



HAL
open science

Méthode duale pour le contact frottant

François Kuss, Frédéric Lebon

► **To cite this version:**

François Kuss, Frédéric Lebon. Méthode duale pour le contact frottant. 8e Colloque National en Calcul des Structures, May 2007, Giens, France. CD-ROM (6 p.). <hal-00459542>

HAL Id: hal-00459542

<https://hal.science/hal-00459542v1>

Submitted on 29 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Méthode duale pour le contact frottant

François Kuss — Frédéric Lebon

*Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique et Université de Provence
31 Chemin Joseph Aiguier, F-13402 Marseille cedex 20
{kuss,lebon}@lma.cnrs-mrs.fr*

RÉSUMÉ. Nous présentons dans cet article, une méthode d'éléments finis « équilibre », pour la résolution des problèmes de contact unilatéral avec frottement de Coulomb d'un corps élastique sur un obstacle rigide. Les différentes étapes de la méthode sont présentées. Ces étapes restent très similaires aux étapes de résolution par éléments finis conventionnelles, leur implémentation en est facilitée. Les résultats numériques obtenus à l'aide de la méthode développée montrent une bonne concordance avec ceux obtenus à l'aide d'une méthode classique, et une meilleure précision du champ de contraintes solution du problème.

ABSTRACT. This paper deals with an equilibrium finite element method for solving unilateral problems with friction. The various steps of the method are presented. Since those steps are very similar to the classical displacement finite element method ones, the method has been easily introduced in our finite element code. Numerical results obtained by this method are in good agreement with results obtained by classical methods and show better precision on the stress field obtained.

MOTS-CLÉS : contact, frottement, éléments finis « équilibre », formulation duale.

KEYWORDS: contact, friction, equilibrium finite elements, dual formulation.

1. Introduction

Habituellement, les problèmes de contact avec frottement sont résolus par la méthode des éléments finis en déplacement (primale). Nous présentons ici une méthode basée sur la formulation du problème en termes de contraintes (duale). La seconde section rappelle succinctement les fondements du problème ainsi que les conditions à satisfaire, non présentes dans la méthode primale, induites par une telle formulation. Un élément fini prenant en compte ces conditions est alors proposé. La troisième section regroupe les aspects liés au traitement global du problème, à la prise en compte des efforts imposés et de contact, ainsi qu'à la résolution du problème. Nous abordons dans la quatrième section, les contraintes liées à l'implémentation de la méthode dans un code de calcul existant. Pour finir, la cinquième section présente les résultats numériques et leur comparaison à ceux issus de la méthode primale.

2. Position et discrétisation du problème

2.1. Présentation du problème

Nous considérons ici le problème classique du contact frottant d'un solide élastique Ω sur un corps rigide sous les hypothèses de Signorini et Coulomb. Les surfaces de déplacements imposés, d'efforts imposés et de contact sont respectivement nommées Γ_D , Γ_F et Γ_C . On s'intéresse à la résolution du problème par une méthode d'éléments finis statiquement admissibles. Le problème global peut s'écrire comme celui sans frottement, où les efforts de contact sont considérés comme imposés. Le problème à résoudre est alors similaire au problème classique de minimisation de l'énergie complémentaire, très courant en résistance des matériaux :

$$\pi = \frac{1}{2}b(\tau, \tau) - l(\tau). \quad [1]$$

Pour résoudre ce problème, nous avons choisis d'utiliser la méthode des éléments finis « équilibre », introduite par (Fraeijns de Veubeke, 2001), et récemment utilisée par (Kempeneers *et al.*, 2003). Il est important de noter que les efforts de contact sont ici inconnus et doivent respecter les conditions de Signorini et Coulomb.

2.2. Discrétisation

La discrétisation du problème amène à transformer la fonctionnelle π en une somme de fonctionnelles élémentaires. On a alors :

$$\pi = \sum_{e=1}^N \pi_e \text{ avec : } \quad \pi_e = \frac{1}{2}b(\tau^e, \tau^e) - l(\tau^e) \quad [2]$$

La forme du problème est similaire à la forme classique en déplacements. Toutefois, pour que le champ de contraintes global τ soit en équilibre, le champ élémentaire τ^e

doit vérifier quatre conditions : la condition d'équilibre local, de continuité du vecteur contrainte à la frontière de deux éléments et les conditions limites de type efforts (resp. contact) si la frontière Γ_K de l'élément K appartient à Γ_F (resp. à Γ_C).

2.3. Champ de contraintes élémentaire

De manière à vérifier la condition d'équilibre local *a priori*, on exprime le champ de contraintes sur K comme le rotationnel d'une fonction de Airy (Φ^e). Dans (Bisegna *et al.*, 2004) et (Kuss *et al.*, 2007) l'élément rectangulaire de Bogner-Fox-Schmidt (BFS) a été utilisé pour sa simplicité. Nous présentons ici l'élément triangulaire composite de Hsieh-Clough-Tocher (HCT) composé de trois sous éléments. Le champ de contraintes y est linéaire par morceaux car dérivant de trois sous fonctions de Airy cubiques. La fonction de Airy est interpolée sur l'élément par :

$$\Phi^e = [Y^e(x, y)][\phi^e] \quad [3]$$

où $[\phi^e]$ sont les 12 degrés de liberté élémentaires. Ils représentent les valeurs nodales de la fonction de Airy et de ses dérivées aux trois sommets et trois noeuds milieux des bords de l'élément, voir (Wieckowski *et al.*, 1999). Un tel choix des degrés de liberté permet d'assurer la continuité C^1 de la fonction de Airy entre deux éléments en appliquant la procédure classique d'assemblage des éléments finis. La condition de continuité du vecteur contrainte est alors vérifiée.

3. Système global et résolution

Le système global s'obtient directement par assemblage et se note :

$$\pi = \frac{1}{2}[\phi]^T [S][\phi] - [\phi]^T [C]^T [q] \quad [4]$$

$$[C_F][\phi] = [F] \text{ sur } \Gamma_F \quad \text{et} \quad [C_C][\phi] = [F_C] \text{ sur } \Gamma_C \quad [5]$$

où $[\phi]$ représente le vecteur global des degrés de liberté, $[S]$ la matrice de souplesse, $[q]$ le vecteur des déplacements généralisés et où $[C_F]$ et $[C_C]$ permettent respectivement de relier les efforts imposés $[F]$ et de contact $[F_C]$ aux degrés de liberté par projection du champ de contraintes. Plus de détails sont disponibles dans (Kuss *et al.*, 2007). Les deux dernières conditions décrites section 2.2 sont introduites par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. On obtient alors une fonctionnelle de l'énergie complémentaire augmentée :

$$\pi^* = \frac{1}{2}[\phi]^T [S][\phi] - [\phi]^T [C]^T [q] + [\lambda]([C_F][\phi] - [F]) + [\lambda']([C_C][\phi] - [F_C]) \quad [6]$$

L'annulation de la première variation de cette fonctionnelle par rapport aux variables ϕ , λ , λ' , et F_C nous donne le système matriciel global que l'on condense ensuite sur la zone de contact :

$$\begin{bmatrix} S & C_F^T & C_C^T & 0 \\ C_F & 0 & 0 & 0 \\ C_C & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ \lambda' \\ F_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T q \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow [D][F_C] = [G] \quad [7]$$

Le système est résolu en utilisant un algorithme de Gauss Seidel non linéaire, permettant d'appliquer les conditions de contact et de frottement sur $[F_C]$.

4. Implémentation

La méthode décrite dans les sections précédentes a été implémentée dans le code de calcul LMGC90 (<http://www.lmgc.univ-montp2.fr/~dubois/LMGC90/>). Elle présente l'avantage d'utiliser des éléments à degrés de liberté nodaux, les étapes de construction du système d'éléments finis sont donc classiques, la majeure partie des routines existantes ont donc été exploitées.

5. Résultats numériques

La méthode a été validée sur un benchmark classique présenté dans (Kuss *et al.*, 2007). Ici, nous nous intéressons aux résultats obtenus sur l'exemple d'une dent de crémaillère présenté figure 1 en utilisant l'élément HCT. La dent est en acier, le problème est traité en déformations planes, un déplacement de 0,01 cm est imposé sur Γ_D et la dent est en contact sur Γ_C où le coefficient de frottement est égal à 0,2.

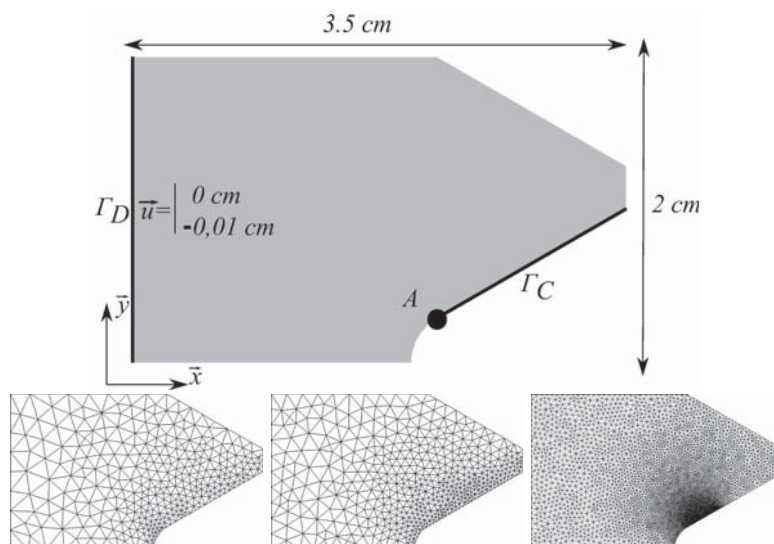


Figure 1. Exemple de la dent de crémaillère et maillages 1, 2 et de référence

5.1. Comparaison des résultats de contact

Nous comparons ici les efforts de contact issus de la méthode duale à ceux issus de la méthode primale (obtenus par le calcul des résidus d'équilibre). Les courbes figure 2 donnent les efforts de contact obtenus avec les maillages 1 et 2 de la figure 1 comparés aux résultats obtenus sur une solution finement maillée prise comme référence ; le point d'abscisse 0 correspond au point A sur la figure 1. Ces résultats montrent

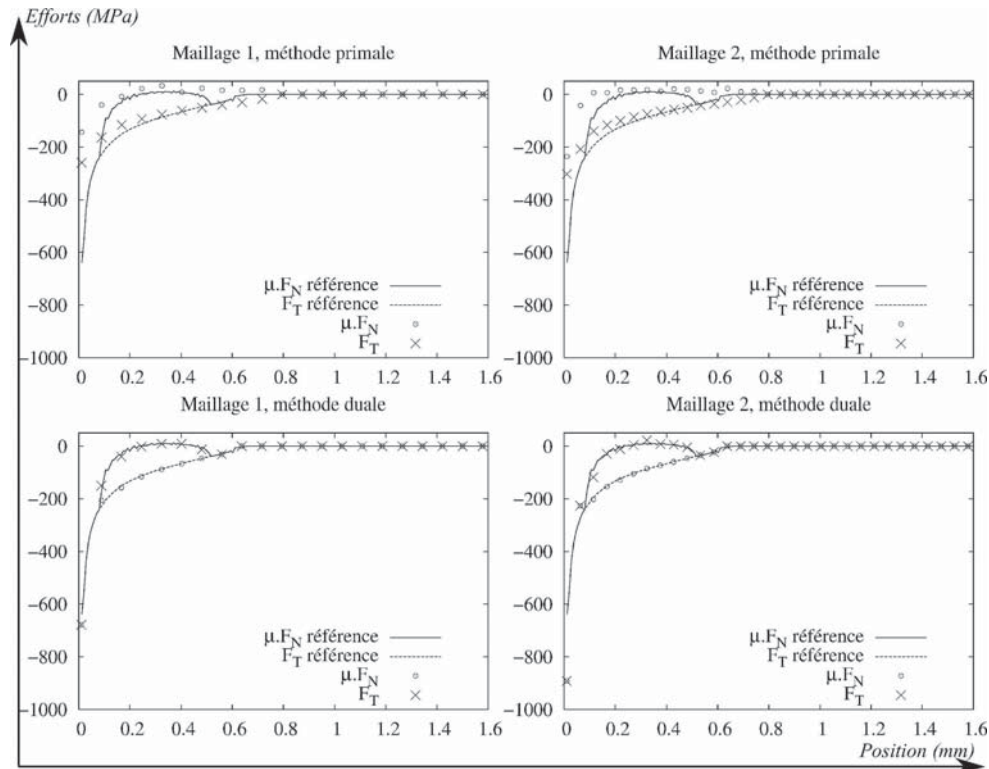


Figure 2. Efforts sur la zone de contact - formulations primale et duale

clairement qu'à discrétisation égale, la méthode duale fournit une meilleure approximation des efforts de contact. Pour un même maillage, dans les exemples traités ici, le maillage dual présentait environ trois fois plus de degrés de liberté que le maillage primal. La méthode duale est donc ici plus précise mais plus coûteuse ; une étude comparative précision/coût n'est toutefois pas aisée, car très dépendante du maillage.

D'autre part, nous comparons sur la figure 3, les efforts de contact issus des résidus d'équilibre (F_N et F_T) aux efforts de contact calculés par projection du champ de contraintes σ sur la zone de contact ($F_N(\sigma)$ et $F_T(\sigma)$), tous issus du calcul primal sur le maillage de référence. L'écart dans la zone de gauche montre que le champ de contraintes ne satisfait pas les conditions de contact dans les zones proches d'une surface libre où les efforts de contact sont importants. Le champ de contraintes obtenu par la méthode duale n'est quant à lui pas faussé sur de telles zones, puisqu'on lui impose directement les conditions de contact et frottement ; il est donc à la fois fidèle aux conditions d'équilibre et aux conditions de contact.

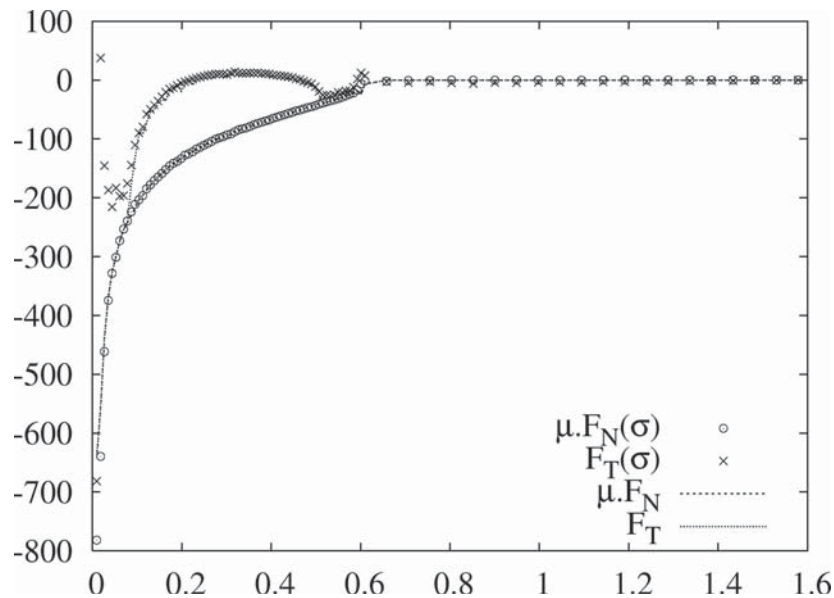


Figure 3. Efforts sur la zone de contact - résidus et contraintes nodales

6. Conclusion

Dans cet article, une méthode duale de résolution d'un problème de contact avec frottement de Coulomb a été présentée, l'écriture du problème, sa discrétisation ainsi que sa résolution ont été abordées. Cette méthode a été implémentée dans le code de calcul LMGC90 et testée sur l'exemple d'une dent de crémaillère.

Les résultats obtenus ont montré la convergence des méthodes duale et primale vers une même solution. La méthode duale permet d'obtenir une solution plus précise en termes de contraintes de contact et permet au champ de contraintes de vérifier exactement les conditions de contact et frottement.

Enfin, dans le cadre de futures travaux, il nous semble intéressant d'étendre la méthode d'analyse duale présentée dans (Kempeneers *et al.*, 2003) pour développer un estimateur d'erreur dans le cas avec contact et frottement.

7. Bibliographie

- Bisegna P., Lebon F., Maceri F., « Relaxation procedures for solving Signorini-Coulomb contact problems », *Advances in Engineering Software*, vol. 35, p. 595-600, 2004.
- Fraeijs de Veubeke B., « Displacement and equilibrium Models in the Finite Element Method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, p. 287-342, 2001.
- Kempeneers M., Beckers P., de Almeida J. M., Pereira O. J. A., « Modèles équilibre pour l'analyse duale », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 12, p. 737-760, 2003.
- Kuss F., Lebon F., « Méthodes duales pour le contact », *Revue européenne de mécanique numérique*, vol. 16, p. 33-51, 2007.
- Wieckowski Z., Youn S.-K., Moon B.-S., « Stress based finite element analysis of plane plasticity problems », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, p. 1505-1525, 1999.