne suppose pas que l'équation (E) est fuchsienne. On a vu qu'en général, les solutions de l'équation (E) sont des fonctions multi-formes dans X. Pour mesurer ce défaut d'uniformité de ses solutions, on introduit la *monodromie* de l'équation (E), qui est une classe d'équivalence de représentations du groupe fondamental de l'ensemble X.

Soient un point x_0 de l'ensemble X et un ouvert simplement connexe U de X contenant x_0. On considère un système fondamental de solutions $Y(x)$ de l'équation (E) défini dans U. On peut prolonger analytiquement le système $Y(x)$ le long de tout lacet de point de base x_0 et contenu dans X, et ce prolongement ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet. Pour toute classe α dans le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$, on peut donc noter $\alpha * Y(x)$ le prolongement du système $Y(x)$ le long de tout représentant de α. Alors le système $\alpha * Y(x)$ est défini dans U et il est aussi un système fondamental de solutions de l'équation (E). Il existe donc une unique matrice $M_\alpha(Y) \in GL(2, \mathbb{C})$ qui vérifie

$$\alpha * Y(x) = Y(x) M_\alpha(Y).$$

On appelle la matrice $M_\alpha(Y)$ la matrice de monodromie du système $Y(x)$ le long de α. On définit ainsi une application

$$\rho_Y : \pi_1(X, x_0) \to GL(2, \mathbb{C}), \quad \alpha \mapsto M_\alpha(Y).$$

On choisit un ordre dans le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ de la façon suivante : on définit le produit $\beta\alpha$ de deux éléments $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$ comme étant la classe du lacet qui suit d'abord α puis β (dans le sens naturel). On a alors $(\beta\alpha) * Y(x) = \beta * (\alpha * Y)(x)$, donc

$$M_{\beta\alpha}(Y) = M_\beta(Y) M_\alpha(Y),$$

et l'application ρ_Y est un homéomorphisme du groupe $\pi_1(X, x_0)$ dans $GL(2, \mathbb{C})$: c'est une *représentation linéaire* de rang 2 (si on inverse l'ordre dans $\pi_1(X, x_0)$, on obtient une anti-représentation). On appelle l'application ρ_Y la *représentation de monodromie* de l'équation (E) par rapport au système fondamental $Y(x)$.

Considérons à présent un autre système fondamental de solutions $Z(x)$ défini dans l'ouvert U. Il existe une unique matrice $C \in GL(2, \mathbb{C})$, appelée *matrice de connexion* entre les systèmes $Y(x)$ et $Z(x)$, telle que

$$Z(x) = Y(x)C.$$

Alors pour tout $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, on a

$$\alpha * Z(x) = \alpha * Y(x) \cdot C = Y(x)M_\alpha(Y)C = Z(x)C^{-1}M_\alpha(Y)C,$$

c'est-à-dire

$$M_\alpha(Z) = C^{-1}M_\alpha(Y)C. \tag{1.9}$$

Les deux représentations ρ_Y et ρ_Z sont donc *conjuguées*. La relation de conjugaison entre représentations est une relation d'équivalence. On voit donc que l'ensemble de toutes les représentations de monodromie de l'équation (E) (par rapport à chaque système fondamental) constitue une classe de conjugaison. Cette classe est canoniquement associée à l'équation (E) : on l'appelle la *monodromie* de l'équation (E).

Le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par les classes de lacets $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tournant respectivement une fois dans le sens direct autour de la singularité $x = x_i$, en laissant les autres singularités à l'extérieur, soumises à la relation $\gamma_n \cdots \gamma_1 = 1$. La représentation de monodromie ρ_Y par rapport à un système $Y(x)$ est donc déterminée par la famille $(M_1, \ldots, M_n)$, où

$$M_i = M_{\gamma_i}(Y).$$

Les matrices M_i vérifient aussi

$$M_n \cdots M_1 = I_2.$$

On appelle la famille $(M_1, \ldots, M_n)$ un *système de générateurs* de la monodromie de l'équation (E).

Définition 1.15. Une représentation $\rho : G \to GL(m, \mathbb{C})$ d'un groupe G est dite *irréductible* si les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^m$ invariants par ρ sont exactement $\{0\}$ et $\mathbb{C}^m$.

La monodromie de l'équation (E) est dite *irréductible* si elle admet un représentant irréductible, c'est-à-dire si elle admet un système de générateurs $(M_1, \ldots, M_n)$ constitué de matrices triangulaires supérieures. Si l'équation (E) est fuchsienne, alors le fait qu'elle ait une monodromie irréductible est équivalent à ce qu'elle soit elle-même irréductible, *i.e.* que l'opérateur différentiel

$$L = D^2 + p(x)D + q(x)$$

n'admette que des factorisations triviales.

1.2.4 Le problème de Riemann–Hilbert pour les équations linéaires du second ordre

On ne considère pour l'instant le problème de Riemann–Hilbert que dans le cas des équations du second ordre. Il n'y a pas de différence fondamentale avec les équations d'ordre supérieur. Par contre, la discussion est différente dans le cas des systèmes fuchsiens.

Le problème de Riemann–Hilbert pour les équations fuchsiennes est exactement le vingt-et-unième des vingt-trois problèmes proposés par Hilbert au Congrès International de Paris en 1900 :

Le problème de Riemann–Hilbert. *Trouver une équation fuchsienne ayant des singularités données et une monodromie donnée.*

Formulé ainsi, on peut facilement voir que le problème de Riemann–Hilbert n'a en général pas de solution. En effet, soit $S = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = \infty\} \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble de singularités. D'après la proposition 1.12, une équation fuchsienne du second ordre dont l'ensemble des singularités soit S dépend de $e(S)$ paramètres, avec

$$e(S) = 3n - 4.$$

Par ailleurs, on peut montrer que l'ensemble des classes de conjugaison de représentations $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \smallsetminus S, x_0) \to GL(2, \mathbb{C})$ dépend de $m(S)$ paramètres, avec

$$m(S) = 4(n-2) + 1.$$

Dès que $n > 3$, on a donc

$$m(S) - e(S) > 0.$$

À singularités fixées, l'application qui à une équation fuchsienne du second ordre associe sa monodromie n'est donc pas surjective dès que $n > 3$. Ce calcul remonte à Poincaré [Poi84]. Si on veut pouvoir construire une équation fuchsienne dont la monodromie est donnée, il faut donc s'autoriser à ajouter des paramètres supplémentaires : les singularités apparentes sont les seuls paramètres possibles.

Définition 1.16. Une singularité fuchsienne de l'équation (E) est dite *apparente* si elle n'est pas logarithmique et si ses exposants sont des entiers relatifs.

Une singularité fuchsienne $x = a$ est apparente si et seulement si toutes les solutions de l'équation (E) sont méromorphes en $x = a$. Il n'y a donc pas de monodromie en ces singularités.

On vérifie alors qu'une équation fuchsienne du second ordre ayant ses singularités dans S, et ayant au plus N singularités apparentes à l'extérieur de S dépend de $e(S) + N$ paramètres. Pourtant, il n'est pas évident qu'autoriser $N = m(S) - e(S) = n - 3$ singularités apparentes soit suffisant pour obtenir une réponse positive au problème de Riemann–Hilbert. Lorsque la monodromie est irréductible, Ohtsuki [Oht82] a obtenu la bonne majoration du nombre de singularités apparentes, à la condition qu'un des générateurs de la monodromie soit diagonalisable. Mais le résultat le plus général est dû à Bolibruch.

Théorème 1.17 ([Bol90])**.** *Étant donné un ensemble fini $S \subset \mathbb{P}^1$ à n éléments et une représentation irréductible $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \smallsetminus S) \to GL(2, \mathbb{C})$, il existe une équation fuchsienne du second ordre dont l'ensemble des singularités soit S, dont la monodromie soit la classe de ρ et ayant au plus $n - 3$ singularités apparentes.*

1.2.5 Déformations isomonodromiques

On s'intéresse à présent au problème suivant : si on considère que les singularités $x_i = x_i(t)$ dépendent d'un paramètre variable t, comment décrire l'ensemble des équations fuchsiennes ayant une monodromie donnée ?

On considère une famille de systèmes différentiels linéaires 2×2 dépendant d'un paramètre t variant dans un ouvert simplement connexe U de $\mathbb{C}^n$:

$$DY = A(x,t)Y \tag{1.10}$$

où la fonction $A(x,t)$ est définie dans $\mathbb{P}^1 \times U$, à valeurs dans $M(2,\mathbb{C})$, et où $D = \frac{d}{dx}$ désigne la dérivation par rapport à la variable $x \in \mathbb{P}^1$. On suppose que pour tout $t \in U$ fixé, la fonction $x \mapsto A(x,t)$ est holomorphe en dehors d'un ensemble fini $S(t) \subset \mathbb{P}^1$ de points singuliers, et que les points de $S(t)$ sont des fonctions holomorphes de t. On définit le sous-ensemble S de $\mathbb{P}^1 \times U$ des singularités du système

$$S := \bigcup_{t \in U} S(t) \times \{t\},$$

qui est donc une hypersurface. Localement, l'ensemble S a autant de composantes connexes qu'il y a de points dans les ensembles $S(t)$ et chacune de ces composantes connexes est un graphe de $\mathbb{P}^1 \times U$ au dessus de l'ouvert U. Quitte à restreindre l'ouvert simplement connexe U, on suppose que ceci est vrai dans U entier. Sans entrer dans des détails techniques de topologie, on voit que les classes d'homotopie des lacets de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t)$ basés en un point $x_0(t)$ de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t)$ sont alors indépendantes de t. Quitte à restreindre de nouveau l'ouvert U, on peut choisir un point de base $x_0 \in \mathbb{P}^1$ indépendant de t. Il suffit pour cela que x_0 et U vérifient

$$(\{x_0\} \times U) \cap S = \emptyset.$$

On note $\pi_1\left(\mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t), x_0\right)$ le groupe d'homotopie correspondant.

On peut ainsi définir la monodromie de la famille de systèmes (1.10). Soit une solution fondamentale $\mathbf{Y}(x,t)$, *i.e.* une matrice solution de (1.10), holomorphe et inversible en tout point (x_0,t) $(t \in U)$. Pour toute classe d'homotopie $\alpha \in \pi_1\left(\mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t), x_0\right)$, le prolongement analytique $\alpha * \mathbf{Y}(x,t)$ de $\mathbf{Y}(x,t)$ le long de α est encore une solution fondamentale en (x_0,t) : il existe une unique matrice $\rho_{\mathbf{Y}}(t,\alpha) \in GL(2,\mathbb{C})$ telle que

$$\alpha * \mathbf{Y}(x,t) = \mathbf{Y}(x,t)\rho_{\mathbf{Y}}(t,\alpha).$$

On obtient donc une famille analytique de représentations de monodromie

$$\rho_{\mathbf{Y}}(t,\cdot) : \pi_1\left(\mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t), x_0\right) \to GL(2,\mathbb{C}).$$

Définition 1.18. Une solution fondamentale $\mathbf{Y}(x,t)$ est dite *M-invariante* si sa représentation de monodromie $\rho_{\mathbf{Y}}(t,\cdot)$ est indépendante de t.

Définition 1.19. La famille (1.10) de systèmes différentiels est dite *isomonodromique* si elle admet une solution fondamentale qui soit M-invariante.

On note d la différentiation par rapport à la variable $t = (t_1,\ldots,t_n)$

$$d = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_i} dt_i.$$

On a les résultats suivants.

Lemme 1.20. *Une solution fondamentale $\mathbf{Y}(x,t)$ est M-invariante si et seulement si la 1-forme à valeurs matricielles*

$$\Omega(x,t) := d\mathbf{Y}(x,t)\mathbf{Y}(x,t)^{-1}$$

est uniforme dans $(\mathbb{P}^1 \times U) \smallsetminus S$.

Proposition 1.21. *Le système de Pfaff*

$$\begin{aligned} DY &= A(x,t)Y \\ dY &= \Omega(x,t)Y \end{aligned} \tag{1.11}$$

est complètement intégrable si et seulement si le système suivant est vérifié

$$\begin{aligned} dA(x,t) &= D\Omega(x,t) + [\Omega(x,t), A(x,t)] \\ d\Omega(x,t) &= \Omega(x,t) \wedge \Omega(x,t). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Le système (1.11) s'écrit

$$d_{(x,t)}Y = \omega Y$$

où la 1-forme ω est définie par $\omega = Adx + \Omega$, et $d_{(x,t)}$ est la différentiation par rapport à la variable (x,t). S'il existe une matrice inversible $\mathbf{Y}(x,t)$ telle que $\omega = d_{(x,t)}\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^{-1}$, alors on a de manière immédiate

$$d_{(x,t)}\omega = \omega \wedge \omega,$$

où le produit extérieur $\alpha \wedge \alpha$ d'une 1-forme $\alpha = (\alpha_{ij})$ à valeurs dans $M(2,\mathbb{C})$ est la matrice dont l'élément (i,j) est $\alpha_{i1} \wedge \alpha_{1j} + \alpha_{i2} \wedge \alpha_{2j}$. La réciproque constitue le théorème de Fröbenius. La condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité $d_{(x,t)}\omega = \omega \wedge \omega$ est exactement le système (1.12). Le système (1.12) s'appelle l'*équation de déformation* de (1.10).

La proposition 1.21 nous dit donc que le système (1.10) admet une solution fondamentale M-invariante $\mathbf{Y}(x,t)$ si et seulement si le système (1.12) admet une solution $\Omega(x,t)$ uniforme dans $(\mathbb{P}^1 \times U) \smallsetminus S$. La solution fondamentale $\mathbf{Y}(x,t)$ vérifie alors

$$D\mathbf{Y} = A(x,t)\mathbf{Y}, \qquad d\mathbf{Y} = \Omega(x,t)\mathbf{Y}.$$

La 1-forme Ω dépend du choix d'une solution fondamentale M-invariante. La proposition suivante permet de comparer entre elles les solutions fondamentales M-invariantes.

Proposition 1.22. *On suppose que la famille de systèmes* (1.10) *est isomonodromique, de monodromie irréductible. Soit une solution fondamentale* $\mathbf{Y}_1(x,t)$ *M-invariante. Alors une solution fondamentale* $\mathbf{Y}_2(x,t)$ *est aussi M-invariante si et seulement s'il existe une fonction holomorphe* $\mu : U \to \mathbb{C}^*$ *et une matrice* $C \in GL(2,\mathbb{C})$ *indépendante de t telles que*

$$\mathbf{Y}_2(x,t) = \mu(t)\mathbf{Y}_1(x,t) \cdot C.$$

1.2.6 Le système de Garnier

On considère une équation fuchsienne sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$

$$D^2y + p(x)Dy + q(x)y = 0 \tag{1.13}$$

de singularités $t_1, \ldots, t_n$, $t_{n+1} = 0$, $t_{n+2} = 1$, $t_{n+3} = \infty$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On suppose que ces singularités sont toutes distinctes et que le schéma de Riemann est donné par

$$\begin{pmatrix} x = t_i & x = \infty & x = \lambda_k \\ 0 & \alpha & 0 \\ \theta_i & \alpha + \theta_\infty & 2 \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \ldots, n+2, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

On suppose également que les singularités $x = \lambda_k$ sont apparentes (définition 1.16) et que les exposants θ_i vérifient

$$\theta_i \notin \mathbb{Z} \quad (i = 1, \dots, n+3), \tag{1.14}$$

où pour simplifier les notations, on a noté, comme on le fera souvent, θ_{n+3} pour θ_∞. L'équation (1.13) n'a donc aucune singularité logarithmique. La relation de Fuchs (1.7) impose

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n+3} \theta_i\right).$$

Le théorème 1.17 nous assure que pour toute monodromie irréductible, il existe une équation de ce type ayant cette monodromie. Le but de cette section est de décrire les transformations isomonodromiques de l'équation (1.13). On va commencer par expliciter sa forme.

D'après la proposition 1.12, les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ de l'équation (1.13) s'écrivent

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{a_i}{x - t_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{x - \lambda_k},$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{b_i}{(x - t_i)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{(x - \lambda_k)^2} - \sum_{i=1}^{n+2} \frac{K_i}{x - t_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{x - \lambda_k},$$

avec

$$-\sum_{i=1}^{n+2} K_i + \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 0. \tag{1.15}$$

Les exposants de l'équation nous permettent de calculer certaines des constantes intervenant dans l'expression de $p(x)$ et $q(x)$. L'équation caractéristique en $x = t_i$ est

$$s^2 + (a_i - 1)s + b_i = 0,$$

et ses racines sont 0 and θ_i. On en déduit

$$a_i = 1 - \theta_i, \quad b_i = 0.$$

De même, en une singularité apparente $x = \lambda_k$, on obtient

$$c_k = -1, \quad d_k = 0.$$

En l'infini, l'équation caractéristique est

$$s^2 + \left(\sum_{i=1}^{n+2} \theta_i - 1\right) s + \left(-\sum_{i=1}^{n+2} t_i K_i + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k\right) = 0,$$

et ses racines sont α and $\alpha + \theta_\infty$. On en déduit

$$\alpha(\alpha + \theta_\infty) = -\sum_{i=1}^{n+2} t_i K_i + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k.$$

De cette relation et de (1.15), on déduit K_{n+1} et K_{n+2} en fonction des autres constantes et on obtient l'expression suivante des coefficients $p(x)$ et $q(x)$

$$\begin{cases} p(x) = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \frac{1 - \theta_i}{x - t_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_k} \\ q(x) = & \displaystyle\frac{\alpha(\alpha + \theta_\infty)}{x(x-1)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i(t_i - 1)K_i}{x(x-1)(x - t_i)} \\ & \displaystyle + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k(\lambda_k - 1)\mu_k}{x(x-1)(x - \lambda_k)} \end{cases} \tag{1.16}$$

où les K_i, μ_k sont des constantes inconnues

$$K_i = -\operatorname{Res}(q(x), x = t_i)$$
$$\mu_k = \operatorname{Res}(q(x), x = \lambda_k).$$

Pour chaque valeur fixée de $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n+3})$, l'équation (1.13) correspondante dépend donc d'au plus $4n$ paramètres

$$t_1, \dots, t_n,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n,\ \mu_1, \dots, \mu_n,\ K_1, \dots, K_n.$$

Cependant, toutes les valeurs de ces paramètres ne définissent pas nécessairement une équation ayant des singularités apparentes en les λ_k (vu les exposants en ces singularités, elles peuvent être logarithmiques). La proposition suivante, obtenue en appliquant la méthode de Fröbenius aux points $x = \lambda_k$, donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1.13) n'ait aucune singularité logarithmique. Sa démonstration se trouve dans [IKSY91].

Proposition 1.23. *Les points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des singularités non logarithmiques de l'équation* (1.13) *de coefficients $p(x)$ et $q(x)$ définis par* (1.16) *si et seulement si les résidus K_i sont donnés par*

$$K_i = M_i \sum_{k=1}^{n} M^{k,i} \left(\mu_k^2 - \sum_{j=1}^{n+2} \frac{\theta_j - \delta_{ij}}{\lambda_k - t_j} \mu_k + \frac{\alpha(\alpha + \theta_\infty)}{\lambda_k(\lambda_k - 1)} \right),$$

où M_i et $M^{k,i}$ sont définis par

$$M_i = -\frac{\Lambda(t_i)}{T'(t_i)} \quad \text{et} \quad M^{k,i} = \frac{T(\lambda_k)}{(\lambda_k - t_i)\Lambda'(\lambda_k)},$$

avec

$$\Lambda(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - \lambda_k) \quad \text{et} \quad T(x) = \prod_{i=1}^{n+2} (x - t_i).$$

Les résidus K_i sont donc des fractions rationnelles de $(\theta, \lambda, \mu, t)$. Les équations (1.13) vérifiant les hypothèses souhaitées dépendent uniquement des paramètres $(\theta, \lambda, \mu, t)$. Soit $E_\theta(\lambda, \mu, t)$ l'équation (1.13) de paramètres $(\theta, \lambda, \mu, t)$ (c'est-à-dire l'équation dont les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ sont donnés par (1.16) avec les K_i définis à la proposition 1.23). On cherche à quelle condition des variations de ces paramètres préservent la monodromie d'une telle équation. Les exposants $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n+3})$ sont nécessairement constants pendant une déformation isomonodromique continue. On pose

$$\mathcal{B}^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^* \setminus \{1\})^n \quad | \quad \forall i \neq j \quad t_i \neq t_j\}, \tag{1.17}$$

et on cherche à caractériser les sous-variétés M de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{B}^n$ telles que la famille d'équations $E_\theta(\lambda, \mu, t)$, $((\lambda, \mu, t) \in M)$ soit isomonodromique. Dans [Gar12], Garnier donne le système d'équations aux dérivées partielles qui décrit les déformations isomonodromiques des équations $E_\theta(\lambda, \mu, t)$. Le paramètre de la déformation est le paramètre t, et le système décrit les variations des paramètres $\lambda_k(t)$ en fonction de t, tandis que les résidus $\mu_k(t)$, vus également comme des fonctions de t, s'expriment rationnellement à partir des $\lambda_k(t)$ et de leurs dérivées premières. Okamoto [Oka86] a mis en évidence la structure hamiltonienne de ce système, et lui a donné le nom de *système de Garnier*. C'est sous cette forme qu'il est connu aujourd'hui.

Définition 1.24. Le *système de Garnier* $(\mathcal{G}_n)$ de dimension n est le système hamiltonien

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda_i}{\partial t_j} = \dfrac{\partial K_j}{\partial \mu_i} \\ \dfrac{\partial \mu_i}{\partial t_j} = -\dfrac{\partial K_j}{\partial \lambda_i} \end{cases}$$

$(i, j = 1, \ldots, n)$. Les Hamiltoniens

$$K_i = K_i(\theta, \lambda, \mu, t)$$

sont donnés à la proposition 1.23.

On a alors

Théorème 1.25. *On suppose que $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n+3})$ est fixé et vérifie la condition* (1.14).

- *Le système $(\mathcal{G}_n)$ est complètement intégrable.*
- *Soit M une sous-variété de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{B}^n$. Alors la famille d'équations $E_\theta(\lambda, \mu, t)$, $((\lambda, \mu, t) \in M)$ est isomonodromique si et seulement si M est une sous-variété d'une variété intégrale du système de Garnier $(\mathcal{G}_n)$.*

Une solution $(\lambda(t), \mu(t))$ du système de Garnier $(\mathcal{G}_n)$ est déterminée par la donnée d'une monodromie pour l'équation $E_\theta(\lambda, \mu, t)$.

Remarque 1.26. Dans le cas où $n = 1$, en notant (λ, μ, t, K) les quantités $(\lambda_1, \mu_1, t_1, K_1)$, on obtient que l'Hamiltonien $K(\lambda, \mu, t)$ est donné par

$$\begin{aligned} K(\lambda, \mu, t) =& \frac{1}{t(t-1)} \Big[\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 - \Big(\theta_2(\lambda-1)(\lambda-t) \\ &+ \theta_3 \lambda(\lambda-t) + (\theta_1 - 1)\lambda(\lambda-1) \Big) \mu + \kappa(\lambda - t) \Big] \end{aligned}$$

où

$$\kappa = \frac{1}{4} \left((\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1)^2 - \theta_4^2 \right).$$

En éliminant la variable conjuguée μ, on trouve que le système de Garnier $(\mathcal{G}_1)$ est équivalent à la sixième équation de Painlevé $(\mathrm{P_{VI}})$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\lambda}{dt^2} =& \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda - t} \right) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda - t} \right) \frac{d\lambda}{dt} \\ &+ \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{t}{\lambda^2} + \gamma \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right) \end{aligned} \tag{$\mathrm{P_{VI}}$}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\theta_4^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}\theta_2^2, \quad \delta = \frac{1}{2}\theta_3^2, \quad \gamma = \frac{1}{2}\left(1 - \theta_1^2\right).$$

En ce sens, le système $(\mathcal{G}_n)$ constitue une généralisation de l'équation $(\mathrm{P_{VI}})$ en un système aux dérivées partielles complètement intégrable.

1.2.7 Systèmes fuchsiens

Définitions

Considérons un système différentiel linéaire du premier ordre

$$DY = A(x)Y \tag{1.18}$$

où $D = \frac{d}{dx}$ et la fonction $A(x)$ est méromorphe sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$, à valeur dans $M(2, \mathbb{C})$. On suppose que le système (1.18) est *fuchsien*, c'est-à-dire que tous les pôles de $A(x)$ sont simples [1]. Comme l'ensemble des système fuchsiens sur la sphère de Riemann est stable par transformation de Möbius, on peut choisir comme précédemment

$$t_1, \ldots, t_n,\ t_{n+1} = 0,\ t_{n+2} = 1,\ t_{n+3} = \infty$$

les singularités du système (1.18), et on a donc

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i}{x - t_i}. \tag{1.19}$$

Comme on suppose que l'infini est un point singulier, le résidu

$$A_\infty := -\sum_{i=1}^{n+2} A_i$$

n'est pas la matrice nulle. On note $S(t)$ l'ensemble des singularités :

$$S(t) := \{t_1, \ldots, t_{n+3}\}.$$

Le système (1.18) est donc défini dans l'ensemble

$$X(t) := \mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t),$$

et $\widetilde{X}(t)$ désigne un revêtement universel de $X(t)$. Les solutions du système (1.18), qui sont des couples de fonctions définies sur $\widetilde{X}(t)$, forment un espace vectoriel de dimension 2. On appelle *matrice fondamentale de solutions* une matrice $\mathbf{Y}(x)$ dont les colonnes $Y_1(x), Y_2(x)$ forment une base de cet espace. Une telle matrice vérifie l'équation $D\mathbf{Y} = A(x)\mathbf{Y}$. On définit la monodromie du système (1.18) comme on l'a fait pour les équations du second ordre.

On suppose de plus que le système (1.18) vérifie les deux hypothèses suivantes.

- Le système est *non résonnant* : pour tout $i = 1, \ldots, n+3$, les valeurs propres θ_i^+ et θ_i^- de la matrice A_i satisfont
$$\theta_i^+ - \theta_i^- \notin \mathbb{Z}$$
(on note indifféremment l'indice ∞ ou $n+3$).
- Le système est *normalisé en l'infini* :
$$A_\infty = -\sum_{i=1}^{n+2} A_i = \begin{pmatrix} \theta_\infty^+ & 0 \\ 0 & \theta_\infty^- \end{pmatrix}.$$

1. contrairement à ce qui se passe pour les équations, les notions de singularités régulières et fuchsiennes ne coïncident pas pour les systèmes d'équations. Une singularité fuchsienne, c'est-à-dire un pôle simple, est régulière (*cf* définition 1.10), mais la réciproque est fausse.

Comme le système (1.18) est non résonnant, les singularités $x = t_i$ ne sont pas logarithmiques. Ceci assure l'existence au voisinage de chaque singularité d'une matrice fondamentale de la forme suivante.

Proposition 1.27. *On suppose le système* (1.18) *non résonnant. Alors, pour tout* $i = 1, \ldots, n+2$, *il existe une unique matrice* $P_i(x)$ *holomorphe au point* $x = t_i$ *vérifiant* $P_i(t_i) = I_2$ *et telle que*

$$P_i(x)(x - t_i)^{A_i}$$

soit une matrice fondamentale de solutions du système (1.18), *où*

$$(x - t_i)^{A_i} = \exp\left(A_i \log(x - t_i)\right).$$

On ne donne pas la démonstration de cette proposition, mais remarquons simplement que la matrice $P_i(x)$ est solution de l'équation

$$DP_i = A(x)P_i - P_i \frac{A_i}{x - t_i}.$$

Soit L_i la matrice diagonalisée de A_i

$$L_i = \begin{pmatrix} \theta_i^+ & 0 \\ 0 & \theta_i^- \end{pmatrix}.$$

Alors, il existe des matrices fondamentales de solutions de la forme

$$R_i(x)(x - t_i)^{L_i}$$

où la matrice $R_i(x)$ est holomorphe et inversible au point $x = t_i$ et $R_i(t_i) \in GL(2, \mathbb{C})$ diagonalise A_i

$$A_i = R_i(t_i) L_i R_i(t_i)^{-1}.$$

On dit que ces solutions sont dites *canoniques* au point $x = t_i$, parce que leur matrice de monodromie en ce point est diagonale :

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi\theta_i^+} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\theta_i^-} \end{pmatrix}.$$

En l'infini, comme le système (1.18) est normalisé en l'infini, il existe une unique solution canonique de la forme

$$\mathbf{Y}_\infty(x) = R_\infty\left(\frac{1}{x}\right) x^{-L_\infty}$$

où la matrice $R_\infty(w)$ est holomorphe en $w = 0$ et $R_\infty(0) = I_2$.

Le système de Schlesinger

Considérons à présent $t = (t_1, \ldots, t_n)$ comme un paramètre du système (1.18), dont dépendent les matrices $A_i = A_i(t)$. On suppose que les valeurs propres θ_i^+ et θ_i^- ($i = 1, \ldots, n+3$) sont indépendantes de t. Soit U un ouvert simplement connexe de l'ensemble $\mathcal{B}^n$ défini par (1.17). Les déformations de paramètre $t \in U$ du système (1.18) qui préservent la monodromie sont gouvernées par le système de Schlesinger :

Théorème 1.28. *On suppose le système fuchsien* (1.18) *non résonnant et normalisé en l'infini. Alors la matrice fondamentale de solutions* $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$ *est* M*-invariante si et seulement si les matrices* $A_i(t)$, $i = 1, \dots, n+2$, *satisfont le système aux dérivées partielles (*système de Schlesinger*)*

$$dA_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+2} [A_j, A_i] d\log(t_i - t_j), \qquad i = 1, \dots, n+2. \tag{1.20}$$

De plus, le système de Schlesinger (1.20) *est complètement intégrable.*

De manière plus détaillée, le système de Schlesinger s'écrit

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_i}{\partial t_j} = \frac{[A_i, A_j]}{t_i - t_j} && i = 1, \dots, n+2,\ j = 1, \dots, n,\ i \neq j \\ &\sum_{i=1}^{n+2} \frac{\partial A_i}{\partial t_j} = 0 && j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

La première partie du théorème 1.28 est obtenue en appliquant la proposition 1.21. La première étape consiste à calculer la 1-forme $\Omega(x,t)$ associée à la matrice fondamentale $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$ et définie au lemme 1.20. Elle est obtenue par une étude locale au voisinage de chaque singularité $x = t_i$ grâce aux matrices fondamentales canoniques $R_i(x)(x-t_i)^{L_i}$.

Lemme 1.29. *Si la matrice fondamentale de solutions* $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$ *est* M*-invariante, alors la* 1*-forme* $\Omega(x,t) = d\mathbf{Y}_\infty(x,t)\mathbf{Y}_\infty(x,t)^{-1}$ *s'écrit*

$$\Omega(x,t) = -\sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i(t)}{x - t_i} dt_i.$$

On montre ensuite facilement que l'équation de déformation (1.12)

$$dA = D\Omega + [\Omega, A], \qquad d\Omega = \Omega \wedge \Omega.$$

avec

$$A(x,t) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i(t)}{x - t_i}, \qquad \Omega(x,t) = -\sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i(t)}{x - t_i} dt_i$$

est équivalente au système de Schlesinger (1.20).

Remarque 1.30. Contrairement au système de Garnier, qui décrit toutes les transformations isomonodromiques à exposants fixés des équations fuchsiennes $E_\theta(\lambda, \mu, t)$, le système de Schlesinger (1.20) ne décrit que les transformations de paramètre t du système (1.18). D'après le lemme 3.12, une transformation isomonodromique quelconque est donnée par une solution du système de Schlesinger $(A_1(t), \dots, A_{n+2}(t))$, et par une matrice de conjugaison $C(u) \in GL(2, \mathbb{C})$ holomorphe en un paramètre u variant dans un ouvert de $\mathbb{C}^m$. Alors la famille de systèmes fuchsiens

$$DY = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{B_i(t,u)}{x - t_i} Y, \qquad B_i(t,u) := C(u) A_i(t) C(u)^{-1}$$

est isomonodromique, et c'est la déformation isomonodromique la plus générale possible.

La propriété de Painlevé

Soit une équation différentielle

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0 \tag{1.21}$$

où la fonction $F(t, y_0, y_1, \ldots, y_n)$ est polynomiale en $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ à coefficients méromorphes en t.

Définition 1.31. On dit que l'équation (1.21) a des points de branchement (respectivement des singularités essentielles) *mobiles* si ses solutions ont des points de branchement (respectivement des singularités essentielles) dont la position dépend des constantes d'intégration.

On dit que l'équation (1.21) a la *propriété de Painlevé* si elle n'a ni point de branchement mobile, ni singularité essentielle mobile.

Quand $n = 2$, les six équations de Painlevé $\mathrm{P_I}, \ldots, \mathrm{P_{VI}}$ constituent, à changement de variables près, l'ensemble des équations (1.21) rationnelles ayant la propriété de Painlevé qui ne sont ni linéaires, ni intégrables par une quadrature.

Théorème 1.32 ([Mal83], [Miw81])**.** *Le système de Schlesinger* (1.20) *a la propriété de Painlevé. De plus, toute solution du système de Schlesinger* (1.20) *s'étend au revêtement universel de l'ensemble* $\mathcal{B}^n$ *de manière méromorphe.*

Par contre, le système de Garnier $(\mathcal{G}_n)$ n'a pas la propriété de Painlevé.

Chapitre 2

L'équation associée à un disque minimal à bord polygonal

Dans ce chapitre, on se donne une immersion conforme minimale $\mathcal{X} : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{R}^3$ du demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+$ dont l'image $(\mathcal{M})$ est limitée par un polygone P à $n+3$ sommets. On suppose que la surface minimale $(\mathcal{M})$ n'est pas contenue dans un plan. Soit

$$Y_0 = (G, H) : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}^2$$

les données de Weierstrass de $\mathcal{X}$. La fonction $Y_0(x)$ est holomorphe dans le demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+$ et l'immersion $\mathcal{X}$ est donnée par

$$\mathcal{X}(x) = \Re \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} i\left(G(\xi)^2 - H(\xi)^2\right) \\ G(\xi)^2 + H(\xi)^2 \\ 2iG(\xi)H(\xi) \end{pmatrix} d\xi$$

où x_0 est un point de $\mathbb{C}_+$. On définit les points

$$t_1 < \cdots < t_{n+3}$$

de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui sont les antécédents des sommets de P par l'immersion $\mathcal{X}$. On peut toujours supposer

$$t_{n+1} = 0, \quad t_{n+2} = 1, \quad t_{n+3} = \infty.$$

Ceci détermine entièrement l'immersion $\mathcal{X}$ à partir de la surface $(\mathcal{M})$ qu'elle représente. La fonction $Y_0(x)$ est unique au signe près. On suppose de plus que la fonction $Y_0(x)$ est continue sur chacun des intervalles $]t_i, t_{i+1}[$. Cette hypothèse est naturelle si l'on veut pouvoir prolonger la surface à travers chacun des côtés du polygone P, et appliquer le principe de réflexion de Schwarz. Sous cette hypothèse, l'application de Gauss $N(x)$ de l'immersion $\mathcal{X}$ admet une limite en chaque sommet de P, qui est orthogonale aux côtés adjacents au sommet. On note $N(t_i)$ le vecteur de Gauss limite en $x = t_i$.

Comme la surface minimale n'est pas plane, on voit facilement que les fonctions $G(x)$ et $H(x)$ sont linéairement indépendantes : la fonction $Y_0(x)$ constitue un système fondamental de solutions d'une unique équation différentielle linéaire du second ordre

$$D^2y + p^*(x)Dy + q^*(x)y = 0 \tag{E^*}$$

où $D = \frac{d}{dx}$ représente la dérivation par rapport à x. L'équation (E^*) est définie dans le demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+$, ses coefficients s'expriment en fonction des données G et H par

$$p^* = -\frac{GH'' - HG''}{GH' - HG'}, \qquad q^* = \frac{G'H'' - H'G''}{GH' - HG'}.$$

On peut remarquer que l'équation (E^*) est l'unique équation dont l'ensemble des solutions est constitué des fonctions y qui vérifient dans $\mathbb{C}_+$

$$\begin{vmatrix} G & H & y \\ G' & H' & y' \\ G'' & H'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient l'équation (E^*) en développant ce déterminant par rapport à sa troisième colonne.

Rappelons que le projeté stéréographique nord du vecteur de Gauss de l'immersion $\mathcal{X}$ est donné par

$$g = -\frac{G}{H},$$

et, par (1.8), le schwarzien de g est donc relié aux coefficients $p^*(x)$ et $q^*(x)$ par

$$S_x(g) = 2q^*(x) - \frac{1}{2}p^*(x)^2 - Dp^*(x).$$

La différentielle de Hopf est donnée par le Wronskien du système fondamental $Y_0(x)$

$$Q = i\left(GH' - HG'\right)dx^2.$$

On peut tout de suite observer que les fonctions $p^*(x)$ et $q^*(x)$, qui sont méromorphes dans $\mathbb{C}_+$, ont deux types de singularités : les antécédents t_i des sommets du polygone (où la fonction $Y_0(x)$ est singulière), et les ombilics de l'immersion $\mathcal{X}$, en lesquels le Wronskien $GH' - HG'$ s'annule (et où la fonction $Y_0(x)$ est holomorphe). Les ombilics sont des pôles simples pour les fonctions $p^*(x)$ et $q^*(x)$. La nature des t_i est à déterminer ; on va voir qu'il s'agit également de pôles.

On peut définir une équation (E^*) à partir de toute surface minimale qui n'est pas contenue dans un plan. Différentes immersions conformes minimales peuvent définir la même équation. À la proposition 1.7, on a vu qu'une rotation de la surface $(\mathcal{M})$ se traduit par une transformation linéaire sur $Y_0(x)$. Une telle transformation ne change donc pas l'équation (E^*). De même, les immersions conformes minimales $\mathcal{X}_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{C}^*)$, qui ont pour données de Weierstrass $\lambda \cdot Y_0(x)$, et en particulier l'immersion conjuguée à $\mathcal{X}$, définissent la même équation que l'immersion $\mathcal{X}$. Pour étudier l'équation (E^*), on pourra donc transformer le système $Y_0(x)$ par toute application linéaire inversible, et par exemple changer la position du repère orthonormal (O, e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Le but de ce chapitre est d'obtenir une caractérisation des équations différentielles linéaires du second ordre qui proviennent, dans le sens que l'on vient de donner, d'une surface minimale à bord polygonal. On va voir que certaines propriétés géométriques de l'immersion $\mathcal{X}$ se traduisent élégamment en terme de propriétés analytiques de l'équation (E^*), comme la nature des singularités et leurs exposants (proposition 2.9 et lemme 2.12). On va montrer que l'équation (E^*) est fuchsienne réelle et que sa monodromie est entièrement déterminée par la direction des côtés du polygone P (proposition 2.8). Le contenu de ce chapitre était connu avant que Garnier ne s'attaque au problème de Plateau. Les résultats connus à la fin du XIXe siècle sont rassemblés par Darboux au chapitre XIII de [Dar89]. J'y ajoute, et ceci ne figure pas non plus chez Garnier, des précisions sur l'orientation du polygone, l'expression de la monodromie de l'équation et surtout la démonstration de la proposition 2.15, qui, bien qu'elle ne soit pas difficile, assure la validité de la méthode de résolution proposée par Garnier.

2.1 Polygones dans l'espace euclidien de dimension trois

On commence par introduire des notations sur l'ensemble des polygones de $\mathbb{R}^3$, et par préciser la structure de cet ensemble qui apparaîtra naturellement dans la résolution du problème de Plateau.

Soit un entier naturel n strictement positif. Soit un polygone P à $n+3$ sommets distincts de $\mathbb{R}^3$. On va noter $a_1, \ldots, a_{n+3}$ ses sommets, et pour tout $i = 1, \ldots, n+3$

$$\ell_i = ||a_i a_{i+1}|| > 0$$

la longueur du i-ième côté, et

$$u_i = \frac{\overrightarrow{a_i a_{i+1}}}{\ell_i}$$

le vecteur unitaire qui dirige et oriente le i-ième côté de P. Alors on a la condition de fermeture du polygone

$$\sum_{i=1}^{n+3} \ell_i u_i = 0. \tag{2.1}$$

Définition 2.1. On dit qu'un polygone P est *gauche* s'il n'est pas contenu dans un plan, *i.e.* si les vecteurs $u_1, \ldots, u_{n+3}$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. On dit qu'il est *non dégénéré* si aucun des produits vectoriels $u_{i-1} \times u_i$ n'est nul ($i = 1, \ldots, n+3$, les indices se comprennent modulo $n+3$).

L'ensemble des polygones gauches à $n+3$ sommets est donc paramétré par un point de $\mathbb{R}^3$, n nombres réels non nuls et $n+3$ vecteurs unitaires formant une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Comme on peut extraire une base de cette famille génératrice, les trois longueurs manquantes seront définies de manière unique par la condition de fermeture (2.1), mais les côtés du polygone ne seront pas nécessairement orientés par les vecteurs unitaires que l'on s'est donnés (les longueurs ℓ_i peuvent être négatives).

Si le polygone P n'est pas dégénéré, on peut définir en chacun de ses sommets a_i :

- la mesure $\alpha_i \pi$ de l'angle entre les vecteurs $-u_{i-1}$ et u_i telle que $0 < \alpha_i < 1$,
- le vecteur unitaire normal au polygone P au sommet a_i

$$v_i = \frac{-u_{i-1} \times u_i}{||u_{i-1} \times u_i||}.$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n+3$, on définit également la direction orientée D_i, dont la direction et l'orientation sont données par le vecteur unitaire u_i. Tous les résultats des chapitres 2 et 3 s'appliquent à l'ensemble des polygones gauches non dégénérés. Mais pour résoudre le problème de Plateau, on sera amené, au chapitre 4, à imposer des restrictions supplémentaires sur les polygones que l'on considère. Comme on va procéder par récurrence, il faut introduire une famille de polygones telle que les conditions sur les directions des côtés se transmettent à des sous-ensembles de directions.

Définition 2.2. On définit l'ensemble $\mathcal{D}^n$ des $(n+3)$-uplets $D = (D_1, \ldots, D_{n+3})$ de directions orientées de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient les deux conditions suivantes

- deux directions quelconques D_i et D_j ($i \neq j$) ne sont pas colinéaires,
- pour tout $i \neq n+1,\ n+2$, les directions D_i, D_{n+1} et D_{n+2} ne sont pas coplanaires.

On appellera un élément de $\mathcal{D}^n$ un jeu de directions orientées.

Si les directions $D = (D_1, \dots, D_{n+3})$ d'un polygone sont dans $\mathcal{D}^n$, alors pour toute partie non vide I à p éléments de l'ensemble $\{1, \dots, n, n+3\}$, le jeu de directions orientées $D_I = (D_i, i \in I \cup \{n+1, n+2\})$ est dans l'ensemble $\mathcal{D}^{p-1}$. En particulier, le jeu D_I est tel que deux directions successives ne sont jamais colinéaires et que ses directions ne sont pas toutes coplanaires.

Dans la résolution du problème de Plateau, on va voir que les objets qui apparaissent naturellement ne sont pas des polygones, mais des classes d'équivalence de polygones pour le groupe G des translations et des homothéties de rapport positif de $\mathbb{R}^3$ (ce qui n'est pas restrictif pour la résolution du problème de Plateau). Les directions orientées sont invariantes par l'action de G. Par abus de langage, on appellera toujours des polygones ces classes d'équivalence.

Définition 2.3. Pour tout jeu $D \in \mathcal{D}^n$, on définit le quotient $\mathcal{P}^n_D$ par le groupe G de l'ensemble des polygones à $n+3$ sommets distincts de $\mathbb{R}^3$ dont le jeu de directions orientées soit D. On définit

$$\mathcal{P}^n = \bigcup_{D \in \mathcal{D}^n} \mathcal{P}^n_D$$

le quotient par le groupe G de l'ensemble des polygones à $n+3$ sommets distincts de $\mathbb{R}^3$ dont les directions orientées sont dans l'ensemble $\mathcal{D}^n$.

On définit ainsi un fibré au dessus de l'ensemble $\mathcal{D}^n$. Tous les jeux $D \in \mathcal{D}^n$ ne sont pas nécessairement les jeux de directions orientées d'un polygone de $\mathbb{R}^3$: on peut avoir $\mathcal{P}^n_D = \emptyset$. Comme on l'a vu, ceci serait exclu si l'orientation des côtés n'était pas imposée. Il ne paraît pas très naturel de paramétrer un polygone par ses directions *orientées*. Cette paramétrisation est plus naturelle sur la famille d'objets suivants.

Définition 2.4. On appelle polygone à $n+3$ sommets de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ la donnée de $n+2$ points $a_1, \dots, a_{n+2}$ de $\mathbb{R}^3$ et de deux directions orientées D_{n+2} et D_{n+3}.

En quelque sorte, un polygone de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ est un polygone dont le dernier sommet a_{n+3} peut être en l'infini. Soit $\underline{P}$ un tel polygone de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Notons $D' = (D'_1, \dots, D'_{n+2})$ le jeu de directions orientées du polygone de $\mathbb{R}^3$ de sommets $a_1, \dots, a_{n+2}$. Alors le jeu de directions orientées de $\underline{P}$ est $D = (D'_1, \dots, D'_{n+1}, D_{n+2}, D_{n+3})$. Le polygone $\underline{P}$ de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ est un polygone de $\mathbb{R}^3$ de direction D si et seulement si les demi-droites affines (a_{n+2}, D_{n+2}) et $(a_1, -D_{n+3})$ sont sécantes ; le point d'intersection est le sommet supplémentaire. On peut remarquer qu'il y a une numérotation canonique des sommets d'un polygone de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, donnée par les orientations des directions D_{n+2} et D_{n+3}, si l'on impose que ce soit le dernier sommet a_{n+3} qui soit en l'infini. On définit alors :

Définition 2.5. Pour tout jeu $D \in \mathcal{D}^n$, on définit le quotient $\underline{\mathcal{P}}^n_D$ par le groupe G de l'ensemble des polygones à $n+3$ sommets distincts de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ dont le jeu de directions orientées soit D. On définit

$$\underline{\mathcal{P}}^n = \bigcup_{D \in \mathcal{D}^n} \underline{\mathcal{P}}^n_D$$

le quotient par le groupe G de l'ensemble des polygones à $n+3$ sommets distincts de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ dont les directions orientées sont dans l'ensemble $\mathcal{D}^n$.

Contrairement aux $\mathcal{P}^n_D$, les ensembles $\underline{\mathcal{P}}^n_D$ ne sont jamais vides, puisqu'il n'y a plus de condition de fermeture. Pour tout jeu $D \in \mathcal{D}^n$, l'ensemble $\mathcal{P}^n_D$ est contenu dans l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}^n_D$. Sur chaque fibre $\underline{\mathcal{P}}^n_D$, un système de coordonnées est donné par le choix de n rapports

de longueur (entre les $n+1$ longueurs finies). On choisit le système de coordonnées défini par

$$(r_1, \ldots, r_n) : \underline{\mathcal{P}}_D^n \to]0, +\infty[^n, \qquad r_i(P) = \frac{||a_i a_{i+1}||}{||a_{n+1} a_{n+2}||}, \tag{2.2}$$

où $a_1, \ldots, a_{n+2}$ sont les sommets qui sont dans $\mathbb{R}^3$ d'un représentant de $P \in \underline{\mathcal{P}}_D^n$. Le fibré $\underline{\mathcal{P}}^n$ est trivial

$$\underline{\mathcal{P}}^n \simeq \mathcal{D}^n \times]0, +\infty[^n.$$

2.2 Monodromie et propriétés de réalité

On note $S(t)$ l'ensemble des singularités de l'immersion $\mathcal{X}$

$$S(t) := \{t_1, \ldots, t_{n+3}\} \subset \overline{\mathbb{R}}$$

où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On va voir que l'équation (E^*) est bien définie dans la sphère de Riemann, tandis que les données de Weierstrass $G(x)$ et $H(x)$ ont des points de branchement en les points $x = t_i$, et sont donc holomorphes dans le revêtement universel $\widetilde{X}(t)$ de l'ensemble

$$X(t) := \mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t).$$

On va déterminer, par des considérations géométriques, le comportement et la monodromie des fonctions $G(x)$ et $H(x)$ en ces singularités. On va voir que ceux-ci sont reliés aux propriétés de réalité de l'immersion $\mathcal{X}$.

2.2.1 Propriétés de réalité

La proposition suivante est une conséquence directe du lemme 1.8. Elle assure en particulier que les points $x = t_i$ ne sont donc pas des points de branchement pour les fonctions $p^*(x)$ et $q^*(x)$.

Proposition 2.6. *Les coefficients $p^*(x)$ et $q^*(x)$ de l'équation (E^*) sont à valeurs réelles dans $\overline{\mathbb{R}} \smallsetminus S(t)$ et s'étendent en des fonctions méromorphes et uniformes dans $\mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t)$.*

Démonstration. Pour montrer que les coefficients $p^*(x)$ et $q^*(x)$ sont réels sur l'axe réel, il suffit de trouver pour tout $i = 1, \ldots, n+3$ un système fondamental de solutions $(G_i(x), H_i(x))$ dont les composantes soient toutes les deux réelles ou toutes les deux purement imaginaires sur l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$. Par le lemme 1.8, on sait qu'il existe une matrice $S_i \in SU(2)$ telle que le système fondamental $(G_i(x), H_i(x)) = Y_0(x) \cdot S_i$ convienne. La matrice S_i est un relevé d'une rotation envoyant le vecteur u_i sur le deuxième vecteur de base $e_2 = (0, 1, 0)$, ou sur son opposé $(0, -1, 0)$.

On peut donc prolonger les fonctions $p^*(x)$ et $q^*(x)$ au demi-plan inférieur $\mathbb{C}_- = \{x \in \mathbb{C} \mid \Im(x) < 0\}$ en posant pour tout $x \in \mathbb{C}_-$

$$p^*(x) = \overline{p^*(\bar{x})}, \qquad q^*(x) = \overline{q^*(\bar{x})},$$

et on obtient ainsi qu'elles sont méromorphes dans $\mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t)$. □

Comme les propriétés de réalité jouent un rôle essentiel dans l'étude de l'équation (E^*), on introduit l'application suivante τ définie sur le faisceau des fonctions méromorphes $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}$,

qui à une fonction méromorphe dans un ouvert Ω associe sa « conjuguée » définie dans $\bar{\Omega}$, dans le sens suivant :

$$\begin{aligned} \tau : \ \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}(\Omega) &\to \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}\left(\bar{\Omega}\right) \\ f &\mapsto \tau(f) = (x \mapsto \overline{f(\bar{x})}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

L'application τ est anti-linéaire. Si Ω est un domaine de $\mathbb{P}^1$ stable par conjugaison (*i.e.* symétrique par rapport à l'axe réel), alors pour toute fonction f méromorphe dans Ω, on a

$$\begin{aligned} \tau(f) = f &\Leftrightarrow f(\Omega \cap \mathbb{R}) \subset \overline{\mathbb{R}} \\ \tau(f) = -f &\Leftrightarrow f(\Omega \cap \mathbb{R}) \subset i\overline{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

La fonction holomorphe $\tau(Y_0) = (\tau(G), \tau(H)) : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}^2$ constitue également les données de Weierstrass d'une immersion conforme minimale $\mathcal{X}^- : \mathbb{C}_- \to \mathbb{R}^3$. Un calcul rapide montre que cette immersion représente la surface minimale symétrique de $(\mathcal{M})$ par rapport au second axe de coordonnées (O, e_2). Comme la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est un relevé du demi-tour par rapport au second axe de coordonnées, on obtient :

Lemme 2.7. *Soit une fonction holomorphe $Y : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}^2$ dont les composantes ne sont jamais simultanément nulles. Alors, les deux fonctions*

$$Y : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}^2 \quad \text{et} \quad \tau(Y) \cdot J : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}^2$$

définissent par les formules de Weierstrass la même surface minimale.

On obtient ainsi le principe de réflexion de Schwarz. En effet, de même que les coefficients $p^*(x)$ et $q^*(x)$, pour tout $i = 1, \ldots, n+3$, le système fondamental $(G_i(x), H_i(x))$ introduit à la démonstration de la proposition 2.6 se prolonge analytiquement au demi-plan inférieur $\mathbb{C}_-$ à travers l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ en posant pour tout $x \in \mathbb{C}_-$

$$(G_i, H_i)(x) = \pm\tau((G_i, H_i))(x).$$

Le système (G_i, H_i) est alors holomorphe dans l'ouvert simplement connexe U_i,

$$U_i = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \cup]t_i, t_{i+1}[.$$

L'immersion de données de Weierstrass (G_i, H_i) se prolonge donc également en une immersion définie dans l'ouvert U_i, et le lemme 2.7 nous dit qu'elle définie une surface minimale symétrique par rapport au second axe de coordonnées (O, e_2). Comme on a

$$\begin{pmatrix} G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_i & H_i \end{pmatrix} S_i^{-1},$$

on obtient ainsi $n+3$ prolongements $Y_i(x)$ du système $Y_0(x)$ à travers chacun des intervalles $]t_i, t_{i+1}[$:

$$Y_i : U_i \to \mathbb{C}^2, \qquad Y_i|_{\mathbb{C}_+} = Y_0. \tag{2.4}$$

Chacun de ces prolongements induit un prolongement $\mathcal{X}^i : U_i \to \mathbb{R}^3$ de l'immersion $\mathcal{X}$, qui représente dans $\mathbb{C}_-$ la surface minimale symétrique de $(\mathcal{M})$ par rapport au i-ième côté du polygone P. De plus, les points symétriques sur la surface minimale ont des antécédents par l'immersion $\mathcal{X}^i$ qui sont conjugués. Ceci nous permet de déterminer la monodromie de l'équation (E^*).

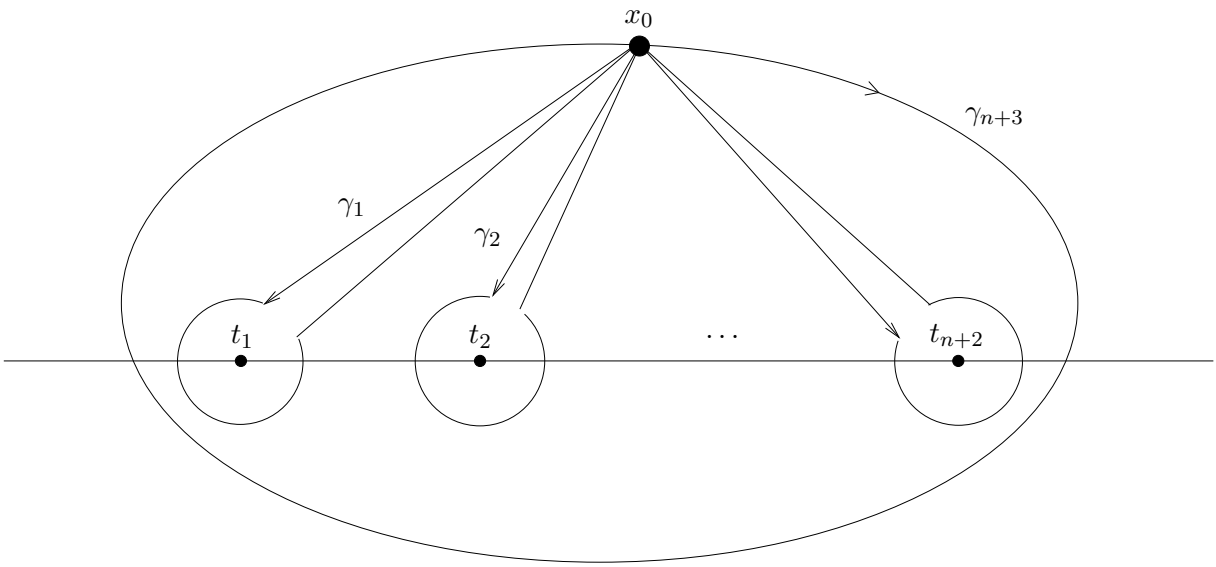

Figure 2.1 – Les lacets γ_i

2.2.2 Monodromie

L'étude précédente des propriétés de réalité de l'immersion $\mathcal{X}$ et de l'équation (E^*) nous permet de déterminer comment le système fondamental $Y_0(x)$ est transformé autour de chaque singularité $x = t_i$, c'est-à-dire de déterminer un système de générateurs de la monodromie de l'équation (E^*). On fixe un point x_0 dans le demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+$. Le groupe fondamental $\pi_1(X(t), x_0)$ est engendré par les classes de lacets $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+3}$ basés en x_0, qui sont représentés à la figure 2.1. Chaque lacet γ_i $(i = 1, \ldots, n+2)$ tourne une fois dans le sens trigonométrique autour de la singularité $x = t_i$ et ne coupe l'axe réel qu'entre t_{i-1} et t_i, puis entre t_i et t_{i+1}. Le lacet γ_{n+3} tourne en sens inverse du sens trigonométrique et coupe l'axe réel entre t_{n+2} et $+\infty$, puis entre $-\infty$ et t_1. On note $M_1, \ldots, M_{n+3}$ les matrices de monodromie du système fondamental de solutions $Y_0(x)$ le long des classes de lacets γ_i :

$$M_i := M_{\gamma_i}(Y_0). \tag{2.5}$$

Ces matrices constituent un système de générateurs de la monodromie de l'équation (E^*).

Proposition 2.8. *Les matrices de monodromie M_i $(i = 1, \ldots, n+3)$ du système fondamental de solutions $Y_0(x)$ autour des singularités $x = t_i$ s'écrivent*

$$M_i = D_i D_{i-1}^{-1}, \tag{2.6}$$

où pour tout $i = 1, \ldots, n+3$, la matrice D_i est un relevé dans $SU(2)$ du demi-tour vectoriel autour de l'axe dirigé par le vecteur u_i.

Par cette proposition, on obtient que la monodromie de l'équation (E^*) est déterminée par les directions des côtés du polygone P. L'expression des matrices M_i sous la forme de produit de demi-tours successifs n'apparaît nulle part, ni chez Darboux, ni chez Garnier. Cette expression sera pourtant essentielle pour établir que les déformations isomonodromiques que l'on va construire définissent bien des solutions du problème de Plateau (par la proposition 3.14), fait qui n'est jamais justifié par Garnier.

Démonstration. On note $\gamma_i * Y_0(x)$ le prolongement du système fondamental $Y_0(x)$ le long du lacet γ_i. Ce prolongement est également holomorphe dans $\mathbb{C}_+$, et c'est encore un système fondamental de solutions de l'équation (E^*), étant donné que les fonctions $p^*(x)$ et $q^*(x)$ sont uniformes dans $X(t)$. La matrice M_i est l'unique matrice inversible qui satisfait

$$\gamma_i * Y_0(x) = Y_0(x) M_i.$$

Le système fondamental $\gamma_i * Y_0(x)$ constitue les données de Weierstrass d'une immersion conforme minimale. Pour déterminer la matrice circulaire M_i, on compare cette immersion à l'immersion $\mathcal{X}$. Lorsqu'on suit le lacet γ_i, on croise d'abord l'axe réel entre t_{i-1} et t_i et l'immersion $\mathcal{X}$ se prolonge donc en définissant la surface minimale symétrique de $(\mathcal{M})$ par rapport au $(i-1)$-ième côté de P ; puis on croise l'axe réel entre t_i et t_{i+1} et on fait un nouveau demi-tour par rapport au i-ième côté de la surface obtenue à l'étape précédente. L'immersion de données de Weierstrass $\gamma_i * Y_0(x)$ est donc l'image de l'immersion $\mathcal{X}$ par le produit de ces deux demi-tours, c'est-à-dire par la rotation d'axe v_i et d'angle $2(1-\alpha_i)\pi$. On en déduit que la matrice M_i est un des deux relevés de cette rotation. On remarque que le vecteur de Gauss $N(t_i)$ au sommet est égal au vecteur v_i ou à son opposé $-v_i$. Ceci constitue le résultat qu'obtiennent Darboux et Garnier.

On veut pouvoir comparer les relevés des demi-tours intervenant dans des matrices de monodromie successives M_i et M_{i+1}, c'est-à-dire, en fait, associer un unique relevé au demi-tour autour du i-ième côté de P. On vient de voir que l'immersion $\mathcal{X}^i : \mathbb{C}_- \to \mathbb{R}^3$, de données de Weierstrass $Y_i : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}^2$ définies par (2.4), représente la surface minimale symétrique de la surface $(\mathcal{M})$ par rapport au i-ième côté de P. D'après le lemme 2.7, il existe donc un relevé $D_i \in SU(2)$ du demi-tour autour de ce côté tel que pour tout $x \in \mathbb{C}_+$ on ait

$$Y_0(x) \cdot D_i = \tau\left(Y_i\right)(x) \cdot J,$$

ce qui s'écrit

$$Y_0(x) = -\tau\left(Y_i \cdot J \cdot \bar{D}_i\right)(x),$$

vu que les matrices $A \in SU(2)$ qui sont des relevés de demi-tours sont caractérisées par l'équation $A^2 = -I_2$. En écrivant la relation précédente pour les systèmes $Y_{i-1}(x)$ et $Y_i(x)$, on trouve que pour tout $x \in \mathbb{C}_-$ on a

$$Y_{i-1}(x) \cdot J \cdot \bar{D}_{i-1} = Y_i(x) \cdot J \cdot \bar{D}_i,$$

ce qui, par l'identité (1.4), donne

$$Y_{i-1}(x) = Y_i(x) \cdot D_i \cdot D_{i-1}^{-1}.$$

Or la matrice M_i est l'unique matrice qui vérifie

$$Y_{i-1}(x) = Y_i(x) \cdot M_i,$$

ce qui donne le résultat annoncé. □

2.2.3 Exposants en les sommets du polygone

Pour l'instant, la monodromie de l'équation (E^*) n'est pas entièrement déterminée à partir du bord polygonal de l'immersion $\mathcal{X}$, puisqu'elle dépend du choix des relevés de chaque demi-tour D_i. L'étude locale de l'immersion $\mathcal{X}$ au voisinage des singularités $x = t_i$ va nous permettre de lever cette indétermination. Ceci nous permet également de calculer

précisément les exposants de l'équation (E^*), qui ne sont donnés par la monodromie qu'à un entier près.

On suppose que la surface minimale $(\mathcal{M})$ ne se recouvre pas elle-même au sommet a_i, c'est-à-dire qu'elle fait un angle de $\alpha_i\pi$ ou de $2\pi - \alpha_i\pi$:

$$0 < \alpha_i\pi < \pi \qquad \text{ou} \qquad -\pi < 2\pi - \alpha_i\pi < \pi.$$

Proposition 2.9. *Les points $x = t_1, \ldots, t_{n+3}$ sont des singularités régulières et non logarithmiques de l'équation (E^*). Pour tout $i = 1, \ldots, n+2$, les exposants en $x = t_i$ sont de la forme*

$$-\frac{\theta_i}{2}, \quad r_i + \frac{\theta_i}{2} \quad (r_i \in \mathbb{N})$$

et les exposants au point $x = \infty$ sont de la forme

$$\frac{1-\theta_{n+3}}{2}, \quad r_{n+3} - \frac{1-\theta_{n+3}}{2} \quad (r_{n+3} \in \mathbb{N}^* \smallsetminus \{1\}).$$

On a respectivement

$$\theta_i = 1 - \alpha_i \quad \textit{ou} \quad \theta_i = \alpha_i - 1$$

suivant que la surface minimale fait un angle $\alpha_i\pi$ ou de $(2-\alpha_i)\pi$ au sommet a_i ($i = 1, \ldots, n+2$). Dans le deuxième cas, on a de plus $r_i \geq 1$. De même, en l'infini, on a respectivement

$$\theta_{n+3} = -\alpha_{n+3} \quad \textit{ou} \quad \theta_{n+3} = \alpha_{n+3}$$

suivant que la surface minimale fait un angle $\alpha_{n+3}\pi$ ou de $(2-\alpha_{n+3})\pi$ au sommet a_{n+3}.

Démonstration. Montrons tout d'abord que la singularité $x = t_i$ est régulière. Comme on s'intéresse à présent à des propriétés locales de l'équation (E^*), on peut choisir la position du repère orthonormal de $\mathbb{R}^3$ tel que le vecteur normal v_i coïncide avec le troisième vecteur de base $e_3 = (0,0,1)$. On note toujours $Y_0 = (G, H)$ les données de Weierstrass correspondant à cette position, et $\mathcal{X}$ l'immersion associée. La matrice circulaire M_i du système $Y_0(x)$ est alors un relevé de la rotation d'axe (O, e_3) et d'angle $2(1-\alpha_i)\pi$ et elle s'écrit donc

$$M_i = \varepsilon \begin{pmatrix} e^{i\alpha_i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_i\pi} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1. Les fonctions $G(x)$ et $H(x)$ de la forme

$$G(x) = (x - t_i)^{-\frac{1-\varepsilon}{4} + \frac{\alpha_i}{2}} \varphi(x)$$
$$H(x) = (x - t_i)^{\frac{1-\varepsilon}{4} - \frac{\alpha_i}{2}} \psi(x)$$

où les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont uniformes au voisinage de $x = t_i$. Comme les primitives

$$\int_{x_0}^{x} G(\xi)^2 d\xi, \quad \int_{x_0}^{x} H(\xi)^2 d\xi, \quad \int_{x_0}^{x} G(\xi)H(\xi) d\xi$$

qui interviennent dans l'expression de l'immersion $\mathcal{X}$ prennent des valeurs finies en $x = t_i$, les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ n'ont pas de singularité essentielle en $x = t_i$. On en conclut donc que la singularité $x = t_i$ est régulière. Comme la matrice M_i est diagonalisable, cette singularité n'est pas logarithmique. Ses exposants sont de la forme

$$-\frac{1-\varepsilon}{4} + \frac{\alpha_i}{2} + r_i', \qquad \frac{1-\varepsilon}{4} - \frac{\alpha_i}{2} + r_i'',$$

où r_i' et r_i'' sont des entiers relatifs.

Pour être plus précis sur la valeur des exposants, il faut étudier le comportement du système fondamental $Y_0(x)$ en utilisant l'expression de l'immersion $\mathcal{X}$ aux sommets du polygone. Supposons tout d'abord $i \neq n+3$. Soient s_1^i et s_2^i les exposants en $x = t_i$, $s_1^i < s_2^i$. Leur somme $r_i := s_1^i + s_2^i = r_i' + r_i''$ est un entier relatif. On a vu que le fait de supposer $v_i = e_3$ implique que le système fondamental $Y_0(x)$ est canonique en $x = t_i$. Comme la projection stéréographique nord de $N(x)$ est $-G(x)/H(x)$, on voit que si le vecteur de Gauss $N(t_i)$ est égal à e_3, alors la fonction $H(x)$ est canonique pour l'exposant le plus grand s_2^i, et si $N(t_i)$ est égal à $-e_3$, alors $G(x)$ est canonique pour s_2^i. Supposons par exemple que $N(t_i) = v_i = e_3$. On a alors en $x = t_i$ les équivalents

$$\begin{aligned} G(x) &\sim a(x-t_i)^{s_1^i} \\ H(x) &\sim b(x-t_i)^{s_2^i}, \end{aligned}$$

où les constantes a et b sont non nulles. À une rotation d'axe (O, e_3) près, on peut supposer ces constantes réelles. On en déduit, si $r_i \neq -1$,

$$\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}(t_i) \sim \Re \begin{pmatrix} \frac{ia^2}{2\alpha_i+1}(x-t_i)^{2s_1^i+1} \\ \frac{a^2}{2\alpha_i+1}(x-t_i)^{2s_1^i+1} \\ \frac{2iab}{r_i+1}(x-t_i)^{r_i+1} \end{pmatrix}$$

Mais on ne peut pas avoir $r_i = -1$, car alors l'immersion $\mathcal{X}$ serait asymptote à une hélicoïde en $x = t_i$; on ne peut pas non plus avoir $r_i < -1$, vu que l'immersion $\mathcal{X}$ est à valeurs finies en $x = t_i$. Lorsque, dans l'équivalent précédent, la quantité $x - t_i$ prend des valeurs réelles infiniment petites, positives puis négatives, on voit que la quantité $(2s_1^i + 1)\pi$ est l'angle que fait la surface minimale au sommet a_i :

$$2s_1^i + 1 = \alpha_i \quad \text{ou} \quad 2s_1^i + 1 = 2 - \alpha_i,$$

c'est-à-dire $s_1^i = -\frac{\theta_i}{2}$ avec

$$\theta_i = 1 - \alpha_i \quad \text{ou} \quad \theta_i = \alpha_i - 1.$$

Dans tous les cas, on en déduit $\varepsilon = -1$. Si $\theta_i = 1 - \alpha_i$, alors $r_i' = 0$ et $r_i'' = r_i$. Si $\theta_i = \alpha_i - 1$, alors $r_i' = r_i$ et $r_i'' = 0$, et l'inégalité $s_1^i < s_2^i$ donne la minoration $r_i \geq 1$.

Pour déterminer les exposants au point $x = \infty$, on fait le changement de variables $w = 1/x$ dans l'immersion $\mathcal{X}$

$$\mathcal{X}\left(\frac{1}{w}\right) = -\Re \int \begin{pmatrix} i\left(G^2\left(\frac{1}{w}\right) - H^2\left(\frac{1}{w}\right)\right) \\ G^2\left(\frac{1}{w}\right) + H^2\left(\frac{1}{w}\right) \\ 2iG\left(\frac{1}{w}\right)H\left(\frac{1}{w}\right) \end{pmatrix} \frac{dw}{w^2}.$$

En procédant comme précédemment par des équivalents au point $w = 0$, on obtient

$$2s_1^{n+3} - 1 = \alpha_{n+3} \quad \text{ou} \quad 2s_1^{n+3} - 1 = 2 - \alpha_{n+3}$$

et on conclut de même. □

On représente aux figures 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5 les différentes configurations locales possibles pour une surface minimale en un sommet d'un polygone. On a choisi un angle

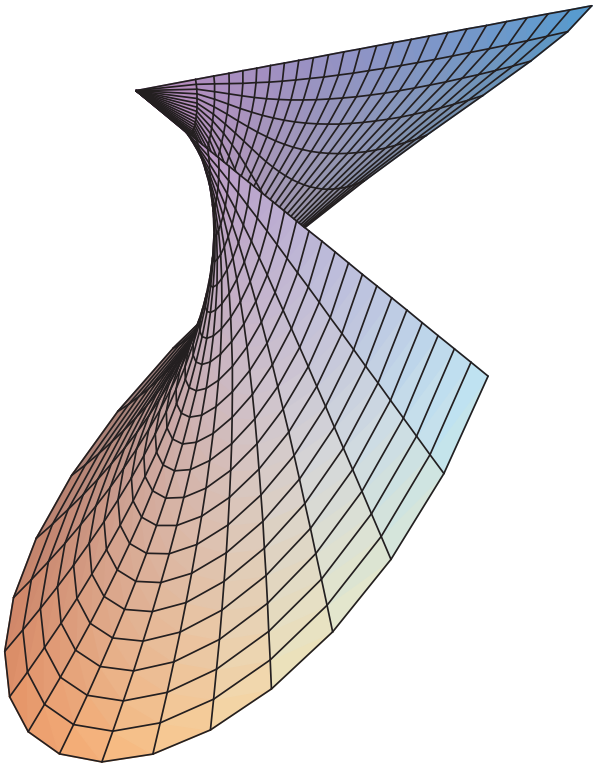

Figure 2.2 – Situation générique avec un angle de $\pi/3$ ($\theta = 2/3,\ r = 0$)

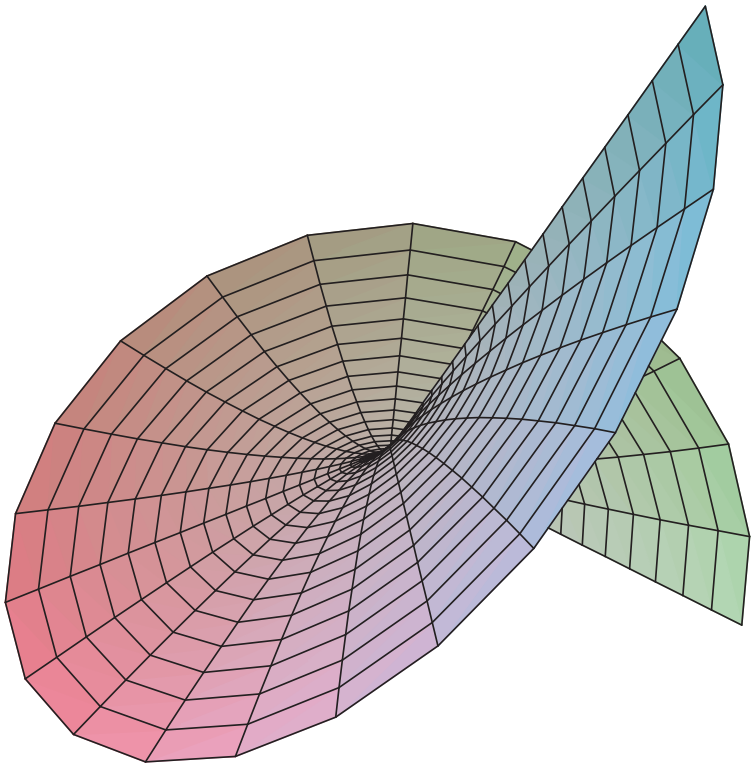

Figure 2.3 – Situation générique avec un angle de $5\pi/3$ ($\theta = -2/3,\ r = 1$)

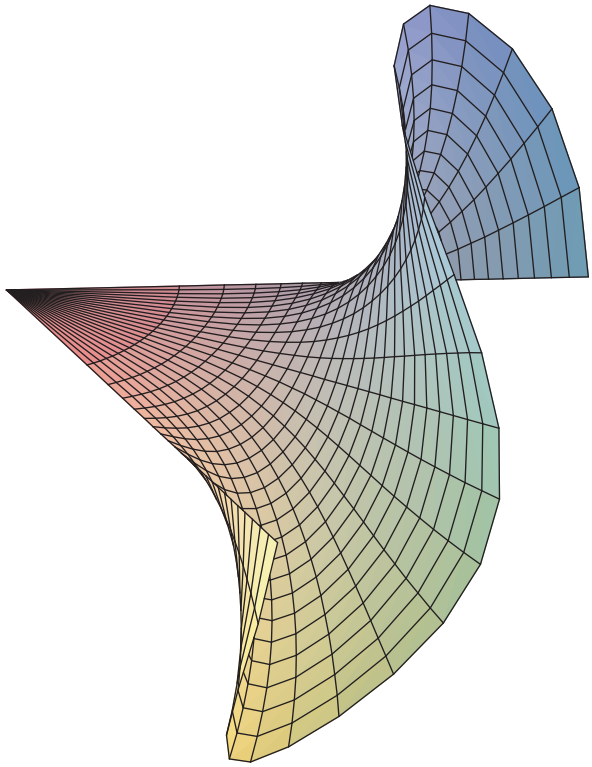

Figure 2.4 – Avec un ombilic et un angle de $\pi/3$ ($\theta = 2/3,\ r = 1$)

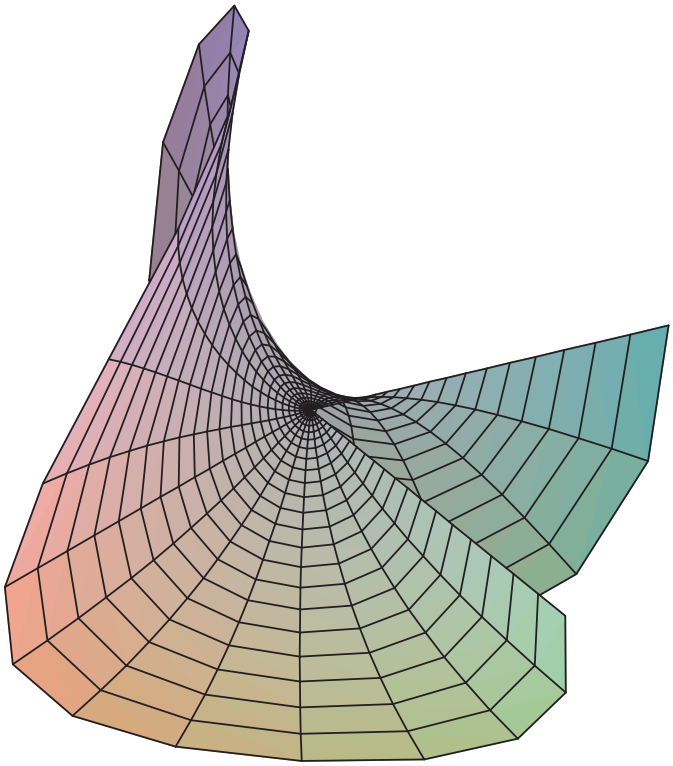

Figure 2.5 – Avec un ombilic et un angle de $5\pi/3$ ($\theta = -2/3,\ r = 2$)

de $\pi/3$ au sommet considéré, *i.e.* $\alpha = 1/3$. La surface fait donc une angle de $\pi/3$ ou de $2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$. Dans le premier cas, la constante θ vaut $2/3$ et les exposants de l'équation sont

$$-\frac{1}{3},\ r + \frac{1}{3} \qquad (r \in \mathbb{N}).$$

Dans le second cas, la constante θ vaut $-2/3$ et les exposants sont

$$\frac{1}{3},\ r - \frac{1}{3} \qquad (r \in \mathbb{N}^*).$$

La situation au sommet est générique lorsque l'entier r est minimal, *i.e.* lorsque $r = 0$ dans le premier cas (figure 2.2), et lorsque $r = 1$ dans le second (figure 2.3). On a une situation quelconque lorsque l'entier r est supérieur à ces valeurs. Comme on le voit sur les figures 2.4 et 2.5, on peut considérer que ceci se produit lorsque le sommet a est, en un sens, également un ombilic.

Remarque 2.10. Dans la démonstration précédente, on a déterminé les valeurs propres des matrices M_i : leurs diagonalisées sont données par (2.7) où $\varepsilon = -1$. On a ainsi déterminé entièrement la matrice M_i à partir du polygone P, puisqu'on a levé la dernière indétermination, à savoir le choix du relevé de la rotation d'axe $v_i = (v_i^1, v_i^2, v_i^3)$ et d'angle $2(1-\alpha_i)\pi$: par (1.3), les matrices M_i valent donc

$$M_i = -\cos(\alpha_i\pi)I_2 - i\sin(\alpha_i\pi)\begin{pmatrix} -v_i^3 & v_i^1 + iv_i^2 \\ v_i^1 - iv_i^2 & v_i^3 \end{pmatrix}.$$

Cette information supplémentaire provient du fait qu'on a exprimé quelles sont les orientations des côtés du polygone, et non pas seulement leurs directions. En effet, en étudiant le comportement de l'immersion $\mathcal{X}$ au voisinage du point $x = t_i$, on a distingué le cas où les côtés adjacents au sommet a_i sont dirigés par les vecteurs u_{i-1} et u_i, du cas où ils sont dirigés par les vecteurs $-u_{i-1}$ et u_i. Dans le second cas, la normale au sommet a_i est $-v_i$ et l'angle est $\alpha_i'\pi = (1-\alpha_i)\pi$. Ces deux cas définissent au sommet a_i la même rotation, puisque la rotation d'axe v_i et d'angle $2(1-\alpha_i)\pi$ est également la rotation d'axe $-v_i$ et d'angle $2(1-\alpha_i')\pi$. Le choix du relevé permet de distinguer ces deux cas. On en déduit donc également que les choix des relevés D_i des demi-tours sont déterminés par les orientations des côtés du polygones (à une indétermination globale près, puisque si on remplace toutes les matrices D_i par leurs opposées, on ne change pas les matrices de monodromie M_i). À un jeu de directions orientées $D = (D_1, \ldots, D_{n+3})$ correspond donc un $(n+3)$-uplet de relevés de demi-tours autour de ces directions (défini au signe près), que l'on notera également D.

Les singularités t_i $(i = 1, \ldots, n+3)$ sont régulières. Les autres singularités de l'équation (E^*) sont les ombilics de l'immersion $\mathcal{X}$ (et leurs conjugués), c'est-à-dire des points où le système fondamental de solutions $Y_0(x)$ est holomorphe. Ces autres singularités sont donc aussi régulières. On en déduit donc la proposition suivante.

Proposition 2.11. *L'équation (E^*) est une équation fuchsienne réelle sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$.*

On dit que l'équation (E^*) est réelle pour signifier que ses coefficients $p^*(x)$ and $q^*(x)$ sont réels sur l'axe réel (proposition 2.6).

2.3 Singularités apparentes

Les singularités qui nous reste à étudier sont les points où les fonctions $G(x)$ et $H(x)$ sont holomorphes, mais où leur Wronskien $G(x)H'(x) - H(x)G'(x)$ s'annule : ce sont les ombilics de l'immersion $\mathcal{X}$, et leurs conjugués dans le demi-plan inférieur $\mathbb{C}_-$ (on peut remarquer que, pour une surface minimale, les courbures principales sont nulles en un ombilic). Ces singularités sont régulières et apparentes (définition 1.16) et leurs exposants sont des entiers naturels. Les deux lemmes suivants précisent la valeur de leurs exposants, et le nombre des singularités apparentes.

Lemme 2.12. *Les singularités apparentes de l'équation (E^*) sont réelles ou conjuguées deux à deux. Deux singularités apparentes qui sont conjuguées ont les mêmes exposants. Les singularités apparentes de l'équation (E^*) qui sont réelles ou dans $\mathbb{C}_+$ sont les ombilics de l'immersion conforme minimale $\mathcal{X} : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{R}^3$. Les exposants en une de ces singularités $x = \lambda$ sont 0 et un entier naturel $m \geq 2$, tel que $m-1$ soit l'ordre du zéro de la différentielle de Hopf Q en $x = \lambda$.*

Démonstration. Considérons tout d'abord un point régulier quelconque $x = \lambda$ de l'immersion $\mathcal{X}$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus S(t)$. Comme précédemment, on choisit une position du repère orthonormal de $\mathbb{R}^3$ tel que le vecteur de Gauss $N(\lambda)$ de l'immersion $\mathcal{X}$ en $x = \lambda$ coïncide avec le troisième vecteur de base e_3. Dans cette position, on a

$$\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}(\lambda) = \Re \begin{pmatrix} (x-\lambda)\ \varphi_1(x) \\ (x-\lambda)\ \varphi_2(x) \\ (x-\lambda)^{m+1}\ \varphi_3(x) \end{pmatrix},$$

où l'entier m est supérieur ou égal à 1, et où les fonctions $\varphi_i(x)$ sont holomorphes au voisinage du point $x = \lambda$. La fonction $\varphi_3(x)$ ne s'annule pas en $x = \lambda$, ni l'une ou l'autre des fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$. Comme, par définition de la différentielle de Hopf, on a

$$Q = \left\langle \frac{d^2\mathcal{X}}{dx^2}, N \right\rangle dx^2,$$

l'entier $m-1$ est l'ordre du zéro de $Q(x)$ en $x = \lambda$. La situation générique correspond à la valeur $m = 1$, et le point $x = \lambda$ est un ombilic si et seulement si l'entier m est supérieur ou égal à 2.

Supposons à présent $m \geq 2$. De l'expression de l'immersion $\mathcal{X}$ au voisinage de $x = \lambda$, on déduit que les fonctions $G(x)$ et $H(x)$ satisfont

- l'une des primitives $\displaystyle\int_\lambda^x G(\xi)^2 d\xi$ ou $\displaystyle\int_\lambda^x H(\xi)^2 d\xi$ est de la forme $(x-\lambda)\varphi(x)$,
- la primitive $\displaystyle\int_\lambda^x G(\xi)H(\xi)d\xi$ s'écrit $(x-\lambda)^{m+1}\varphi(x)$,

où la fonction $\varphi(x)$ représente toute fonction holomorphe et non nulle au point $x = \lambda$. Si on a par exemple

$$\int_\lambda^x G(\xi)^2 d\xi = (x-\lambda)\varphi(x),$$

alors la fonction $G(x)$ ne s'annule pas en $x = \lambda$. De la deuxième assertion on déduit alors

$$H(x) = (x-\lambda)^m \varphi(x).$$

On obtient donc que les exposants de la singularité $x = \lambda$ sont 0 et m.

Dans le demi-plan inférieur $\mathbb{C}_-$, les singularités sont les conjugués des singularités contenues dans $\mathbb{C}_+$ (elles correspondent à des points symétriques sur la surface minimale). Comme les exposants en une singularité apparente sont réels, les exposants en deux singularités conjuguées sont les mêmes. □

L'équation (E^*) a un nombre fini de singularités, et en particulier un nombre fini de singularités apparentes (parce que, par exemple, la fonction $p^*(x)$ est méromorphe sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ et a un pôle simple en chaque singularité apparente, de résidu $1-m \neq 0$). Le lemme suivant donne une majoration du nombre de singularités apparentes.

Lemme 2.13. *L'équation (E^*) a au plus $n-1$ singularités apparentes.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la relation de Fuchs (1.7) à l'équation (E^*). Soit N le nombre de singularités apparentes. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ ces singularités apparentes, et $m_1, \ldots, m_N$ leurs exposants non nuls respectifs. Par la proposition 2.9 et le lemme 2.12, et comme l'équation (E^*) a $n+3+N$ singularités, la relation de Fuchs s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n+3} r_i + \sum_{k=1}^{N} m_k = n+1+N. \tag{2.8}$$

Vu les minorations sur les entiers r_i et m_k, on obtient

$$N \leq n-1.$$

□

Si le nombre de singularités apparentes est maximal : $N = n-1$, la valeur des entiers r_i et m_k est déterminée par la relation de Fuchs (2.8)

$$r_i = 0 \ (i = 1, \ldots, n+2), \qquad r_{n+3} = 2, \qquad m_k = 2 \ (k = 1, \ldots, n-1).$$

En particulier, la surface minimale fait alors en chaque sommet a_i un angle de $\alpha_i \pi$. Ce cas constitue la situation générique. On peut voir le cas $N < n-1$ comme provenant de cette situation générique par la fusion de certaines singularités apparentes avec d'autres singularités apparentes ou avec des t_i (pour que cette fusion est réellement un sens, il faut que l'équation soit normalisée, ce que l'on fera au chapitre suivant).

2.4 Caractérisation des équations fuchsiennes

On a montré que pour toute surface minimale non plane à bord polygonal de données de Weierstrass $(G(x), H(x))$, l'unique équation différentielle linéaire du second ordre (E^*) dont $G(x)$ et $H(x)$ soient solutions satisfait les trois conditions suivantes.

(i) L'équation (E^*) est fuchsienne sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$; ses singularités sont

$$t_1, \ldots, t_n, \ t_{n+1} = 0, \ t_{n+2} = 1, \ t_{n+3} = \infty,$$

et

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$$

$(N \leq n-1)$. Son schéma de Riemann est donné par

$$\begin{pmatrix} x = t_i & x = \infty & x = \lambda_k \\ -\frac{\theta_i}{2} & \frac{1-\theta_\infty}{2} & 0 \\ r_i + \frac{\theta_i}{2} & r_\infty - \frac{1-\theta_\infty}{2} & m_k \end{pmatrix} \tag{2.9}$$
$$i = 1, \ldots, n+2, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

où les constantes θ_i vérifient $0 < |\theta_i| < 1$ $(i = 1, \dots, n+3)$, et les constantes r_i et m_k sont des entiers naturels, qui vérifient de plus : $r_\infty \geq 2$, $m_k \geq 2$ et la relation (2.8). Les singularités λ_k sont apparentes.

(ii) Un système M_i $(i = 1, \dots, n+3)$ de générateurs de la monodromie de l'équation (E^*) le long des lacets γ_i définis à la figure 2.1 s'écrit

$$M_i = D_i D_{i-1}^{-1}, \qquad \text{où } D_i \in SU(2),\ D_i^2 = -I_2,$$

et les directions des demi-tours D_i ne sont pas coplanaires dans leur ensemble.

(iii) Les singularités t_i sont réelles, $t_1 < \cdots < t_n < 0$, et l'équation (E^*) est réelle.

Remarquons que la condition (iii), que l'on appellera *condition de réalité*, assure que les singularités apparentes sont réelles ou conjuguées deux à deux. Le fait que les directions des D_i ne soient pas toutes coplanaires assure que la monodromie de l'équation (E^*) est irréductible. Les quantités $|\theta_i| = 1 - \alpha_i$ $(i = 1, \dots, n+3)$ sont données par les directions orientées D_i. Ce sont également les uniques réels vérifiant $0 < |\theta_i| < 1$ et tels que les valeurs propres des matrices M_i soient $e^{i\pi\theta_i}$ et $e^{-i\pi\theta_i}$ si $i \neq n+3$, et $e^{i(1-\theta_{n+3})\pi}$ et $e^{-i(1-\theta_{n+3})\pi}$ sinon. Par contre, le signe de l'exposant θ_i dépend de l'angle que fait la surface au sommet a_i, et n'est donc pas donné par les directions orientées D_i.

On a vu à la remarque 2.10 que l'on peut identifier tout $(n+3)$-uplet de relevés de demi-tours $D = (D_1, \dots, D_{n+3})$ à un jeu de directions orientées, que l'on note également D.

Définition 2.14. Pour tout jeu de directions orientées D non toutes coplanaires, on définit l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$ des équations fuchsiennes satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus. On définit l'ensemble $\mathcal{E}^n$ par

$$\mathcal{E}^n = \bigcup_{D \in \mathcal{D}^n} \mathcal{E}_D^n.$$

Les ensembles $\mathcal{E}_D^n$ sont des ensembles isomonodromiques d'équations fuchsiennes. On note

$$\rho_D^* : \pi_1\left(\mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t), x_0\right) \to GL(2, \mathbb{C}) \tag{2.10}$$

la représentation de monodromie engendrée par les matrices $M_i = D_i D_{i-1}^{-1}$. La proposition suivante nous dit que les conditions ci-dessus caractérisent les équations différentielles linéaires du second ordre qui proviennent d'une surface minimale à bord polygonal. En fait, l'ensemble d'équations $\mathcal{E}^n$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence par le groupe G des translations et des homothéties de rapport positif de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\mathcal{P}^n$.

Proposition 2.15. *Soit $D = (D_1, \dots, D_{n+3})$ un jeu de directions orientées non toutes coplanaires. Alors toute équation dans l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$ admet un système fondamental de solutions $(G(x), H(x))$ qui constitue les données de Weierstrass d'une surface minimale bordée par un polygone de l'ensemble $\mathcal{P}_D^n$.*

Il n'y a aucune traduction naturelle de la longueur des côtés du polygone P en terme de propriétés de l'équation fuchsienne (E^*). Étant donné un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$ et un polygone P dans l'ensemble $\mathcal{P}_D^n$, pour montrer l'existence d'une surface minimale de bord P, on est donc amené à chercher toutes les équations de l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$, où les constantes $|\theta_i|$ et les demi-tours D_i sont définis par les directions du polygone P, mais où toutes les autres constantes (dont les t_i et les λ_k) sont inconnues. À chaque

équation de $\mathcal{E}_D^n$ est associé, par la proposition précédente, un polygone de l'ensemble $\mathcal{P}_D^n$ pour lequel on sait que le problème de Plateau admet au moins une solution. Il s'agira de montrer que le polygone P peut être obtenu ainsi. En fait, au chapitre 4, on va montrer directement, en étudiant les propriétés de la famille des polygones associés à l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$, qu'elle est l'ensemble $\mathcal{P}_D^n$ tout entier.

Énonçons d'abord un lemme utile à la démonstration de la proposition 2.15 et qui est une conséquence immédiate de la méthode de Fröbenius en une singularité fuchsienne.

Lemme 2.16. *Soient une équation fuchsienne réelle, et $x = x_0$ une singularité réelle et non logarithmique de cette équation, d'exposants θ^- et θ^+ (qui sont donc réels ou conjugués). Alors, l'équation admet en $x = x_0$ un système canonique de solutions $(g(x), h(x))$ qui vérifie*

$$g(x) = (x - x_0)^{\theta^-} \varphi(x)$$
$$h(x) = (x - x_0)^{\theta^+} \psi(x)$$

où les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont analytiques réelles au voisinage de $x = x_0$ et $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 1$.

Démonstration de la proposition 2.15. Soit (E^*) une équation de l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$. Soit $Y_0(x)$ un système fondamental de solutions de l'équation (E^*) dont les matrices de monodromie le long des lacets γ_i sont les matrices M_i

$$M_{\gamma_i}(Y_0) = M_i.$$

Le système $Y_0(x)$ n'est pas unique, l'ensemble des systèmes fondamentaux ayant les mêmes matrices de monodromie sont les systèmes $\lambda \cdot Y_0(x)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$). Ceci est une conséquence directe de la relation (1.9) et du fait que les matrices M_i ne sont pas simultanément diagonalisables (car alors les directions des demi-tours D_i seraient toutes coplanaires). Vu le schéma de Riemann de l'équation (E^*), les composantes du système $Y_0(x)$ ne peuvent pas être simultanément nulles. On peut donc définir l'immersion conforme minimale $\mathcal{X}$ de données de Weierstrass $Y_0(x)$. Les systèmes $\lambda \cdot Y_0(x)$ définissent la famille d'immersions $\mathcal{X}_\lambda$. On va montrer que pour un choix convenable λ_0 du scalaire λ, l'immersion $\mathcal{X}_{\lambda_0}$ a un bord polygonal, dont les directions orientées sont $D = (D_1, \ldots, D_{n+3})$. Le scalaire λ_0 n'est pas unique, puisque pour tout scalaire non nul μ réel, l'immersion $\mathcal{X}_{\mu\cdot\lambda_0}$ est l'image de l'immersion $\mathcal{X}_{\lambda_0}$ par une homothétie de rapport positif. C'est pourquoi à l'équation (E^*) n'est pas canoniquement associé un polygone, mais un élément de $\mathcal{P}_D^n$, *i.e.* une classe d'équivalence de polygones.

Par le lemme 1.8, l'immersion $\mathcal{X}_\lambda$ a un bord polygonal si et seulement si pour tout $i = 1, \ldots, n+3$ il existe une matrice $C_i \in SU(2)$ telle que le système fondamental $\lambda \cdot Y_0(x) \cdot C_i$ soit réel ou purement imaginaire sur l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$. On va commencer par choisir le scalaire λ tel que la condition précédente soit vérifiée pour $i = n + 3$. Soit une matrice $C'_\infty \in SU(2)$ telle que

$$M_\infty = \overline{C'_\infty}^t \begin{pmatrix} e^{i(1-\theta_\infty)\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i(1-\theta_\infty)\pi} \end{pmatrix} C'_\infty.$$

La matrice C'_∞ est un relevé d'une rotation envoyant le vecteur de Gauss $N(\infty)$ sur le vecteur de base e_3. Alors le système $Y_0(x) \cdot C'_\infty$ a la même matrice circulaire en $x = \infty$ que le système canonique $(g_\infty(x), h_\infty(x))$ en $x = \infty$ donné par le lemme 2.16. Soit $C \in GL(2, \mathbb{C})$ la matrice de connexion entre ces deux systèmes

$$Y_0(x) \cdot C'_\infty = (g_\infty(x), h_\infty(x)) \cdot C.$$

En comparant la monodromie en $x = \infty$ des systèmes ci-dessus, on voit que la matrice C commute avec la matrice diagonale non scalaire

$$\begin{pmatrix} e^{i(1-\theta_\infty)\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i(1-\theta_\infty)\pi} \end{pmatrix},$$

elle est donc diagonale. Il existe donc deux constantes non nulles a et b telles que

$$Y_0(x) \cdot C'_\infty = (a\, g_\infty(x), b\, h_\infty(x)).$$

On écrit $a = re^{i\alpha}$ et $b = \rho e^{i\beta}$, et on choisit

$$\lambda_0 := e^{-i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)},$$

et

$$C_\infty = C'_\infty \begin{pmatrix} e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} & 0 \\ 0 & e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice C_∞ est dans $SU(2)$ et on obtient

$$\lambda_0 \cdot Y_0(x) \cdot C_\infty = (r\, g_\infty(x), \rho\, h_\infty(x)).$$

Le système $\lambda_0 \cdot Y_0(x) \cdot C_\infty$ est donc réel sur l'intervalle $]-\infty, t_1[$.

Montrons à présent qu'il existe une matrice $C_1 \in SU(2)$ telle que le système $\lambda_0 \cdot Y_0(x) \cdot C_1$ soit réel ou purement imaginaire sur $]t_1, t_2[$. Par itération, on en déduira le résultat voulu sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$. D'après le lemme 2.16, il existe pour tout $i = 1, \ldots, n+3$ un système fondamental canonique au point $x = t_i$

$$\mathcal{G}_i(x) = (g_i(x), h_i(x))$$

défini et holomorphe dans $\mathbb{C}_+$, qui soit réel sur l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ et tel que le système $(e^{-i\frac{\theta_i}{2}\pi} g_i(x), e^{i\frac{\theta_i}{2}\pi} h_i(x))$ soit réel sur l'intervalle $]t_{i-1}, t_i[$. On en déduit donc que pour tout i, il existe une matrice $A_i \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que

$$\mathcal{G}_{i-1}(x) = \mathcal{G}_i(x) \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta_i}{2}\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta_i}{2}\pi} \end{pmatrix} A_i.$$

Comparons le système $\lambda_0 \cdot Y_0(x)$ au système $\mathcal{G}_1(x)$ qui est réel sur $]t_1, t_2[$. Par construction, on a

$$\lambda_0 \cdot Y_0(x) = \mathcal{G}_\infty(x) \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} C_\infty,$$

et donc

$$\lambda_0 \cdot Y_0(x) = \mathcal{G}_1(x) \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta_1}{2}\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta_1}{2}\pi} \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} C_\infty.$$

Il s'agit d'écrire le produit précédent sous la forme

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta_1}{2}\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta_1}{2}\pi} \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} C_\infty = B_1 \overline{C_1}^t,$$

où la matrice B_1 est dans $GL(2,\mathbb{R})$ et la matrice C_1 dans $SU(2)$. On obtient ceci en introduisant une matrice $C_1' \in SU(2)$ vérifiant

$$M_1 = \overline{C_1'}^t \begin{pmatrix} e^{i\theta_1\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1\pi} \end{pmatrix} C_1',$$

en comparant, comme à l'étape précédente, les matrices de monodromie des systèmes $\lambda_0 \cdot Y_0(x)$ et $\mathcal{G}_1(x)$ au point $x = t_1$, et enfin en exprimant que le déterminant du produit suivant

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta_1}{2}\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta_1}{2}\pi} \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} C_\infty \overline{C_1'}^t$$

est réel. □

Les données de Weierstrass $(G(x), H(x))$ associées par la proposition 2.15 à une équation de l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$ ne sont pas uniques (elles dépendent d'un paramètre réel arbitraire). Mais tous les choix possibles pour ces données de Weierstrass définissent des surfaces minimales appartenant à la même classe d'équivalence par le groupe G des translations et des homothéties de rapport positif. À une équation de l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$ est donc canoniquement associée une classe d'équivalence de disques minimaux, dont les bords polygonaux sont des représentants d'un même élément de l'ensemble $\mathcal{P}_D^n$.

Chapitre 3

Déformations isomonodromiques

Étant donné un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$, le but initial de ce chapitre est de décrire explicitement l'ensemble d'équations $\mathcal{E}_D^n$ introduit au chapitre précédent (définition 2.14) et de montrer qu'il est paramétré par le n-uplet de singularités $t = (t_1, \ldots, t_n)$. On va commencer, à la section 3.1, par définir un autre ensemble d'équations $\underline{\mathcal{E}}_D^n$, qui contient $\mathcal{E}_D^n$, et qui est plus naturellement associé à un jeu de directions orientées D. L'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ est obtenu en autorisant l'existence de n singularités apparentes (et non plus seulement $n-1$), de manière à pouvoir résoudre le problème de Riemann–Hilbert posé par la condition (ii). L'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence par le groupe G de disques minimaux ayant éventuellement un bout hélicoïdal et dont le bord est un polygone de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ appartenant à $\underline{\mathcal{P}}_D^n$.

Pour décrire l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$, et donc l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$, il faut caractériser les équations fuchsiennes qui sont réelles. Pour cela, et aussi parce que le système de Garnier n'a pas la propriété de Painlevé, il est plus commode, voire nécessaire, d'utiliser des systèmes fuchsiens. À la section 3.2, on expose donc des résultats plus généraux sur la manière d'associer des systèmes fuchsiens à une équation fuchsienne, et on obtient qu'à une équation fuchsienne du second ordre est associée deux familles à un paramètre de systèmes fuchsiens de taille 2×2 du premier ordre.

Ceci nous permettra à la section 3.3 de définir directement l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ des systèmes fuchsiens associés à un jeu de directions orientées D. Cet ensemble n'est pas en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence par le groupe G de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ puisque, contrairement aux équations, deux systèmes fuchsiens différents peuvent définir la même immersion conforme minimale. On établit une condition nécessaire et suffisante portant sur la monodromie d'un système fuchsien pour qu'il vérifie une certaine condition de réalité – l'analogue pour les systèmes de la condition de réalité (iii). En particulier, on montre que la monodromie ρ_D^* définie par un jeu D vérifie cette condition. En termes d'équations, cela signifie que les équations satisfaisant les conditions (i) et (ii) de la section 2.4 vérifient automatiquement la condition (iii). Ces résultats, pourtant essentiels à la validité de la méthode de résolution de Garnier, ne sont jamais établis, ni même mentionnés par lui-même. On obtient que l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ contient une famille isomonodromique de systèmes fuchsiens $(A_D(t), t \in \pi^n)$ paramétrée par les singularités $t = (t_1, \ldots, t_n)$, décrite par le système de Schlesinger et qui est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence par le groupe G de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$. On obtient de plus que la solution $(A_1(t), \ldots, A_{n+2}(t))$ du système de Schlesinger correspondant à cette famille est holomorphe en tout point du simplexe π^n.

Pour conclure, on déduira des résultats obtenus pour les systèmes fuchsiens les résultats

correspondant pour les équations fuchsiennes et on obtiendra la description voulue de l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$: c'est également une famille isomonodromique $(E_D^*(t), t \in \pi^n)$ paramétrée par t. Elle est décrite par le système de Garnier $(\mathcal{G}_n)$. On obtient également une condition nécessaire et suffisante portant sur la monodromie pour qu'une solution (λ, μ) du système de Garnier soit réelle. Cependant, ceci ne nous sera finalement pas utile pour la suite, puisqu'au chapitre 4, on travaillera uniquement avec des systèmes fuchsiens.

3.1 Les équations associées à un jeu de directions orientées

3.1.1 Normalisation

Soit (E^*) une équation de l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$ de schéma de Riemann (2.9). On va transformer l'équation (E^*) en une équation fuchsienne projectivement équivalente (E) en faisant le changement d'inconnue

$$\begin{aligned} y^* &= \Phi(x) y \\ \Phi(x) &= \prod_{i=1}^{n+2} (x - t_i)^{-\frac{\theta_i}{2}}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

pour toute solution y^* de l'équation (E^*). Alors l'équation (E) s'écrit

$$D^2 y + p(x) D y + q(x) y = 0. \tag{E}$$

Elle est également réelle et son schéma de Riemann est

$$\begin{pmatrix} x = t_i & x = \infty & x = \lambda_k \\ 0 & \alpha & 0 \\ r_i + \theta_i & (r_{n+3} - 1) + \alpha + \theta_{n+3} & m_k \end{pmatrix}$$
$$i = 1, \ldots, n+2, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i=1}^{n+3} \theta_i \right).$$

Ses coefficients $p(x)$ et $q(x)$ s'écrivent

$$\begin{cases} p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \frac{1 - r_i - \theta_i}{x - t_i} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1 - m_k}{x - \lambda_k} \\ q(x) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \frac{K_i}{x - t_i} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu_k}{x - \lambda_k}. \end{cases}$$

Un système de générateurs de sa monodromie est donné par les matrices N_i $(i = 1, \ldots, n+2)$ définies par

$$N_i = e^{i\pi\theta_i} D_i D_{i-1}^{-1},$$

et

$$N_{n+3} = \exp\left(-i\pi \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i \right) D_{n+3} D_{n+2}^{-1}.$$

On a vu que si le nombre de singularités apparentes est maximal : $N = n - 1$, alors la relation de Fuchs impose que l'on ait

$$r_i = 0 \ (i = 1, \ldots, n+2), \qquad r_{n+3} = 2, \qquad m_k = 2 \ (k = 1, \ldots, n-1).$$

Ceci est également vrai pour l'équation (E). Ce cas constitue ce que l'on a appelé la situation générique. Le schéma de Riemann est alors

$$\begin{pmatrix} x = t_i & x = \infty & x = \lambda_k \\ 0 & \alpha & 0 \\ \theta_i & 1 + \alpha + \theta_{n+3} & 2 \end{pmatrix}$$
$$i = 1, \dots, n+2, \qquad k = 1, \dots, n-1,$$

et les coefficients sont donnés par

$$\begin{cases} p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \frac{1-\theta_i}{x-t_i} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x-\lambda_k} \\ q(x) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \frac{K_i^0}{x-t_i} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mu_k^0}{x-\lambda_k}. \end{cases}$$

On peut considérer qu'une équation (E) quelconque coïncide avec une telle équation générique dans laquelle $n-1-N$ singularités apparentes sont confondues avec d'autres singularités, apparentes ou non, ce qui augmente à chaque fois d'une unité l'exposant non nul de la singularité. La fusion de singularités apparentes ne fonctionne pas pour les équations (E^*), c'est pourquoi on a introduit la transformation (3.1). Si on décrit toutes les équations (E) génériques, alors par fusion de singularités puis par la transformation (3.1), on en déduira une description de l'ensemble $\mathcal{E}_D^n$.

Remarque 3.1. On choisit arbitrairement le signe des exposants θ_i, puisqu'on ne peut pas savoir à l'avance si la surface minimale que l'on recherche fera un angle de $\alpha_i\pi$ ou de $(2-\alpha_i)\pi$ au sommet a_i (proposition 2.9). Tant qu'aucune singularité apparente ne fusionne avec la singularité $x = t_i$, la surface minimale correspondante fait un angle de $\alpha_i\pi$ au sommet a_i, et ce quel que soit le signe de l'exposant θ_i. Si on choisit $\theta_i > 0$, alors la surface fait nécessairement un angle de $\alpha_i\pi$ au sommet a_i. Si on choisit $\theta_i < 0$, alors la surface fait un angle de $\alpha_i\pi$ au sommet a_i si aucune singularité apparente ne fusionne avec t_i, et elle fait un angle de $(2-\alpha_i)\pi$ sinon. Même une fois que l'on a choisi le signe de θ_i, on ne peut donc pas toujours prévoir l'angle de la surface.

3.1.2 Le nombre de singularités apparentes

On veut décrire une sous-famille d'une famille isomonodromique d'équations fuchsiennes. Pour cela, on va résoudre un problème de Riemann–Hilbert, puis déformer de manière isomonodromique l'équation obtenue et sélectionner dans la famille ainsi construite les équations satisfaisant la condition de réalité (iii). La monodromie engendrée par les matrices M_i est irréductible. On sait donc par le théorème 1.17 que pour toute valeur de $t \in \mathcal{B}^n$, il existe une équation fuchsienne du second ordre dont l'ensemble des singularités est $S(t)$ et dont la monodromie est ρ_D^*. Mais ces équations peuvent avoir n singularités apparentes, et non pas au plus $n-1$ comme on le souhaiterait.

Que se passe-t-il s'il on cherche à imposer n singularités apparentes dans une équation de $\mathcal{E}_D^n$? Considérons une équation (E) générique associée à une équation (E^*) de $\mathcal{E}_D^n$. On voit que la relation de Fuchs interdit l'ajout d'une singularité apparente de plus. Pour pouvoir ajouter une singularité apparente d'exposants 0 et 2, il faut modifier au moins un autre exposant, en le diminuant d'une unité. Considérons par exemple que les exposants de l'équation (E) en l'infini soient α et $\alpha+\theta_{n+3}$. L'équation (E^*) vérifie alors les conditions (i), (ii) et (iii) de la section 2.4, excepté que la somme des exposants en l'infini vaut

$$r_{n+3} = 1.$$

On peut malgré cela associer une surface minimale à l'équation (E^*). Mais on a vu à la démonstration de la proposition 2.9 qu'alors cette surface minimale n'est plus compacte et est asymptote à une hélicoïde au point $x = \infty$. Elle est limitée par un polygone de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ au sens de la définition 2.4. On aurait observé le même phénomène en un autre sommet si on avait choisit de diminuer la somme des exposants en la singularité correspondante. On introduit donc les ensembles suivants.

Définition 3.2. Pour tout jeu de directions orientées D non toutes coplanaires, on définit l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ des équations fuchsiennes satisfaisant les conditions (ii) et (iii) de la section 2.4 et une condition plus faible que la condition (i) obtenue en remplaçant les inégalités $N \leq n-1$ et $r_{n+3} \geq 2$ par

$$N \leq n \quad \text{et} \quad r_{n+3} \geq 1.$$

On définit l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}^n$ par

$$\underline{\mathcal{E}}^n = \bigcup_{D \in \mathcal{D}^n} \underline{\mathcal{E}}_D^n.$$

L'ensemble $\mathcal{E}_D^n$ est donc contenu dans $\underline{\mathcal{E}}_D^n$. L'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ est l'ensemble des équations différentielles linéaires du second ordre associées aux disques minimaux dont le bord est un polygone de l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ et ayant un bout hélicoïdal au sommet qui est en l'infini.

Soit un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$. On transforme les équations de l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ par (3.1). Soient $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n+3})$ les réels, uniques au signe près, vérifiant $0 < |\theta_i| < 1$ et tels que les valeurs propres des matrices $D_i D_{i-1}^{-1}$ soient $e^{i\theta_i \pi}$ et $e^{-i\theta_i \pi}$ si $i \neq n+3$, et $e^{i(1-\theta_{n+3})\pi}$ et $e^{-i(1-\theta_{n+3})\pi}$ sinon. Alors les équations projectivement équivalentes aux équations de l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ obtenues par (3.1) sont toutes les équations (E) vérifiant la condition de réalité (iii) et les deux conditions suivantes.

(i') L'équation (E) est fuchsienne sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$; ses singularités sont $t_1, \ldots, t_n$, $t_{n+1} = 0$, $t_{n+2} = 1$, $t_{n+3} = \infty$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Son schéma de Riemann est donné par

$$\begin{pmatrix} x = t_i & x = \infty & x = \lambda_k \\ 0 & \alpha & 0 \\ \theta_i & \alpha + \theta_{n+3} & 2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$
$$i = 1, \ldots, n+2, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n+3} \theta_i\right).$$

Les singularités λ_k sont apparentes. Des singularités apparentes peuvent être confondues avec d'autres singularités, apparentes ou non.

(ii') Un système N_i $(i = 1, \ldots, n+3)$ de générateurs de la monodromie de l'équation (E) le long des lacets γ_i définis à la figure 2.1 s'écrit

$$N_i = e^{i\pi\theta_i} D_i D_{i-1}^{-1}$$

$(i \neq n+3)$ et

$$N_{n+3} = \exp\left(-i\pi \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i\right) D_{n+3} D_{n+2}^{-1}.$$

On a décrit à la section 1.2.6 l'ensemble des équations satisfaisant la condition (i'). On a vu que, à un jeu D fixé, elles dépendent des $3n$ paramètres $(\lambda, \mu, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{B}^n$. Elles dépendent également ici des signes $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+3}) \in \{-1, 1\}^{n+3}$ des exposants $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n+3})$, qui ne sont pas connus. On a donné les transformations isomonodromiques de ces équations par le système de Garnier (théorème 1.25). Soit M la variété intégrale du système de Garnier correspondant à la monodromie irréductible engendrée par les matrices N_i. Alors, pour tout jeu $D \in \mathcal{D}^n$, les équations de la famille isomonodromique $E_\theta(\lambda, \mu, t)$ $((\lambda, \mu, t) \in M)$ définie à la section 1.2.6 ne dépendent que de $t \in \mathcal{B}^n$. On note cette famille

$$(E_D(t), t \in \mathcal{B}^n)\,.$$

On ne s'intéresse qu'aux équations dont les singularités $t_1, \ldots, t_n$ sont dans le simplexe de $\mathbb{R}^n$ suivant

$$\pi^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 < \cdots < t_n < 0\}\,, \tag{3.3}$$

qui est une composante connexe de $\mathcal{B}^n \cap \mathbb{R}^n$. On a le résultat suivant.

Proposition 3.3. *Soit un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$. Alors les équations de la famille isomonodromique $(E_D(t), t \in \pi^n)$ sont réelles.*

Ce résultat provient de propriétés satisfaites par la monodromie des équations $E_D(t)$. C'est la conséquence d'un résultat plus général, que l'on établit à la proposition 3.16 et qui donne une caractérisation des équations fuchsiennes réelles à partir uniquement de leur monodromie. Mais on ne peut pas obtenir cette caractérisation directement : pour établir la proposition 3.16, on a besoin de passer des équations fuchsiennes aux systèmes fuchsiens.

La famille $(E_D(t), t \in \pi^n)$ constitue donc l'ensemble des équations satisfaisant les conditions (i'), (ii') et (iii). En appliquant à chaque équation $E_D(t)$ la transformation inverse de la transformation (3.1), on obtient l'équation $E_D^*(t)$

$$D^2 y + p^*(x,t) Dy + q^*(x,t) y = 0.$$

La famille isomonodromique $(E_D^*(t), t \in \pi^n)$ décrit complètement l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$. On a donc construit, pour chaque jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$, la famille de tous les disques minimaux à bord polygonal de directions orientées D (ayant éventuellement un bout hélicoïdal). On note $(P_D(t), t \in \pi^n)$ la famille des polygones qui sont les bords de ces disques.

La famille $(E_D^*(t), t \in \pi^n)$ dépend également du signe ε de θ. En général, des choix différents de ε donne la même équation $E_D^*(t)$. Mais si au cours de la déformation, pour une certaine valeur t_0 de t, une singularité apparente $\lambda_k(t)$ fusionne avec une singularité t_i, alors la transformation (3.1) est singulière et l'équation $E_D^*(t_0)$ dépend du signe de θ_i. On a vu qu'alors, l'exposant $\theta_i/2$ de l'équation est augmenté d'une unité : les exposants ne sont plus symétriques en θ_i et $-\theta_i$. Comme on l'a vu à la remarque 3.1, même une fois que l'on a choisi le signe ε, on ne peut pas toujours prédire l'angle que fera la surface minimale aux sommets de son bord polygonal.

Remarquons que les polygones $P_D(t)$ qui sont dans $\mathbb{R}^3$, *i.e.* qui n'ont pas de sommet en l'infini, correspondent aux valeurs de t qui sont un pôle ou une singularité essentielle pour au moins une des singularités apparentes $\lambda_k(t)$: cette singularité apparente fusionne alors avec $t_{n+3} = \infty$, et l'équation $E_D^*(t)$ vérifie pour ces valeurs de t la condition (i) de la section 2.4.

3.1.3 Les rapports de longueurs

Admettons pour l'instant la proposition 3.3. On fixe un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$. Revenons sur la définition, pour chaque valeur de $t \in \pi^n$, du polygone $P_D(t)$ de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ appartenant à l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ qui est associé à l'équation $E_D^*(t)$ par la proposition 2.15 (ou plus exactement la classe d'équivalence de polygones pour le groupe G des translations et des homothéties de rapport positif). Soit U un voisinage simplement connexe de π^n contenu dans $\mathcal{B}^n$. Si $Y(x,t)$ est un système fondamental de solutions M-invariant de l'équation $E_D^*(t)$ $(t \in U)$ dont les matrices de monodromie autour des singularités $x = t_i$ sont les matrices $M_i = D_i D_{i-1}^{-1}$ $(i = 1, \ldots, n+3)$, alors l'ensemble des systèmes ayant les mêmes matrices de monodromie sont de la forme $\lambda(t) \cdot Y(x,t)$, où $\lambda : U \to \mathbb{C}^*$ est une fonction holomorphe jamais nulle. On a montré à la proposition 2.15 que pour un certain choix $\lambda_0(t)$ de la fonction $\lambda(t)$, le système fondamental

$$(G(x,t), H(x,t)) = \lambda_0(t) \cdot Y(x,t)$$

définit, lorsque t est dans π^n, une surface minimale bordée par un polygone de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ dont les directions orientées des côtés sont les D_i. La fonction $\lambda_0(t)$ n'est pas unique, elle est définie à une multiplication près par une fonction analytique réelle en $t \in U$. C'est pourquoi on obtient pour chaque valeur de $t \in \pi^n$ une classe d'équivalence $P_D(t)$ de polygones pour le groupe G.

On veut montrer que la famille de polygones $(P_D(t), t \in \pi^n)$ décrit tous les polygones de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ (et donc en particulier, tous les polygones de $\mathbb{R}^3$ de directions orientées D). On a vu qu'un système de coordonnées sur $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ est donné par les rapports de longueurs (2.2). On définit la fonction « rapports des longueurs » F_D en restreignant ce système de coordonnées à la famille $(P_D(t), t \in \pi^n)$

$$F_D : \pi^n \to]0, +\infty[^n, \qquad F_D(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$$

avec

$$r_i(t) = r_i\left(P_D(t)\right).$$

Montrer que la famille $(P_D(t), t \in \pi^n)$ décrit $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ est donc équivalent à montrer que la fonction $F_D(t)$ est surjective : c'est le théorème 4.1 dont la démonstration est l'objet du chapitre 4. Explicitons la dépendance en t de la fonction $F_D(t)$. Elle s'exprime à partir des données $(G(x,t), H(x,t))$ par :

$$r_i(t) = \frac{\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(|G(x,t)|^2 + |H(x,t)|^2\right) dx}{\displaystyle\int_0^1 \left(|G(x,t)|^2 + |H(x,t)|^2\right) dx} \tag{3.4}$$

$(i = 1, \ldots, n)$. La fonction $F_D(t)$ est donc parfaitement définie à partir de l'équation $E_D^*(t)$, puisque, contrairement aux données de Weierstrass, elle est indépendante du choix de la fonction $\lambda_0(t)$. On voit tout de suite que le comportement de la fonction $F_D(t)$ n'est pas évident à déterminer. En effet, le comportement en t des fonctions $(G(x,t), H(x,t))$ dépend de celui des coefficients $p^*(x,t)$ et $q^*(x,t)$. Comme le système de Garnier n'a pas la propriété de Painlevé, les fonctions $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ peuvent avoir des singularités essentielles ou des points de branchement à l'intérieur du simplexe π^n ; la fonction $F_D(t)$ peut donc *a priori* être singulière dans π^n.

De plus, pour étudier son comportement, on a besoin d'une expression plus explicite de la fonction de $F_D(t)$, et en particulier du système fondamental de référence $Y(x,t)$.

3.2 Passage d'une équation à un système d'équations

Pour lever les difficultés rencontrées à la section précédente (condition de réalité, absence de la propriété de Painlevé), on va transformer les équations fuchsiennes du second ordre que l'on considère, en systèmes fuchsiens 2×2 du premier ordre. Les transformations isomonodromiques de ces systèmes sont données par le système de Schlesinger, qui a la propriété de Painlevé. En particulier, on va voir à la section suivante 3.3 que les solutions réelles du système de Schlesinger ont des singularités mobiles très simples.

3.2.1 D'un système d'équations du premier ordre à une équation du second ordre

C'est le passage immédiat. On considère un système différentiel 2×2 du premier ordre

$$DY = A(x)Y, \qquad A(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

où les fonctions $A_{ij}(x)$ sont méromorphes sur la sphère de Riemann.

Lemme 3.4. *Si la fonction $A_{12}(x)$ n'est pas identiquement nulle, alors la première composante y_1 de toute solution $Y = (y_1, y_2)^t$ du système* (3.5) *vérifie l'équation du second ordre*

$$D^2y + p(x)Dy + q(x)y = 0, \tag{3.6}$$

avec

$$p(x) = -\frac{DA_{12}(x)}{A_{12}(x)} - \operatorname{Tr} A(x) \tag{3.7}$$

$$q(x) = -DA_{11}(x) + A_{11}(x)\frac{DA_{12}(x)}{A_{12}(x)} + \det A(x). \tag{3.8}$$

De plus, si $\mathbf{Y}(x) = (Y(x), Z(x))$ est une matrice fondamentale de solutions du système (3.5)*, alors sa première ligne $(y_1(x), z_1(x))$ est un système fondamental de solutions de l'équation* (3.6)*.*

Il est donc immédiat que si le système (3.5) est fuchsien, alors l'équation qui lui est associée est fuchsienne. De plus, on a :

Lemme 3.5. *Si $x = \lambda$ est un zéro de $A_{12}(x)$ d'ordre m, mais n'est pas une singularité du système* (3.5)*, alors $x = \lambda$ est une singularité apparente de l'équation* (3.6)*, d'exposants* 0 *et $m + 1$.*

Considérons l'équation associée à un système fuchsien de singularités $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = \infty$:

$$DY = A(x)Y, \qquad A(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i}{x - t_i} \tag{A}$$

normalisé en l'infini

$$A_\infty = -\sum_{i=1}^{n+2} A_i = \begin{pmatrix} \theta_\infty^+ & 0 \\ 0 & \theta_\infty^- \end{pmatrix}$$

et non résonnant : les valeurs propres θ_i^+ et θ_i^- des matrices A_i $(i = 1, \dots, n+3)$ vérifient $\theta_i^+ - \theta_i^- \notin \mathbb{Z}$. Comme la fonction $A_{12}(x)$ est une fraction rationnelle en x ayant exactement

$n+2$ pôles simples, et ayant, par la normalisation en l'infini, un zéro d'ordre deux en l'infini, alors $A_{12}(x)$ a exactement n zéros dans $\mathbb{C}$ comptés avec multiplicité. Supposons à présent que les zéros de la fonction $A_{12}(x)$ sont simples. On les note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et on a donc

$$A_{12}(x) = X\frac{\Lambda(x)}{T(x)},$$

où

$$X = \sum_{i=1}^{n+2} t_i A_{12}^i, \quad \Lambda(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k), \quad T(x) = \prod_{i=1}^{n+2}(x-t_i). \tag{3.9}$$

Étant donné la dernière partie du lemme 3.4, le schéma de Riemann de l'équation (3.6) est donné par

$$\begin{pmatrix} x=t_i & x=\infty & x=\lambda_k \\ \theta_i^+ & \theta_\infty^+ & 0 \\ \theta_i^- & \theta_\infty^- + 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$i = 1, \ldots, n+2, \qquad k = 1, \ldots, n$$

et l'équation (3.6) n'a pas de singularité logarithmique.

Remarque 3.6. On observe que les exposants en l'infini de l'équation ne sont pas exactement les valeurs propres de la matrice A_∞, contrairement à ce qui se passe en les autres singularités. Ceci provient de la normalisation en l'infini du système fuchsien. En toute généralité, si une autre matrice A_i est également diagonale (ou seulement triangulaire inférieure), alors un des exposants de l'équation en la singularité $x = t_i$ est aussi augmenté d'une unité. En effet, si une matrice A_i, qui peut être A_∞, est triangulaire inférieure, alors on voit facilement grâce à la proposition 1.27 qu'il existe une matrice fondamentale de solutions du système (A) canonique en $x = t_i$

$$R_i(x)(x-t_i)^{L_i}, \qquad \text{où } L_i = \begin{pmatrix} \theta_i^+ & 0 \\ 0 & \theta_i^- \end{pmatrix},$$

telle que la matrice holomorphe $R_i(x)$ soit également triangulaire inférieure au point $x = t_i$. Ainsi, la première ligne de cette solution fondamentale a pour exposants θ_i^+ et $\theta_i^- + 1$, bien qu'elle-même ait toujours pour exposants θ_i^+ et θ_i^-. Remarquons qu'une matrice A_i ($i \neq \infty$) n'est triangulaire inférieure que si la fonction $A_{12}(x)$ n'a pas de pôle au point $x = t_i$: on peut considérer qu'une telle situation se produit lorsque un des zéros λ_k de $A_{12}(x)$ coïncide avec la singularité t_i. On peut généraliser cette situation au cas où un nombre arbitraire $r_i \in \mathbb{N}$ de singularités apparentes coïncident avec t_i. Alors, la fonction $A_{12}(x)$ a un zéro d'ordre $r_i - 1$ en $x = t_i$, et il en est de même pour le coefficient $(1,2)$ de la fonction $R_i(x)$: l'équation (3.6) a alors pour exposants θ_i^+ et $\theta_i^- + r_i$ au point $x = t_i$.

Si on suppose que les valeurs propres des matrices A_i sont 0 et θ_i ($\theta_i \notin \mathbb{Z}$), alors l'équation (3.6) est l'une des équations $E_\theta(\lambda, \mu, t)$ décrite à la section 1.2.6. Comme les paramètres de l'équation (3.6) sont entièrement déterminés par les matrices A_i (on pourra se reporter à [IKSY91] pour une expression explicite), on en déduit :

Corollaire 3.7. *Si les matrices $(A_1(t), \ldots, A_{n+2}(t))$ du système fuchsien (A) sont solutions du système de Schlesinger, alors l'équation (3.6) admet une transformation isomonodromique décrite par le système de Garnier $(\mathcal{G}_n)$.*

3.2.2 Les systèmes fuchsiens associés à une équation fuchsienne

On considère une équation fuchsienne d'ordre deux définie sur la sphère de Riemann

$$D^2y + p(x)Dy + q(x)y = 0, \tag{F}$$

de singularités $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = \infty$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et de schéma de Riemann :

$$\begin{pmatrix} x = t_i & x = \infty & x = \lambda_k \\ \theta_i^+ & \theta_\infty^+ & 0 \\ \theta_i^- & \theta_\infty^- & 2 \end{pmatrix}$$
$$i = 1, \dots, n+2, \qquad k = 1, \dots, n$$

On suppose que ses exposants vérifient

$$\theta_i^+ - \theta_i^- \notin \mathbb{Z} \quad (i = 1, \dots, n+3)$$

et que les singularités $x = \lambda_k$ sont apparentes.

On va caractériser l'ensemble des systèmes fuchsiens (A) normalisés en l'infini qui définissent au sens du lemme 3.4 l'équation (F). Supposons tout d'abord qu'un tel système existe. On vient de voir qu'alors son coefficient $A_{12}(x)$ est entièrement déterminé par les paramètres de l'équation (F) et le paramètre supplémentaire X. En fait, on va voir qu'il en est de même pour les autres coefficients de $A(x)$. Dans [IKSY91] est donnée l'expression explicite des matrices A_i en fonction de ces paramètres. La démonstration est assez longue, et ce résultat ne nous sera pas utile par la suite. On va se contenter ici, à la suite de Garnier, de montrer l'existence de ces systèmes et de préciser leur dépendance en X. Comme on n'impose à l'avance aucune normalisation en l'infini, on obtient « deux fois plus » de systèmes que dans [IKSY91], *i.e.* on obtient deux familles à un paramètre de systèmes, là où ils n'en obtiennent qu'une seule. On donnera ensuite une transformation de jauge permettant de passer de l'une à l'autre de ces familles. Ce résultat est très utile à Garnier pour étudier les singularités en t de l'équation $E_D^*(t)$. En effet, il montre que lorsqu'un des systèmes associés à l'équation $E_D^*(t)$ a un pôle en $t = t_0$, alors le système correspondant de l'autre famille est holomorphe en $t = t_0$, et l'équation l'est donc également. Ce travail est long, et nécessite l'utilisation d'un autre système complètement intégrable que le système de Garnier (que Garnier étudie en détail dans [Gar26]). On verra comment éviter cette étude générale des singularités des solutions de Schlesinger en se restreignant aux solutions réelles, c'est-à-dire associées aux équations fuchsiennes réelles (proposition 3.15).

Proposition 3.8. *L'ensemble des systèmes fuchsiens (A) normalisés en l'infini associés au sens du lemme 3.4 à l'équation (F) est constitué de deux familles à un paramètre :*

$$DY = A_X^+(x)Y \quad (X \in \mathbb{C}^*)$$

et

$$DY = A_X^-(x)Y \quad (X \in \mathbb{C}^*)\,.$$

Ces deux familles se caractérisent par leur normalisation en l'infini : pour tout $X \in \mathbb{C}^*$

$$\left(A_X^+\right)_\infty = \begin{pmatrix} \theta_\infty^+ & 0 \\ 0 & \theta_\infty^- - 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\left(A_X^-\right)_\infty = \begin{pmatrix} \theta_\infty^- & 0 \\ 0 & \theta_\infty^+ - 1 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$A_X^\pm(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} A_0^\pm(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{X} \end{pmatrix}$$

où les matrices $A_0^+(x)$ et $A_0^-(x)$ sont déterminées par l'équation (F).

On ne montre la proposition 3.8 que dans le cas qui nous sera utile dans la suite, c'est-à-dire lorsque le schéma de Riemann de l'équation (F) est donné par

$$\begin{pmatrix} x = t_i & x = \infty & x = \lambda_k \\ -\frac{\theta_i}{2} & \frac{1-\theta_\infty}{2} & 0 \\ \frac{\theta_i}{2} & \frac{1+\theta_\infty}{2} & 2 \end{pmatrix}$$
$$i = 1, \ldots, n+2, \qquad k = 1, \ldots, n \ .$$

Le cas général est obtenu en transformant l'équation (F) en une équation projectivement équivalente (F_1) par

$$y_1 = \Phi(x) y$$
$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{n+2} (x - t_i)^{\alpha_i}.$$

Si le système fuchsien (A) est associé à l'équation (F), alors le système

$$DY = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{B_i}{x - t_i} Y, \qquad B_i := A_i + \alpha_i I_2$$

est associé à l'équation (F_1).

On commence par établir un lemme qui nous sera utile pour la démonstration de la proposition 3.8. Il s'agit d'une application de la méthode de Fröbenius et il constitue une étape intermédiaire dans la démonstration de la proposition 1.23 (mais la normalisation est différente). Les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ de l'équation (F) s'écrivent

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{x - t_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_k} = \frac{T'(x)}{T(x)} - \frac{\Lambda'(x)}{\Lambda(x)}$$
$$q(x) = \tilde{q}(x) - \frac{Q(x)}{\Lambda(x)},$$

où $\tilde{q}(x)$ est une fraction rationnelle en x dont les pôles (d'ordre au plus 2) sont exactement $t_1, \ldots, t_{n+2}$, et $Q(x)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$. Les polynômes $T(x)$ et $\Lambda(x)$ sont définis par (3.9).

Lemme 3.9. *La singularité $x = \lambda_k$ de l'équation (F) n'est pas logarithmique si et seulement si la fraction rationnelle*

$$\Psi = -\tilde{q} + \left(\frac{T'}{T} - \frac{\Lambda''}{\Lambda'}\right) \frac{Q}{\Lambda'} + \frac{Q'}{\Lambda'} - \frac{Q^2}{\Lambda'^2}$$

s'annule en λ_k.

Démonstration. La singularité $x = \lambda_k$ est régulière d'exposants 0 et 2. Elle est donc non logarithmique si et seulement s'il existe une solution holomorphe et non nulle en $x = \lambda_k$. Soit une fonction y admettant un développement en série entière au voisinage de $x = \lambda_k$ de la forme :

$$y = 1 + \sum_{m \geq 1} y_m (x - \lambda_k)^m.$$

On écrit le développement des fonctions $p(x)$ et $q(x)$ en $x = \lambda_k$

$$p(x) = -\frac{1}{x - \lambda_k} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,k}(x - \lambda_k)^m$$
$$q(x) = \frac{b_{-1,k}}{x - \lambda_k} + \sum_{m=0}^{\infty} b_{m,k}(x - \lambda_k)^m.$$

Si y est solution de l'équation (F), alors, par identification des coefficients des termes de même degré, on obtient une relation de récurrence

$$\begin{cases} y_1 = b_{-1,k} \\ \forall m \geq 2 \quad m(m-2)y_m = \mathcal{R}_{k,m}(y_1, \ldots, y_{m-1}), \end{cases}$$

et nécessairement, $\mathcal{R}_{k,2}(y_1) = 0$. Réciproquement, si $\mathcal{R}_{k,2}(y_1) = 0$, alors on peut construire une fonction y qui est solution de l'équation (F). La singularité $x = \lambda_k$ est donc non logarithmique si et seulement si $\mathcal{R}_{k,2}(y_1) = 0$. Or un calcul direct donne

$$\mathcal{R}_{k,2}(y_1) = -\left(b_{-1,k}^2 + a_{0,k}b_{-1,k} + b_{0,k}\right).$$

En écrivant le développement limité de $\Lambda(x)^{-1}$ en $x = \lambda_k$:

$$\frac{1}{\Lambda(x)} = \frac{1}{\Lambda'(\lambda_k)(x - \lambda_k)} - \frac{\Lambda''(\lambda_k)}{2\Lambda'(\lambda_k)^2} + \mathcal{O}(x - \lambda_k),$$

on obtient

$$a_{0,k} = \left(\frac{T'}{T} - \frac{\Lambda''}{2\Lambda'}\right)(\lambda_k),$$
$$b_{-1,k} = -\left(\frac{Q}{\Lambda'}\right)(\lambda_k),$$
$$b_{0,k} = \left(\tilde{q} - \frac{Q'}{\Lambda'} + \frac{Q\Lambda''}{2\Lambda'^2}\right)(\lambda_k).$$

Ainsi, on trouve que pour tout $k = 1, \ldots, n$

$$\mathcal{R}_{k,2}(y_1) = \Psi(\lambda_k),$$

et donc $x = \lambda_k$ est une singularité non logarithmique si et seulement si $\Psi(\lambda_k) = 0$. □

Démonstration de la proposition 3.8. On cherche une matrice à pôles simples

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i}{x - t_i},$$

telle que la matrice

$$A_\infty := -\sum_{i=1}^{n+2} A_i$$

soit diagonale et telle que les fractions $p(x)$ et $q(x)$ soient données par (3.7) et (3.8). On sait déjà que nécessairement

$$A_{12}(x) = X\frac{\Lambda(x)}{T(x)},$$

et le coefficient $A_{11}(x)$ doit s'écrire

$$A_{11}(x) = -\frac{\omega(x)}{T(x)}$$

avec $\omega(x)$ un polynôme de degré $n+1$ exactement. Comme les valeurs propres des matrices A_i doivent être $\theta_i/2$ et $-\theta_i/2$, la matrice $A(x)$ est à trace nulle. On en déduit que

$$A_{22}(x) = \frac{\omega(x)}{T(x)},$$

et la formule (3.7) est vérifiée. Il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient $A_{21}(x)$ pour que (3.8) soit aussi satisfaite. On trouve

$$A_{21}(x) = \frac{1}{X}\frac{\Phi(x)}{\Lambda(x)}$$

avec

$$\Phi = -T\tilde{q} + Q\frac{T}{\Lambda} - \omega\frac{\Lambda'}{\Lambda} + \omega' - \frac{\omega^2}{T}. \tag{3.10}$$

On a donc exprimé la matrice $A(x)$ en fonction des données de l'équation (F) (c'est-à-dire de la fraction rationnelle $\tilde{q}$ et des polynômes Q, Λ et T), du coefficient X et d'un polynôme quelconque $\omega(x)$ de degré $n+1$, de manière à ce que $A(x)$ définissent par les formules (3.7) et (3.8) les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ de (F). Cependant, tous les choix possibles pour le polynôme $\omega(x)$ ne définissent pas une fonction $A(x)$ à pôles simples en les t_i uniquement ($A_{21}(x)$ peut aussi avoir des pôles doubles en les λ_k et l'infini peut être une singularité non régulière). Pour que ce soit le cas, il faut et il suffit que

(i) $\Phi(x)$ soit holomorphe en $x = \lambda_k$ $(k = 1, \dots, n)$;

(ii) $\Phi(x)$ s'annule en $x = \lambda_k$ $(k = 1, \dots, n)$;

(iii) $\Phi(x)/\Lambda(x)$ soit nul en l'infini ;

(iv) et même, pour que le système (A) soit normalisé en l'infini, que $\Phi(x)/\Lambda(x) = \mathcal{O}\left(x^{-2}\right)$ en l'infini.

On va voir que ces conditions sont vérifiées pour exactement deux polynômes $\omega(x)$.

Considérons la condition (i). On veut que la fraction rationnelle

$$\frac{QT - \omega\Lambda'}{\Lambda}$$

n'ait pas de pôle en $x = \lambda_k$. On veut donc que pour tout $k = 1, \dots, n$, vu que $\Lambda'(\lambda_k) \neq 0$,

$$\omega(\lambda_k) = \frac{Q(\lambda_k)T(\lambda_k)}{\Lambda'(\lambda_k)}.$$

Comme le polynôme $\omega(x)$ est de degré $n+1$, ces n interpolations ne le détermine pas de manière unique. Faisons la division euclidienne de $\omega(x)$ par $\Lambda(x)$: il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{C}$ et un polynôme $\omega_0(x)$ de degré au plus $n-1$ tels que

$$\omega(x) = (ax+b)\Lambda(x) + \omega_0(x).$$

Les deux polynômes $\omega(x)$ et $\omega_0(x)$ prennent donc les mêmes valeurs en les λ_k, et ces valeurs déterminent entièrement le polynôme $\omega_0(x)$. La fonction $\Phi(x)$ ne dépend donc plus que des deux constantes a et b.

La condition (ii) est vérifiée quel que soit le choix de ces constantes, car elle est équivalente à ce que les singularités $x = \lambda_k$ de l'équation (F) ne soient pas logarithmiques. Pour montrer cela, on va exprimer Φ en fonction de la fonction Ψ du lemme précédent. On introduit

$$\sigma := \frac{QT - \omega\Lambda'}{\Lambda},$$

qui, par la condition (i), est un polynôme. Alors

$$\begin{aligned}\Phi &= -T\tilde{q} + \sigma + \omega' - \frac{\omega^2}{T}\\ &= -T\Psi - \left(\frac{T'}{T} - \frac{\Lambda''}{\Lambda'}\right)\frac{TQ}{\Lambda'} - \frac{TQ'}{\Lambda'} + \frac{TQ^2}{\Lambda'^2} + \sigma + \omega' - \frac{\omega^2}{T}.\end{aligned}$$

Comme

$$\sigma' = \frac{Q'T + QT' - \omega'\Lambda' - \omega\Lambda'^2 - \sigma\Lambda'}{\Lambda},$$

on obtient

$$\Phi = T\Psi + \frac{\Lambda}{\Lambda'}\left[\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} + \frac{Q}{\Lambda'} + \frac{\omega}{T}\right)\sigma - \sigma'\right].$$

Pour tout $k = 1, \ldots, n$, comme $\Psi(\lambda_k) = 0$, on a bien $\Phi(\lambda_k) = 0$. On a donc montré que la fonction $A(x)$, qui ne dépend plus que des constantes a et b, n'a pas d'autres pôles dans $\mathbb{C}$ que les t_i, et il est clair que ces pôles sont simples. Il reste donc à chercher à quelle condition l'infini est aussi une singularité régulière du système.

Pour la condition (iii), cherchons la partie principale du développement asymptotique de $\Phi(x)$ en l'infini. Sachant qu'au voisinage de l'infini, on a les équivalents :

$$\frac{\Lambda'(x)}{\Lambda(x)} \sim \frac{n}{x}, \qquad \omega(x) \sim ax^{n+1},$$

ainsi que

$$q(x) \sim \frac{1 - \theta_\infty^2}{4x^2},$$

par la définition (3.10) de la fonction $\Phi(x)$, on trouve

$$\Phi(x) = -\left(a - \tfrac{1-\theta_\infty}{2}\right)\left(a - \tfrac{1+\theta_\infty}{2}\right)x^n + x^n\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Comme le polynôme $\Lambda(x)$ est unitaire de degré n, on obtient

$$\frac{\Phi(x)}{\Lambda(x)} = -\left(a - \tfrac{1-\theta_\infty}{2}\right)\left(a - \tfrac{1+\theta_\infty}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Pour que l'infini soit une singularité régulière du système , il faut donc que la constante a soit égale à l'un des exposants caractéristiques de l'équation (F) en l'infini : $a^- := \frac{1-\theta_\infty}{2}$ ou $a^+ := \frac{1+\theta_\infty}{2}$. On remarque que l'on a en l'infini

$$A_{11}(x) \sim \frac{a^\pm}{x} \qquad \text{et} \qquad A_{22}(x) \sim -\frac{a^\pm}{x},$$

et que $-a^\pm = a^\mp - 1$.

Montrons que la condition (iv) n'est vérifiée que pour une seule valeur de la constante b. Fixons a en l'une des deux valeurs autorisées. Le polynôme $\omega(x)$ ne dépend plus que de b. Considérons le polynôme $\omega^*(x)$ correspondant à $b = 0$ (*i.e.* $\omega^*(x) = \omega(x) - b\Lambda(x)$), et notons $A_{21}^*(x)$ le coefficient qu'il définit, tandis que $A_{21}(x)$ désigne celui défini par $\omega(x)$. Alors un calcul direct nous donne que

$$A_{21}(x) = A_{21}^*(x) - \frac{2b\omega^*(x)}{XT(x)} - \frac{b^2\Lambda(x)}{XT(x)}.$$

Le troisième terme du membre de droite de l'égalité est un $\mathcal{O}\left(x^{-2}\right)$. Si $b \neq 0$, le terme dominant en l'infini du second terme est $-2abX^{-1}x^{-1}$, car la constante a n'est pas nulle ($\theta_\infty \notin \mathbb{Z}$). On voit donc qu'il existe un unique b, que l'on note b^+ ou b^- suivant la valeur de a et qui peut être nul, tel que

$$A_{21}(x) = \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{x^2}\right).$$

On note

$$\begin{aligned}\omega^+(x) &= (a^+x + b^+)\Lambda(x) + \omega_0(x)\\ \omega^-(x) &= (a^-x + b^-)\Lambda(x) + \omega_0(x)\end{aligned}$$

et $\Phi^+(x)$ et $\Phi^-(x)$ les fractions rationnelles définies par (3.10) où le polynôme $\omega(x)$ vaut respectivement $\omega^+(x)$ et $\omega^-(x)$. On a donc obtenu que toutes les matrices $A(x)$ qui conviennent sont de la forme

$$A(x) = \frac{1}{T(x)}\begin{pmatrix} -\omega^\pm(x) & X\Lambda(x) \\ \dfrac{T(x)\Phi^\pm(x)}{X\Lambda(x)} & \omega^\pm(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & X\end{pmatrix} A_0^\pm(x) \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{X}\end{pmatrix}$$

où on a posé

$$A_0^\pm(x) = \frac{1}{T(x)}\begin{pmatrix} -\omega^\pm(x) & \Lambda(x) \\ \dfrac{T(x)\Phi^\pm(x)}{\Lambda(x)} & \omega^\pm(x)\end{pmatrix}.$$

□

Proposition 3.10. *Pour tout $X \in \mathbb{C}^*$, on peut transformer le système*

$$DY = A_X^+(x)Y$$

en le système

$$DZ = A_X^-(x)Z$$

par la transformation de jauge

$$Z = S(x)Y \qquad \textit{avec} \quad S(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{X}\left[(a^- - a^+)x + (b^- - b^+)\right] & 1\end{pmatrix}$$

où les nombres complexes a^+ et a^- sont les exposants de l'équation (F) en l'infini et b^+ et b^- sont définis à la démonstration de la proposition 3.8.

Démonstration. Pour toute matrice fondamentale de solutions $\mathbf{Y}(x)$ du système $DY = A_X^+(x)Y$, la matrice $\mathbf{Z}(x) := S(x)\mathbf{Y}(x)$ est solution du système $DZ = B(x)Z$, où

$$B(x) = DS(x) \cdot S(x)^{-1} + S(x)A_X^+(x)S(x)^{-1}.$$

Un calcul direct donne $B(x) = A_X^-(x)$. □

La proposition 3.8 permet d'étudier les liens entre le système de Garnier et le système de Schlesinger. Les relations entre ces deux systèmes sont étudiés en détail dans [IKSY91]. Cependant, une utilisation plus systématique que ne le fait Garnier des systèmes fuchsiens nous permettra de ne pas avoir recours aux résultats qu'ils obtiennent.

3.3 Les systèmes fuchsiens associés à un jeu de directions orientées

Plutôt que d'associer à chaque équation de la famille $(E_D^*(t), t \in \pi^n)$ les systèmes fuchsiens qui lui correspondent par la proposition 3.8, on va directement définir l'ensemble des systèmes fuchsiens associé à un jeu de directions orientées, en traduisant les conditions (i), (ii) et (iii) pour les systèmes, puis en déterminant l'ensemble des systèmes satisfaisant ces conditions. Ceci nous permettra d'obtenir directement une famille isomonodromique de systèmes décrite par le système de Schlesinger, sans avoir à étudier la transformation du système de Garnier en le système de Schlesinger.

L'introduction de l'ensemble des systèmes fuchsiens associés à un jeu de directions orientées apporte un point de vue nouveau à l'approche de Garnier. Garnier lui-même ne voit les systèmes fuchsiens que comme un outil ponctuel permettant de lever certaines difficultés rencontrées avec les équations fuchsiennes, principalement pour étudier la régularité de la fonction « rapports des longueurs » à l'intérieur et au bord du simplexe π^n. À chaque fois, Garnier fait une sorte d'aller-retour entre équations et systèmes. Je choisis au contraire d'adapter les résultats du chapitre 2 de manière à obtenir directement une correspondance entre les disques minimaux à bord polygonal et les systèmes fuchsiens, puis de travailler exclusivement avec ces derniers. Cette utilisation systématique des systèmes fuchsiens présente deux grands avantages : d'une part, comme on l'a dit, elle permet d'éviter d'étudier la transformation du système de Garnier en le système de Schlesinger. D'autre part, comme les systèmes fuchsiens ont une structure plus canonique que les équations fuchsiennes, cette approche permet de multiples simplifications par rapport à la démonstration de Garnier : notamment lors de l'étude du comportement des solutions fondamentales à l'intérieur du simplexe π^n, et dans la détermination de la solution fondamentale exprimant les rapports de longueurs.

Un autre point que l'on va développer dans cette section et qui est complètement absent de l'article de Garnier est l'étude de la condition de réalité (iii), et de son analogue pour les systèmes, la condition (c). Il semble que Garnier considère que la famille isomonodromique $(E_D^*(t), t \in \pi^n)$ qu'il a construite vérifie automatiquement cette condition de réalité, et il lui donne tout de suite un sens géométrique en terme de surfaces minimales – bien qu'il n'ait pas non plus établi de résultat analogue à la proposition 1.12.

L'ensemble de cette section est totalement nouveau par rapport à l'article de Garnier.

3.3.1 Les conditions nécessaires et suffisantes

On détermine grâce à la proposition 3.8 l'ensemble des systèmes fuchsiens qui admettent une matrice fondamentale de solutions dont la première ligne constitue les données de Weierstrass d'un disque minimal à bord polygonal.

Traduisons tout d'abord la condition de réalité (iii) pour les systèmes. Considérons un système fuchsien (A) normalisé en l'infini dont les singularités t_i sont réelles. Il définit une équation fuchsienne réelle si et seulement s'il définit la même équation que son système

conjugué :

$$DY = \tau(A)(x)Y, \qquad \tau(A)(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\overline{A}_i}{x - t_i}, \tag{τA}$$

où l'application τ est définie par (2.3). Le système conjugué est également fuchsien et normalisé en l'infini. Son résidu en l'infini est $\overline{A}_\infty$. S'il définit la même équation que le système (A), alors les matrices A_i et $\overline{A}_i$, $i = 1, \ldots, n+2$, ont les mêmes valeurs propres (puisque elles sont les exposants de l'équation), qui sont donc réelles ou conjuguées entre elles. Par contre, les systèmes (A) et (τA) n'ont pas nécessairement la même normalisation en l'infini, si on suppose seulement que les valeurs propres du résidu A_∞ sont réelles ou conjuguées entre elles. Si on suppose que les valeurs propres de A_∞ sont réelles, alors les systèmes (A) et (τA) ont la même normalisation en l'infini. Alors, par la proposition 3.8, pour qu'ils définissent la même équation, il faut et il suffit qu'il existe un nombre complexe non nul X tel que pour tout $i = 1, \ldots, n+2$, on ait

$$\overline{A}_i = \begin{pmatrix} A_{11}^i & XA_{12}^i \\ \frac{1}{X}A_{21}^i & A_{22}^i \end{pmatrix}.$$

Pour la condition (i), il n'est pas nécessaire de normaliser les systèmes fuchsiens comme on l'a fait pour les équations à la section 3.1 ; les systèmes fuchsiens ont une structure plus canonique que les équations. On a vu comment associer un système fuchsien à une équation (E^*) générique. Les équations non génériques sont simplement obtenues, comme on l'a vu à la remarque 3.6, en autorisant les zéros λ_k du coefficient $A_{12}(x)$ à prendre des valeurs quelconques. Il n'est donc pas nécessaire de choisir le signe des exposants θ_i.

Ceci nous permet de récrire les conditions (i), (ii) et (iii) pour les systèmes différentiels. Soit un jeu de directions orientées $D = (D_1, \ldots, D_{n+3}) \in \mathcal{D}^n$, vu également comme un jeu de relevés dans $SU(2)$ de demi-tours vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Soit un système différentiel linéaire (A^*) de taille 2×2 du premier ordre sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$. Il existe une matrice fondamentale de solutions du système (A^*) dont la première ligne constitue les données de Weierstrass d'une surface minimale à bord polygonal de directions orientées D si et seulement si le système (A^*) vérifie les trois conditions suivantes.

(a) Le système (A^*) est fuchsien, ses singularités sont $t_1, \ldots, t_n$, $t_{n+1} = 0$, $t_{n+2} = 1$, $t_{n+3} = \infty$. Il s'écrit donc :

$$DY = A(x)Y, \qquad A(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i}{x - t_i}, \tag{A^*}$$

et il est non résonnant et normalisé en l'infini. Pour tout $i = 1, \ldots, n+2$, les valeurs propres de la matrice A_i sont $\frac{\theta_i}{2}$ et $-\frac{\theta_i}{2}$ avec

$$0 < |\theta_i| < 1.$$

(b) Un système M_i $(i = 1, \ldots, n+3)$ de générateurs de la monodromie du système (A^*) le long des lacets γ_i définis à la figure 2.1 s'écrit

$$M_i = D_i D_{i-1}^{-1}, \quad \text{où } D_i \in SU(2),\ {D_i}^2 = -I_2.$$

(c) Les singularités t_i sont réelles, $t_1 < \cdots < t_n < 0$, et il existe un nombre réel η tel que pour tout $i = 1, \ldots, n+2$ la matrice A_i s'écrive

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i e^{i\eta} \\ c_i e^{-i\eta} & d_i \end{pmatrix} \qquad \text{où } a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R} \text{ et } b_i, c_i \geq 0 \tag{3.11}$$

et $d_i = -a_i$.

Comme il n'est pas nécessaire de choisir le signe des exposants θ_i, les valeurs propres des matrices A_i sont déterminées par les directions orientées D_i.

Définition 3.11. Pour tout jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$, on définit l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ des systèmes fuchsiens satisfaisant les conditions (a), (b) et (c) ci-dessus.

Contrairement à l'ensemble d'équations $\underline{\mathcal{E}}_D^n$, l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ n'est pas en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence par le groupe G de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$: comme on l'a vu à la proposition 3.8, deux systèmes fuchsiens différents peuvent définir la même immersion conforme minimale. Par simplicité, on va donc se limiter à une partie de cet ensemble. La proposition 3.8 nous indique comment choisir cette partie de manière à ce qu'elle soit en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$. Il faut choisir définitivement une des deux normalisations possibles en l'infini et il faut imposer une valeur au coefficient X.

On commence par montrer que la condition de réalité (c) est automatiquement vérifiée par les systèmes fuchsiens vérifiant la condition (b).

3.3.2 Systèmes fuchsiens « réels »

Étant donné un système fuchsien (A), on va montrer que la condition de réalité (c) est équivalente à une condition, que l'on appellera *condition* ***C1***, portant uniquement sur la monodromie du système, et que cette condition est vérifiée en particulier par une monodromie satisfaisant la condition (b). On en déduira de même, à la section suivante, que la condition (iii) pour les équations est équivalente à la même condition **C1**. Pour cela, je vais d'abord rappeler un résultat d'unicité classique pour les systèmes fuchsiens non résonnants.

Lemme 3.12. *Soient deux systèmes fuchsiens non résonnants*

$$DY = A(x)Y \tag{A}$$
$$DZ = B(x)Z \tag{B}$$

Les systèmes (A) et (B) ont les mêmes singularités, les mêmes exposants et la même monodromie si et seulement s'il existe une matrice inversible C telle que

$$B(x) = CA(x)C^{-1}.$$

Si, de plus, les systèmes (A) et (B) sont normalisés en l'infini, alors il existe un nombre complexe non nul X tel que la matrice C soit égale à

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ X & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. La condition suffisante est évidente. Supposons que les systèmes (A) et (B) ont les mêmes singularités $t_1, \ldots, t_n$, $t_{n+1} = 0$, $t_{n+2} = 1$, $t_{n+3} = \infty$, les mêmes exposants et la même monodromie. Alors ils s'écrivent

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i}{x - t_i}, \qquad B(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{B_i}{x - t_i},$$

et les matrices A_i et B_i ont les mêmes valeurs propres. On note comme précédemment

$$L_i = \begin{pmatrix} \theta_i^+ & 0 \\ 0 & \theta_i^- \end{pmatrix}$$

la diagonalisée des matrices A_i et B_i. Il existe deux matrices fondamentales $\mathbf{Y}(x)$ et $\mathbf{Z}(x)$ de solutions, respectivement, du système (A) et du système (B), qui ont les mêmes matrices de monodromie. On pose alors pour tout x dans le revêtement universel $\widetilde{X}(t)$ de l'ensemble $X(t) = \mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t)$

$$C(x) := \mathbf{Z}(x) \cdot \mathbf{Y}(x)^{-1}.$$

La matrice $C(x)$ est donc méromorphe dans $\widetilde{X}(t)$; on va montrer qu'elle est holomorphe dans $\mathbb{P}^1$, c'est-à-dire constante. Remarquons tout d'abord que $C(x)$ est uniforme dans $X(t)$: en effet, pour tout $\gamma \in \pi_1(X(t), x_0)$, vu que $M_\gamma(\mathbf{Y}) = M_\gamma(\mathbf{Z})$, on a

$$\gamma * C(x) = (\mathbf{Z}(x) \cdot M_\gamma(\mathbf{Z})) \cdot (\mathbf{Y}(x) \cdot M_\gamma(\mathbf{Y}))^{-1} = C(x).$$

De plus, la matrice $C(x)$ n'est singulière qu'aux points où $\det \mathbf{Y}(x)$ s'annule. Ceci est impossible, car la fonction $\det \mathbf{Y}(x)$ vérifie

$$\begin{aligned} D\left(\det \mathbf{Y}(x)\right) &= \det \mathbf{Y}(x) \operatorname{Tr}\left(D\mathbf{Y}(x) \cdot \mathbf{Y}(x)^{-1}\right) \\ &= \det \mathbf{Y}(x) \operatorname{Tr} A(x) \\ &= \det \mathbf{Y}(x) \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\operatorname{Tr} L_i}{x - t_i}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\det \mathbf{Y}(x) = K \prod_{i=1}^{n+2} (x - t_i)^{\operatorname{Tr} L_i}$$

($K \in \mathbb{C}^*$). La matrice $C(x)$ est donc holomorphe dans $X(t)$.

Étudions à présent le comportement de $C(x)$ au voisinage d'une singularité $x = t_i$ ($i = 1, \ldots, n+2$). Soit M_i la matrice de monodromie des matrices fondamentales $\mathbf{Y}(x)$ et $\mathbf{Z}(x)$ autour de la singularité $x = t_i$:

$$M_i = C_i \begin{pmatrix} e^{2i\pi\theta_i^+} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\theta_i^-} \end{pmatrix} C_i^{-1}$$

où $C_i \in GL(2, \mathbb{C})$. Alors les matrices fondamentales de solutions $\mathbf{Y}(x) \cdot C_i$ et $\mathbf{Z}(x) \cdot C_i$ sont canoniques au point $x = t_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(x) \cdot C_i &= R_i(x)(x - t_i)^{L_i} \\ \mathbf{Z}(x) \cdot C_i &= S_i(x)(x - t_i)^{L_i} \end{aligned}$$

où les matrices $R_i(x)$ et $S_i(x)$ sont holomorphes et inversibles au point $x = t_i$. On en déduit

$$C(x) = S_i(x) R_i(x)^{-1},$$

et $C(x)$ est holomorphe en $x = t_i$. On montrerait de même que la matrice $C(x)$ est holomorphe en $x = \infty$. Elle est donc holomorphe sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$: elle est indépendante de x.

Si on suppose de plus que les matrices A_∞ et B_∞ sont diagonales, alors on note

$$A_\infty = \begin{pmatrix} \theta_\infty^+ & 0 \\ 0 & \theta_\infty^- \end{pmatrix}$$

et donc

$$B_\infty = A_\infty \text{ ou } \begin{pmatrix} \theta_\infty^- & 0 \\ 0 & \theta_\infty^+ \end{pmatrix},$$

i.e. $B_\infty = A_\infty$ ou $B_\infty = JA_\infty J^{-1}$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme par ailleurs $B_\infty = CA_\infty C^{-1}$ et comme $\theta_\infty^+ \neq \theta_\infty^-$, on en déduit dans le premier cas que la matrice C est diagonale, et dans le second, qu'elle est anti-diagonale. □

Montrons à présent le résultat le plus important de cette section. On vient de voir qu'un système fuchsien (A) non résonnant et normalisé en l'infini est entièrement déterminé par ses singularités $t_1, \ldots, t_n$, par les valeurs propres des matrices A_i, par sa monodromie et par un paramètre supplémentaire $X \in \mathbb{C}^*$. On va déterminer à présent à quelle condition sur ces données le système (A) vérifie la condition de réalité (c). Pour les singularités et les valeurs propres, la réponse est immédiate : les singularités doivent être réelles ou conjuguées deux à deux ; les valeurs propres en une singularité réelle doivent être réelles ou conjuguées entre elles, et les valeurs propres en deux singularités conjuguées doivent être conjuguées. On ne s'intéresse ici qu'au cas où les singularités $t_1, \ldots, t_n$ sont réelles (on obtiendrait le même résultat dans le cas où elles sont seulement réelles ou conjuguées deux à deux, mais la démonstration est un peu plus technique). On suppose de plus que $t = (t_1, \ldots, t_n)$ est dans le simplexe π^n défini par (3.3), mais on obtient exactement le même résultat pour les autres composantes connexes de $\mathcal{B}^n \cap \mathbb{R}^n$ en permutant les indices des t_i.

Proposition 3.13. *Soit un système fuchsien (A) non résonnant et normalisé en l'infini. On suppose que le n-uplet de singularités $(t_1, \ldots, t_n)$ est dans le simplexe π^n, que les valeurs propres de la matrice A_i ($i = 1, \ldots, n+2$) sont réelles ou conjuguées entre elles et que celles de la matrices A_∞ sont réelles. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- *l'équation fuchsienne associée au sens du lemme 3.4 au système (A) est réelle ;*
- *les matrices A_i sont de la forme* (3.11) *;*
- *pour tout système de générateurs $(M_1, \ldots, M_{n+3})$ de la monodromie le long des lacets $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+3}$, il existe une matrice $C \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que pour tout $j = 1, \ldots, n+3$ on ait*

$$C^{-1}\overline{M_j}C = (M_j \ldots M_1)^{-1} M_j^{-1} (M_j \ldots M_1). \tag{3.12}$$

On appelle la dernière de ces assertions la condition **C1**.

On remarque qu'il existe un système de générateurs $(M_1, \ldots, M_{n+3})$ pour lequel la matrice C est la matrice identité I_2.

Démonstration. On considère le système conjugué (τA) au système (A). On a déjà vu que les deux premières assertions sont équivalentes. Le système (A) définit une équation fuchsienne réelle s'il définit la même équation que le système conjugué (τA). On a vu

également que ceci équivaut à ce qu'il existe un nombre complexe non nul X tel que pour tout $i = 1, \dots, n+2$, on ait

$$\overline{A}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} A_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}^{-1}.$$

Comme les systèmes (A) et (τA) sont normalisés en l'infini et ont les mêmes singularités et les mêmes exposants, on obtient donc grâce au lemme 3.12 qu'ils définissent la même équation si et seulement s'ils ont la même monodromie.

Soit $\mathbf{Y}(x)$ une matrice fondamentale de solutions du système (A) définie et holomorphe dans le demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+$. On note ses matrices de monodromie M_i :

$$M_{\gamma_i}(\mathbf{Y}) = M_i.$$

On note $\mathbf{Y}_i(x)$ le prolongement à $\mathbb{C}_-$ de la matrice fondamentale $\mathbf{Y}(x)$ à travers l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ (c'est-à-dire le long de tout chemin joignant un point de $\mathbb{C}_+$ à un point de $\mathbb{C}_-$ et croisant l'axe réel une seule fois entre t_i et t_{i+1}) ; la matrice fondamentale $\mathbf{Y}_i(x)$ est définie et holomorphe sur l'ouvert simplement connexe

$$U_i := \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \cup]t_i, t_{i+1}[.$$

La matrice $\tau(\mathbf{Y}_i)(x)$, elle aussi holomorphe et inversible sur U_i, est une matrice fondamentale de solutions du système (τA). Pour que les systèmes (A) et (τA) aient la même monodromie, il faut et il suffit que pour une valeur de i, les matrices de monodromie des solutions fondamentales $\mathbf{Y}_i(x)$ et $\tau(\mathbf{Y}_i)(x)$ soient conjuguées, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible C telle que pour tout $j = 1, \dots, n+3$ on ait

$$M_{\gamma_j}\left(\tau(\mathbf{Y}_i)\right) = C M_j C^{-1}.$$

On choisit le prolongement $\mathbf{Y}_{n+3}(x)$ (*i.e.* $i = n+3$).

Il faut exprimer en fonction des matrices M_j les matrices :

$$M_{\gamma_j}(\tau(\mathbf{Y}_{n+3})) = \overline{M_{\overline{\gamma}_j}(\mathbf{Y}_{n+3})}.$$

Le lacet $\overline{\gamma}_j$ a pour point de base $\bar{x}_0$ et tourne en sens inverse du sens trigonométrique autour de t_j. Pour calculer $M_{\overline{\gamma}_j}(\mathbf{Y}_{n+3})$, la difficulté vient de ce qu'on sait comment est transformée, en général, la matrice fondamentale $\mathbf{Y}_i(x)$ le long des lacets $\overline{\gamma}_i$ et $\overline{\gamma}_{i+1}$ (comme on le voit sur la figure 3.2), mais pas le long d'un lacet $\overline{\gamma}_j$ quelconque. On va donc procéder par itération. On décompose $\overline{\gamma}_j$ en le produit de deux lacets. Soient $\alpha, \beta \in \pi_1(X(t), \bar{x}_0)$ les deux classes de lacets orientés négativement et qui encerclent respectivement les singularités $t_1, \dots, t_j$ et $t_1, \dots, t_{j-1}$ (là encore, les indices s'entendent modulo $n+3$: si $j = 1$, le lacet β est homotope à un point). Les lacets α et β sont représentés à la figure 3.1. Alors

$$\overline{\gamma}_j = \alpha\beta^{-1},$$

et donc

$$M_{\overline{\gamma}_j}(\mathbf{Y}_{n+3}) = M_\alpha(\mathbf{Y}_{n+3}) M_\beta(\mathbf{Y}_{n+3})^{-1}.$$

Montrons que

$$M_\alpha(\mathbf{Y}_{n+3}) = M_1^{-1} \dots M_j^{-1}.$$

On remarque que, vu la définition des matrices fondamentales $\mathbf{Y}_i(x)$, on a pour tout $i = 1, \dots, n+3$

$$\overline{\gamma}_i * \mathbf{Y}_{i-1}(x) = \mathbf{Y}_i(x).$$

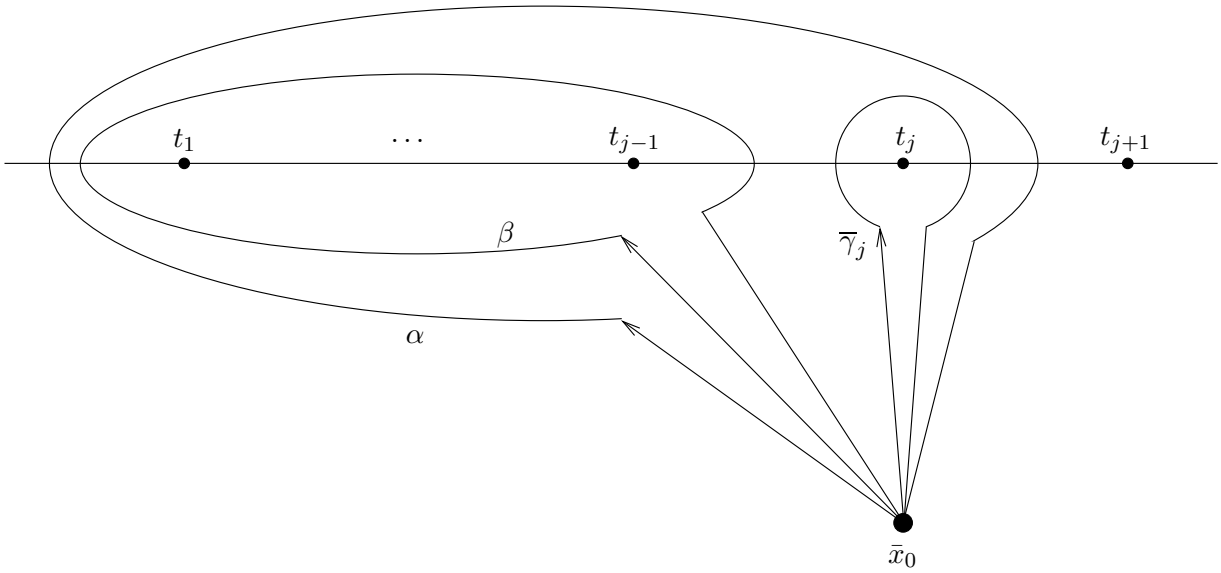

Figure 3.1 – Les lacets $\overline{\gamma}_j$, α et β

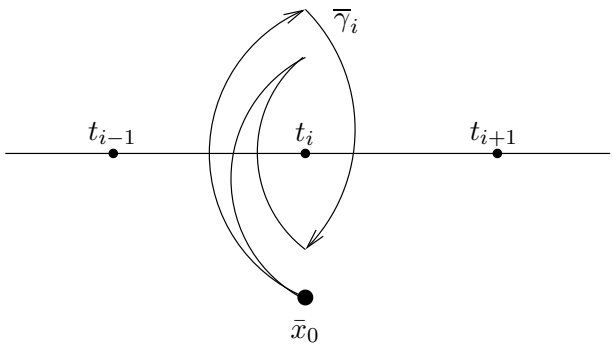

Figure 3.2 – On décompose le lacet $\overline{\gamma}_j$

Donc, comme $\alpha = \overline{\gamma}_j \cdots \overline{\gamma}_1$, on obtient par itération

$$\alpha * \mathbf{Y}_{n+3}(x) = \mathbf{Y}_j(x).$$

Par ailleurs, comme on a aussi $\overline{\gamma}_i * \mathbf{Y}_{i-1}(x) = \mathbf{Y}_{i-1}(x)M_i^{-1}$ (voir la décomposition du lacet $\overline{\gamma}_j$ à figure 3.2), alors pour tout $i = 1, \ldots, n+3$

$$\mathbf{Y}_i(x) = \mathbf{Y}_{i-1}(x)M_i^{-1},$$

donc $\mathbf{Y}_j(x) = \mathbf{Y}_{j-1}(x)M_j^{-1} = \cdots = \mathbf{Y}_{n+3}(x)(M_1^{-1} \ldots M_j^{-1})$, ce qui donne la formule annoncée pour $M_\alpha(\mathbf{Y}_{n+3})$. De même, on a

$$M_\beta(\mathbf{Y}_{n+3}) = M_1^{-1} \ldots M_{j-1}^{-1}.$$

Finalement, on obtient

$$M_{\gamma_j}(\tau(\mathbf{Y}_{n+3})) = \overline{(M_j \ldots M_1)^{-1} M_j^{-1} (M_j \ldots M_1)},$$

ce qui donne bien l'équivalence annoncée. $\square$

3.3.3 Cas où la monodromie est unitarisable

Dans le cas où il existe un système de générateurs $(M_1, \dots, M_{n+3})$ de la monodromie du système (A) qui soit contenu dans le groupe des matrices unitaires $U(2)$, ou dans le groupe $U(1,1)$, on peut simplifier l'écriture de la condition **C1**.

Proposition 3.14. *Soit un système fuchsien (A) non résonnant et normalisé en l'infini. On suppose que le n-uplet de singularités $(t_1, \dots, t_n)$ est dans le simplexe π^n, que les valeurs propres de la matrice A_i ($i = 1, \dots, n+2$) sont réelles ou conjuguées entre elles et que celles de la matrices A_∞ sont réelles.*

Si un système de générateurs $(M_1, \dots, M_{n+3})$ de la monodromie du système (A) est contenu dans $U(2)$ ou dans $U(1,1)$, alors le système (A) vérifie l'une des trois assertions équivalentes de la propostion 3.13 si et seulement s'il existe $n+3$ matrices inversibles $D_1, \dots, D_{n+3}$ telles que

$$\begin{cases} M_j = D_j D_{j-1}^{-1} & (j = 1, \dots, n+3) \\ \frac{1}{\delta_1} {D_1}^2 = \cdots = \frac{1}{\delta_{n+3}} {D_{n+3}}^2 \end{cases}$$

où on a noté $\det D_j = \delta_j$ *pour tout* $j = 1, \dots, n+3$. *On appelle cette condition la* condition **C2**.

Rappelons que le groupe $U(1,1)$ est le groupe des matrices $M \in M(2, \mathbb{C})$ telles que

$$M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{M}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Pour toute matrice $M \in U(2)$, on a

$$J^{-1} M J = \det(M) \overline{M}$$

(ce qui redonne la relation (1.4) lorsque $M \in SU(2)$). Si les matrices $M_1, \dots, M_{n+3}$ sont dans le groupe unitaire $U(2)$, alors la condition **C1** est équivalente à l'existence d'une matrice inversible C telle que pour tout $j = 1, \dots, n+3$, on ait

$$(JC)^{-1} M_j (JC) = \det(M_j)(M_j \dots M_1)^{-1} M_j^{-1} (M_j \dots M_1). \tag{3.13}$$

(*condition **C1'***). On a la même expression lorsque les matrices $M_1, \dots, M_{n+3}$ sont dans le groupe $U(1,1)$, en remplaçant la matrice J par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la démonstration, on se limitera donc au cas où le système de générateurs est dans le groupe $U(2)$.

Montrons que les deux conditions **C1'** et **C2** sont équivalentes. Pour tout choix de la matrice inversible D_{n+3}, par la relation $M_{n+3} \cdots M_1 = I_2$, il existe des matrices inversibles $D_1, \dots, D_{n+2}$, déterminées de manière uniques, telles que pour tout $j = 1, \dots, n+3$, on ait

$$M_j = D_j D_{j-1}^{-1}$$

(où les indices sont considérés modulo $n+3$). Alors on a

$$\det(M_j) = \frac{\delta_j}{\delta_{j-1}}$$

où $\delta_j = \det D_j$. La relation $(3.13)_j$ se récrit alors de la façon suivante

$$(JC)^{-1} D_j D_{j-1}^{-1} (JC) = \frac{\delta_j}{\delta_{j-1}} D_{n+3} D_j^{-1} D_{j-1} D_{n+3}^{-1}.$$

Si les matrices D_{n+3} et C vérifient

$$D_{n+3}^{-1} = JC,$$

alors la relation $(3.13)_j$ est équivalente à

$$\frac{1}{\delta_{j-1}} {D_{j-1}}^2 = \frac{1}{\delta_j} {D_j}^2,$$

et on obtient ainsi l'équivalence annoncée. □

Soient un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$ et la monodromie ρ_D^* associée par (2.10) au jeu D

$$\rho_D^* : \pi_1 (X(t), x_0) \to GL(2, \mathbb{C}).$$

Un système fuchsien de monodromie ρ_D^* et dont les singularités et les exposants sont réels vérifie donc automatiquement la condition de réalité (c). L'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ est ainsi simplement l'ensemble des systèmes vérifiant les conditions (a) et (b) et dont les singularités sont réelles.

Décrivons à présent l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$. Ceci passe en particulier par la résolution d'un problème de Riemann–Hilbert. Comme on ne considère que des systèmes 2×2, le problème de Riemann–Hilbert admet dans ce cas toujours une solution. Comme le système de Schlesinger (1.20) est complètement intégrable, chaque système de l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ appartient nécessairement à une famille isomonodromique de systèmes fuchsiens $(A(t), t \in \mathcal{B}^n)$ décrite par le système de Schlesinger. Toutes ces familles, restreintes aux valeurs $t \in \pi^n$, constituent l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$; elles sont exactement l'ensemble des solutions du système de Schlesinger normalisées en l'infini correspondant à la monodromie ρ_D^* et aux valeurs propres $\theta_i/2$ et $-\theta_i/2$. Elles se distinguent par leurs normalisations en l'infini et par la valeur du paramètre supplémentaire X_0. Du point de vue de la résolution du problème de Plateau, toutes ces familles sont équivalentes puisqu'elles définissent toutes la même famille d'immersions conformes minimales. Chacune de ces familles est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence par le groupe G de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$.

Précisons le rôle du paramètre X_0. Soient deux solutions du système de Schlesinger $(A_1(t), \ldots, A_{n+2}(t))$ et $(B_1(t), \ldots, B_{n+2}(t))$ ayant les mêmes valeurs propres, et définissant des systèmes fuchsiens ayant la même monodromie et la même normalisation en l'infini. Si les deux fonctions

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n+2} t_i A_{12}^i(t), \qquad Y(t) = \sum_{i=1}^{n+2} t_i B_{12}^i(t)$$

coïncident en un point $t_0 \in \mathcal{B}^n$, alors, d'après le lemme 3.12, les matrices $A_i(t)$ et $B_i(t)$ coïncident également au point t_0, et sont donc égales partout. Remarquons que le coefficient $X(t)$ satisfait pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial X}{\partial t_i} = \theta_\infty A_{12}^i(t)$$

où θ_∞ est la différence des exposants de la matrice A_∞.

On peut choisir une partie de l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_D^n$ qui soit en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$. On fixe un point $t_0 \in \mathcal{B}^n$, et on choisit l'unique solution du système de Schlesinger $(A_1(t), \dots, A_{n+2}(t))$ qui vérifie les propriétés suivantes

- les valeurs propres de la matrices $A_i(t)$ sont $\theta_i/2$ et $-\theta_i/2$ $(i = 1, \dots, n+2)$;
- la monodromie du système fuchsien associé à cette solution est ρ_D^* ;
- cette solution est normalisée en l'infini par

$$A_\infty = -\sum_{i=1}^{n+2} A_i(t) = \tfrac{1-\theta_\infty}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

- le coefficient $X(t) = \sum_{i=1}^{n+2} t_i A_{12}^i(t)$ vérifie

$$X(t_0) = 1.$$

On note cette solution $(A_{D,1}(t), \dots, A_{D,n+2}(t))$, et le système $A_D(t)$ le système fuchsien associé :

$$DY = A_D(x,t)Y, \qquad A_D(x,t) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_{D,i}(t)}{x - t_i}.$$

La famille isomonodromique $(A_D(t), t \in \pi^n)$ est donc en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de disques minimaux dont le bord est un polygone de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$.

3.3.4 Singularités mobiles des solutions réelles du système de Schlesinger

Considérons maintenant une déformation isomonodromique par le système de Schlesinger d'un système fuchsien (A) vérifiant la condition de réalité (c). Par le théorème 1.32, les matrices $A_i(t)$ sont méromorphes dans le revêtement universel de l'ensemble $\mathcal{B}^n$. Pour les valeurs réelles du paramètre t de la déformation, la forme (3.11) des matrices $A_i(t)$ est conservée, puisqu'elle est imposée par la monodromie. En se restreignant aux solutions du système de Schlesinger associées au systèmes fuchsiens vérifiant la condition de réalité (c), on obtient un résultat à la fois plus fort que celui de Garnier (puisqu'on exclut l'existence de pôle en les valeurs réelles de t), mais surtout beaucoup plus simple à établir.

Proposition 3.15. *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathcal{B}^n$ contenant le simplexe π^n. Soit une solution $(A_1(t), \dots, A_{n+2}(t))$ définie dans U du système de Schlesinger* (1.20) *telle que pour tout t dans U l'on ait*

$$A_\infty = -\sum_{i=1}^{n+2} A_i(t) = \begin{pmatrix} \theta_\infty^+ & 0 \\ 0 & \theta_\infty^- \end{pmatrix}$$

où les valeurs propres θ_∞^+ et θ_∞^- sont réelles, et vérifiant une des deux conditions équivalentes suivantes

- *il existe une valeur $t_0 \in \pi^n$ telle que les matrices $A_1(t_0), \dots, A_{n+2}(t_0)$ s'écrivent sous la forme* (3.11) *;*
- *la monodromie du système fuchsien (A) associé vérifie la condition **C1**.*

Alors pour tout $t \in \pi^n$ les matrices $A_1(t), \dots, A_{n+2}(t)$ s'écrivent sous la forme (3.11)*, et elles sont holomorphes dans un voisinage de π^n contenu dans $\mathcal{B}^n$.*

Démonstration. La première partie de la proposition est évidente. On peut supposer que les matrices $A_i(t)$ sont à trace nulle. En effet, pour toutes constantes $k_1, \ldots, k_{n+2} \in \mathbb{R}$ les matrices

$$B_i(t) := A_i(t) + k_i I_2 \qquad (i = 1, \ldots, n+2)$$

constituent également une solution du système de Schlesinger, et sont encore sous la forme (3.11). Quitte à transformer ainsi les matrices $A_i(t)$, on peut donc supposer que pour les valeurs réelles de t, elles s'écrivent

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} a_i(t) & b_i(t)e^{i\eta(t)} \\ c_i(t)e^{-i\eta(t)} & -a_i(t) \end{pmatrix},$$

où la fonction $a_i(t)$ est à valeurs réelles et où les fonctions $b_i(t)$ et $c_i(t)$ sont à valeurs positives dans π^n. La matrice $A_i(t)$ est méromorphe dans le revêtement universel de l'ensemble $\mathcal{B}^n$. On note $\frac{\theta_i}{2}$ et $-\frac{\theta_i}{2}$ ses valeurs propres ; elles sont indépendantes de t et pour tout t réel, on a

$$\frac{\theta_i^2}{4} = a_i(t)^2 + b_i(t)c_i(t).$$

On en déduit que $a_i(t)$ et le produit $b_i(t)c_i(t)$ sont bornés dans π^n. Les fonctions $A_{11}^i(t) = a_i(t)$ et $A_{12}^i(t)A_{21}^i(t) = b_i(t) \cdot c_i(t)$ sont donc holomorphes en tout point de π^n.

Écrivons l'expression de la dérivée partielle du coefficient $A_{12}^i(t)$ par rapport à t_j, $j \neq i$, dans le système de Schlesinger

$$\frac{\partial A_{12}^i}{\partial t_j} = \frac{2A_{11}^j}{t_j - t_i} A_{12}^i - \frac{2A_{11}^i}{t_j - t_i} A_{12}^j.$$

Soit un point $t^0 \in \pi^n$. Montrons que $A_{12}^i(t)$ est holomorphe par rapport à la variable t_j au point t_j^0, les autres t_k, $k \neq j$, étant fixés en t_k^0. Comme les fonctions $\frac{A_{11}^j(t)}{t_j - t_i}$ et $\frac{A_{11}^i(t)}{t_j - t_i}$ sont holomorphes en tout point de π^n, on voit que si $A_{12}^i(t)$ a un pôle d'ordre p en $t_j = t_j^0$, $j \neq i$, alors $A_{12}^j(t)$ a en $t_j = t_j^0$ un pôle d'ordre au minimum $p+1$. Or ceci contredit l'équation

$$\frac{\partial A_{12}^j}{\partial t_j} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+2} \frac{\partial A_{12}^i}{\partial t_j}.$$

Les fonctions $A_{12}^i(t)$ sont donc holomorphes en $t_j = t_j^0$, pour tout $j \neq i$, et donc aussi, vu l'équation précédente, en $t_i = t_i^0$: les $A_{12}^i(t)$ sont donc holomorphes au point $t = t^0$. On procéderait de même, et on aboutirait au même résultat pour les fonctions $A_{21}^i(t)$. □

On peut donc déduire de cette proposition que la solution $(A_{D,1}(t), \ldots, A_{D,n+2}(t))$ du système de Schlesinger associée à un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$ est holomorphe dans un voisinage simplement connexe U du simplexe π^n contenu dans $\mathcal{B}^n$. Ceci simplifie considérablement l'étude de la régularité à l'intérieur de π^n de la fonction « rapports des longueurs » $F_D(t)$ introduite à la section 3.1.3, comme on le verra au chapitre 4.

3.4 Équations fuchsiennes réelles

On peut déduire à présent des résultats que l'on a obtenus pour les systèmes fuchsiens les propriétés que l'on recherchait initialement pour les équations fuchsiennes : on va voir à quelle condition les équations vérifiant la condition (i') de la section 3.1.2 sont réelles. On va en déduire également que la condition **C1** est une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions du système de Garnier soient réelles ou conjuguées deux à deux.

Proposition 3.16. *Soit une équation fuchsienne* (E) *de schéma de Riemann* (3.2) *sans singularité logarithmique, dont les singularités* $t_1, \ldots, t_n$ *sont réelles et les exposants* $\theta_1, \ldots,$ θ_{n+3} *sont dans* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. *Alors, l'équation* (E) *est réelle si et seulement si sa monodromie vérifie la condition* ***C1****.*

Démonstration. Ce résultat est à présent immédiat. En effet, si on considère un système fuchsien (A) associé par la proposition 3.8 à l'équation (E), alors ce système vérifie les hypothèses de la proposition 3.13, et l'équation (E) et le système (A) ont la même monodromie. D'après la proposition 3.13, l'équation (E) est réelle si et seulement si cette monodromie vérifie la condition **C1**. □

On a vu à la proposition 3.14 que lorsqu'un système de générateurs de la monodromie est dans le groupe $SU(2)$, alors la condition **C1** est équivalente à la condition **C2**. Comme la condition **C2** est satisfaite par la représentation ρ_D^* définie à partir d'un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$, et comme la transformation (3.1) préserve la réalité des équations, on obtient le résultat annoncé au début de ce chapitre, à la proposition 3.3 : les équations de la famille isomonodromique $(E_D(t), t \in \pi^n)$ sont réelles. Cette famille décrit donc entièrement l'ensemble des équations satisfaisant les conditions (i'), (ii') et (iii). Par la transformation inverse de la transformation (3.1), on obtient la famille isomonodromique $(E_D^*(t), t \in \pi^n)$, qui décrit l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$.

On peut déduire de la proposition 3.16 que la condition **C1** est également une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions du système de Garnier soient réelles ou conjuguées deux à deux. Pour tout $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et toute permutation σ des entiers de 1 à n, on note $z_\sigma := \left(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}\right)$.

Corollaire 3.17. *Soit* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n+3}) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^{n+3}$. *Soit une solution* $(\lambda(t), \mu(t))$ *du système de Garnier* $(\mathcal{G}_n)$ *définie dans un ouvert simplement connexe* U *de l'ensemble* $\mathcal{B}^n$ *tel que* $U \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$. *Alors il existe une permutation* σ *des entiers de* 1 *à* n *telle que pour tout* $t \in U$ *on a*

$$\begin{aligned} \overline{\lambda(\overline{t})} &= \lambda_\sigma(t) \\ \overline{\mu(\overline{t})} &= \mu_\sigma(t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

si et seulement si la solution $(\lambda(t), \mu(t))$ *provient d'une monodromie satisfaisant la condition* ***C1****.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que les Hamiltoniens $K_i(\theta, \lambda, \mu, t)$ du système de Garnier, qui sont des fractions rationnelles en (λ, μ, t), vérifient pour tout $(\lambda, \mu, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{B}^n$ et toute permutation σ

$$K_i(\theta, \overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{t}) = \overline{K_i(\theta, \lambda, \mu, t)}, \tag{3.15}$$

et

$$K_i(\theta, \lambda_\sigma, \mu_\sigma, t) = K_i(\theta, \lambda, \mu, t). \tag{3.16}$$

Pour toute solution $(\lambda(t), \mu(t))$ du système de Garnier, les fonctions

$$\left(\overline{\lambda(\overline{t})}, \overline{\mu(\overline{t})}\right) \quad \text{et} \quad (\lambda_\sigma(t), \mu_\sigma(t))$$

sont donc aussi des solutions du système de Garnier. Comme le système de Garnier est complètement intégrable, il suffit donc que l'identité (3.14) soit vérifiée en un point $t = t_0$ de U pour qu'elle le soit en tout $t \in U$.

Soit un point t_0 de $U \cap \mathbb{R}^n$. Considérons une des équations $(E_0) := E_\theta\left(\lambda(t_0), \mu(t_0), t_0\right)$ décrite à la section 1.2.6. L'équation (E_0) vérifie les hypothèses de la proposition 3.16. Rappelons l'expression (1.16) de ses coefficients :

$$\begin{aligned} p_0(x) =& \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1-\theta_i}{x-t_i^0} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-\lambda_k(t_0)} \\ q_0(x) =& \frac{\alpha(\alpha+\theta_\infty)}{x(x-1)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^0(t_i^0-1)K_i^0}{x(x-1)(x-t_i^0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k(t_0)(\lambda_k(t_0)-1)\mu_k(t_0)}{x(x-1)(x-\lambda_k(t_0))} \end{aligned}$$

L'équation (E_0) est donc réelle si et seulement si la solution $(\lambda(t), \mu(t))$ vérifie en $t = t_0$ l'identité (3.14) et si les résidus $K_i^0 := K_i\left(\theta, \lambda(t_0), \mu(t_0), t_0\right)$, $i = 1, \ldots, n$, sont réels. Par la proposition 3.16, on a donc établi la condition suffisante. Pour la condition nécessaire, il suffit de voir que si la solution $(\lambda(t), \mu(t))$ vérifie l'identité (3.14), alors par les propriétés (3.15) et (3.15) des Hamiltoniens K_i, on obtient que les K_i^0 sont réels, et donc que l'équation (E_0) est réelle : sa monodromie vérifie la condition **C1**. $\square$

Chapitre 4

Rapports de longueurs des côtés

On suppose toujours fixé un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$. On a obtenu au chapitre précédent que l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_D^n$ est une famille à n paramètres réels d'équations $(E_D^*(t), t \in \pi^n)$ paramétrée par le n-uplet de singularités $t = (t_1, \ldots, t_n)$ variant dans le simplexe π^n. Pour chaque valeur de $t \in \pi^n$, l'équation $E_D^*(t)$ admet un système fondamental de solutions M-invariant $(G(x,t), H(x,t))$ qui constitue les données de Weierstrass d'un disque minimal dont le bord $P_D(t)$ est dans l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}_D^n$. Tous les choix possibles pour le système fondamental $(G(x,t), H(x,t))$ définissent une classe d'équivalence de surfaces minimales par le groupe G des translations et des homothéties de rapport positif. C'est pourquoi, à l'équation $E_D^*(t)$, n'est pas associé un polygone, mais une classe d'équivalence de polygones par le groupe G, c'est-à-dire un élément de $\underline{\mathcal{P}}_D^n$. Les rapports de longueur des côtés de tout représentant de $P_D(t)$ sont données par

$$r_i(t) = \frac{\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big(|G(x,t)|^2 + |H(x,t)|^2\Big)\, dx}{\displaystyle\int_0^1 \Big(|G(x,t)|^2 + |H(x,t)|^2\Big)\, dx}$$

$(i = 1, \ldots, n)$. On a défini la fonction « rapports des longueurs » $F_D(t)$ associée au jeu de directions orientées D

$$F_D : \pi^n \to]0, +\infty[^{\,n}, \qquad F_D(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t)).$$

Le but de ce chapitre est de montrer que la famille de polygones $(P_D(t), t \in \pi^n)$ est l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ tout entier. Comme un système de coordonnées sur $\underline{\mathcal{P}}_D^n$ est donné par n rapports de longueurs de côtés, il suffit pour cela de montrer le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Étant donné un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$, la fonction « rapports des longueurs » $F_D : \pi^n \to]0, +\infty[^{\,n}$ est surjective.*

En quelque sorte, on veut montrer que les directions orientées des côtés sont paramétrées par la monodromie de l'équation, tandis que le paramètre t code la longueur des côtés.

Comme le système de Garnier $(\mathcal{G}_n)$ n'a pas la propriété de Painlevé, on a déjà remarqué que pour étudier le comportement de la fonction $F_D(t)$, il est préférable, et même indispensable, d'utiliser plutôt la famille $(A_D(t), t \in \pi^n)$ de systèmes fuchsiens associée à D, qui est décrite par le système de Schlesinger. On verra à la section 4.1 que ceci nous permet également de construire de manière plus explicite le système fondamental de solutions $(G(x,t), H(x,t))$, et donc de pouvoir étudier sa dépendance en t. En effet, Garnier

exprime, au contraire, ce système à partir de différentes solutions canoniques de l'équation $E_D^*(t)$, et son étude est beaucoup plus longue. On en déduira que la fonction $F_D(t)$ s'étend de manière holomorphe à un voisinage simplement connexe U du simplexe π^n contenu dans $\mathcal{B}^n$ (proposition 4.4).

On expose à la section 4.2 la méthode que l'on va suivre pour démontrer le théorème 4.1, et qui diffère de celle de Garnier. Elle repose sur l'étude de la fonction $F_D(t)$ au bord du simplexe π^n et sur une récurrence portant sur le nombre $n+3$ de côtés des polygones. Par identification naturelle des simplexes π^n et $]0,+\infty[^n$, on peut définir une fonction

$$\widetilde{F}_D :]0,+\infty[^n \to]0,+\infty[^n.$$

Pour montrer que la fonction F_D est surjective, on va montrer que la fonction $\widetilde{F}_D$ est de degré 1, c'est-à-dire homotope à l'identité. Grâce au résultat de topologie de la proposition 4.5, il suffit de montrer que pour toute face $\mathcal{F}$ du bord de $]0,+\infty[^n$, la fonction $\widetilde{F}_D$ s'étend continûment à $\mathcal{F}$, que $\widetilde{F}_D(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ et que la fonction

$$\widetilde{F}_D\big|_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

est de degré 1. Pour obtenir cela, il faut interpréter la fonction $F_D\big|_{\hat{\mathcal{F}}}$ (où $\hat{\mathcal{F}}$ est la face correspondante de π^n) comme une nouvelle fonction « rapports des longueurs ». Regardons ce qui se passe lorsque la singularité t_n tend vers 0, *i.e.* en un point de la face $\hat{\mathcal{F}}_0 = \{(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 < \cdots < t_n = 0\}$. Il paraît naturel de s'attendre à ce que le côté $a_n(t)a_{n+1}(t)$ «disparaisse», c'est-à-dire que le rapport de longueur $r_n(t)$ tende vers 0, et que, lorsque $t' = (t_1,\dots,t_{n-1})$ décrit le simplexe $\pi^{n-1} \simeq \hat{\mathcal{F}}_0$, on obtienne la famille de polygones $P_{D'}(t')$ définie par les directions orientées

$$D' = (D_1,\dots,D_{n-1},D_{n+1},D_{n+2},D_{n+3}) \in \mathcal{D}^{n-1}.$$

Ceci signifie que la fonction $F_D(t)$ s'étend continûment à la face $\hat{\mathcal{F}}_0$ du bord de π^n et que pour tout $t' \in \pi^{n-1}$, on a

$$F_D(t',0) = \left(F_{D'}(t'),0\right).$$

On généralise cette assertion à toutes les faces du simplexes π^n : c'est la proposition 4.6, dont la démonstration constitue la majeure partie de ce chapitre. On procède ensuite par récurrence, en faisant l'hypothèse qu'au rang $n-1$, pour tout entier $k \leq n-1$ et tout jeu de directions orientées $D' \in \mathcal{D}^k$, la fonction $\widetilde{F}_{D'} :]0,+\infty[^k \to]0,+\infty[^k$ est de degré 1. Les propositions 4.5 et 4.6 assurent l'hérédité de l'hypothèse de récurrence. L'initialisation au rang $n=1$ (cas d'un bord quadrilatéral) est immédiate une fois que l'on a obtenu la proposition 4.6.

Les sections 4.3 et 4.4 sont consacrées à la démonstration de la proposition 4.6. La partie la plus difficile est d'obtenir la continuité de la fonction $F_D(t)$ au bord, et non pas son interprétation géométrique. À la section 4.3, on reprend des résultats généraux sur les singularités fixes du système de Schlesinger, que Garnier appelle les pseudo-chocs, c'est-à-dire en les points tels que $t_i = t_j$, $i \neq j$. Ces résultats sont une partie plus connue du travail de Garnier [Gar26], et sont développés et généralisés par Sato, Miwa et Jimbo [SMJ79]. On rappelle ces résultats, tout en les complétant dans l'optique d'étudier l'holomorphie de la fonction $F_D(t)$ en ces singularités.

À la section 4.4, on applique cette étude générale aux solutions particulières du système de Schlesinger qui nous intéresse, c'est-à-dire au cas réel. En rassemblant et en adaptant les résultats de la section précédente, on établit la proposition 4.6.

La démonstration que je propose dans ce chapitre est très différente de celle de Garnier, bien que j'utilise les mêmes outils que lui, à savoir l'étude de la famille de systèmes $(A_D(t), t \in \pi^n)$ au bord du simplexe π^n et une récurrence sur le nombre de côtés des polygones. Cependant, Garnier n'introduit pas la fonction « rapports des longueurs », il cherche d'abord à refermer les polygones $P_D(t)$ en faisant disparaître une singularité apparente « de trop », puis à ajuster $n-1$ rapports de longueurs. Il écrit ces conditions sous la forme d'un système $\mathcal{S}^n$ à n équations. Il n'étudie pas la continuité de la fonction $F_D(t)$ au bord du simplexe π^n, mais montre seulement que certains rapports de longueurs sont holomorphes en t_n^σ, $t_n^{1-\sigma}$ lorsque $t_n \to 0$, où $\sigma\pi$ est l'angle entre les directions orientées D_{n-1} et D_{n+1}. Il montre ainsi que le système $\mathcal{S}^n$ tend vers un système analogue de dimension inférieure $\mathcal{S}^{n-1}$ lorsque $t_n \to 0$, et ceci passe en particulier par l'étude compliquée du système de Garnier $(\mathcal{G}_n)$ lorsque $t_n \to 0$. Il procède ensuite par récurrence : il prolonge une solution du système $\mathcal{S}^{n-1}$ en une solution du système $\mathcal{S}^n$. Il utilise pour cela le théorème d'inversion locale, et doit montrer que le jacobien d'une fonction (qui est quasiment $F_D(t)$) n'est pas nul au bord et à l'intérieur du simplexe π^n. La démonstration de ce dernier point est obscure. De plus, l'initialisation de la récurrence pour le cas du quadrilatère est très elliptique, comme l'attestent les propres travaux ultérieurs de Garnier : il étudie dans les années 1950 et 1960 le cas du quadrilatère dans les articles [Gar51], [Gar62a] et [Gar62b], et y soulève des difficultés qu'il ne mentionne pas dans [Gar28]. En fait, la différence fondamentale entre l'approche de Garnier et la mienne réside dans l'utilisation du résultat de topologie de la proposition 4.5, qui me permet de simplifier considérablement cette partie de la démonstration de Garnier.

4.1 La fonction « rapports des longueurs » $F_D(t)$

4.1.1 Définition

Considérons la famille isomonodromique de systèmes fuchsiens $(A_D(t), t \in \pi^n)$ associée à un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$, que l'on a introduite au chapitre précédent. Elle est donnée par le système de Schlesinger. La monodromie

$$\rho_D^* : \pi_1\left(\mathbb{P}^1 \smallsetminus S(t)\right) \to GL(2, \mathbb{C})$$

de ces systèmes est engendrée par les matrices M_i $(i = 1, \ldots, n+3)$ définies par

$$M_i = D_i D_{i-1}^{-1}, \tag{4.1}$$

où les matrices $D_i \in SU(2)$ sont les relevés des demi-tours autour des directions orientées D_i et vérifient donc $D_i^2 = -I_2$. Pour tout $t \in \pi^n$, comme le système $A_D(t)$ est normalisé en l'infini, il admet une unique matrice fondamentale de solutions canonique en l'infini de la forme

$$\mathbf{Y}_\infty(x,t) = R_\infty\left(\frac{1}{x}, t\right) x^{-L_\infty}$$

où la matrice $L_\infty = A_\infty$ est indépendante de t et la matrice $R_\infty(z,t)$ est holomorphe en $z = 0$ et vérifie $R_\infty(0,t) = I_2$. D'après le théorème 1.28, cette solution est M-invariante. De plus, comme la partie principale en $x = \infty$ est indépendante de t :

$$\mathbf{Y}_\infty(x,t) \sim x^{-L_\infty},$$

la dépendance en t de la solution fondamentale $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$ est entièrement déterminée par la dépendance en t de la matrice

$$A_D(x,t) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_{D,i}(t)}{x-t_i}.$$

On a vu au chapitre précédent que les matrices $A_{D,i}(t)$ sont holomorphes en tout point $t \in \pi^n$. Il existe donc un ouvert simplement connexe U de l'ensemble $\mathcal{B}^n$ qui contient le simplexe π^n tel que les matrices $A_{D,i}(t)$ sont holomorphes dans U. On obtient donc le lemme suivant.

Lemme 4.2. *La solution fondamentale $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$ est holomorphe dans tout ouvert simplement connexe de l'ensemble $(\mathbb{P}^1 \times U) \smallsetminus S$.*

Pour tout $i = 1, \dots, n+2$, il existe une matrice $C_i \in GL(2,\mathbb{C})$ indépendante de t telle que

$$\mathbf{Y}_\infty(x,t) = R_i(x,t)(x-t_i)^{L_i} \cdot C_i,$$

où la matrice $R_i(x,t)$ est holomorphe et inversible dans un voisinage de l'hypersurface $x = t_i$ de $\mathbb{P}^1 \times U$. La matrice $R_i(x,t)$ se prolonge analytiquement le long de toute courbe de $\mathbb{P}^1 \times U$ ne coupant aucune des hypersurfaces $x = t_j$ $(j \neq i)$.

On rappelle que l'ensemble S est l'ensemble des singularités de la famille de systèmes $(A_D(t), t \in U)$

$$S = \bigcup_{t \in U} S(t) \times \{t\}$$

avec

$$S(t) = \{t_1, \dots, t_{n+3}\}.$$

Démonstration. La première partie du lemme en évidente. Pour tout $i = 1, \dots, n+2$, au voisinage de la singularité $x = t_i$, il existe par la proposition 1.27 des matrices fondamentales de solutions de la forme

$$R_i(x,t)(x-t_i)^{L_i},$$

où la matrice $R_i(x,t)$ est holomorphe en x au point $x = t_i$ et $R_i^0(t) := R_i(x,t)\big|_{x=t_i}$ est inversible et vérifie

$$A_{D,i}(t) = R_i^0(t) L_i R_i^0(t)^{-1}.$$

Comme la matrice $A_{D,i}(t)$ est holomorphe dans U, il existe des matrices $R_i^0(t) \in GL(2,\mathbb{C})$ qui diagonalisent $A_{D,i}(t)$ et qui soient holomorphes dans U. On en déduit que la matrice $R_i(x,t)$, définie par une condition initiale $R_i^0(t)$ holomorphe, est holomorphe au voisinage de l'hypersurface $x = t_i$ de $\mathbb{P}^1 \times U$.

A priori, la matrice de connexion entre les matrices fondamentales $R_i(x,t)(x-t_i)^{L_i}$ et $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$ dépend de t. Comme la matrice de monodromie $M_i(\mathbf{Y}_\infty)$ de la solution fondamentale $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$ est indépendante de t, il exsite une matrice $C_i \in GL(2,\mathbb{C})$ telle que

$$M_i(\mathbf{Y}_\infty) = C_i^{-1} e^{2i\pi L_i} C_i.$$

Alors, les solutions fondamentales $R_i(x,t)(x-t_i)^{L_i}$ et $\mathbf{Y}_\infty(x,t) \cdot C_i^{-1}$ ont la même matrice de monodromie $e^{2i\pi L_i}$ au point $x = t_i$, qui est diagonale et non scalaire. On montre facilement que ceci implique qu'il existe une matrice diagonale $\Delta_i(t)$ inversible et holomorphe dans U telle que

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_\infty(x,t) &= R_i(x,t)(x-t_i)^{L_i} \cdot \Delta_i(t) \cdot C_i \\ &= R_i(x,t)\Delta_i(t)(x-t_i)^{L_i} \cdot C_i,\end{aligned}$$

et la matrice $R_i(x,t)\Delta_i(t)$ convient. □

Les solutions fondamentales dont la première ligne constitue les données de Weierstrass d'une surface minimale à bord polygonal sont M-invariantes. La proposition 1.22 permet de caractériser l'ensemble des matrices fondamentales de solutions qui sont M-invariantes, sous réserve que la monodromie de la famille de systèmes $A_D(t)$ soit irréductible – et c'est bien le cas, car les directions D_i ne sont pas toutes coplanaires. Ces solutions sont donc de la forme

$$\mu(t)\mathbf{Y}_\infty(x,t)\cdot C.$$

La matrice inversible C est une matrice de conjugaison entre les matrices de monodromie de la solution $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$ et les matrices M_i définies par (4.1) à partir des D_i, c'est-à-dire :

$$M_i = C^{-1}M_i\left(\mathbf{Y}_\infty\right)C \qquad (i=1,\dots,n+3).$$

Comme les matrices M_i ne sont pas simultanément diagonalisables (car la monodromie est irréductible), la matrice C est unique à multiplication scalaire près. On a vu que la fonction holomorphe $\mu : U \to \mathbb{C}^*$ n'est pas non plus unique : toutes les fonctions μ qui conviennent se déduisent les unes des autres par multiplication par une fonction analytique réelle et jamais nulle dans U. Soit $\mathbf{Y}_0(x,t) = \mu(t)\mathbf{Y}_\infty(x,t)\cdot C$ une des solutions fondamentales définissant une surface minimale à bord polygonal. Notons, pour une matrice $\mathbf{Y}\in M(2,\mathbb{C})$,

$$L_1(\mathbf{Y}) := \sqrt{|y_1|^2+|z_1|^2} \qquad \text{où } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

(bien que ce ne soit pas une norme). Alors les longueurs des côtés de la surface minimale définie par la solution fondamentale $\mathbf{Y}_0(x,t)$ sont données par

$$\ell_i(t) = |\mu(t)|\int_{t_i}^{t_{i+1}} L_1\left(\mathbf{Y}_\infty(x,t)\cdot C\right)^2 dx.$$

Elles sont bien définies de par leur interprétation géométrique, mais aussi parce que les exposants en $x=t_i$ du système fuchsien $A_D(x,t)$ sont $-\theta_i/2$ et $\theta_i/2$, et $0<\theta_i<1$. De plus, les fonctions $\ell_i(t)$ ne peuvent s'annuler dans π^n, car alors la première ligne de la solution $\mathbf{Y}_0(x,t)$ serait nulle pour tout x dans l'intervalle $]t_i,t_{i+1}[$, ce qui est impossible. Finalement, on a pour tout $t\in\pi^n$

$$\ell_i(t)\in\,]0,+\infty[\quad \text{pour } i=1,\dots,n+1.$$

Et les rapports de longueurs s'écrivent à la fois

$$r_i(t) = \frac{\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} L_1\left(\mathbf{Y}_0(x,t)\right)^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 L_1\left(\mathbf{Y}_0(x,t)\right)^2 dx} \tag{4.2}$$

et

$$r_i(t) = \frac{\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} L_1\left(\mathbf{Y}_\infty(x,t)\cdot C\right)^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 L_1\left(\mathbf{Y}_\infty(x,t)\cdot C\right)^2 dx}. \tag{4.3}$$

$(i=1,\dots,n)$.

4.1.2 Holomorphie

On veut étendre la fonction $F_D(t)$ en une fonction holomorphe dans un voisinage du simplexe π^n. Pour cela, il faut obtenir les rapports $r_i(t)$ par l'intégration de fonctions holomorphes en t, c'est-à-dire, en particulier, ne comportant pas de module. La solution fondamentale $\mathbf{Y}_0(x,t)$ a des propriétés de réalité qui permettent de se débarrasser des modules dans l'expression (4.2). Cependant, on contrôle moins facilement son comportement en t que celui de la solution fondamentale $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$: si on sait que la fonction scalaire $\mu(t)$ est holomorphe dans U, on n'a aucun moyen de déterminer son comportement lorsque plusieurs t_i fusionnent, c'est-à-dire en les pseudo-chocs (qui nous sera pourtant utile). On adopte donc une méthode qui, par un choix adéquat de la fonction $\mu(t)$ et de la matrice C, permet de transmettre les propriétés de réalité de la solution $\mathbf{Y}_0(x,t)$ à la solution $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$. On obtient ainsi une expression de la fonction $F_D(t)$ qui sera aussi utile pour l'étude en les pseudo-chocs.

Lemme 4.3. *Il existe une fonction holomorphe $\mu_0 : U \to \mathbb{C}^*$ et une matrice $C_0 \in GL(2,\mathbb{R})$ indépendante de t telles que*

$$\forall t \in \pi^n \quad \mu_0(t) \in \mathbb{R}^*,$$

et que la solution fondamentale $\mathbf{Y}_0(x,t)$ donnée par

$$\mathbf{Y}_0(x,t) = \mu_0(t)\mathbf{Y}_\infty(x,t) \cdot C_0$$

définisse une surface minimale à bord polygonal de directions orientées D.

Démonstration. Par les propriétés de réalité du système $A_D(x,t)$, pour tout $t \in \pi^n$, la solution fondamentale $\mathbf{Y}_\infty(x,t)$ est à valeurs réelles dès que $x \in]-\infty, t_1[$. Si, par souci de simplicité, on choisit définitivement une position du repère de $\mathbb{R}^3$ telle que le polygone initial P a son $(n+3)$-ième côté parallèle au second axe de coordonnées (*i.e.* la direction D_{n+3} est dirigée par $\vec{e}_2$), alors on a vu au chapitre 2 que la première ligne de la solution fondamentale $\mathbf{Y}_0(x,t)$ est réelle ou purement imaginaire dès que $x \in]-\infty, t_1[$. Quitte à modifier la solution $\mathbf{Y}_0(x,t)$ en la multipliant par i, on en conclut donc que

$$\forall t \in \pi^n \quad \mu(t)C \in GL(2,\mathbb{R}).$$

En particulier, les éléments de la matrice C ont tous le même argument ; il existe donc un nombre réel φ tel que la matrice $e^{i\varphi}C$ soit dans $GL(2,\mathbb{R})$. On obtient donc le résultat annoncé en posant $C_0 := e^{i\varphi}C$ et $\mu_0(t) := e^{-i\varphi}\mu(t)$. □

On obtient donc pour les rapports de longueurs :

$$r_i(t) = \frac{\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} L_1 \left(\mathbf{Y}_\infty(x,t) \cdot C_0\right)^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 L_1 \left(\mathbf{Y}_\infty(x,t) \cdot C_0\right)^2 dx} \tag{4.4}$$

$(i = 1, \ldots, n)$.

Proposition 4.4. *Soit un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$. Il existe un ouvert simplement connexe de l'ensemble $\mathcal{B}^n$ contenant π^n et contenu dans U, que l'on note encore U, et une fonction $\underline{F}_D : U \to \mathbb{C}^n$ holomorphe dans U qui prolonge la fonction « rapports des longueurs » $F_D : \pi^n \to]0, +\infty[^n$:*

$$\underline{F}_D\big|_{\pi^n} = F_D.$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Considérons une matrice $S_i \in SU(2)$ qui soit un relevé d'une rotation envoyant la direction D_i sur le second axe de coordonnées. Alors la première ligne de la solution fondamentale $\mathbf{Y}_0(x,t) \cdot S_i$ constitue les données de Weierstrass d'une surface minimale bordée par un polygone dont le i-ème côté est parallèle au second axe de coordonnées. On a vu qu'alors cette première ligne est réelle ou purement imaginaire lorsque $x \in]t_i, t_{i+1}[$. Considérons la solution fondamentale

$$\mathbf{Y}_i(x,t) := \mathbf{Y}_\infty(x,t) \cdot C_0 \cdot S_i = \frac{1}{\mu_0(t)} \mathbf{Y}_0(x,t) \cdot S_i. \tag{4.5}$$

La première ligne $(g_i(x,t), h_i(x,t))$ de la solution $\mathbf{Y}_i(x,t)$ est donc également, vu le lemme 4.3, réelle ou purement imaginaire lorsque $x \in]t_i, t_{i+1}[$. Comme $S_i \in SU(2)$, on a pour tout $t \in \pi^n$ et tout $x \in]t_i, t_{i+1}[$

$$\begin{aligned} L_1 \left(\mathbf{Y}_\infty(x,t) \cdot C_0\right)^2 &= L_1 \left(\mathbf{Y}_\infty(x,t) \cdot C_0 \cdot S_i\right)^2 \\ &= \pm \left(g_i(x,t)^2 + h_i(x,t)^2\right). \end{aligned}$$

Le signe $+$ ou $-$ ne dépend pas de t, mais uniquement du côté sur lequel on se place. Pour $i = 1, \dots, n$, on a donc

$$r_i(t) = \pm \frac{\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(g_i(x,t)^2 + h_i(x,t)^2\right) dx}{\displaystyle\int_0^1 \left(g_{n+1}(x,t)^2 + h_{n+1}(x,t)^2\right) dx} = \pm \frac{\lambda_i(t)}{\lambda_{n+1}(t)} \tag{4.6}$$

où pour tout $i = 1, \dots, n+1$, on a posé

$$\lambda_i(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(g_i(x,t)^2 + h_i(x,t)^2\right) dx. \tag{4.7}$$

On peut donc étendre la fonction $F_D(t)$ à l'ouvert U. En effet, quitte à diminuer l'ouvert U, on supposer que pour tout t dans U, pour tout $i = 1, \dots, n$, les points t_j $(j \neq i, i+1)$ n'appartiennent pas au segment de droite limité par t_i et t_{i+1}. On peut donc toujours calculer les intégrales précédentes le long des segments joignant t_i et t_{i+1}. Alors pour tout $t \in U$ on a

$$\lambda_i(t) = (t_{i+1} - t_i) \int_0^1 \left(g_i(t_i + \xi(t_{i+1} - t_i), t)^2 + h_i(t_i + \xi(t_{i+1} - t_i), t)^2\right) d\xi.$$

Pour tout $t \in U$, la fonction $\lambda_{n+1}(t)$ n'est jamais nulle, vu que ceci forcerait les fonctions $g_{n+1}(\cdot, t)$ et $h_{n+1}(\cdot, t)$ à être identiquement nulles sur l'intervalle $]0, 1[$.

Montrons que les fonctions $\lambda_i(t)$ $(i = 1, \dots, n+1)$ sont holomorphes en un point $t^0 \in \pi^n$. D'après le lemme 4.2, comme la matrice $C_i C_0 S_i$ est indépendante de t, la fonction

$$\mathcal{G}_i(\xi, t) := g_i \left(t_i + \xi(t_{i+1} - t_i), t\right)^2 + h_i \left(t_i + \xi(t_{i+1} - t_i), t\right)^2$$

est holomorphe en t au point $t = t^0$ pour tout ξ fixé, $0 < \xi < 1$, et donc il suffit de la dominer par une fonction intégrable indépendante de t, pour tout t dans un voisinage de t^0. Soit $\varepsilon > 0$ tel que la boule

$$B_\varepsilon\left(t^0\right) = \left\{t \in \mathbb{C}^n \mid \forall i = 1, \dots, n \quad |t_i - t_i^0| < \varepsilon\right\}$$

soit contenue dans l'ouvert U. On scinde l'intervalle d'intégration

$$\lambda_i(t) = \lambda_i^-(t) + \lambda_i^+(t),$$

avec

$$\lambda_i^-(t) = (t_{i+1} - t_i) \int_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{G}_i(\xi, t) d\xi \quad \text{et} \quad \lambda_i^+(t) = (t_{i+1} - t_i) \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathcal{G}_i(\xi, t) d\xi.$$

Considérons la fonction $\lambda_i^-(t)$. Il faut choisir ε tel que pour tout $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ et pour tout $t \in B_\varepsilon(t^0)$, la quantité $\xi(t_{i+1} - t_i)$ soit contenue dans un disque centré en 0 de rayon η_i indépendant de ξ et de t et qui ne contienne aucune des valeurs singulières $t_j - t_i$, $j \neq i$. On n'entre pas dans les détails de calculs ; si on suppose que $\varepsilon < (t_{i+1}^0 - t_i^0)/6$ $(i = 1, \ldots, n)$, alors

$$\eta_i = \frac{2}{3} \left| t_{i+1}^0 - t_i^0 \right|$$

convient. Toujours par le lemme 4.2 et parce que la matrice $C_0 S_i C_i^{-1}$ est indépendante de t, les fonctions $g_i(x, t)$ et $h_i(x, t)$ sont au voisinage de $x = t_i$ des combinaisons linéaires à coefficients indépendants de t de fonctions de la forme

$$(x - t_i)^{-\frac{\theta_i}{2}} \varphi_i(x - t_i, t) \quad \text{et} \quad (x - t_i)^{\frac{\theta_i}{2}} \psi_i(x - t_i, t)$$

où les fonctions $\varphi_i(y, t)$ et $\psi_i(y, t)$ sont holomorphes en $t \in U$ et en y tant que $y \neq t_j - t_i$ $(j \neq i)$. Ces fonctions $\varphi_i(y, t)$ et $\psi_i(y, t)$ sont donc bornées pour tout y tel que $|y| < \eta_i$ et pour tout $t \in B_\varepsilon(t^0)$. Il existe donc des constantes $K_0,\ K_1,\ K_{-1} > 0$ telles que pour tout $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ et tout $t \in B_\varepsilon(t^0)$, on ait

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_i(\xi, t)| &\leq K_0 + K_{-1} |t_{i+1} - t_i|^{-\theta_i} \xi^{-\theta_i} + K_1 |t_{i+1} - t_i|^{\theta_i} \xi^{\theta_i} \\ &\leq K_0 + K_{-1} (2\eta_i)^{-\theta_i} \xi^{-\theta_i} + K_1 (2\eta_i)^{\theta_i} \xi^{\theta_i}. \end{aligned}$$

On obtient donc que la fonction $\lambda_i^-(t)$ est holomorphe au point t^0. On procèderait de même pour $\lambda_i^+(t)$. La fonction $\underline{F}_D(t)$ est donc holomorphe en tout point du simplexe π^n. Elle est donc holomorphe dans un ouvert simplement connexe $\underline{U}$ de $\mathcal{B}^n$ contenant π^n, et on appelle toujours U l'intersection $U \cap \underline{U}$. □

4.2 La démonstration par récurrence

4.2.1 La proposition fondamentale

D'après la proposition 4.4, la fonction $F_D : \pi^n \to]0, +\infty[^n$ est continue dans π^n. Par identification naturelle des simplexes π^n et $]0, +\infty[^n$ (identification que l'on va préciser dans la suite), on obtient une fonction continue

$$\widetilde{F}_D :]0, +\infty[^n \to]0, +\infty[^n.$$

Pour montrer que la fonction F_D est surjective, on va montrer que la fonction $\widetilde{F}_D$ est de degré 1, c'est-à-dire homotope à l'identité. Le point essentiel pour établir ce résultat est l'étude du comportement de F_D au bord du simplexe π^n. On commence par établir la proposition suivante, qui, une fois obtenu ce comportement, nous permettra de conclure grâce à un raisonnement par récurrence.

Proposition 4.5. *Soient un ensemble convexe et compact K de $\mathbb{R}^n$, et une fonction continue $f : K \to K$. Si $f(\partial K) \subset \partial K$ et si la fonction $f|_{\partial K} : \partial K \to \partial K$ est de degré 1, alors la fonction $f : K \to K$ est de degré 1 dans K.*

Démonstration. On commence par montrer cette proposition lorsque le convexe compact K coïncide avec la boule unité fermée $\bar{B} := \bar{B}_1(0)$ de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$. On procède par déformations homotopiques. Par hypothèse, il existe une fonction continue

$$h : [0,1] \times \partial B \to \partial B$$

telle que

$$\begin{aligned} h(0,\cdot) &= f|_{\partial B} \\ h(1,\cdot) &= \mathrm{id}_{\partial B}\,. \end{aligned}$$

On va construire une fonction continue

$$H : [0,1] \times \bar{B} \to \bar{B}$$

telle que

$$\begin{aligned} H(0,\cdot) &= \mathrm{id}_B \\ H(1,\cdot) &= f. \end{aligned} \tag{4.8}$$

On procède en deux étapes, suivant la valeur de t (figure 4.1 ci-dessous). On définit tout d'abord la fonction $H(t,\cdot) : \bar{B} \to \bar{B}$ pour t fixé, $0 < t \leq \frac{1}{2}$, en faisant une rétractation de f de $\bar{B}_t(0)$ dans $\bar{B}_t(0)$, puis en la transformant au bord par la fonction h pour obtenir l'identité.

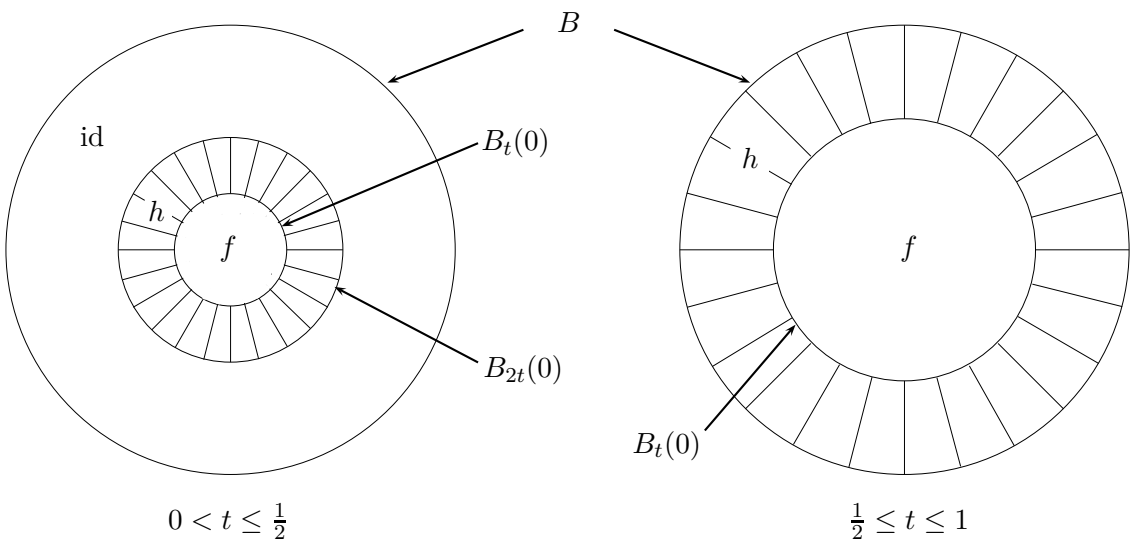

Figure 4.1 – La fonction $H(t,\cdot)$ suivant la valeur de t.

Plus précisément, on pose

$$\begin{aligned}
\forall x \in B_t(0) \quad & H(t,x) = tf\left(\frac{x}{t}\right) \\
\forall x \in B_{2t}(0) \smallsetminus B_t(0) \quad & H(t,x) = \|x\|\, h\left(\frac{\|x\|}{t} - 1, \frac{x}{\|x\|}\right) \\
\forall x \in \bar{B} \smallsetminus B_{2t}(0) \quad & H(t,x) = x.
\end{aligned}$$

De même, pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, on se contente de grossir et de tronquer le cas précédent :

$$\begin{aligned}
\forall x \in B_t(0) \quad & H(t,x) = tf\left(\frac{x}{t}\right) \\
\forall x \in \bar{B} \smallsetminus B_t(0) \quad & H(t,x) = \|x\|\, h\left(\frac{\|x\|}{t} - 1, \frac{x}{\|x\|}\right).
\end{aligned}$$

La fonction H vérifie la condition (4.8) et est continue en tout point de $[0,1] \times \bar{B} \smallsetminus \{(0,0)\}$. Pour vérifier qu'elle est continue au point $(0,0)$ et que $H(0,0) = 0$, il suffit de remarquer que pour tout $0 < t \leq \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in B_t(0) \quad & \|H(t,x)\| \leq t \\
\forall x \in B_{2t}(0) \smallsetminus B_t(0) \quad & \|H(t,x)\| \leq \|x\|.
\end{aligned}$$

Dans le cas général, lorsque le convexe compact K est quelconque, il existe un homéomorphisme $\varphi : K \to \bar{B}$ qui envoie le bord de K sur la sphère ∂B. Alors en appliquant le résultat qu'on vient d'établir à la fonction

$$g := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \bar{B} \to \bar{B},$$

on obtient que la fonction f est de degré 1. □

On va montrer que la fonction $\widetilde{F}_D$ s'étend continûment au bord de $]0,+\infty[^n$ et que $\widetilde{F}_D\left(\partial(]0,+\infty[^n)\right) \subset \partial(]0,+\infty[^n)$. On procèdera par récurrence pour obtenir que la fonction

$$\widetilde{F}_D\big|_{\partial(]0,+\infty[^n)} : \partial(]0,+\infty[^n) \to \partial(]0,+\infty[^n)$$

est de degré 1. Commençons par compactifier les simplexes π^n et $]0,+\infty[^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}^n = (\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\})^n$ et par expliciter leur bord et la manière de les identifier. On écrit

$$\begin{aligned}
]0,+\infty[^n &= \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_n < x_{n-1} + x_n < \cdots < x_1 + \cdots + x_n < +\infty\} \\
&= \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < s_n(x) < \cdots < s_1(x) < +\infty\}
\end{aligned}$$

où on a posé pour $i = 1,\ldots,n$

$$s_i(x) = x_i + \cdots + x_n$$

et $s_0(x) = +\infty$, $s_{n+1}(x) = 0$. Les adhérences sont données par

$$\begin{aligned}
\overline{\pi^n} &= \left\{t \in \overline{\mathbb{R}}^n \mid -\infty \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 0\right\} \\
\overline{]0,+\infty[^n} &= [0,+\infty]^n = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}}^n \mid 0 \leq s_n(x) \leq \cdots \leq s_1(x) \leq +\infty\right\}.
\end{aligned}$$

Les bords $\partial\pi^n$ et $\partial(\,]0,+\infty[^{\,n})$ sont constitués de simplexes de dimensions 0 à $n-1$. On paramètre ces simplexes de la façon suivante. Soit $\Delta := \{0,1\}^{n+1} \smallsetminus \{(0,\dots,0),(1,\dots,1)\}$. On note $\delta = (\delta_0,\dots,\delta_n)$ les éléments de Δ. On a la réunion disjointe de simplexes

$$\partial\pi^n = \bigsqcup_{\delta\in\Delta} P^\delta,$$

avec

$$P^\delta = \{(t_1,\dots,t_n) \in \overline{\pi^n} \mid \forall i = 0,\dots,n \quad t_i = t_{i+1} \Leftrightarrow \delta_i = 0\}$$

où on note $t_{n+1} = 0$ et $t_0 = t_{n+3} = -\infty$. Pour tout $\delta \in \Delta$, on a un isomorphisme naturel

$$\varphi_\delta : P^\delta \to \pi^{|\delta|}$$

où la dimension du simplexe est donnée par

$$|\delta| = \sum_{i=0}^{n} \delta_i - 1.$$

Cet isomorphisme est obtenu en «enlevant» les composantes t_i telles que $\delta_i = 0$ ($i = 1,\dots,n$) et celles qui valent $-\infty$. De même

$$\partial(\,]0,+\infty[^{\,n}) = \bigsqcup_{\delta\in\Delta} R^\delta,$$

avec

$$R^\delta = \{(x_1,\dots,x_n) \in [0,+\infty]^{\,n} \mid \forall i = 0,\dots,n \quad s_{i+1}(x) = s_i(x) \Leftrightarrow \delta_i = 0\}\,.$$

On a également les isomorphismes

$$\psi_\delta : R^\delta \to \,]0,+\infty[^{\,|\delta|}.$$

De même, on note $D^\delta \in D^{|\delta|}$ le jeu de directions orientées obtenu à partir de $D \in \mathcal{D}^n$ en «enlevant» les directions orientées D_i telles que $\delta_i = 0$ ($i = 0,\dots,n$). Les deux directions orientées D_{n+1} et D_{n+2} ne peuvent donc jamais disparaître. Grâce à la définition 2.2 de l'ensemble $\mathcal{D}^n$, on voit que le jeu de directions orientées D^δ appartient bien à $\mathcal{D}^{|\delta|}$. Alors

$$F_{D^\delta} : \pi^{|\delta|} \to \,]0,+\infty[^{\,|\delta|}.$$

Le but des sections suivantes va être d'établir la proposition fondamentale :

Proposition 4.6. *Pour tout $\delta \in \Delta$, la fonction « rapport des longueurs » $F_D(t)$ associée à un jeu de direction $D \in \mathcal{D}^n$ s'étend continûment à la face P^δ de π^n et*

$$F_D\big|_{P^\delta} = \psi_\delta^{-1} \circ F_{D^\delta} \circ \varphi_\delta. \tag{4.9}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un homéomorphisme

$$\Phi_n : \,]0,+\infty[^{\,n} \to \pi^n$$

tel que pour tout $\delta \in \Delta$ on ait

$$\Phi_n\left(R^\delta\right) = P^\delta.$$

On pose alors

$$\widetilde{F}_D := F_D \circ \Phi_n, \qquad \widetilde{F}_D : \,]0,+\infty[^{\,n} \to \,]0,+\infty[^{\,n}.$$

Étant donné les propositions 4.5 et 4.6, pour montrer que la fonction $\widetilde{F}_D$ est de degré 1, on va faire une récurrence forte, et la bonne hypothèse est :

Hypothèse de récurrence au rang n : pour tout $k = 1, \ldots, n$, pour tout jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^k$ la fonction

$$\widetilde{F}_D = F_D \circ \Phi_k, \qquad \widetilde{F}_D :]0, +\infty[^k \to]0, +\infty[^k$$

est de degré 1.

Pour tout $\delta \in \Delta$, comme $|\delta| < n$, on obtient ainsi, grâce à l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$, que $\widetilde{F}_D|_{R^\delta} : R^\delta \to R^\delta$ est de degré 1, et on a donc

$$\widetilde{F}_D|_{\partial(]0,+\infty[^n)} : \partial(]0, +\infty[^n) \to \partial(]0, +\infty[^n)$$

est de degré 1. Par la proposition 4.5, on peut alors en conclure que la fonction $\widetilde{F}_D$: $]0, +\infty[^n \to]0, +\infty[^n$ est de degré 1, et l'hérédité de la récurrence est établie.

4.2.2 Le cas du quadrilatère ($n = 1$)

L'initialisation de la récurrence au rang $n = 1$ est immédiate à partir de la proposition 4.6. Dans ce cas, pour tout $D = (D_t, D_0, D_1, D_\infty) \in \mathcal{D}^1$, la fonction « rapport des longueurs »

$$F_D :]-\infty, 0[\to]0, +\infty[$$

est le rapport de la longueur du premier côté (de direction D_t) sur la longueur du deuxième (de direction D_0). Ici, $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$ avec $\delta_1 = \{0, 1\}$ et $\delta_2 = \{1, 0\}$, et $P^{\delta_1} = \{-\infty\}$, $R^{\delta_1} = \{+\infty\}$, $P^{\delta_2} = \{0\}$ et $R^{\delta_2} = \{0\}$. La proposition 4.6 nous donne donc ce à quoi on pouvait raisonnablement s'attendre :

$$\lim_{t \to 0} F_D(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to -\infty} F_D(t) = +\infty.$$

On peut choisir

$$\Phi_1 :]0, +\infty[\to]-\infty, 0[, \quad \Phi_1(t) = -t$$

c'est-à-dire

$$\widetilde{F}_D :]0, +\infty[\to]0, +\infty[, \quad \widetilde{F}_D(t) = F_D(-t).$$

On en déduit donc que la fonction $\widetilde{F}_D$ est de degré 1 (cas particulier évident de la dimension 1 de la proposition 4.5).

On représente à la figure 4.2 les variations lorsque $t \to -\infty$ et $t \to 0$ du quadrilatère $P_D(t)$ défini par le jeu de directions orientées D, et pour lequel le problème de Plateau admet une solution. On note $a_t = \mathcal{X}(t)$, $a_0 = \mathcal{X}(0)$, $a_1 = \mathcal{X}(1)$ et $a_\infty = \mathcal{X}(\infty)$ les sommets de ce quadrilatère. Les sommets a_0 et a_1 ne peuvent pas disparaître au cours de la déformation. Comme les quadrilatères $(P_D(t), t \in]-\infty, 0[)$ sont définis à translation et homothétie de rapport positif près, et comme la direction D_0 est fixée, on peut supposer que la position des sommets a_0 et a_1 est fixe.

Aux cas limites, lorsque $t = -\infty$ ou $t = 0$, les données de Weierstrass d'une surface minimale limitée par un triangle ayant un sommet en l'infini sont des solutions d'une équation hypergéométrique.

Remarque 4.7. Si les directions orientées D_∞, D_t et D_0 sont dans un même plan, et si la direction D_1 n'appartient pas ce plan, alors ces directions ne sont pas les directions d'un quadrilatère de $\mathbb{R}^3$, et il n'existe aucune valeur de t pour laquelle le quadrilatère $P_D(t)$ « se referme ». Par contre, suivant l'orientation des directions D_∞, D_t et D_0, il peut exister une valeur de t telle que la demi-droite $(a_t(t), -D_\infty)$ passe par le sommet $a_1(t)$ (qui devient donc aussi le sommet $a_\infty(t)$) : on obtient un triangle de $\mathbb{R}^3$.

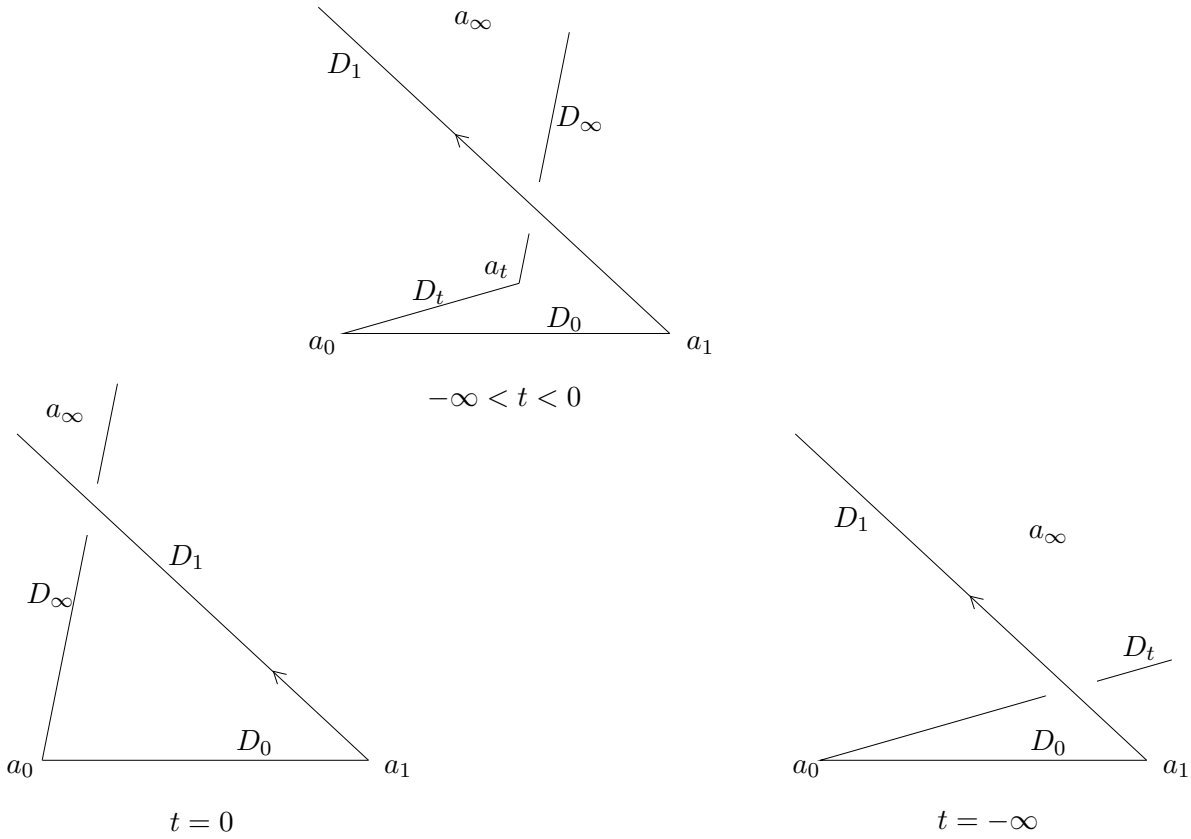

Figure 4.2 – Déformation du quadrilatère défini par un jeu de directions orientées

4.2.3 Le changement de variables

On va détailler uniquement le cas des faces P^δ où $\delta = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$: on fixe un entier p, $1 \le p \le n$, et on étudie la fonction $F_D(t)$ lorsque $t_p, t_{p+1}, \dots, t_n$ tendent vers $t_{n+1} = 0$, les autres variables $t_1, \dots, t_{p-1}$ demeurant à distance mutuelle supérieure à un réel strictement positif. De manière générale, on va noter par α les indices prenant les valeurs $1, \dots, p-1, n+2$, et par β ceux variant entre p et $n+1$. Pour tout $t \in \mathcal{B}^n$, on fait le changement de variables suivant

$$\tau := t_p, \qquad \nu_\beta := \frac{t_\beta}{\tau} \quad (p \le \beta \le n+1), \tag{4.10}$$

et on note $t' = (t_1, \dots, t_{p-1})$ et $\nu = (1, \nu_{p+1}, \dots, \nu_n)$. Par abus de notation, on identifiera ν et $(\nu_{p+1}, \dots, \nu_n)$. En particulier, on dira que $\nu \in \mathcal{B}^{n-p}$ pour signifier que $(\nu_{p+1}, \dots, \nu_n) \in \mathcal{B}^{n-p}$. Alors

$$t = (t', \tau \cdot \nu)\,.$$

À $t' \in \mathcal{B}^{p-1}$ et $\nu \in \mathcal{B}^{n-p}$ fixés, le n-uplet $(t', \tau \cdot \nu)$ est dans $\mathcal{B}^n$ dès que $|\tau|$ est suffisamment petit. On définit l'image V de l'ouvert U par le changement de variables

$$V := \left\{ (t', \nu, \tau) \in \mathbb{C}^n \mid (t', \tau \cdot \nu) \in U \right\}. \tag{4.11}$$

Dans le cas réel, c'est-à-dire lorsque la variable t est dans le simplexe π^n, la variable t' est dans π^{p-1} et la variable ν est dans le simplexe $\widetilde{\pi}^{n-p}$ défini par

$$\widetilde{\pi}^k := \Big\{ (\nu_1, \dots, \nu_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 < \nu_k < \dots < \nu_1 < 1 \Big\}.$$

On considère un voisinage simplement connexe U' du simplexe π^{p-1} contenu dans $\mathcal{B}^{p-1}$, et un voisinage simplement connexe $\widetilde{U}$ du simplexe $\widetilde{\pi}^{n-p}$ contenu dans $\mathcal{B}^{n-p}$ tels que pour tout $(t', \nu) \in U' \times \widetilde{U}$, il existe $\tau \in \mathbb{C}^*$ tel que le n-uplet (t', ν, τ) soit dans l'ensemble V. On suppose de plus que l'ouvert $\widetilde{U}$ est borné : ceci est possible puisque le simplexe $\widetilde{\pi}^{n-p}$ l'est.

La proposition suivante rassemble les résultats que l'on va établir dans les deux sections suivantes. Elle donne le comportement de la fonction F_D en les variables (t', ν, τ) aux points $(t'^0, \nu^0, 0)$, avec $(t'^0, \nu^0) \in U' \times \widetilde{U}$. Comme on va étudier le comportement de la fonction F_D en chacune des variables t', ν et τ séparemment, on utilisera pour conclure le théorème de l'analyticité séparée d'Hartogs. C'est pourquoi on a eu besoin d'étendre la fonction $F_D(t)$ à l'ouvert U. On verra ensuite que cette proposition nous permet de déduire la continuité de F_D en la variable t en les points du bord du simplexe π^n.

Proposition 4.8. *Soient un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$ et un entier p, $1 \leq p \leq n$. Soient $D' \in \mathcal{D}^{p-1}$ le jeu de directions orientées défini par*

$$D' = (D_1, \ldots, D_{p-1}, D_{n+1}, D_{n+2}, D_{n+3}),$$

et $\sigma\pi$ la mesure de l'angle entre les directions orientées D_{p-1} et D_{n+1} telle que $0 < \sigma < 1$. Soit un ouvert Ω' de U' tel que pour tout $\alpha = 1, \ldots, p-1$, sa projection Ω'_α sur la α-ième coordonnée vérifie

$$dist(\Omega'_\alpha, 0) > 0.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout secteur $S_{\varepsilon,\varphi} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid 0 < |\tau| < \varepsilon,\ |\arg \tau| < \varphi\}$, le produit cartésien

$$\Omega' \times \widetilde{U} \times S_{\varepsilon,\varphi}$$

est contenu dans V et que dans ce produit la fonction $\underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu)$ vérifie

$$\underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu) = \mathcal{H}\left(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}\right),$$

où $\mathcal{H}(t', \nu, u, v)$ est une fonction holomorphe en (t', ν, u, v) au voisinage chacun des points $(t'^0, \nu^0, 0, 0)$, avec $t'^0 \in \Omega'$ et $\nu^0 \in \widetilde{U}$.

De plus, pour tout $(t', \nu) \in U' \times \widetilde{U}$, on a

$$\lim_{\tau \to 0} \underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu) = (\underline{F}_{D'}(t'), 0 \ldots, 0).$$

Remarque 4.9. On procèderait de même pour les autres faces du simplexe π^n, et on obtiendrait des résultats analogues, en faisant des changements de variables adaptés, par exemple :

$$\begin{aligned}
t &= (t_1, \ldots, t_{p-1}, \tau + t_q, \ldots, \tau\nu_{q-1} + t_q, t_q, \ldots, t_n), \qquad \tau \to 0 \\
t &= (t_1, \ldots, t_{p-1}, \tau + t_{p+1}, t_{p+1}, \ldots, t_{q-1}, \tau\nu + t_{q+1}, t_{q+1}, \ldots, t_n), \qquad \tau \to 0 \\
t &= \left(\frac{\nu_1}{\tau}, \ldots, \frac{1}{\tau}, t_p, \ldots, t_n\right), \qquad \tau \to 0.
\end{aligned}$$

La proposition 4.8 permet d'établir la proposition fondamentale 4.6.

Démonstration de la proposition 4.6. Pour montrer que la fonction $F_D(t)$ s'étend continûment en chacune des faces P^δ du bord de π^n, on va procéder par récurrence sur la codimension $n-|\delta|$ de P^δ.

Soit une « hyper-face » P^δ de π^n, c'est-à-dire telle qu'il existe un entier $p \in \{0,\dots,n\}$ vérifiant $\delta_p = 0$ et $\delta_i = 1$ pour tout $i \neq p$. Soit t^0 un point de P^δ. Alors $t^0_p = t^0_{p+1}$. Dans ce cas, le changement de variables adapté est

$$\tau := t_p - t^0_{p+1}, \quad t' := (t_i)_{1\le i\le n,\ i\neq p}.$$

Alors une variante adaptée au point t^0 de la proposition 4.8 nous assure que la fonction $F_D(t', \tau + t^0_{p+1})$ est holomorphe en $\left(t', \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}\right)$ au point $t' = t'^0$, $\tau = 0$, et on obtient donc que la fonction $F_D(t)$ est continue en t^0.

Supposons que la fonction $F_D(t)$ se prolonge continûment à toutes les faces de codimension inférieure ou égale à $q-1$. Soit t^0 un point d'une face P^δ de codimension $n-|\delta| = q$. Pour simplifier l'écriture de la démonstration, on va supposer encore $\delta = (1,\dots,1,0,\dots,0)$, c'est-à-dire $t^0 = (t'^0, 0,\dots,0)$, avec $t'^0 \in \pi^{p-1}$ et $p = |\delta|+1 = n-q+1$. Soit K' un compact de π^{p-1} tel que t'^0 soit à l'intérieur de K'. Alors, par la proposition 4.8, on sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $t' \in K'$, $\nu \in \widetilde{\pi}^{n-p}$, $-\varepsilon < \tau < 0$, on ait

$$\begin{aligned} F_D\left(t', \tau\cdot\nu\right) &= \mathcal{H}\left(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}\right) \\ &= \left(F_{D'}\left(t'\right), 0\dots,0\right) + \tau^\sigma \mathcal{H}_1\left(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}\right) + \tau^{1-\sigma}\mathcal{H}_2\left(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}\right) \end{aligned}$$

où les fonctions $\mathcal{H}_i(t', \nu, u, v)$ ont les mêmes propriétés que la fonction $\mathcal{H}$. Par l'hypothèse de récurrence, étant donné que la codimension des faces de $\widetilde{\pi}^{n-p}$ est inférieure ou égale à $n-p = q-1$, la fonction $F_D(t', \tau\cdot\nu)$ se prolonge continûment en tous les points $t = (t', \tau\cdot\nu)$ tels que

$$t' \in K',\ \nu \in \partial\widetilde{\pi}^{n-p},\ -\varepsilon < \tau < 0.$$

La fonction $\mathcal{H}(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma})$ est donc continue dans le compact

$$K' \times \overline{\widetilde{\pi}^{n-p}} \times [-\varepsilon, 0].$$

On en conclut donc qu'il existe deux constantes $C_1,\ C_2 > 0$ telles que pour tout (t', ν, τ) dans ce compact, on ait

$$\left\|\mathcal{H}_i\left(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}\right)\right\| \le C_i$$

$(i = 1, 2)$. Et donc

$$\left\|F_D\left(t', \tau\cdot\nu\right) - \left(F_{D'}\left(t'\right), 0\dots,0\right)\right\| \le C_1|\tau|^\sigma + C_2|\tau|^{1-\sigma}.$$

L'ensemble $\{t = (t', t_p, \dots, t_n) \in \pi^n \mid t' \in K', -\varepsilon < t_p < 0\}$ est bien un voisinage de t^0 dans π^n, et pour tout t dans cet ensemble, on a

$$\begin{aligned} \left\|F_D(t) - \left(F_{D'}\left(t'^0\right), 0\dots,0\right)\right\| &\le \left\|F_D(t) - \left(F_{D'}\left(t'\right), 0\dots,0\right)\right\| \\ &\quad + \left\|\left(F_{D'}\left(t'\right), 0\dots,0\right) - \left(F_{D'}\left(t'^0\right), 0\dots,0\right)\right\| \\ &\le C_1|t_p|^\sigma + C_2|t_p|^{1-\sigma} + C_0\left\|t' - t'^0\right\|, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du fait que la fonction $F_{D'}(t')$ est lipschitzienne dans le compact K'. La fonction $F_D(t)$ est donc bien continue au point t^0. □

4.3 Les pseudo-chocs

Dans cette section, on rappelle des résultats connus sur le comportement du système de Schlesinger au voisinage des singularités que Garnier appelle «pseudo-chocs », c'est-à-dire lorsque plusieurs t_i viennent se confondre. On ne se limite pas ici au cas réel, ni aux systèmes fuchsiens dont la monodromie vérifie une condition du type (4.1). Ces résultats sont une partie connue du travail de Garnier. Ils ont été modernisés et approfondis par M. Sato, T. Miwa et M. Jimbo dans [SMJ79]. On les adapte à la situation qui nous intéresse : le but de cette section est d'obtenir la dépendance en τ de la fonction $F_D(t', \tau \cdot \nu)$ au point $\tau = 0$. On donne à l'annexe A les démonstrations des principaux résultats de [SMJ79] et [Jim82] que l'on va utiliser, et on établit dans ce chapitre uniquement les propriétés nouvelles dont on a besoin.

On considère une famille isomonodromique de systèmes fuchsiens non résonnants et normalisés en l'infini

$$\frac{dY}{dx} = A(x,t)Y, \qquad \text{où } A(x,t) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i(t)}{x - t_i}$$

où les matrices $(A_1(t), \dots, A_{n+2}(t))$ sont solutions du système de Schlesinger (1.20). On suppose, ce qui n'est pas restrictif, que les matrices $A_i(t)$ $(i = 1, \dots, n+2)$ sont à trace nulle. On note

$$-\frac{\theta_i}{2}, \quad \frac{\theta_i}{2}$$

les valeurs propres de la matrice $A_i(t)$, qui sont constantes, ainsi que

$$A_\infty = -\sum_{i=1}^{n+2} A_i(t) = \tfrac{1-\theta_\infty}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On fixe un entier p, $1 \le p \le n$, et on étudie le comportement des matrices $A_i(t)$ lorsque $t_p, \dots, t_n$ tendent vers 0, les autres variables $t_1, \dots, t_{p-1}$ demeurant à distance mutuelle supérieure à un nombre strictement positif. On fait le changement de variables (4.10). Le système précédent s'écrit alors

$$\frac{dY}{dx} = \left(\sum_\alpha \frac{A_\alpha(t', \tau \cdot \nu)}{x - t_\alpha} + \sum_\beta \frac{A_\beta(t', \tau \cdot \nu)}{x - \tau \nu_\beta} \right) Y. \tag{4.12}$$

Dans cette section (à l'exception de la proposition 4.13), on va supposer les variables $(t', \nu) \in \mathcal{B}^{p-1} \times \mathcal{B}^{n-p}$ fixées. On pose

$$\begin{aligned} r &= \min \{|t_\alpha|,\ \alpha = 1, \dots, p-1, n+2\} > 0, \\ R &= \max \{|\nu_\beta|,\ \beta = p, \dots, n\} \ge 1. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dès que $|\tau| < r/R$, le n-uplet $(t', \tau \cdot \nu)$ est dans $\mathcal{B}^n$. En fixant (t', ν), on va donc pour chaque valeur t'^0 de t', limiter l'étude le long de toute droite passant par le point $(t'^0, 0, \dots, 0)$ et contenue dans le sous-espace $t' = t'^0$. Ces droites sont paramétrées par la variable ν. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on ne note plus la dépendance en t' et en ν. Les transformations isomonodromiques de paramètre τ du système (4.12) sont données par le système de Schlesinger restreint :

$$\begin{aligned} \frac{dA_\alpha}{d\tau} &= \sum_\beta \frac{\nu_\beta}{\tau \nu_\beta - t_\alpha} [A_\beta(\tau), A_\alpha(\tau)] \\ \frac{dA_\beta}{d\tau} &= \sum_\alpha \frac{\nu_\beta}{\tau \nu_\beta - t_\alpha} [A_\alpha(\tau), A_\beta(\tau)] + \frac{1}{\tau} \sum_{\beta' (\neq \beta)} [A_{\beta'}(\tau), A_\beta(\tau)]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.3.1 Les solutions du système de Schlesinger

On étudie le comportement des solutions du système de Schlesinger restreint (4.14) lorsque τ tend vers 0. Ceci nous permettra ensuite d'en déduire celui des solutions du système fuchsien (4.12). Le théorème suivant est établi par Garnier dans [Gar26] quand $p = n$, et dans [Gar28] dans le cas réel pour p quelconque. Il est repris et généralisé dans [SMJ79], en particulier aux autres changements de variables de la remarque 4.9 et aux systèmes de dimension quelconque.

Théorème 4.10. *Soient A^0_α ($\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$) et A^0_β ($\beta = p, \dots, n+1$) des matrices constantes dont les valeurs propres sont respectivement $\left(-\frac{\theta_\alpha}{2}, \frac{\theta_\alpha}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\theta_\beta}{2}, \frac{\theta_\beta}{2}\right)$. On suppose de plus que*

$$\sum_\alpha A^0_\alpha + \sum_\beta A^0_\beta = -A_\infty$$

et que les valeurs propres μ et $-\mu$ de la matrice

$$\Lambda := \sum_\beta A^0_\beta$$

vérifient : $0 < 2\Re(\mu) < 1$. On note $\sigma = 2\Re(\mu)$. Soient σ_1 et K deux constantes telles que

$$\sigma < \sigma_1 < 1 \qquad \text{et} \qquad |A^0_\alpha| < K,\ |A^0_\beta| < K.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que dans tout secteur $S_{\varepsilon,\varphi} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid 0 < |\tau| < \varepsilon,\ |\arg \tau| < \varphi\}$, il existe une unique solution $A_\alpha(\tau)$ ($\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$), $A_\beta(\tau)$ ($\beta = p, \dots, n+1$) du système (4.14) vérifiant :

$$\begin{aligned} &|A_\alpha(\tau) - A^0_\alpha| \le K|\tau|^{1-\sigma_1}, \\ &|\tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau)\tau^\Lambda - A^0_\beta| \le K|\tau|^{1-\sigma_1}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

On donne la démonstration du théorème (4.10) à l'annexe A. La proposition suivante, qui n'est pas dans [SMJ79], se déduit aisément de cette démonstration. On pose

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_\alpha(\tau) &= \tau^{-\Lambda} A_\alpha(\tau)\tau^\Lambda \\ \widetilde{A}_\beta(\tau) &= \tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau)\tau^\Lambda. \end{aligned}$$

Proposition 4.11. *Les matrices $A_\alpha(\tau)$ et $A_\beta(\tau)$ du théorème 4.10, ainsi que les matrices $\widetilde{A}_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{A}_\beta(\tau)$ vérifient dans tout secteur $S_{\varepsilon,\varphi}$, où $\varepsilon > 0$ est donné au théorème 4.10, les propriétés suivantes*

$$A_\alpha(\tau) - A^0_\alpha = \tau^{1-\sigma}\mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}) \tag{4.16}$$

$$\tau^{-\Lambda}\left(A_\alpha(\tau) - A^0_\alpha\right)\tau^\Lambda = \tau^{1-\sigma}\mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}) \tag{4.17}$$

$$\tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau)\tau^\Lambda - A^0_\beta = \tau^{1-\sigma}\mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}) \tag{4.18}$$

$$A_\beta(\tau) = \tau^{-\sigma}\mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}) \tag{4.19}$$

où $\mathcal{H}(u, v)$ désigne toute fonction holomorphe en (u, v) dans un voisinage du point $(0, 0)$ contenu dans $\mathbb{C}^2$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la propriété (4.19) est une conséquence immédiate de (4.18), puisque si une matrice $A(\tau)$ est holomorphe en $\tau^\sigma,\ \tau^{1-\sigma}$, alors on a

$$\tau^{-\Lambda}A(\tau)\tau^{\Lambda} = \tau^{-\sigma}\mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}).$$

À la démonstration du théorème 4.10, qui se trouve à l'annexe A, on construit la solution $A_\alpha(\tau)$ et $A_\beta(\tau)$ du système (4.14) par intégrations successives. On rappelle cette construction. Il faut récrire le système de Schlesinger restreint (4.14) avec les matrices $A_\alpha(\tau)$ $(\alpha = 1, \dots, p-1, n+2)$, $\widetilde{A}_\beta(\tau)$ $(\beta = p, \dots, n+1)$ comme inconnues :

$$\begin{aligned}
\frac{dA_\alpha}{d\tau} &= \sum_\beta \frac{\nu_\beta}{\tau\nu_\beta - t_\alpha}\left[\tau^\Lambda \widetilde{A}_\beta(\tau)\tau^{-\Lambda}, A_\alpha(\tau)\right] \\
\frac{d\widetilde{A}_\beta}{d\tau} &= \sum_\alpha \frac{\nu_\beta}{\tau\nu_\beta - t_\alpha}\left[\tau^{-\Lambda} A_\alpha(\tau)\tau^{\Lambda}, \widetilde{A}_\beta(\tau)\right] \\
&\quad + \frac{1}{\tau}\sum_{\beta'}\left[\left(\widetilde{A}_{\beta'}(\tau) - A^0_{\beta'}\right), \widetilde{A}_\beta(\tau)\right].
\end{aligned}$$

On construit la solution recherchée en procédant par itération. On pose

$$A^{(0)}_\alpha(\tau) = A^0_\alpha, \qquad \widetilde{A}^{(0)}_\beta(\tau) = A^0_\beta,$$

et pour tout entier naturel k, on définit les matrices $A^{(k)}_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau)$ à partir de $A^{(k-1)}_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{A}^{(k-1)}_\beta(\tau)$ par :

$$\begin{aligned}
A^{(k)}_\alpha(\tau) &= A^0_\alpha + \sum_\beta \int_0^\tau \frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha}\left[s^\Lambda \widetilde{A}^{(k-1)}_\beta(s)s^{-\Lambda}, A^{(k-1)}_\alpha(s)\right] ds \\
\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau) &= A^0_\beta + \sum_\alpha \int_0^\tau \frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha}\left[s^{-\Lambda} A^{(k-1)}_\alpha(s)s^{\Lambda}, \widetilde{A}^{(k-1)}_\beta(s)\right] ds \\
&\quad + \sum_{\beta'} \int_0^\tau \frac{1}{s}\left[\left(\widetilde{A}^{(k-1)}_{\beta'}(s) - A^0_{\beta'}\right), \widetilde{A}^{(k-1)}_\beta(s)\right] ds.
\end{aligned}$$

Les intégrales sont calculées le long du segment joignant 0 et τ :

$$\{s = re^{i\psi} \mid 0 < r < |\tau|,\ \psi = \arg\tau\}.$$

On a montré ensuite par récurrence que les matrices $A^{(k)}_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau)$ sont bien définies et qu'elles convergent uniformément dans tout secteur $S_{\varepsilon,\varphi}$, où ε est bien choisi. Leurs limites constituent la solution recherchée. Pour montrer la proposition 4.11, il suffit donc de montrer que les matrices $A^{(k)}_\alpha(\tau)$ et $A^{(k)}_\beta(\tau)$ vérifient pour tout k les propriétés (4.16), (4.17) et (4.18).

On procède également par récurrence. L'initialisation est immédiate. Si les matrices $A^{(k-1)}_\alpha(\tau)$ et $A^{(k-1)}_\beta(\tau)$ vérifient les propriétés (4.16) et (4.18), alors on voit que les matrices $A^{(k)}_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau)$ sont obtenues par l'intégration de fonctions de la forme

$$\tau^{-\sigma}\mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}).$$

Elles sont donc elles-mêmes de la forme

$$\tau^{1-\sigma}\mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}),$$

i.e. les matrices $A_\alpha^{(k)}(\tau)$ et $A_\beta^{(k)}(\tau)$ vérifient les propriétés (4.16) et (4.18). Elles vérifient également la propriété (4.17), étant donné qu'on a

$$\tau^{-\Lambda}\left(A_\alpha(\tau)-A_\alpha^0\right)\tau^\Lambda=\sum_\beta\int_0^\tau\frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta-t_\alpha}\left[\left(\frac{s}{\tau}\right)^\Lambda\widetilde{A}_\beta^{(k-1)}(s)\left(\frac{s}{\tau}\right)^{-\Lambda},\tau^{-\Lambda}A_\alpha^{(k-1)}(s)\tau^\Lambda\right]ds.$$

La propriété (4.17) est donc une conséquence de (4.16) et (4.18). □

Garnier [Gar26] établit le résultat suivant, qui ne figure pas sous une forme aussi générale dans [SMJ79].

Proposition 4.12. *Toute solution $A_\alpha(\tau)$ ($\alpha=1,\dots,p-1,n+2$), $A_\beta(\tau)$ ($\beta=p,\dots,n,n+1$) du système de Schlesinger restreint* (4.14) *admet une limite quand $\tau\to 0$ au sens de* (4.15).

Je ne donne pas la démonstration (compliquée) de Garnier. Comme on se limite au cas des systèmes de taille 2×2, cas où le problème de Riemann–Hilbert admet toujours une solution, on déduira aisément cette proposition de la proposition 4.15, c'est-à-dire de la monodromie des systèmes fuchsiens associés à chaque solution du système de Schlesinger restreint (4.14). On n'utilisera la proposition 4.12 qu'à la section suivante.

On donne à présent la dépendance en t' et en ν au voisinage de $\tau=0$ des matrices $A_\alpha(t',\tau\cdot\nu)$ et $A_\beta(t',\tau\cdot\nu)$. On sait déjà que lorsque $\tau\neq 0$, ces matrices sont méromorphes en t' et en ν tant que la variable $t=(t',\tau\cdot\nu)$ reste dans $\mathcal{B}^n$ (par la propriété de Painlevé). La proposition suivante permet d'étendre ce résultat aux matrices

$$\begin{aligned}A_\alpha^0&=A_\alpha^0(t',\nu)\\A_\beta^0&=A_\beta^0(t',\nu)\\\Lambda&=\Lambda(t',\nu).\end{aligned}$$

Sa démonstration est donnée à l'annexe A.

Proposition 4.13. *Les matrices $A_\alpha^0(t',\nu)$ ($\alpha=1,\dots,p-1,n+2$) et $\Lambda(t',\nu)$ sont solutions du système de Schlesinger suivant*

$$\begin{cases}d'A'_\alpha&=\displaystyle\sum_{\alpha'\neq\alpha}\left[A'_{\alpha'},A'_\alpha\right]d'\log(t_\alpha-t_{\alpha'})\\d_\nu A'_\alpha&=0\end{cases}$$

où on a posé $A_{n+1}^0(t',\nu):=\Lambda(t',\nu)$, et où d' désigne la différentiation par rapport à $t'=(t_1,\dots,t_{p-1})$ et d_ν la différentiation par rapport à $\nu=(\nu_{p+1},\dots,\nu_n)$.

Les matrices $A_\alpha^0(t',\nu)$ ($\alpha=1,\dots,p-1,n+2$) et $A_\beta^0(t',\nu)$ ($\beta=p,\dots,n+1$) sont solutions du système

$$\begin{cases}d'A_\beta^0&=-\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left[A_\beta^0,A_\alpha^0\right]d'\log(t_\alpha)\\d_\nu A_\beta^0&=\displaystyle\sum_{\beta'\neq\beta}\left[A_{\beta'}^0,A_\beta^0\right]d_\nu\log(\nu_\beta-\nu_{\beta'})\end{cases}.$$

En particulier, les matrices $A_\alpha^0(t',\nu)$ et $\Lambda(t',\nu)$ sont indépendantes de ν et sont solutions du système de Schlesinger (1.20) de dimension $p-1$.

4.3.2 Les solutions du système fuchsien

Pour toute matice fondamentale de solutions $\mathbf{Y}(x,\tau)$ du système (4.12), la matrice $\widetilde{\mathbf{Y}}(y,\tau) = \tau^{-\Lambda}\mathbf{Y}(\tau y,\tau)$ est une matrice fondamentale de solutions du système fuchsien non résonnant

$$\frac{dY}{dy} = \widetilde{A}(y,\tau)Y, \tag{4.20}$$

où la matrice $\widetilde{A}(y,\tau)$ est définie par

$$\widetilde{A}(y,\tau) = \sum_\alpha \frac{\widetilde{A}_\alpha(\tau)}{y - \dfrac{t_\alpha}{\tau}} + \sum_\beta \frac{\widetilde{A}_\beta(\tau)}{y-\nu_\beta} = \tau\left(\tau^{-\Lambda}A(\tau y,\tau)\tau^{\Lambda}\right).$$

Le système (4.20) n'est pas normalisé en l'infini.

Proposition 4.14. *(i) La solution fondamentale $\mathbf{Y}_\infty(x,\tau)$ normalisée en l'infini du système (4.12) est holomorphe en τ^σ, $\tau^{1-\sigma}$ au point $\tau = 0$ pour tout $x \neq 0$ fixé. Sa limite $\lim\limits_{\tau\to 0}\mathbf{Y}_\infty(x,\tau)$ existe donc et est solution du système fuchsien*

$$\frac{dY}{dx} = \left(\sum_\alpha \frac{A^0_\alpha}{x-t_\alpha} + \frac{\Lambda}{x}\right)Y. \tag{4.21}$$

(ii) La solution fondamentale $\widetilde{\mathbf{Y}}(y,\tau) := \tau^{-\Lambda}\mathbf{Y}_\infty(\tau y,\tau)$ du système (4.20) est holomorphe en τ^σ, $\tau^{1-\sigma}$ au point $\tau = 0$ pour tout $y \in \mathbb{C}$ fixé. Sa limite $\lim\limits_{\tau\to 0}\widetilde{\mathbf{Y}}(y,\tau)$ existe donc et est solution du système fuchsien

$$\frac{dY}{dy} = \sum_\beta \frac{A^0_\beta}{y-\nu_\beta}\,Y. \tag{4.22}$$

Démonstration. On ne montre que l'assertion (ii) ; l'assertion (i) se montre de la même manière. On calcule la dérivée de la matrice $\widetilde{\mathbf{Y}}(y,\tau)$ par rapport à τ, pour y fixé. On suppose que $|\tau| < r/|y|$. Sachant que

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\mathbf{Y}_\infty(x,t) = -\frac{A_i(t)}{x-t_i}\,\mathbf{Y}_\infty(x,t),$$

(lemme 1.29), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\mathbf{Y}_\infty(\tau y,\tau) &= \left(yA(\tau y,\tau) - \sum_\beta \frac{\nu_\beta A_\beta(\tau)}{\tau y - \tau\nu_\beta}\right)\mathbf{Y}_\infty(\tau y,\tau)\\ &= \left(y\sum_\alpha \frac{A_\alpha(\tau)}{\tau y - t_\alpha} + \frac{1}{\tau}\sum_\beta A_\beta(\tau)\right)\mathbf{Y}_\infty(\tau y,\tau).\end{aligned}$$

Et comme $A_\infty = -\sum\limits_\alpha A_\alpha(\tau) - \sum\limits_\beta A_\beta(\tau) = -\sum\limits_\alpha A^0_\alpha - \Lambda$, on obtient

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{\mathbf{Y}}(y,\tau) = \left(-\frac{1}{\tau}\sum_\alpha \tau^{-\Lambda}\left(A_\alpha(\tau) - A^0_\alpha\right)\tau^{\Lambda} + y\sum_\alpha \frac{\tau^{-\Lambda}A_\alpha(\tau)\tau^{\Lambda}}{\tau y - t_\alpha}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}(y,\tau),$$

c'est-à-dire, vu (4.17)

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{\mathbf{Y}}(y,\tau) = \tau^{-\sigma}\mathcal{H}\left(y,\tau^{\sigma},\tau^{1-\sigma}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}(y,\tau),$$

où $\mathcal{H}(y,u,v)$ désigne une fonction holomorphe au voisinage de $(y_0,0,0)$ pour tout $y_0 \in \mathbb{C}$. On en conclut donc qu'il existe une matrice

$$Q(y,\tau) = I_2 + \tau^{1-\sigma}\mathcal{H}_1\left(y,\tau^{\sigma},\tau^{1-\sigma}\right),$$

où la fonction $\mathcal{H}_1$ a les mêmes propriétés que $\mathcal{H}$, et une matrice $\widetilde{\mathbf{Y}}^0(y)$ indépendante de τ telles que

$$\widetilde{\mathbf{Y}}(y,\tau) = Q(y,\tau)\widetilde{\mathbf{Y}}^0(y).$$

Il ne reste donc qu'à prouver que la matrice $\widetilde{\mathbf{Y}}^0(y)$ est solution du système fuchsien (4.22). Pour cela, il suffit de vérifier que la matrice

$$\widetilde{A}(y,\tau) = \sum_{\alpha}\frac{\widetilde{A}_\alpha(\tau)}{y-\dfrac{t_\alpha}{\tau}} + \sum_{\beta}\frac{\widetilde{A}_\beta(\tau)}{y-\nu_\beta}$$

tend en $\tau = 0$ vers la matrice

$$\sum_{\beta}\frac{A^0_\beta}{y-\nu_\beta}.$$

Ceci est évident, étant donné que la matrice

$$\sum_{\alpha}\frac{\widetilde{A}_\alpha(\tau)}{y-\dfrac{t_\alpha}{\tau}} = \tau^{1-\sigma}\sum_{\alpha}\frac{\tau^{\sigma}\widetilde{A}_\alpha(\tau)}{\tau y - t_\alpha}$$

tend vers la matrice nulle par l'assertion (4.17) de la proposition 4.11. Pour la deuxième partie de l'assertion (i), on aurait montré de même que la matrice

$$A(x,\tau) = \sum_{\alpha}\frac{A_\alpha(\tau)}{x-t_\alpha} + \sum_{\beta}\frac{A_\beta(\tau)}{x-\tau\nu_\beta}$$

tend en $\tau = 0$ vers la matrice

$$\sum_{\alpha}\frac{A^0_\alpha}{x-t_\alpha} + \frac{\Lambda}{x}$$

en remarquant que

$$\begin{aligned}\sum_{\beta}\frac{A_\beta(\tau)}{x-\tau\nu_\beta} &= \frac{1}{x}\sum_{\beta}A_\beta(\tau) + \tau\sum_{\beta}\frac{\nu_\beta A_\beta(\tau)}{x(x-\tau\nu_\beta)}\\ &= -\frac{1}{x}\left(A_\infty + \sum_{\alpha}A_\alpha(\tau)\right) + \tau^{1-\sigma}\sum_{\beta}\frac{\nu_\beta\tau^{\sigma}A_\beta(\tau)}{x(x-\tau\nu_\beta)}.\end{aligned}$$

□

Le système fuchsien (4.21) est non résonnant et normalisé en l'infini, étant donné que

$$-\sum_{\alpha}A^0_\alpha - \Lambda = -\sum_{\alpha}A^0_\alpha - \sum_{\beta}A^0_\beta = A_\infty.$$

Soit $\mathbf{Y}^0_\infty(x)$ sa matrice fondamentale de solutions normalisée en l'infini. Comme $0 < \sigma < 1$, le comportement local de $\mathbf{Y}^0_\infty(x)$ au voisinage des singularités du système (4.21) est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^0_\infty(x) &= \left(S^0_\alpha + \mathcal{O}(x - t_\alpha)\right)(x - t_\alpha)^{L_\alpha} \cdot C^0_\alpha && x \to t_\alpha \\ &= (I_2 + \mathcal{O}(x))\, x^\Lambda \cdot C^0 && x \to 0 \\ &= \left(I_2 + \mathcal{O}\left(x^{-1}\right)\right) x^{-L_\infty} && x \to \infty \end{aligned} \tag{4.23}$$

où les matrices S^0_α, C^0_α et C^0 sont inversibles, les matrices L_α désignent comme précédemment les diagonalisées de $A_\alpha(\tau)$ (et donc aussi de A^0_α) et $L_\infty = A_\infty$. Le système (4.22) n'est pas normalisé en l'infini, puisque la matrice Λ n'est pas diagonale, mais il existe de même une unique matrice fondamentale de solutions $\widetilde{\mathbf{Y}}^0_\infty(y)$ dont le comportement local est donné par

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{Y}}^0_\infty(y) &= \left(\widetilde{S}^0_\beta + \mathcal{O}(y - \nu_\beta)\right)(y - \nu_\beta)^{L_\beta} \cdot \widetilde{C}^0_\beta && y \to \nu_\beta \\ &= \left(I_2 + \mathcal{O}\left(y^{-1}\right)\right) y^{-\Lambda} && y \to \infty \end{aligned} \tag{4.24}$$

avec $\widetilde{S}^0_\beta$, $\widetilde{C}^0_\beta \in GL(2, \mathbb{C})$. La proposition suivante se trouve dans [Jim82]. On ne donne pas sa démonstration, qui procède des même méthodes que celle du théorème 4.10.

Proposition 4.15. *On a*

$$\lim_{\tau \to 0} \mathbf{Y}_\infty(x, \tau) = \mathbf{Y}^0_\infty(x), \quad \lim_{\tau \to 0} \tau^{-\Lambda} \mathbf{Y}_\infty(\tau y, \tau) = \widetilde{\mathbf{Y}}^0_\infty(y) \cdot C^0.$$

De plus, pour $\tau \neq 0$, le comportement local de la matrice fondamentale $\mathbf{Y}_\infty(x, \tau)$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\infty(x, \tau) &= (S_\alpha(\tau) + \mathcal{O}(x - t_\alpha))(x - t_\alpha)^{L_\alpha} \cdot C^0_\alpha && x \to t_\alpha \\ &= \left(\widetilde{S}_\beta(\tau) + \mathcal{O}(x - \tau\nu_\beta)\right)(x - \tau\nu_\beta)^{L_\beta} \cdot \widetilde{C}^0_\beta \cdot C^0 && x \to \tau\nu_\beta \\ &= \left(I_2 + \mathcal{O}\left(x^{-1}\right)\right) x^{-L_\infty} && x \to \infty \end{aligned} \tag{4.25}$$

où les matrices $S_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{S}_\beta(\tau)$ sont inversibles, et les matrices C^0, C^0_α et $\widetilde{C}^0_\beta$ sont définies ci-dessus.

La proposition 4.15 nous permet d'établir simplement la proposition 4.12.

Démonstration de la proposition 4.12. Soit une solution quelconque $A_\alpha(\tau)$ ($\alpha = 1, \ldots, p-1, n+2$), $A_\beta(\tau)$ ($\beta = p, \ldots, n, n+1$) du système de Schlesinger restreint (4.14) telle que la somme $\sum_\alpha A_\alpha(\tau) + \sum_\beta A_\beta(\tau)$ soit constante et diagonale. Soit $\mathbf{Y}_\infty(x, \tau)$ l'unique solution fondamentale normalisée en l'infini du système fuchsien (4.12) défini par les matrices $A_\alpha(\tau)$ et $A_\beta(\tau)$. Cette solution est M-invariante. Il existe donc des matrices inversibles C^0, C^0_α et $\widetilde{C}^0_\beta$ indépendantes de τ telles que le comportement local de la solution $\mathbf{Y}_\infty(x, \tau)$ soit donné par (4.25). On définit la matrice Λ de manière à ce que les problèmes de Riemann–Hilbert (4.23) et (4.24) vérifient bien

$$M_\infty\left(\mathbf{Y}^0_\infty\right) \cdot (C^0)^{-1} e^{2i\pi\Lambda} C^0 \cdot M_{p-1}\left(\mathbf{Y}^0_\infty\right) \cdots M_1\left(\mathbf{Y}^0_\infty\right) = I_2,$$

et

$$e^{2i\pi\Lambda} \cdot \widetilde{M}_{n+1}\left(\widetilde{\mathbf{Y}}^0_\infty\right) \cdots \widetilde{M}_p\left(\widetilde{\mathbf{Y}}^0_\infty\right) = I_2,$$

et que les valeurs propres de Λ soit opposées : μ et $-\mu$ et vérifient $0 < 2\Re(\mu) < 1$. Les deux conditions précédentes sont équivalentes par la relation

$$M_{n+3}\left(\mathbf{Y}_\infty\right)\cdots M_1\left(\mathbf{Y}_\infty\right) = I_2.$$

Alors, comme on considère des systèmes de taille 2×2, on sait que les problèmes de Riemann–Hilbert (4.23) et (4.24) admettent respectivement d'uniques solutions $\mathbf{Y}^0_\infty(x)$ et $\widetilde{\mathbf{Y}}^0_\infty(y)$. On définit les matrices constantes A^0_α $(\alpha = 1,\dots,p-1,n+2)$, A^0_β $(\beta = p,\dots,n,n+1)$ respectivement associées aux solutions $\mathbf{Y}^0_\infty(x)$ et $\widetilde{\mathbf{Y}}^0_\infty(y)$. Par le théorème 4.10, ces matrices A^0_α, A^0_β sont les conditions initiales au sens de (4.15) d'une unique solution du système de Schlesinger restreint (4.14). Cette solution est nécessairement la solution $A_\alpha(\tau)$, $A_\beta(\tau)$ par unicité de la matrice $\mathbf{Y}_\infty(x,\tau)$ satisfaisant le problème de Riemann–Hilbert (4.25). □

4.4 Le cas réel

On considère à présent la limite d'une famille isomodromique de systèmes fuchsiens $(A_D(t), t\in U)$, associée à un jeu de directions orientées $D\in\mathcal{D}^n$ et décrite par le système de Schlesinger, c'est-à-dire une famille de l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}^n_D$. L'ouvert simplement connexe U est un voisinage contenu dans $\mathcal{B}^n$ du simplexe π^n

$$\pi^n = \{(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n \mid t_1<\cdots<t_n<0\},$$

tel que la solution du système de Schlesinger $(A_{D,1}(t),\dots,A_{D,n+2}(t))$ correspondant à cette famille est holomorphe dans U. D'après la proposition 4.12, cette solution admet une limite

$$A^0_{D,\alpha}(t')\ (\alpha=1,\dots,p-1,n+2),\qquad A^0_{D,\beta}(t',\nu)\ (\beta=p,\dots,n+1)$$

au sens de (4.15) lorsque τ tend vers 0. D'après la proposition 4.13, les matrices $A^0_{D,\alpha}(t')$ $(\alpha=1,\dots,p-1,n+2)$ et $\Lambda(t')$ $(t'\in U')$ sont solutions du système de Schlesinger de dimension $p-1$.

D'après la propostion 4.14, pour chaque valeur de $(t',\nu)\in U'\times\widetilde{U}$, le système fuchsien $A_D(t',\tau\cdot\nu)$ tend lorsque τ tend vers 0 vers le système fuchsien limite indépendant de ν suivant

$$\frac{dY}{dx} = \left(\sum_\alpha \frac{A^0_\alpha(t')}{x-t_\alpha} + \frac{\Lambda(t')}{x}\right)Y. \qquad (A^0_D(t'))$$

La famille de systèmes fuchsiens limites $\left(A^0_D(t'), t'\in U'\right)$ est donc isomonodromique et décrite par le système de Schlesinger. Les systèmes $A^0_D(t')$ sont non résonnants. Pour tout $\alpha=1,\dots,p-1,n+2$, les valeurs propres de la matice $A^0_{D,\alpha}(t')$ sont indépendantes de t' et valent

$$-\frac{\theta_\alpha}{2},\ \frac{\theta_\alpha}{2}$$

et les valeurs propres de la matrice $\Lambda(t')$ sont $-\mu$ et μ, avec $\sigma = 2\Re(\mu)$. Les systèmes $A^0_D(t')$ sont normalisés en l'infini et ils ont la même normalisation que les systèmes $A_D(t)$.

Lemme 4.16. *Soient un jeu de directions orientées $D\in\mathcal{D}^n$ et un entier p, $1\le p\le n$. La famille isomodromique*

$$\left(A^0_D(t'), t'\in\pi^{p-1}\right)$$

est contenue dans l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}_{D'}^{p-1}$ *des systèmes fuchsiens associés au jeu de directions orientées* $D' \in \mathcal{D}^{p-1}$ *défini par*

$$D' = (D_1, \ldots, D_{p-1}, D_{n+1}, D_{n+2}, D_{n+3}), \tag{4.26}$$

On note donc le système $A_D^0(t')$ *par* $A_{D'}(t')$.

De plus, la fonction « rapports des longueurs » $F_{D'}(t') = (r'_1(t'), \ldots, r'_{p-1}(t'))$ *associée au jeu de directions orientées* $D' \in \mathcal{D}^{p-1}$ *est donnée par*

$$r'_\alpha(t') = \frac{\displaystyle\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} L_1\left(\mathbf{Y}_\infty^0(x,t') \cdot C_0\right)^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 L_1\left(\mathbf{Y}_\infty^0(x,t') \cdot C_0\right)^2 dx} \tag{4.27}$$

($\alpha = 1, \ldots, p-1$), où la solution fondamentale $\mathbf{Y}_\infty^0(x,t')$ *est la solution normalisée en l'infini du système* $A_{D'}(t')$ *et la matrice* C_0 *est définie au lemme 4.3.*

Démonstration. Pour la première partie du lemme, il suffit de vérifier que la monodromie du système $A_D^0(t')$ est engendrée par les matrices M_α^0 définies par

$$M_\alpha^0 := M_\alpha = D_\alpha D_{\alpha-1}^{-1} \qquad (\alpha = 1, \ldots, p-1, n+2, n+3)$$

et

$$M_{n+1}^0 := D_{n+1} D_{p-1}^{-1}.$$

Par la proposition 4.15, pour tout $\alpha = 1, \ldots, p-1, n+2$, les monodromies des solutions fondamentales $\mathbf{Y}_\infty(x,\tau)$ et $\mathbf{Y}_\infty^0(x)$ autour de la singularité t_α sont les mêmes :

$$M_\alpha\left(\mathbf{Y}_\infty^0\right) = C_\alpha^{0\,-1} e^{2i\pi L_\alpha} C_\alpha^0 = M_\alpha\left(\mathbf{Y}_\infty\right)$$

et donc, vu l'expression (4.1) et le lemme 4.3,

$$M_\alpha\left(\mathbf{Y}_\infty^0\right) = C_0 M_\alpha C_0^{-1} = C_0 D_\alpha D_{\alpha-1}^{-1} C_0^{-1}.$$

De même, en $t_{n+3} = \infty$:

$$M_\infty\left(\mathbf{Y}_\infty^0\right) = e^{2i\pi L_\infty} = C_0 D_{n+3} D_{n+2}^{-1} C_0^{-1}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la monodromie autour de la singularité $t_{n+1} = 0$:

$$\begin{aligned} M_{n+1}\left(\mathbf{Y}_\infty^0\right) &= \left(M_{p-1}\left(\mathbf{Y}_\infty^0\right) \cdots M_1\left(\mathbf{Y}_\infty^0\right) M_{n+3}\left(\mathbf{Y}_\infty^0\right) M_{n+2}\left(\mathbf{Y}_\infty^0\right)\right)^{-1} \\ &= \left(C_0 D_{p-1} D_{p-2}^{-1} D_{p-2} \cdots D_{n+1}^{-1} C_0^{-1}\right)^{-1} \\ &= C_0 D_{n+1} D_{p-1}^{-1} C_0^{-1}. \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $\alpha = 1, \ldots, p-1, n+1, n+2, n+3$, on a

$$M_\alpha\left(\mathbf{Y}_\infty^0\right) = C_0 M_\alpha^0 C_0^{-1}$$

où la matrice de conjugaison C_0 est la même qu'entre les matrices $M_i\left(\mathbf{Y}_\infty\right)$ et les matrices M_i. Grâce à cela, en procédant exactement comme à la démonstration du lemme 4.3, on obtient l'expression (4.27) des rapports $r'_\alpha(t')$. □

On déduit en particulier de ce lemme que les valeurs propres de la matrice $\Lambda(t')$ sont réelles et valent

$$-\frac{\sigma}{2},\ \frac{\sigma}{2}$$

où $\sigma\pi$ est la mesure de l'angle entre les directions orientées D_{p-1} et D_{n+1} telle que

$$0 < \sigma < 1.$$

Quitte à diminuer l'ouvert simplement connexe U', on peut supposer grâce à la proposition 3.15 que les matrices $A^0_{D,\alpha}(t')$ et $\Lambda(t')$ sont holomorphes dans U'.

Lemme 4.17. *Soient un jeu de directions orientées $D \in \mathcal{D}^n$ et un entier p, $1 \leq p \leq n$. Pour tout $(t', \nu) \in U' \times \widetilde{U}$ fixé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le prolongement de la fonction « rapports des longueurs » $\underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu)$ soit holomorphe en τ^σ, $\tau^{1-\sigma}$ au point $\tau = 0$ dans tout secteur $S_{\varepsilon,\varphi}$. De plus, on a*

$$\lim_{\tau \to 0} \underline{F}_D\left(t', \tau, \tau\nu_{p+1}, \ldots, \tau\nu_n\right) = \left(\underline{F}_{D'}\left(t'\right), 0, \ldots, 0\right)$$

où le jeu de directions orientées $D' \in \mathcal{D}^{p-1}$ est donné par (4.26).

Démonstration. On choisit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout α on ait $|t_\alpha| > \varepsilon$. Considérons l'expression (4.6) de la fonction $\underline{F}_D(t)$ à partir des solutions fondamentales $\mathbf{Y}_i(x, t', \tau \cdot \nu)$ définies par (4.5) : pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$r_i(t', \tau \cdot \nu) = \pm \frac{\lambda_i(t', \tau \cdot \nu)}{\lambda_{n+1}(t', \tau \cdot \nu)}$$

où pour $\alpha = 1, \ldots, p-2,\ n+1$

$$\lambda_\alpha(t', \tau \cdot \nu) = \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \left(g_\alpha(x, t', \tau \cdot \nu)^2 + h_\alpha(x, t', \tau \cdot \nu)^2\right) dx,$$

et

$$\lambda_{p-1}(t', \tau \cdot \nu) = \int_{t_{p-1}}^{\tau} \left(g_{p-1}(x, t', \tau \cdot \nu)^2 + h_{p-1}(x, t', \tau \cdot \nu)^2\right) dx,$$

et pour $\beta = p, \ldots, n$

$$\lambda_\beta(t', \tau \cdot \nu) = \int_{\tau\nu_\beta}^{\tau\nu_{\beta+1}} \left(g_\beta(x, t', \tau \cdot \nu)^2 + h_\beta(x, t', \tau \cdot \nu)^2\right) dx$$

où les fonctions $(g_i(x, t', \tau \cdot \nu), h_i(x, t', \tau \cdot \nu))$ constituent la première ligne de la solution fondamentale $\mathbf{Y}_i(x, t', \tau \cdot \nu)$. Les intégrales sont calculées le long des segments joignant respectivement t_i et t_{i+1}. On ne détaille pas le cas de la fonction $\lambda_{p-1}(t', \tau \cdot \nu)$; il faudrait, comme à la démonstration de la proposition 4.4, la décomposer en $\lambda_{p-1} = \lambda^-_{p-1} + \lambda^+_{p-1}$ avec

$$\lambda^-_{p-1} = \int_{t_{p-1}}^{\frac{r}{\varepsilon}\tau} \quad \text{et} \quad \lambda^+_{p-1} = \int_{\frac{r}{\varepsilon}\tau}^{\tau},$$

puis étudier la fonction λ^-_{p-1} comme les fonctions λ_α et la fonction λ^+_{p-1} comme les fonctions λ_β.

Pour tout $\alpha = 1, \ldots, p-2,\ n+1$, d'après l'assertion (i) de la proposition 4.14, les solutions fondamentales $\mathbf{Y}_\alpha(x, t', \tau \cdot \nu)$ sont holomorphes en τ^σ, $\tau^{1-\sigma}$ au point $\tau = 0$ dès que $x \neq 0$, et on en déduit donc que les fonctions $\lambda_\alpha(t', \tau \cdot \nu)$ sont également holomorphes en τ^σ, $\tau^{1-\sigma}$ (la situation est plus simple ici qu'à la démonstration de la proposition 4.4,

étant donné que les bornes d'intégration et le facteur $(x-t_\alpha)^{L_\alpha}$ sont indépendants de τ). On obtient de même que la fonction $\lambda_{n+1}(t',\tau\cdot\nu)$ ne s'annule jamais pour $|\tau|<\varepsilon$. De plus, par les propositions 4.4 et 4.15, les solutions $\mathbf{Y}_\alpha(x,t',\tau\cdot\nu)$ ont une limite indépendante de ν quand $\tau\to 0$ qui est solution du système $A_{D'}(t')$ et qui vérifie :

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^0_\alpha(x,t') &:= \lim_{\tau\to 0}\mathbf{Y}_\alpha(x,t',\tau\cdot\nu)\\ &= \lim_{\tau\to 0}\left(\mathbf{Y}_\infty(x,t',\tau\cdot\nu)\cdot C_0\cdot S_\alpha\right)\\ &= \mathbf{Y}^0_\infty(x,t')\cdot C_0\cdot S_\alpha.\end{aligned}$$

On note par $(g^0_\alpha(x,t'),h^0_\alpha(x,t'))$ la première ligne de la solution fondamentale $\mathbf{Y}^0_\alpha(x,t')$, et on obtient donc

$$\lim_{\tau\to 0}\lambda_\alpha(t',\tau\cdot\nu)=\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}}\left(g^0_\alpha(x,t')^2+h^0_\alpha(x,t')^2\right)dx.$$

D'après l'expression (4.27) des rapports $r'_\alpha(t')$, comme la matrice S_α est dans $SU(2)$, on a

$$r'_\alpha(t')=\pm\frac{\displaystyle\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}}\left(g^0_\alpha(x,t')^2+h^0_\alpha(x,t')^2\right)dx}{\displaystyle\int_0^1\left(g^0_{n+1}(x,t')^2+h^0_{n+1}(x,t')^2\right)dx},$$

ce qui donne

$$\lim_{\tau\to 0}r_\alpha(t',\tau\cdot\nu)=r'_\alpha(t').$$

Pour tout $\beta=p,\dots,n$, on exprime les fonctions $\lambda_\beta(t',\tau\cdot\nu)$ à partir des solutions fondamentales $\widetilde{\mathbf{Y}}_\beta(y,t',\tau\cdot\nu):=\tau^{-\Lambda}\mathbf{Y}_\beta(\tau y,t',\tau\cdot\nu)$ du système fuchsien $\widetilde{A}_D(t)$, qui est le système (4.20) associé au système $A_D(t)$. Pour alléger les notations, on ne note plus la dépendance en t' et en ν. En faisant le changement de variables

$$y=\frac{x}{\tau},$$

on obtient

$$\lambda_\beta(\tau)=\tau\int_{\nu_\beta}^{\nu_{\beta+1}}\left(g_\beta(\tau y,\tau)^2+h_\beta(\tau y,\tau)^2\right)dy.$$

On note

$$\tau^\Lambda=\begin{pmatrix}a(\tau) & b(\tau)\\ c(\tau) & d(\tau)\end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_\beta(y,\tau)=\begin{pmatrix}\tilde{y}_1(y,\tau) & \tilde{z}_1(y,\tau)\\ \tilde{y}_2(y,\tau) & \tilde{z}_2(y,\tau)\end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned}g_\beta(\tau y,\tau)^2+h_\beta(\tau y,\tau)^2 &= a(\tau)^2\left(\tilde{y}_1(y,\tau)^2+\tilde{z}_1(y,\tau)^2\right)+b(\tau)^2\left(\tilde{y}_2(y,\tau)^2+\tilde{z}_2(y,\tau)^2\right)\\ &\quad+2a(\tau)b(\tau)\left(\tilde{y}_1(y,\tau)\tilde{y}_2(y,\tau)+\tilde{z}_1(y,\tau)\tilde{z}_2(y,\tau)\right).\end{aligned}$$

Comme les éléments de la matrice τ^Λ sont de la forme $c_1\tau^{\frac{\sigma}{2}}+c_{-1}\tau^{-\frac{\sigma}{2}}$ ($c_h\in\mathbb{C}$), les quantités suivantes

$$\tau a(\tau)^2,\quad \tau b(\tau)^2,\quad \tau a(\tau)b(\tau)$$

sont polynomiales en τ^σ et $\tau^{1-\sigma}$ et s'annulent en $\tau = 0$. Par l'assertion (ii) de la proposition 4.14, la solution fondamentale $\widetilde{\mathbf{Y}}_\beta(y,\tau) = \widetilde{\mathbf{Y}}(y,\tau) \cdot C_0 \cdot S_\beta$ est holomorphe en τ^σ, $\tau^{1-\sigma}$ lorsque $|y| < r/\varepsilon$, et donc en particulier quand y appartient à l'intervalle $]\nu_\beta, \nu_{\beta+1}[$. Les intégrales

$$\int_{\nu_\beta}^{\nu_{\beta+1}} \left(\tilde{y}_k(y,\tau)^2 + \tilde{z}_k(y,\tau)^2\right) dy$$

$(k = 1, 2)$ et

$$\int_{\nu_\beta}^{\nu_{\beta+1}} \left(\tilde{y}_1(y,\tau)\tilde{y}_2(y,\tau) + \tilde{z}_1(y,\tau)\tilde{z}_2(y,\tau)\right) dy$$

sont donc holomorphes en τ^σ, $\tau^{1-\sigma}$ (là encore, par les mêmes arguments qu'à la démonstration de la proposition 4.4). On peut donc en conclure que les fonctions $\lambda_\beta(t', \tau \cdot \nu)$ sont holomorphes en τ^σ, $\tau^{1-\sigma}$ et qu'elles vérifient :

$$\lim_{\tau \to 0} \lambda_\beta(t', \tau \cdot \nu) = 0.$$

□

On peut enfin établir la proposition 4.8

Démonstration de la proposition 4.8. Au vu des résultats précédents, il s'agit simplement d'appliquer le théorème de l'analyticité séparée d'Hartogs. Le lemme 4.17 nous donne le comportement en τ de la fonction $\underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu)$ à $(t', \nu) \in U' \times \widetilde{U}$ fixé. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'en $\tau = 0$, cette fonction est holomorphe en (t', ν). Comme en $\tau = 0$, la fonction $\underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu)$ vaut

$$\left(\underline{F}_{D'}\left(t'\right), 0 \ldots, 0\right),$$

elle est donc indépendante de ν et holomophe en $t' \in U'$ par la proposition 4.4 appliquée à la dimension $p-1$, et par le choix de l'ouvert simplement connexe U' tel que la solution du système de Schlesinger $\left(A_{D',1}, \ldots, A_{D',p+1}\right)$ soit holomorphe dans U'. □

Annexe A

Démonstrations de certains résultats utilisés au chapitre 4

On va donner les démonstrations des résultats dus à Sato, Miwa et Jimbo [SMJ79], ainsi qu'à Jimbo [Jim82] dont on a eu besoin au chapitre 4 pour étudier la fonction « rapports des longueurs » $F_D(t)$. Je ne démontre que le théorème 4.10 et la proposition 4.13. La démonstration de la proposition 4.15 procède des mêmes méthodes que celle du théorème 4.10.

Démonstration du théorème 4.10

On rappelle l'énoncé du théorème 4.10.

Théorème. *Soient A^0_α ($\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$) et A^0_β ($\beta = p, \dots, n+1$) des matrices constantes dont les valeurs propres sont respectivement $(-\theta_\alpha/2, \theta_\alpha/2)$ et $(-\theta_\beta/2, \theta_\beta/2)$. On suppose de plus que*

$$\sum_\alpha A^0_\alpha + \sum_\beta A^0_\beta = -A_\infty$$

et que les valeurs propres μ et $-\mu$ de la matrice

$$\Lambda := \sum_\beta A^0_\beta$$

vérifient : $0 < 2\Re(\mu) < 1$. On note $\sigma = 2\Re(\mu)$. Soient σ_1 et K deux constantes telles que

$$\sigma < \sigma_1 < 1 \qquad \text{et} \qquad |A^0_\alpha| < K,\ |A^0_\beta| < K.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que dans tout secteur $S_{\varepsilon,\varphi} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid 0 < |\tau| < \varepsilon,\ |\arg \tau| < \varphi\}$, il existe une unique solution $A_\alpha(\tau)$ ($\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$), $A_\beta(\tau)$ ($\beta = p, \dots, n+1$) du système (4.14) *vérifiant :*

$$\begin{aligned} &|A_\alpha(\tau) - A^0_\alpha| \le K|\tau|^{1-\sigma_1}, \\ &|\tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau)\tau^\Lambda - A^0_\beta| \le K|\tau|^{1-\sigma_1}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Démonstration. On pose, pour tout $\beta = p, \dots, n+1$,

$$\widetilde{A}_\beta(\tau) = \tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau)\tau^\Lambda.$$

On récrit le système de Schlesinger restreint (4.14) avec les matrices $A_\alpha(\tau)$ ($\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$), $\widetilde{A}_\beta(\tau)$ ($\beta = p, \dots, n+1$) comme inconnues :

$$\begin{aligned}
\frac{dA_\alpha}{d\tau} &= \sum_\beta \frac{\nu_\beta}{\tau\nu_\beta - t_\alpha}\left[\tau^\Lambda \widetilde{A}_\beta(\tau)\tau^{-\Lambda}, A_\alpha(\tau)\right] \\
\frac{d\widetilde{A}_\beta}{d\tau} &= \sum_\alpha \frac{\nu_\beta}{\tau\nu_\beta - t_\alpha}\left[\tau^{-\Lambda} A_\alpha(\tau)\tau^\Lambda, \widetilde{A}_\beta(\tau)\right] \\
&\quad + \frac{1}{\tau}\sum_{\beta'}\left[\left(\widetilde{A}_{\beta'}(\tau) - A^0_{\beta'}\right), \widetilde{A}_\beta(\tau)\right].
\end{aligned} \tag{A.2}$$

On construit la solution recherchée en procédant par itération. On pose

$$A^{(0)}_\alpha(\tau) = A^0_\alpha, \qquad \widetilde{A}^{(0)}_\beta(\tau) = A^0_\beta,$$

et pour tout entier naturel k, on définit les matrices $A^{(k)}_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau)$ à partir de $A^{(k-1)}_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{A}^{(k-1)}_\beta(\tau)$ par :

$$\begin{aligned}
A^{(k)}_\alpha(\tau) &= A^0_\alpha + \sum_\beta \int_0^\tau \frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha}\left[s^\Lambda \widetilde{A}^{(k-1)}_\beta(s)s^{-\Lambda}, A^{(k-1)}_\alpha(s)\right] ds \\
\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau) &= A^0_\beta + \sum_\alpha \int_0^\tau \frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha}\left[s^{-\Lambda} A^{(k-1)}_\alpha(s)s^\Lambda, \widetilde{A}^{(k-1)}_\beta(s)\right] ds \\
&\quad + \sum_{\beta'} \int_0^\tau \frac{1}{s}\left[\left(\widetilde{A}^{(k-1)}_{\beta'}(s) - A^0_{\beta'}\right), \widetilde{A}^{(k-1)}_\beta(s)\right] ds.
\end{aligned}$$

Les intégrales sont calculées le long du segment joignant 0 et τ :

$$\{s = re^{i\psi} \mid 0 < r < |\tau|,\ \psi = \arg\tau\}.$$

Soit une constante δ telle que $0 < \delta < 1$. On va montrer par récurrence que les matrices les $A^{(k)}_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau)$ sont bien définies et qu'elles convergent uniformément dans tout voisinage compact de $\tau = 0$. Pour cela, on va montrer qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de σ, σ_1, δ, K, r et R tel que les matrices $A^{(k)}_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau)$ vérifient pour tout τ dans le secteur $S_{\varepsilon,\varphi}$ les conditions asymptotiques suivantes :

$$\left|A^{(k)}_\alpha(\tau) - A^0_\alpha\right| \le K|\tau|^{1-\sigma_1} \tag{A.3}$$

$$\left|\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau) - A^0_\beta\right| \le K|\tau|^{1-\sigma_1} \tag{A.4}$$

et

$$\left|A^{(k)}_\alpha(\tau) - A^{(k-1)}_\alpha(\tau)\right| \le K\delta^{k-1}|\tau|^{1-\sigma_1} \tag{A.5}$$

$$\left|\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau) - A^{(k-1)}_\beta(\tau)\right| \le K\delta^{k-1}|\tau|^{1-\sigma_1} \tag{A.6}$$

L'initialisation est évidente. Supposons que les matrices $A^{(k)}_\alpha(\tau)$ et $\widetilde{A}^{(k)}_\beta(\tau)$ sont bien définies et qu'elles vérifient les majorations $(\text{A.3})_k, \dots, (\text{A.6})_k$. On doit avoir

$$\varepsilon < \frac{r}{R}$$

où les constantes r et R sont définies par (4.13). On choisit de plus

$$\varepsilon < 1.$$

On a alors par les majorations $(\mathrm{A}.3)_k$ et $(\mathrm{A}.4)_k$ et par définition de la constante K

$$\left|A_\alpha^{(k)}(\tau)\right| < 2K, \qquad \left|\widetilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)\right| < 2K. \tag{A.7}$$

Or pour toute matrice $C \in M(2,\mathbb{C})$, les éléments des matrices $\tau^{-\Lambda}C\tau^{\Lambda}$ et $\tau^{\Lambda}C\tau^{-\Lambda}$ sont des polynômes du premier degré en τ^σ et $\tau^{-\sigma}$, et donc

$$\left|\tau^{-\Lambda}C\tau^{\Lambda}\right| \leq |C||\tau|^{-\sigma}, \qquad \left|\tau^{\Lambda}C\tau^{-\Lambda}\right| \leq |C||\tau|^{-\sigma}.$$

On peut donc déduire de $(\mathrm{A}.7)_k$

$$\left|\tau^{-\Lambda}A_\alpha^{(k)}(\tau)\tau^{\Lambda}\right| \leq 2K|\tau|^{-\sigma}, \qquad \left|\tau^{\Lambda}\widetilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)\tau^{-\Lambda}\right| \leq 2K|\tau|^{-\sigma}.$$

On peut déduire des ces majorations et des majorations $(\mathrm{A}.3)_k$ et $(\mathrm{A}.4)_k$ que les matrices $A_\alpha^{(k+1)}(\tau)$ et $\widetilde{A}_\beta^{(k+1)}(\tau)$ sont bien définies.

Établissons les majorations $(\mathrm{A}.3)_{k+1}$ et $(\mathrm{A}.4)_{k+1}$. On remarque tout d'abord que l'on a pour tout τ dans le secteur $S_{\varepsilon,\varphi}$

$$\left|\frac{\nu_\beta}{\tau\nu_\beta - t_\alpha}\right| \leq \left(\frac{r}{R} - \varepsilon\right)^{-1} < \left(\frac{r}{R} - 1\right)^{-1}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left|A_\alpha^{(k+1)}(\tau) - A_\alpha^0\right| &\leq 2\sum_\beta \int_0^{|\tau|} \left|\frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha}\right| \left|s^{\Lambda}\widetilde{A}_\beta^{(k)}(s)s^{-\Lambda}\right| \left|A_\alpha^{(k)}(s)\right| ds \\
&\leq 8(n-p+2)\left(\tfrac{r}{R}-1\right)^{-1} K^2 \int_0^{|\tau|} \frac{ds}{s^\sigma} \\
&\leq K|\tau|^{1-\sigma_1}\left[\frac{8K(n-p+2)}{(1-\sigma)\left(\frac{r}{R}-1\right)}\right]\varepsilon^{\sigma_1-\sigma}.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{A}_\beta^{(k+1)}(\tau) - A_\beta^0\right| &\leq 2\sum_\alpha \int_0^{|\tau|} \left|\frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha}\right| \left|s^{-\Lambda}A_\alpha^{(k)}(s)s^{\Lambda}\right| \left|\widetilde{A}_\beta^{(k)}(s)\right| ds \\
&\quad + 2\sum_{\beta'} \int_0^{|\tau|} \frac{1}{s}\left|\widetilde{A}_{\beta'}^{(k)}(s) - A_{\beta'}^0\right| \left|\widetilde{A}_\beta^{(k)}(s)\right| ds \\
&\leq K|\tau|^{1-\sigma_1}\left[\frac{4K}{(1-\sigma)}\left(\frac{2p}{\left(\frac{r}{R}-1\right)} + (n-p+2)\right)\right]\varepsilon^{\sigma_1-\sigma}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir ε tel que $\varepsilon^{\sigma_1-\sigma}$ soit inférieur à la plus grande des deux quantités suivantes

$$\frac{(1-\sigma)\left(\frac{r}{R}-1\right)}{8K(n-p+2)}, \qquad \frac{(1-\sigma)}{4K}\left[\frac{2p}{\left(\frac{r}{R}-1\right)} + (n-p+2)\right]^{-1}.$$

On obtient de même les majorations $(\text{A.5})_{k+1}$ et $(\text{A.6})_{k+1}$. On en déduit donc que les suites $A_\alpha^{(k)}(\tau)$ et $\widetilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)$ convergent uniformément dans tout voisinage compact de $\tau = 0$. On note

$$A_\alpha(\tau) := \lim_{k\to+\infty} A_\alpha^{(k)}(\tau)$$
$$\widetilde{A}_\beta(\tau) := \lim_{k\to+\infty} \widetilde{A}_\beta^{(k)}(\tau).$$

Alors les matrices $A_\alpha(\tau)$ et $A_\beta(\tau) = \tau^\Lambda \widetilde{A}_\beta(\tau)\tau^{-\Lambda}$ constitue une solution du système de Schlesinger restreint (4.14). Cette solution vérifie les conditions asymptotiques (4.15). L'unicité de cette solution se montrerait de même par récurrence. □

Démonstration de la proposition 4.13

On rappelle l'énoncé de la proposition 4.13.

Proposition. *Les matrices $A_\alpha^0(t',\nu)$ $(\alpha = 1,\dots,p-1,n+2)$ et $\Lambda(t',\nu)$ sont solutions du système de Schlesinger suivant*

$$\begin{cases} d'A'_\alpha &= \displaystyle\sum_{\alpha'\neq\alpha} [A'_{\alpha'}, A'_\alpha]\, d' \log(t_\alpha - t_{\alpha'}) \\ d_\nu A'_\alpha &= 0 \end{cases} \tag{A.8}$$

où on a posé $A_{n+1}^0(t',\nu) := \Lambda(t',\nu)$, et où d' désigne la différentiation par rapport à $t' = (t_1,\dots,t_{p-1})$ et d_ν la différentiation par rapport à $\nu = (\nu_{p+1},\dots,\nu_n)$.

Les matrices $A_\alpha^0(t',\nu)$ $(\alpha = 1,\dots,p-1,n+2)$ et $A_\beta^0(t',\nu)$ $(\beta = p,\dots,n+1)$ sont solutions du système

$$\begin{cases} d'A_\beta^0 &= -\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{p-1} \left[A_\beta^0, A_\alpha^0\right] d' \log(t_\alpha) \\ d_\nu A_\beta^0 &= \displaystyle\sum_{\beta'\neq\beta} \left[A_{\beta'}^0, A_\beta^0\right] d_\nu \log(\nu_\beta - \nu_{\beta'}) \end{cases}. \tag{A.9}$$

Démonstration. Je vais établir uniquement le système (A.9). Le système (A.8) se montre de la même manière, et est plus simple à établir. D'après le système de Schlesinger (1.20), on a

$$d'A_\beta = \sum_\alpha [A_\alpha, A_\beta] d' \log(t_\alpha - \tau\nu_\beta),$$

et

$$d_\nu A_\beta = -\tau \sum_\alpha [A_\alpha, A_\beta] d_\nu \log(t_\alpha - \tau\nu_\beta) + \sum_{\beta'\neq\beta} [A_{\beta'}, A_\beta] d_\nu \log(\nu_{\beta'} - \nu_\beta).$$

On va en déduire les équations vérifiées par les matrices $\widetilde{A}_\beta(\tau) = \tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau)\tau^\Lambda$. Pour cela, il faut vérifier que pour tout $\alpha = 1,\dots,p-1$

$$d'\Lambda = -\sum_\alpha \left[\Lambda, A_\alpha^0\right] d' \log t_\alpha. \tag{A.10}$$

Comme

$$A_\infty = -\sum_\alpha A_\alpha^0 - \sum_\beta A_\beta^0 = -\sum_\alpha A_\alpha(\tau) - \sum_\beta A_\beta(\tau),$$

on a

$$\Lambda = \lim_{\tau\to 0} \sum_\beta A_\beta(\tau).$$

Or

$$\begin{aligned}\left[\sum_\beta A_\beta, A_\alpha\right] &= \sum_\beta (\tau\nu_\beta - t_\alpha)\frac{\partial A_\beta}{\partial t_\alpha}\\ &= \tau^{1-\sigma}\sum_\beta \nu_\beta \frac{\partial\left(\tau^\sigma A_\beta\right)}{\partial t_\alpha} - t_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha}\sum_\beta A_\beta.\end{aligned}$$

Grâce à l'assertion (4.19) de la proposition 4.11, lorsque τ tend vers 0, on obtient (A.10). On en déduit

$$d'\tau^\Lambda = -\sum_\alpha \left[\tau^\Lambda, A^0_\alpha\right] d'\log t_\alpha, \qquad d'\tau^{-\Lambda} = -\sum_\alpha \left[\tau^{-\Lambda}, A^0_\alpha\right] d'\log t_\alpha, \tag{A.11}$$

vu que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau^\Lambda}{\partial t_\alpha} &= \log(\tau)\int_0^1 \tau^{(1-u)\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t_\alpha}\tau^{u\Lambda}du\\ &= -\frac{1}{t_\alpha}\int_0^1 \tau^{(1-u)\Lambda}\left[\log(\tau)\Lambda, A^0_\alpha\right]\tau^{u\Lambda}du\\ &= -\frac{1}{t_\alpha}\left[\tau^{(1-u)\Lambda}A^0_\alpha\tau^{u\Lambda}\right]_{u=0}^{u=1}.\end{aligned}$$

On obtient donc, d'une part,

$$d_\nu \widetilde{A}_\beta = -\tau^{1-\sigma}\sum_\alpha \left[\tau^\sigma \widetilde{A}_\alpha, \widetilde{A}_\beta\right] d_\nu \log(t_\alpha - \tau\nu_\beta) + \sum_{\beta'\neq\beta}\left[\widetilde{A}_{\beta'}, \widetilde{A}_\beta\right] d_\nu\log(\nu_{\beta'} - \nu_\beta),$$

et donc, vu l'assertion (4.17) de la proposition 4.11, quand τ tend vers 0, on obtient

$$d_\nu A^0_\beta = \sum_{\beta'\neq\beta}\left[A^0_{\beta'}, A^0_\beta\right] d_\nu\log(\nu_{\beta'} - \nu_\beta).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}d'\widetilde{A}_\beta &= \sum_\alpha\left(\frac{\left[\widetilde{A}_\alpha, \widetilde{A}_\beta\right]}{1-\tau\frac{\nu_\beta}{t_\alpha}} - \left(\left[\tau^{-\Lambda}, A^0_\alpha\right]A_\beta\tau^\Lambda + \tau^{-\Lambda}A_\beta\left[\tau^\Lambda A^0_\alpha\right]\right)\right)d'\log t_\alpha,\\ &= \sum_\alpha\left(\frac{\left[\widetilde{A}_\alpha, \widetilde{A}_\beta\right]}{1-\tau\frac{\nu_\beta}{t_\alpha}} - \left[\widetilde{A}_\beta, A^0_\alpha - \tau^{-\Lambda}A^0_\alpha\tau^\Lambda\right]\right)d'\log t_\alpha\\ &= -\sum_\alpha\left(\left[\widetilde{A}_\beta, A^0_\alpha\right] + \left[\widetilde{A}_\beta, \tau^{-\Lambda}\left(A_\alpha - A^0_\alpha\right)\tau^\Lambda\right] + \varepsilon(\tau)\left[\widetilde{A}_\beta, \tau^\sigma\widetilde{A}_\alpha\right]\right)d'\log t_\alpha,\end{aligned}$$

où $\varepsilon(\tau)$ est une fonction qui tend vers 0 avec τ. On a finalement à la limite, de nouveau par la proposition 4.11,

$$d'A^0_\beta = -\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left[A^0_\beta, A^0_\alpha\right]d'\log(t_\alpha).$$

□

Bibliographie

[AB94] D. V. Anosov et A. A. Bolibruch : *The Riemann-Hilbert problem.* Aspects of Mathematics, E22. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994.

[Bea93] Arnaud Beauville : Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (d'après A. Bolibruch). *Astérisque*, (216):Exp. No. 765, 4, 103–119, 1993. Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93.

[Bir13] George Birkhoff : The generalized Hilbert problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations. *Proc. Amer. Acad.*, 49:521–568, 1913.

[Bol90] A. A. Bolibruch : Construction of a fuchsian equation from a monodromy representation. *Math. Notes of Ac. of Sci. of USSR*, 48(5):1090–1099, 1990.

[BPP02] Francis Burstall, Franz Pedit et Ulrich Pinkall : Schwarzian derivatives and flows of surfaces. *In Differential geometry and integrable systems (Tokyo, 2000)*, volume 308 de *Contemp. Math.*, pages 39–61. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[Dan06] Benoît Daniel : Minimal disks bounded by three straight lines in Euclidean space and trinoids in hyperbolic space. *J. Differential Geom.*, 72(3):467–508, 2006.

[Dar89] Gaston Darboux : *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, volume 1, Livre 3. Gauthier-Villars, Paris, 1887-89.

[Dou31] Jesse Douglas : Solution of the problem of Plateau. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33, 1931.

[DW08] Josef Dorfmeister et Hongyou Wu : Construction of constant mean curvature n-noids from holomorphic potentials. *Math. Z.*, 258(4):773–803, 2008.

[Gar12] René Garnier : Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 3(29):1–126, 1912.

[Gar26] René Garnier : Solutions du problème de Riemann pour les systèmes différentiels du second ordre. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 3(43):177–307, 1926.

[Gar28] René Garnier : Le problème de Plateau. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 3(45):53–144, 1928.

[Gar51] René Garnier : Sur un théorème de Schwarz. *Comment. Math. Helv.*, 25:140–172, 1951.

[Gar62a] René Garnier : Sur le problème de Plateau pour les quadrilatères gauches ayant un sommet à l'infini. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 41:241–271, 1962.

[Gar62b] René GARNIER : Sur le problème de Plateau pour un quadrilatère variable qui peut acquérir un point double. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 58:1–34, 1962.

[Har64] Philip HARTMAN : *Ordinary differential equations.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.

[IKSY91] Katsunori IWASAKI, Hironobu KIMURA, Shun SHIMOMURA et Masaaki YOSHIDA : *From Gauss to Painlevé.* Aspects of Mathematics, E16. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991. A modern theory of special functions.

[Jim82] Michio JIMBO : Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 18(3):1137–1161, 1982.

[KS96] Rob KUSNER et Nick SCHMITT : The spinor representation of surfaces in space. arXiv :dg-ga/9610005v1, 1996.

[Mal83] B. MALGRANGE : Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières. *In Mathematics and physics (Paris, 1979/1982)*, volume 37 de *Progr. Math.*, pages 401–426. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[Miw81] Tetsuji MIWA : Painlevé property of monodromy preserving deformation equations and the analyticity of τ functions. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 17(2):703–721, 1981.

[Oht82] Makoto OHTSUKI : On the number of apparent singularities of a linear differential equation. *Tokyo J. Math.*, 5(1):23–29, 1982.

[Oka86] Kazuo OKAMOTO : Isomonodromic deformations and Painlevé equations, and the Garnier system. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math*, 33:575–618, 1986.

[Ple08] Josip PLEMELJ : Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. *Monatsh. Math. Phys.*, 19(1):211–245, 1908.

[Poi84] Henri POINCARÉ : Sur les groupes des équations linéaires. *Acta Math.*, 5:201–312, 1884.

[PR96] Joaquín PÉREZ et Antonio ROS : The space of properly embedded minimal surfaces with finite total curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, 45(1):177–204, 1996.

[PR99] Joaquín PÉREZ et Antonio ROS : The space of complete minimal surfaces with finite total curvature as Lagrangian submanifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(10):3935–3952, 1999.

[Rad30] Tibor RADÓ : On Plateau's problem. *Ann. of Math.*, 2(31):457–469, 1930.

[Rie98] Bernhard RIEMANN : *Oeuvres mathématiques.* Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[Sch72] Hans-Rudolf SCHWARZ : Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen. *Monatsberichte der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin*, pages 3–27, January 1872.

[SMJ79] Mikio SATO, Tetsuji MIWA et Michio JIMBO : Holonomic quantum fields. II. The Riemann-Hilbert problem. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 15(1):201–278, 1979.

[UY93] Masaaki UMEHARA et Kotaro YAMADA : Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space. *Ann. of Math. (2)*, 137(3):611–638, 1993.

[Wei66] Karl WEIERSTRASS : Über die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich null ist. *Monatsberichte der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin*, page 855, Décembre 1866.

[Wei03] Karl WEIERSTRASS : *Mathematische Werke*, volume III. Mayer and Müller, Berlin, 1903.