



# Identification optimale en boucle fermée pour les systèmes non linéaires

Saida Flila, Pascal Dufour, Hassan Hammouri

## ► To cite this version:

Saida Flila, Pascal Dufour, Hassan Hammouri. Identification optimale en boucle fermée pour les systèmes non linéaires. 6ième IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), Jun 2010, Nancy, France. paper 18. [hal-00458667](#)

**HAL Id: hal-00458667**

**<https://hal.science/hal-00458667v1>**

Submitted on 15 Jun 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

**This document must be cited according to its final version  
which is published in a conference proceeding as:  
S. Flila<sup>1</sup>, P. Dufour<sup>1</sup>, H. Hammouri<sup>1</sup>,  
« Identification optimale en boucle fermée  
pour les systèmes non linéaires »,  
Actes de la Sixième IEEE Conférence Internationale Francophone  
d'Automatique (CIFA), papier 18  
Nancy, France, 2-4 juin 2010**

**All open archive documents of Pascal Dufour are available at:  
<http://hal.archives-ouvertes.fr/DUFOUR-PASCAL-C-3926-2008>**

**The professional web page (Fr/En) of Pascal Dufour is:  
<http://www.lagep.univ-lyon1.fr/signatures/dufour.pascal>**

**The professional web page (Fr/En) of Hassan Hammouri is:  
<http://www.lagep.univ-lyon1.fr/signatures/hammouri.hassan>**

**The web page of this research group is:  
<http://hal.archives-ouvertes.fr/SNLEP>**

<sup>1</sup>

Université de Lyon, Lyon, F-69003, France; Université Lyon 1;  
CNRS UMR 5007 LAGEP (Laboratoire d'Automatique et de GENie des Procédés),  
43 bd du 11 novembre, 69100 Villeurbanne, France  
Tel +33 (0) 4 72 43 18 45 - Fax +33 (0) 4 72 43 16 99  
<http://www-lagep.univ-lyon1.fr/> <http://www.univ-lyon1.fr> <http://www.cnrs.fr>

# Identification optimale en boucle fermée pour les systèmes non linéaires

Saida FLILA<sup>1</sup>, Pascal DUFOUR<sup>1,2</sup>, Hassan HAMMOURI<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université de Lyon, F-69622, Lyon, France ;

Université Lyon 1, Villeurbanne ;

CNRS, UMR 5007, LAGEP.

43 bd du 11 novembre, 69100 Villeurbanne, France

*flila@lagep.univ-lyon1.fr, dufour@lagep.univ-lyon1.fr, hammouri@lagep.univ-lyon1.fr*

<sup>2</sup> Auteur correspondant

*dufour@lagep.univ-lyon1.fr, www.tinyurl.com/dufourpascal, T : +33/0 4 72 43 18 78*

**Résumé**—L'objectif principal de ce travail est d'apporter une contribution nouvelle dans le domaine de la commande optimale en boucle fermée pour l'identification en ligne d'un paramètre d'un modèle non linéaire. Il s'agit de trouver la commande à appliquer pendant l'expérience qui permet d'optimiser un critère basé sur la sensibilité de la mesure par rapport au paramètre constant et inconnu du modèle, qui est à identifier par l'approche. Basé sur un modèle non linéaire du procédé, cette approche couplant un contrôleur prédictif et un observateur résout en ligne le problème d'identification paramétrique à chaque instant. L'attention est portée sur le problème de commande prédictive non linéaire sous contraintes, afin de maintenir l'utilisation du procédé dans une zone spécifiée. Cette approche d'identification optimale est entièrement illustrée ici sur un premier problème simple en Génie des Procédés (une réaction de saponification).

**Mots-clés**—Identification optimale, sensibilité paramétrique, commande prédictive, observateurs non-linéaires, design d'expérience optimale.

## I. INTRODUCTION

L'automatique fait appel à de nombreuses méthodes pour la conduite des procédés, notamment basées sur un modèle. Un modèle de procédé, décrit par des équations dynamiques, comporte des paramètres (physico-chimiques pour des modèles fondamentaux), qui peuvent ne pas tous être a priori connus de façon précise. L'identification paramétrique est donc une tâche primordiale pour déterminer les valeurs numériques de ces paramètres, pour leur utilisation dans la simulation et dans la loi de commande. L'identification paramétrique consiste à réaliser des expérimentations sur le processus réel (par excitation sur l'entrée de commande du système) et à traiter les données entrée/sortie obtenues pour en extraire la valeur des paramètres. Une très large bibliographie existe dans le domaine de l'identification [8], [9], [3].

Dans le large spectre étudié en identification, on se focalise ici sur le problème couplé de design d'expérience optimale [1], [12], [10] et d'identification en ligne pour un modèle non linéaire, où la question principale est la suivante : comment le signal d'entrée, à appliquer pour obtenir les données utilisées pour l'identification, peut-il être choisi en ligne de telle manière que le paramètre inconnu du modèle soit conjointement estimé d'une façon optimale ? Dans le même temps, l'exploitation du procédé est contrainte durant cette phase. Le choix de cette entrée d'excitation est en effet une question importante, puisque cela influe sur

la qualité de la mesure  $y$  utilisée lors de l'identification, et donc sur la valeur du paramètre  $\theta$  identifié.

Dans ce cadre, pour des systèmes non linéaires, les auteurs [14][13] ont présenté une méthodologie du plan d'expérience optimale pour l'estimation des paramètres dans le domaine des bioréacteurs. En 2001-2002, Keesman et Stigter ont trouvé des solutions analytiques pour la conception d'un signal d'entrée optimal en ce qui concerne un paramètre spécifique pour un modèle bien particulier de bioréacteur [7]. Dans ce cas, la loi de commande est obtenue explicitement en résolvant un ensemble d'équations algébriques, produit par la différentiation répétée de la condition d'optimalité de Pontryagin  $\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0$  (où  $H$  est la formulation hamiltonienne associée au modèle et à la fonction coût, dépendant de la sensibilité paramétrique  $\frac{\partial y(t)}{\partial \theta}$ ). Stigter, Vries et Keesman [13] ont présenté une autre approche adaptative pour laquelle le problème de conception du contrôle est résolu en ligne pour le cas d'un bioréacteur. Dans ce cas, les meilleures estimations de l'ensemble des paramètres  $\theta$  sont introduites dans la loi de commande pour concevoir un signal d'entrée optimal, avec un critère de coût basé sur la matrice d'information de Fisher (MIF). L'estimation courante de  $\hat{\theta}$  est trouvée en utilisant un algorithme récursif d'estimation paramétrique. Dans ces approches, la méthode est fortement couplée à un choix bien particulier de modèle. Elles ne sont donc pas forcément utilisables sur un nouveau modèle. Dans le domaine de l'aérospatiale, une technique de conception d'entrée optimale pour l'estimation des paramètres d'un avion est présentée dans [6]. L'idée originale est la combinaison d'une méthode de programmation dynamique avec un algorithme de gradient pour la synthèse d'entrée optimale, dont la forme est auparavant paramétrée pour toute l'expérience. Cette approche inclut des contraintes physiques sur les variables d'entrée et de sortie.

Ici, basé sur un modèle quelconque (qui doit tout de même satisfaire 2 faibles hypothèses), il s'agit d'apporter une nouvelle approche de commande à appliquer pendant l'expérience liée à l'identification. Ceci permet d'optimiser un critère qui est fonction de la sensibilité de la mesure (utilisée pour l'identification) par rapport au paramètre du modèle à identifier. En même temps, cette commande doit tout de même prendre compte d'un certain

nombre de contraintes d'exploitation du procédé. Cette approche, couplant contrôleur en boucle fermée et observateur, résout en même temps en ligne le problème de commande et celui d'identification du paramètre constant inconnu dans le modèle, en utilisant justement le modèle. Un modèle dynamique de sensibilité paramétrique (obtenu du modèle du procédé) est également employé en ligne pour obtenir la sensibilité paramétrique. La stratégie de commande pour l'identification est la commande prédictive par modèle interne, basée elle aussi sur le modèle. C'est une approche qui est relativement simple à mettre en œuvre, où des contraintes d'exploitation spécifiées sont conjointement prises en compte dans la formulation du problème.

Ce papier est organisé comme suit : tout d'abord, la section II fournit quelques rappels sur la commande prédictive. Ensuite, la nouvelle approche de commande prédictive pour le design d'expérience optimale pour l'identification en boucle fermée en ligne est donnée dans la section III. Enfin, un cas simple est étudié en section IV.

## II. COMMANDE PRÉDICTIVE : RAPPELS

La commande prédictive concernait en 2003 plus de 4000 applications au total dans le monde, sans rajouter les solutions locales développées en interne des entreprises [11]. Elle a pour idée d'insérer dans la boucle de retour un élément prédictif. Le calculateur détermine alors, via l'optimisation sous contraintes d'un critère  $J$  sur l'horizon de prédiction  $N_p$ , à l'instant d'échantillonnage présent  $k$ , la séquence de commande  $\tilde{u}$  à appliquer sur l'horizon de prédiction. A la prochaine période d'échantillonnage, seule la première composante de cette séquence est réellement appliquée au procédé. Les mesures du procédé  $y_p$  sont mises à jour et la procédure ci-dessus est répétée. Comme le problème de commande est résolu par un calculateur numérique, on considère ici les signaux des modèles continus à des instants discrets : à l'instant présent (resp. futur) de l'indice de temps discrétisé  $k$  (resp.  $j$ ), où le temps continu  $t = k * T_e$  (resp.  $t = j * T_e$ ) et où  $T_e$  est la période d'échantillonnage. Le problème d'optimisation à résoudre est élaboré comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\tilde{u}} J(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} F(y_p(j), x_p(k), u(j-1)) \\ \tilde{u} = \{p_u(1), \dots, p_u(n_{pu})\} \\ u(j) = f_u(p_u(i), j, k) \quad i \in [1, n_{pu}] \\ u \in U \subset \mathbb{R} \\ con_i(y_p(k), x_p(k), u(j-1)) \leq 0 \\ \forall k > 0, \quad \forall j \in [k+1, k+N_p] \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $F$  représente l'objectif de commande, les  $p_u(i)$  sont les  $n_{pu}$  éléments du vecteur de paramétrisation sur l'horizon de prédiction  $N_p$  de la commande recherchée  $u$  (contraintes actionneur en amplitude, voir aussi en vitesse). On peut aussi paramétrer cette commande recherchée sur un horizon de commande  $N_c$ . Il y a  $n_{con}$  contraintes  $con_i$  à vérifier sur la sortie mesurée  $y_p$  et sur les états  $x_p$  du procédé. Un observateur peut aussi être nécessaire si l'état du procédé  $x_p$  n'est pas entièrement mesuré. Par la suite, un modèle est introduit pour pouvoir prédire, via son état  $x_m$  et sa

sortie  $y_m$ , le comportement futur du procédé, ce qui permet de pouvoir résoudre ce problème.

## III. APPROCHE D'IDENTIFICATION OPTIMALE EN BOUCLE FERMÉE

Dans un souci de simplification des notations, on envisage ici la plus simple des approches avec un modèle à une entrée, une sortie et un paramètre du modèle à estimer. La sensibilité de la sortie du procédé  $y_p$  par rapport au paramètre inconnu du modèle  $\theta$  détermine si celui peut être identifié à partir des données expérimentales entrée/sortie. Si la sensibilité de la sortie  $y_p$  par rapport au paramètre  $\theta$  est petite ou nulle, alors soit ce paramètre n'influence pas cette sortie, soit la sortie n'est pas bien choisie, soit le signal d'entrée choisi n'excite pas suffisamment la sensibilité paramétrique. Ici, on s'intéresse à la troisième problématique. Cette partie a pour but de présenter une stratégie de commande en boucle fermée pour l'identification optimale en ligne du paramètre inconnu du modèle. Pour ce faire, des outils contraints de commande en boucle fermée et un observateur sont utilisés, dans le but de maximiser la sensibilité de la mesure vis-à-vis du paramètre à identifier, tout en tenant compte de diverses contraintes. Cette approche peut être employée pour un procédé modélisé par un modèle dynamique non linéaire continu, décrit par des équations aux dérivées ordinaires ou partielles. Le modèle de sensibilité paramétrique est explicitement déduit du modèle et est employé par la commande. Le contrôle optimal et l'estimation du paramètre du modèle sont obtenus conjointement en ligne. Les divers éléments de cette structure de commande sont maintenant détaillés, afin d'arriver à la formulation finale du problème de commande prédictive pour l'identification.

### A. Formulation initiale

Dans ce cadre, l'idée principale de cet algorithme d'identification est d'estimer en boucle fermée et en ligne le paramètre constant inconnu du modèle du procédé en utilisant : la mesure du procédé, un modèle, un observateur et un modèle de sensibilité, le tout dans une approche de commande prédictive par modèle interne. Tous ces éléments (sauf la mesure) sont basés sur le modèle du procédé. La question est : comment choisir la séquence d'entrée  $u(t)$  optimale telle que le signal de sortie  $y_p(t)$  soit le plus riche pour son utilisation dans l'observateur ? Ceci est traduit comme étant la maximisation de la sensibilité  $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(t)$  de la mesure du procédé  $y_p(t)$  par rapport au paramètre  $\theta$ . Par ailleurs, pendant l'utilisation du procédé pour l'identification, on exige que quelques contraintes doivent être satisfaites à tout moment, afin de maintenir l'utilisation du procédé dans une zone de fonctionnement :

- en effet, les entrées doivent rester dans une zone de fonctionnement due aux contraintes physiques. Tout actionneur, selon la technologie utilisée, aura en effet une plage d'utilisation limitée et une vitesse caractéristiques ( $t_i$  est le temps initial) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}, \quad \forall t \geq t_i \\ \Delta u_{min} \leq \frac{du(t)}{dt} \leq \Delta u_{max}, \quad \forall t \geq t_i \end{array} \right. \quad (2)$$

- les grandeurs d'état et/ou de sortie doivent rester dans une certaine zone de fonctionnement définie. Elle peut

être liée à la sécurité ou à l'objectif à atteindre en termes de qualité du produit final. Les contraintes ne portant pas uniquement sur l'entrée du procédé, notamment celles portant sur la sortie du procédé  $y_p$  et également quelques sorties non mesurées (obtenus en fonction de l'état de procédé) sont formulées selon :

$$\begin{aligned} c_i(y_p(t), x_p(t), \alpha, \theta, u(t)) &\leq 0, \quad \forall t \geq t_i \dots \\ \dots \forall i \in I^{nc} = \{1, \dots, n_c\} \end{aligned} \quad (3)$$

Ainsi, le problème d'optimisation contraint pour l'identification ( $POCI_I$ ) peut être formulé initialement sous :

$$(POCI_I) \left\{ \begin{aligned} \max_{\tilde{u}} J(\tilde{u}) &= \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left( \frac{\partial y_p}{\partial \theta}(j) \right)^2 \\ \tilde{u} &= \{p_u(1), \dots, p_u(n_{pu})\} \\ u(j) &= f_u(p_u(i), j, k) \quad i \in [1, n_{pu}] \\ \forall k > 0, \forall j \in [k, k + N_p - 1] : \\ &\quad u_{min} \leq u(j) \leq u_{max} \\ &\quad \Delta u_{min} \leq \frac{u(j) - u(j-1)}{T_e} \leq \Delta u_{max} \\ \forall k > 0, \forall j \in [k + 1, k + N_p], \\ &\dots \forall i \in I^{nc} = \{1, \dots, n_c\} : \\ &\quad c_i(y_p(j), x_p(j), \alpha, \theta, u(j-1)) \leq 0 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Le problème principal de cette formulation (4) est que, à l'instant présent  $k$ , elle est basée sur des signaux dans le futur  $j$  : la sensibilité  $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}$  de la sortie mesurée  $y_p$  du procédé par rapport aux paramètres  $\theta$ , la mesure du procédé  $y_p$ , les paramètres  $\theta$  et l'état du procédé  $x_p$ . Malheureusement, ces valeurs ne sont pas disponibles dans le futur à l'instant présent  $k$ , alors que la mesure du procédé  $y_p$  est la seule valeur disponible à chaque instant  $k$ . Afin d'obtenir un problème d'optimisation solvable, l'idée est d'approcher ces signaux en utilisant les mesures et les états estimés à l'instant  $k$ , et l'intégration du modèle du procédé dans une structure de commande par modèle interne (où l'entrée  $u$  est donc appliquée en parallèle sur le procédé et sur le modèle choisi).

### B. Modèle

Dans cette approche, un modèle continu est utilisé. On suppose ici qu'il est représenté par un système non linéaire d'équations différentielles continues :

$$(M) \left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), \alpha, \theta, u(t)), & t > t_i \\ y(t) &= h(x(t), \alpha, \theta, u(t)), & t > t_i \\ x(t) &= x^{t_i}, & t = t_i \end{aligned} \right. \quad (5)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in U \subset \mathbb{R}$  et  $y_m \in \mathbb{R}$  sont respectivement le vecteur d'état, la commande (contrainte en amplitude, voir aussi en vitesse) et la sortie. La différence entre  $\alpha$  et  $\theta$  est que  $\alpha$  est le vecteur des paramètres du modèle à valeurs connues, tandis que  $\theta$  est le paramètre du modèle à valeur inconnue pour lequel le problème de conception de l'entrée optimale est énoncé ici.

*Hypothèse 1* : Dans le système (5),  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$ .

### C. Observateur

Une des utilisations des observateurs [2], [5] est liée au problème d'identification : les paramètres à estimer y sont considérés comme de nouvelles variables d'états. On obtient alors un système augmenté pour lequel on cherche à réaliser un observateur d'état permettant aussi d'estimer les variables d'état non mesurées.

*Hypothèse 2* : L'état  $x_o$  de l'observateur ( $O$ ), constitué de l'état estimé du procédé  $\hat{x}_p$  augmenté de celui du paramètre estimé  $x_o = [\hat{x}_p \ \hat{\theta}]$ , est observable. En outre, toute entrée rend ce système uniformément observable.

Plusieurs facteurs doivent être pris en compte lors du design d'un observateur non linéaire ( $O$ ) : la classe de modèle, l'observabilité des états et la sensibilité des mesures vis-à-vis des changements d'état. Par conséquent, la conception et la synthèse d'un tel observateur est étroitement liée à la structure du modèle ( $M$ ) et à la commande appliquée au système. En utilisant l'hypothèse 2 et la théorie des observateurs pour les systèmes non linéaires, un observateur est construit, basé sur le modèle ( $M$ ), pour estimer en ligne les variables d'état non mesurées du procédé  $\hat{x}_p(k)$  et le paramètre inconnu  $\hat{\theta}(k)$ . Ce paramètre est donc estimé à chaque période de temps par cet observateur, et sa valeur est en plus introduite dans le contrôleur prédictif afin d'améliorer les résultats d'optimisation.

### D. Modèle de sensibilité

Définissons maintenant le modèle de sensibilité ( $M_\theta$ ). Il décrit l'évolution du vecteur d'état  $x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \in \mathbb{R}^n$  et de la sortie  $y_\theta = \frac{\partial y}{\partial \theta} \in \mathbb{R}$ , qui sont respectivement la sensibilité de l'état du modèle ( $M$ ) par rapport au paramètre  $\theta$  et la sensibilité de la sortie du modèle ( $M$ ) par rapport au paramètre  $\theta$ .

$$(M_\theta) \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_\theta(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta}(t) = \dots \\ &\dots f_\theta(x_\theta(t), x(t), \alpha, \hat{\theta}(t), u(t)), & t > t_i \\ y_\theta(t) &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta}(t) = \dots \\ &\dots h_\theta(x_\theta(t), x(t), \alpha, \hat{\theta}(t), u(t)), & t > t_i \\ x_\theta(t) &= x_\theta^{t_i}, & t = t_i \end{aligned} \right. \quad (6)$$

### E. Formulation finale

Chaque signal des divers modèles continus est utilisé pour prédire, dans un temps futur discret  $j$  sur l'horizon de prédiction, le comportement du signal réel équivalent, en tenant compte de l'écart actuel (à l'instant discret  $k$ ) entre le signal procédé et le signal modélisé. Cette erreur est classiquement supposée constante sur l'horizon de prédiction. Le choix de la période d'échantillonnage  $T_e$  dépend bien entendu de la dynamique de l'ensemble des modèles à résoudre. En utilisant l'observateur ( $O$ ) et les modèles ( $M$ ) et ( $M_\theta$ ), les signaux utilisés dans la formulation initiale du problème d'optimisation sous contraintes pour l'identification ( $POCI_I$ ), peuvent ainsi être approchés à chaque



instant présent  $k$  dans les instants futurs  $j$  :

$$\begin{cases} \forall k \geq 0, \forall j \in [k+1, k+N_p] : \\ x_p(j) = x_m(j) + (\hat{x}_p(k) - x_m(k)) \\ y_p(j) = y_m(j) + (y_p(k) - y_m(k)) \\ \frac{\partial y_p}{\partial \theta}(j) = \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(j) + (\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)), \\ \forall k \geq 0 : \\ \theta = \hat{\theta}(k), \end{cases} \quad (7)$$

Alors, tous les signaux suivants sont utilisés dans la loi de commande :

- $y_p(k)$  est la mesure disponible du procédé à l'instant  $k$ .
- $\hat{\theta}(k)$  est le paramètre estimé à l'instant  $k$ , calculé à l'instant  $k-1$  par l'observateur ( $O$ ), avec la meilleure entrée  $u(k-1)$  et les conditions initiales  $[\hat{x}_p(k-1) \ \hat{\theta}(k-1)]^T$ . A l'instant  $k=0$ ,  $\hat{\theta}(k)$  doit être initialisé.
- $\hat{x}_p(k)$  est l'état du procédé, estimé à l'instant  $k-1$  par l'observateur ( $O$ ), avec la meilleure entrée  $u(k-1)$ , sous les conditions initiales  $[\hat{x}_p(k-1) \ \hat{\theta}(k-1)]^T$ . A l'instant  $k=0$ ,  $\hat{x}_p(k)$  doit être initialisé.
- $x_m(k)$  est l'état de modèle obtenu à l'instant  $k-1$  par l'intégration des équations du système ( $M$ ) de  $k-1$  à  $k$  avec la meilleure entrée  $u(k-1)$ , sous l'état initial  $\hat{x}_p(k-1)$  et avec le paramètre estimé  $\hat{\theta}(k-1)$ . A l'instant  $k=0$ ,  $x_m(k)$  doit être initialisé.
- $y_m(k)$  est la sortie du modèle ( $M$ ) couplée à  $x_m(k)$ .
- $x_m(j)$  est l'état du modèle à l'instant futur  $j$ , trouvé à l'instant  $k$ , par l'intégration des équations du système ( $M$ ) sur l'horizon de prédiction  $N_p$  avec la séquence de commande  $\tilde{u}$ , sous l'état initial  $\hat{x}_p(k)$  et avec le paramètre estimé  $\hat{\theta}(k)$ .
- $y_m(j)$  est la sortie du modèle ( $M$ ) couplée à  $x_m(j)$ .
- $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k)$  est la sensibilité modélisée de la sortie du procédé  $y_p$  par rapport au paramètre  $\theta$ , donnée à l'instant  $k-1$ , par l'intégration du modèle de sensibilité ( $M_\theta$ ) de  $k-1$  à  $k$ , avec la meilleure entrée  $u(k-1)$ , avec l'estimation de paramètre  $\hat{\theta}(k-1)$ , l'état estimé du procédé  $\hat{x}_p(k-1)$  et l'état initial  $\frac{\partial x_p}{\partial \theta}(k-1)$ . A l'instant  $k=0$ ,  $\frac{\partial x_p}{\partial \theta}(k)$  doit être initialisé.
- $\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)$  est la sensibilité modélisée de la sortie du modèle  $y_m$  par rapport au paramètre  $\theta$  donnée à l'instant  $k-1$ , par l'intégration du modèle de sensibilité ( $M_\theta$ ) de  $k-1$  à  $k$ , avec la meilleure entrée  $u(k-1)$ , avec l'estimation de paramètre  $\hat{\theta}(k-1)$ , couplée avec l'intégration du modèle ( $M$ ) d'état  $x_m(k)$  et l'état initial  $\frac{\partial x_m}{\partial \theta}(k-1)$ . A l'instant  $k=0$ ,  $\frac{\partial x_m}{\partial \theta}(k)$  doit être initialisé.
- $\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(j)$  est la sensibilité modélisée de la sortie du modèle  $y_m$  par rapport au paramètre  $\theta$  à l'instant  $j$ , donné à l'instant  $k$ , par l'intégration du modèle de sensibilité ( $M_\theta$ ) sur l'horizon de prédiction  $N_p$ , avec la séquence de commande  $\tilde{u}$ , avec l'estimation de paramètre  $\hat{\theta}(k-1)$ , couplée avec l'intégration du modèle ( $M$ ) et l'état initial  $\frac{\partial x_m}{\partial \theta}(k)$ .

Basée sur ces approximations, la formulation initiale du problème d'optimisation contrainte pour l'identification ( $POCI_I$ ) est reformulée comme suit ( $POCI_{NL}$ ), basé sur

le modèle interne non linéaire du procédé.

$$(POCI_{NL}) \begin{cases} \max_{\tilde{u}} J(\tilde{u}) \\ J(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left( \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(j) + (\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)) \right)^2 \\ \tilde{u} = \{p_u(1), \dots, p_u(n_{pu})\} \\ u(j) = f_u(p_u(i), j, k) \ i \in [1, n_{pu}] \\ \text{soumis aux contraintes sur la commande :} \\ \begin{cases} u_{min} \leq u(j) \leq u_{max} \\ \Delta u_{min} \leq \frac{u(j) - u(j-1)}{T_e} \leq \Delta u_{max} \\ \forall j \in [k, k+N_p-1] \end{cases} \\ \text{soumis aux contraintes sur la sortie :} \\ \begin{cases} c_i(y_m(j) + (y_p(k) - y_m(k)), \dots \\ \dots x_m(j) + (\hat{x}_p(k) - x_m(k)), \dots \\ \dots \alpha, \hat{\theta}(k), u(j)) \leq 0, \\ \forall k \geq 0 \dots \\ \dots \forall j \in [k+1, k+N_p], \forall i \in \mathbb{I}^{n_c} \end{cases} \\ \text{basé sur la résolution en ligne des modèles} \\ (M), (M_\theta) \text{ et de l'observateur } (O). \end{cases} \quad (8)$$

Ce problème d'optimisation peut donc maintenant être résolu par n'importe quel algorithme disponible pour ce type de problème<sup>1</sup>. Durant l'expérience, il permet conjointement de déterminer en ligne la commande optimale à appliquer et d'identifier le paramètre inconnu. Avec un problème comportant ici une entrée, une sortie et un paramètre inconnu, la complexité se tient principalement dans la taille du vecteur d'état et des modèles de sensibilité à formuler explicitement. Numériquement, avec les méthodes actuelles, il y a donc peu de réserves, comme cela sera vu dans l'exemple traité. Au niveau faisabilité, les hypothèses ne sont pas réellement restrictives, seule la dernière d'entre elles implique qu'un observateur soit écrit explicitement (ce qui dépend de la structure du modèle employé). Par ailleurs, il y est fait l'hypothèse que toute entrée rend le système uniformément observable, ce qui peut restreindre la classe des systèmes étudiés.

#### IV. CAS D'ÉTUDE : UN PROCÉDÉ DE SAPONIFICATION

##### A. Problématique

On s'intéresse ici à évaluer cette approche de contrôle optimal pour l'identification en ligne d'un paramètre du modèle sur un premier procédé simple : un procédé chimique de saponification. Au niveau des réglages à faire dans la loi de commande, l'idée n'est pas ici de déterminer un jeu optimal de paramètres, mais de montrer de premiers résultats illustrant l'intérêt de l'approche.

##### B. Modèle

Un modèle constitué par une équation non linéaire aux dérivées ordinaires a été considéré :

$$\begin{cases} \dot{C}_a(t) = -k_v C_a^2(t) + \frac{D(t)}{V} (C_{ain} - C_a(t)), \ t > 0 \\ C_a(t) = C_a^0, \ t = 0 \end{cases} \quad (9)$$

où la concentration de l'acétate d'éthyle  $C_a$  dans le réacteur (en  $[\text{mol.l}^{-1}]$ ) est à la fois l'état et la sortie du

1. Cet algorithme a été implanté dans le logiciel ODOE4OPE : <http://ODOE4OPE.univ-lyon1.fr>

système.  $D(t)$  est le débit d'alimentation en soude (en  $[\text{mol}.\text{min}^{-1}]$ ) à manipuler (la commande). Au niveau des paramètres, le volume constant du réacteur  $V$  (en  $[\text{l}]$ ) et la valeur initiale  $C_{ain}$  sont connus (respectivement  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ). La constante de vitesse de réaction  $k_v$  (en  $[\text{l}.\text{mol}^{-1}.\text{min}^{-1}]$ ) est à déterminer par l'approche ( $\theta_1$ ). Ce modèle (9) peut être reformulé sous une forme plus générale ( $M$ ) selon (5), où l'état est  $x = x_1$  :

$$(M) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\theta_1 x_1^2(t) + \frac{u(t)}{\alpha_1}(\alpha_2 - x_1(t)), & t > 0 \\ y(t) = x_1(t), & t > 0 \\ x_1(t) = x_1^0, & t = 0 \end{cases} \quad (10)$$

### C. Observateur

Basé sur ce modèle, un observateur ( $O$ ) peut être construit, par exemple basé sur [4], pour estimer  $x_o = [x_{o1} \ x_{o2}]^T = [\hat{x}_p \ \hat{\theta}_1]^T$  avec :

$$(O) \begin{cases} \dot{x}_o(t) = A_o(y_p(t))x_o(t) + B_o(u(t)) - \dots \\ \dots S_o^{-1}C^T(Cx_o(t) - y_p(t)), & t > 0 \\ \dot{S}_o(t) = -\theta_o S_o(t) + A_o^T(y_p(t))S_o(t) \dots \\ \dots - S_o(t)A_o(y_p(t)) + C^TC, & t > 0 \end{cases} \quad (11)$$

où  $\theta_o$  est le paramètre de réglage de cet observateur avec :

$$\begin{cases} A_o(y_p(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -y_p^2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_o(u(t)) = \begin{pmatrix} \frac{u(t)}{\alpha_1}(\alpha_2 - y_p(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ C = [1 \ 0] \end{cases} \quad (12)$$

### D. Modèle de sensibilité

En ce qui concerne le modèle ( $M_\theta$ ), il s'écrit selon (6), où l'état est  $x_\theta = x_{\theta1}$  :

$$(M_\theta) \begin{cases} \dot{x}_{\theta1}(t) = -(2x_1(t)x_{\theta2}(t) + \frac{u(t)}{\alpha_1})x_{\theta1}(t) \dots \\ \dots - x_1^2(t), & t > 0 \\ y_\theta(t) = y_{\theta1}(t) = x_{\theta1}(t), & t > 0 \\ x_{\theta1}(t) = 0, & t = 0 \end{cases} \quad (13)$$

### E. Résultats

Le problème d'optimisation pour l'identification en ligne est de trouver un profil optimal de débit d'alimentation en soude  $D(t)$  qui maximise la sensibilité  $\frac{\partial C_a}{\partial k_v}(t)$  de la concentration d'acétate d'éthyle  $C_a(t)$  mesurée par rapport à la constante de vitesse de réaction  $k_v$ . Le problème d'optimisation ( $POCI_{NL}$ ) s'écrit ici :

$$\begin{cases} \max_{\tilde{D}} J(\tilde{D}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} \left( \frac{\partial C_a}{\partial k_v}(j) \right)^2 \\ \tilde{D} = [p_D(1), \dots, p_D(n_{pu})]^T \end{cases} \quad (14)$$

où la commande doit suivre des contraintes d'amplitude et de vitesse  $\forall j \in [k, k + N_p - 1]$  :

$$\begin{cases} 0 \text{ mol}.\text{min}^{-1} \leq D(j) \leq 0,03 \text{ mol}.\text{min}^{-1} \\ -0,003 \text{ mol}.\text{min}^{-1} \leq D(j) - D(j-1) \leq 0,003 \text{ mol}.\text{min}^{-1} \end{cases} \quad (15)$$

Par ailleurs la concentration d'acétate d'éthyle mesurée dans le réacteur peut être limitée pour des questions de qualité du produit final :

$$C_a(\cdot) \leq C_a^{max} = 10^{-3} \text{ mol}.\text{l}^{-1} \quad (16)$$

Tout ceci revient donc à fixer comme objectif de contrôle optimal la maximisation de sensibilité  $\frac{\partial C_a}{\partial k_v}$  sans éventuellement dépasser le maximum  $C_a^{max}$  avec une commande physiquement applicable. Deux cas ont été simulés dans les conditions suivantes :

- Cas 1 : la maximisation recherchée de sensibilité n'est soumise qu'aux deux contraintes (15) d'amplitude et de vitesse sur la commande, l'évolution de la sortie est libre.
- Cas 2 : idem cas 1, si ce n'est que la sortie doit désormais rester en dessous d'un maximum fixé par (16). Ceci afin d'évaluer le cadre général de l'algorithme d'optimisation sous contraintes d'entrée/sortie.

Les paramètres du modèle à valeur connue sont :  $V = 100 \text{ l}$ ,  $C_{ain} = 1 \text{ mol}.\text{l}^{-1}$ . Dans la simulation du procédé,  $k_v = 4,73 \text{ l}.\text{mol}^{-1}.\text{min}^{-1}$  (la valeur recherchée) et la condition initiale est  $C_a^0 = 10^{-4} \text{ mol}.\text{l}^{-1}$ . Pour la résolution de l'observateur et du modèle, afin de voir la robustesse de l'approche, 30 % d'erreur initiale par rapport aux paramètres du procédé simulé sont posées :  $C_a^0 = 0,7 \times 10^{-4} \text{ mol}.\text{l}^{-1}$ ,  $k_v^0 = 3,31 \text{ l}.\text{mol}^{-1}.\text{min}^{-1}$ . Le paramètre de réglage de l'observateur  $\theta_o = 0,02$ , le paramètre de réglage du problème d'optimisation  $n_{pu} = 1$ , l'horizon de prédiction  $N_p = 10$  et la période d'échantillonnage  $T_e = 1 \text{ min}$ . Pour résoudre ce problème d'optimisation, un solveur à programmation quadratique séquentielle est utilisé : la routine fmincon de la boîte à outils d'optimisation de Matlab.

En terme de résultats, les simulations montrent sur la figure 1 que la prise en compte de la contrainte sortie réduit la valeur de la sensibilité maximisée (Figure 2). Cette maximisation se traduit sur la figure 3 où la commande est, dans le cas 1, à chaque fois saturée soit en amplitude, soit en vitesse. Mais, dans le cas 2, après avoir suivi pendant les 3 premières minutes le même comportement que dans le cas 1, la commande diminue en amplitude pour aller se stabiliser à une valeur constante. Ceci est dû à la prise en compte de la contrainte sortie (Figure 1) qui arrive progressivement à saturation (à partir de 30 minutes). Parallèlement, dans les deux cas, la commande appliquée au procédé et à l'observateur permet d'identifier le paramètre constant inconnu (Figure 4), et ce malgré une erreur initiale d'estimation de 30%. Du fait de la contrainte sortie, la convergence vers cette valeur est différente dans les deux cas, alors que le cas 2 permet en plus de garantir un fonctionnement désiré du réacteur pendant l'identification, via la contrainte de sortie qui est posée et vérifiée. Par ailleurs, la dynamique de la convergence de l'observateur et la prise en compte de toutes les contraintes ont lieu en même temps, ce qui montre que l'observation et l'optimisation sous contraintes sont bien traitées de façon couplée, dynamiquement, et en même temps.

### V. CONCLUSION

L'objectif principal de ce travail était d'apporter une nouvelle contribution quant à l'approche de contrôle optimal en boucle fermée pendant la phase d'identification. Ceci, dans un but de design d'expérience optimale pour l'identification. Il s'agissait de trouver la commande à appliquer pendant l'expérience qui permettait d'optimiser un critère qui était fonction de la sensibilité de la sortie mesurée par rapport au paramètre du modèle à identifier.

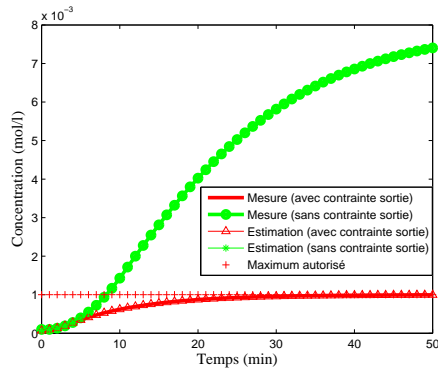


Fig. 1. Concentration d'acétate d'éthyle, en boucle fermée.

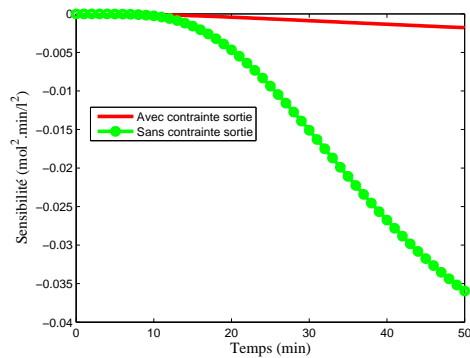


Fig. 2. Sensibilité de la concentration d'acétate d'éthyle par rapport à la vitesse de réaction, en boucle fermée.

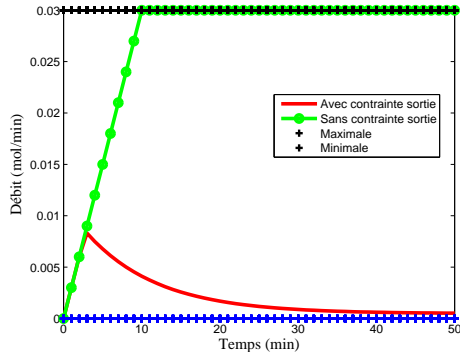


Fig. 3. Débit d'entrée optimal, en boucle fermée.

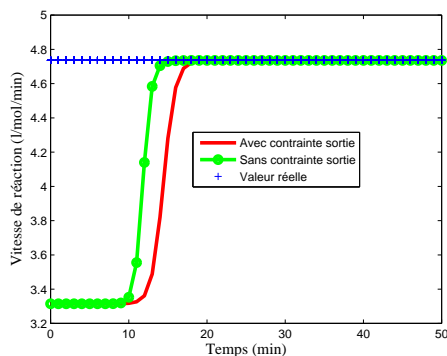


Fig. 4. Estimation de la vitesse de réaction, en boucle fermée.

Cette approche couplant un contrôleur prédictif et un observateur assurait d'une part, une conduite du procédé dans les contraintes d'exploitation et, d'autre part, l'identification optimale en ligne des paramètres inconnus du modèle. A partir du modèle du procédé, un modèle de sensibilité a été déduit. En vue d'un contrôle optimal, la commande prédictive par modèle interne a été retenue. Le paramètre estimé en ligne était injecté dans la loi de commande. Les deux problèmes, le contrôle optimal et l'identification, étaient couplés comme problème global de commande. Diverses contraintes sur l'entrée et la sortie du procédé (aussi sur les états non mesurés qui sont estimés ici) peuvent être prises en compte. Les perspectives de ce travail sont assez nombreuses, par exemple : extension au cas plus général multi entrées-multi sorties-multi paramètres à identifier, étude et application de l'approche pour les systèmes non uniformément observables (où certaines valeurs de la commande sont à éviter pour garantir l'observation). Au vue de l'approche générique employée et des hypothèses assez peu restrictives, le potentiel d'utilisation de cette approche est donc assez vaste pour automatiser le design d'expérience optimale couplé à l'identification paramétrique.

## RÉFÉRENCES

- [1] Bernaerts K. et Van Impe J.F. Optimal dynamic experiment design for estimation of microbial growth kinetics at sub-optimal temperatures : Modes of implementation. *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 13, n° 2, pp. 129-138, 2005.
- [2] Besançon G. *Non-linear observers and applications*. Lecture Notes in Control and Information Science 363, Springer Verlag, 2007.
- [3] Garnier H., M'Saad M. et Poinot T. (sous la direction de). Identification des systèmes. *JESA*, vol. 42, n° 2-3, 2008.
- [4] Gauthier J.P., Hammouri H. and Othman S. A simple observer for non linear systems application to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp.875-880, 1992.
- [5] Hammouri H., Bornard G. et Busawon K. High gain observer based on a structured nonlinear systems. Accepted for publication under some minor corrections in *IEEE-Transactions on Automatic Control*.
- [6] Jauberthie C. , Bournonville F., Coton P. et Rendell F. Optimal input design for aircraft parameter estimation. *Aerospace Science and Technology*, vol. 10, pp. 331-337, 2006.
- [7] Keesman K.J. et Stigter J.D. Optimal parametric sensitivity control for estimation of kinetic parameters in bioreactors. *Mathematical Biosciences*, vol. 179, pp. 95-111, 2002.
- [8] Forssell U. et Ljung L. Closed-loop identification revisited. *Automatica*, vol. 35, n° 7, pp. 1215-1241, 1999.
- [9] Ljung L. *System Identification : Theory for the user*. Prentice Hall, 1999.
- [10] Pronzato L. Optimal experimental design and some related control problem. *Automatica*, vol. 44, n° 2, pp. 303-325, 2008.
- [11] Qin S.J. et Badgwell T.A. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, vol. 11, pp. 733-764, 2003.
- [12] Rojas C.R., Welsh J.S., Goodwin G.C. et Feuer A. Robust optimal experiment design for system identification. *Automatica*, vol. 44, n° 6, pp. 993-1008, 2007.
- [13] Stigter J.D., Vries D. et Keesman K.J. On adaptative optimal input design. In Proceedings of the European Control Conference ECC, Cambridge, UK, 2003.
- [14] Versyck K.J., Bernaerts K., Geeraerd A.H. et Van Impe J.F. Introducing optimal experimental design in predictive modeling : A motiving example. *International Journal of Food Microbiology*, vol. 51, pp. 39-51, 1999.