



**HAL**  
open science

## Modélisation de la Dynamique des Réseaux Complexes associée à la Prétopologie

Vincent Levorato, Murat Ahat

► **To cite this version:**

Vincent Levorato, Murat Ahat. Modélisation de la Dynamique des Réseaux Complexes associée à la Prétopologie. (ROADEF), Feb 2008, Clermont-Ferrand, France. pp.299-300. hal-00460646

**HAL Id: hal-00460646**

**<https://hal.science/hal-00460646>**

Submitted on 1 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation de la Dynamique des Réseaux Complexes associée à la Prétopologie

Vincent Levorato<sup>1</sup> & Murat Ahat<sup>1</sup>

LaISC - EPHE - Paris 8, 41 Rue Gay Lussac, 75005 PARIS  
vincent.levorato@ephe.sorbonne.fr , murat.ahat@gmail.com

**Mots-Clefs.** Réseaux complexes, Prétopologie, Modélisation, Simulation

## 1 Introduction

L'étude de la dynamique des réseaux complexes est un sujet souvent étudié, et particulièrement dans le domaine des sciences sociales. De nos jours, de grandes quantités de données peuvent être récupérées de communautés (blog, messengers, etc) pour être analysées, alors que la plupart des sociologues utilisent de petits échantillons de données [MNW06]. De plus, seule la théorie des graphes est employée pour l'analyse et la visualisation des réseaux sociaux, ce qui, la plupart du temps, ne permet pas une étude fine des propriétés intrinsèques du réseau et de sa dynamique.

## 2 Limitation des outils et de la théorie

Nous ferons ici un récapitulatif des modélisations les plus connues, montrant qu'elles ne sont pas suffisantes pour modéliser les dynamiques et la structure des réseaux du réel, en particulier les réseaux sociaux.

Les modèles peuvent être rangés en trois classes classiques, plus une quatrième un peu différente des autres :

- **Les graphes aléatoires**

Les premières modélisations de réseaux se basent sur les graphes aléatoires. En 1959, Erdős et Rényi publient un article dans lequel ils introduisent ce concept : les noeuds d'un tel graphe sont connectés de manière probabiliste uniforme. L'inconvénient majeur étant la distribution homogène du degré de ses noeuds qui n'est pas la distribution hétérogène observée dans les réseaux du réel.

- **Les graphes petit-monde**

Dans un graphe, l'effet petit monde de Watts et Strogatz (1998), signifie que la plupart des noeuds sont connectés par un plus court chemin à travers le réseau, et qu'il y a un effet de grappe (clustering) signifiant qu'il y a une grande probabilité pour que deux noeuds soient connectés directement à un autre s'ils ont un noeud voisin en commun.

Jon Kleinberg propose un autre type de petit monde (2001) où les noeuds sont connectés selon une topologie en grille, et un faible nombre de *raccourcis* longues distances sont ajoutés de manière aléatoire entre certains noeuds. Ces deux modélisations, intéressantes dans le cas des réseaux informatiques, le deviennent moins dans le cas des autres réseaux du réel.

- **Les graphes à invariant d'échelle**

Barabási et Albert ont introduit ce terme en 1999. Barabási a offert un mécanisme de génération simple appelé *attachement préférentiel* qui crée un réseau où un nouveau noeud aura une probabilité plus grande de se connecter à un noeud existant possédant un fort degré qu'un noeud ayant un faible degré. L'idée est intéressante mais le graphe en résultant est un arbre, une structure hélas non réaliste pour les réseaux du réel.

- **Les hypergraphes**

Les hypergraphes sont un meilleur outil que la théorie des graphes classique pour modéliser les réseaux complexes. Cependant, ils sont un cas particulier de la prétopologie défini par un certain espace préférencié [Bel93].

### 3 Analyse des réseaux en utilisant la prétopologie

L'approche que nous proposons se base sur les concepts d'*adhérence* et de *fermeture* qui ont été développés dans la théorie de la prétopologie. Quant à l'application du modèle, nous nous placerons dans le contexte des réseaux sociaux (espace de type  $\mathcal{V}_S$ ).

Soit  $E$  un ensemble non vide, et soit  $\mathcal{P}(E)$  tout sous-ensemble de  $E$ .

**Definition 1.** Soit  $(E, a)$  un espace prétopologique où  $a$  est une application  $a(.) : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  appelée adhérence et définie comme suit :  $\forall A, A \subseteq E$  l'adhérence de  $A$ ,  $a(A) \subseteq E$  est telle que :

- $a(\emptyset) = \emptyset$  (P<sub>1</sub>)
- $A \subseteq a(A)$  (P<sub>2</sub>)

**Definition 2.** Un espace prétopologique de type  $\mathcal{V}_S$   $(E, a)$  est défini comme suit :  $\forall A, A \subseteq E$ ,  $a(A) = \bigcup_{x \in A} a(\{x\})$

Dans le cadre de la prétopologie, un réseau social est une famille de prétopologies sur un ensemble donné [DV94], d'où la définition suivante :

**Definition 3.** Soit  $X$  un ensemble.

Soit  $I$  une famille dénombrable d'indices.

Soit  $\{a_i, i \in I\}$  une famille de prétopologies sur  $X$ .

La famille d'espaces prétopologiques  $\{(X, a_i), i \in I\}$  est un réseau sur  $X$ .

En sociologie, le degré mesure (localement) la capacité d'un individu à communiquer, indépendamment de la centralité des individus auxquels il est directement lié. En adaptant cette définition à la prétopologie, le degré se calcule en calculant le cardinal de l'adhérence au premier degré de l'ensemble étudié.

**Definition 4.** Soit  $(E, a)$  un espace prétopologique de type  $\mathcal{V}_S$ . Les éléments de  $E$  sont liés par une relation valuée. Soit  $v$  :

- $E \times E \rightarrow \mathbb{N}$
- $(x, y) \rightarrow v(x, y)$

L'adhérence de cet espace est défini comme suit :

$\forall A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $a(A) = \{y \in E - A, x \in A, v(y, x) \geq s\} \cup A$  où  $s$  est une valeur définissant un seuil de voisinage.

Pour un réseau donné, l'algorithme qui calcule le degré prétopologique d'un ensemble est appliqué à tous les éléments de  $E$ . Pour chaque élément  $\{x\}$ , on applique la fonction adhérence jusqu'à obtention de  $F(\{x\})$  (fermé de  $\{x\}$ ). A chaque étape de ce processus, on calcule le degré de l'ensemble obtenu, et on recommence jusqu'à obtenir toutes les combinaisons possibles sur  $E$ . En classant ces ensembles par ordre décroissant en fonction de leur degré, on peut identifier les ensembles ayant une connectivité localement élevée.

### 4 Conclusion

Notre contribution dans le domaine de l'analyse est multiple car notre cadre théorique basé sur la théorie de la prétopologie amène une définition plus générale de la définition de réseau. De plus, le fait de travailler sur les ensembles permet de nouvelles opérations et de nouveaux algorithmes de mesure. Et pour finir, l'implémentation d'une librairie regroupant tous ces concepts facilite le passage à la simulation, le tout visant à une meilleure compréhension de la structure et de la dynamique des réseaux complexes.

### Références

- [AD94] Michel Forsé Alain Degenne. *Les réseaux sociaux*. Armand Colin, Paris, 1994.
- [Bel93] Z. Belmandt. *Manuel de prétopologie et ses applications : Sciences humaines et sociales, réseaux, jeux, reconnaissance des formes, processus et modèles, classification, imagerie, mathématiques*. Hermes Sciences Publicat., 1993.

- [Deg04] Alain Degenne. Entre outillage et théorie, les réseaux sociaux. *Réseaux Sociaux de l'Internet*, 2004.
- [DJW02] M. E. J. Newman Duncan J. Watts, Peter Sheridan Dodds. Identity and search in social networks. 2002.
- [DV94] Monique Dalud-Vincent. *Modèle prétopologique pour une méthodologie d'analyse des réseaux : concepts et algorithmes*. PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon 1, Lyon, 1994.
- [GCD04] Mark Jelasity Geoffrey Canright, Andreas Deutsch and Frederick Ducatelle. *Structures and Functions of Dynamic Networks*. PhD thesis, 2004.
- [JPS02] Peter Schultness John Plaice, Peter G. Kropf and Jacob Slonim. Distributed communities on the web, 4th international workshop. *DCW*, 2002.
- [MNW06] Albert-László Barabási Mark Newman and Duncan J. Watts. *The Structure and Dynamics of Networks*. Princeton University Press, 2006.
- [New03] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. 2003.
- [Sam68] S.F. Sampson. *A Novitiate in a Period of Change. An Experimental and Case Study of Social Relationships*. PhD thesis, Cornell University, 1968.