



**HAL**  
open science

# Régression non-paramétrique fonctionnelle: Expressions asymptotiques des moments.

Laurent Delsol

► **To cite this version:**

Laurent Delsol. Régression non-paramétrique fonctionnelle: Expressions asymptotiques des moments.. Annales de l'ISUP, 2007, LI (3), pp.43-67. hal-00449783

**HAL Id: hal-00449783**

**<https://hal.science/hal-00449783>**

Submitted on 8 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*  
*LI, fasc. 3, 2007, 43 à 67*

## Régression non-paramétrique fonctionnelle: Expressions asymptotiques des moments

Laurent Delsol

L.S.P. Université Paul Sabatier 31062 Toulouse France

**Abstract :** Recent works on functional nonparametric regression explicit the asymptotic law of the kernel estimator of the regression function. This article aims to get from these results asymptotic expressions of the moments, which lead to asymptotic expressions of  $L^q$  errors of this estimator. The results provided are available for both independent and  $\alpha$ -mixing functional datasets and may be easily applied to the classical multivariate case.

**Résumé :** Dans la littérature récente on trouve des résultats concernant la loi asymptotique explicite de l'estimateur à noyau de la fonction de régression. Cet article a pour objectif d'établir à l'aide de ceux-ci l'expression asymptotique des moments de cet estimateur. Ces résultats sont établis dans le cas où la variable explicative est fonctionnelle mais peuvent tout aussi bien s'appliquer au cas où elle est vectorielle. Les résultats contenus dans ce papier pourront être utilisés dans l'optique du choix du paramètre de lissage optimal pour l'erreur  $L^q$ .

**Mots-clés :** données fonctionnelles, régression non-paramétrique, expressions asymptotiques, erreurs  $L^q$ , moments, uniforme intégrabilité.

### 1 Introduction

Avec les progrès des appareils de mesure, le statisticien dispose souvent de données mesurées sur des grilles de plus en plus fines les rendant intrinsèquement fonctionnelles. C'est pourquoi une nouvelle branche des statistiques traitant de données fonctionnelles a vu le jour. Cet article s'inscrit dans cette démarche en s'intéressant plus particulièrement au problème de la régression par rapport à une variable explicative fonctionnelle. Ce sujet a déjà été largement étudié dans le cas linéaire (voir [14] en ce qui concerne le modèle linéaire fonctionnel et [3] par rapport à l'étude de processus linéaires pour plus de références). Dans le cas non-paramétrique (c'est à dire lorsque l'on fait seulement des hypothèses de régularité sur la fonction de régression) les premiers résultats proviennent de [7]. Plus récemment, [13] puis [8] et [5] ont montré la normalité asymptotique de l'estimateur à noyau de la fonction de régression; les deux derniers donnant une expression explicite des termes de biais et de variance. Cet article a pour objectif de compléter l'éventail de ces propriétés asymptotiques en exprimant les termes asymptotiquement dominants des moments centrés et des erreurs  $L^q$  de l'estimateur à noyau. Ces résultats innovants dans le cas fonctionnel le sont également dans le cas vectoriel puisque si à ma connaissance le risque  $L^2$  a été abondamment étudié (notamment par [4] et [10]), les seuls travaux explicitant le risque  $L^1$  sont établis par [17] dans le cas réel et "fixed design". En plus de leur utilisation comme simples outils de calcul, ils peuvent se révéler particulièrement intéressants dans l'optique du choix optimal du paramètre de lissage par rapport aux erreurs  $L^q$ .

où  $Y$  est une variable aléatoire réelle et  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans l'espace fonctionnel semi-métrique  $(E, d)$ . On ne fait aucune hypothèse sur la forme de l'opérateur  $r$  si ce n'est des hypothèses de régularité, c'est pourquoi notre modèle est dit non-paramétrique. Enfin, on considère un échantillon constitué de  $n$  paires  $(X_i, Y_i)$  qui suivent la même loi que  $(X, Y)$ . Si dans un premier temps nous supposons que ces paires sont indépendantes, nous nous attacherons par la suite à généraliser notre approche au cas  $\alpha$ -mélangeant. Notre motivation à généraliser nos résultats à ce type de dépendance provient notamment de la volonté de pouvoir les utiliser dans l'étude de séries temporelles à travers l'approche introduite par [1].

On considère un élément  $x$  de l'espace  $E$  et on estime  $r(x)$  par l'estimateur à noyau suivant :

$$\hat{r}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{d(X_i, x)}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{d(X_i, x)}{h_n}\right)},$$

où  $h_n$  et  $K$  seront précisés ultérieurement. Cet estimateur a été introduit et abondamment étudié dans [9] comme une généralisation de celui de Nadaraya-Watson au cas de variables explicatives fonctionnelles.

Le paragraphe 2 rassemble des résultats généraux concernant la convergence de certains moments de cet estimateur obtenue à partir de résultats d'uniforme intégrabilité et de convergence en loi. De ces résultats on pourra déduire dans le paragraphe 3 des résultats plus importants en terme de retombée statistique, en particulier le Théorème 3.2 qui donne les expressions asymptotiques des erreurs  $\mathbb{L}^q$  de l'estimateur à noyau étudié. On explicitera les termes dominants de ces erreurs lorsque  $q$  est entier. Enfin on étudiera succinctement le cas vectoriel standard pour lequel certaines simplifications sont à noter. Par souci de lisibilité et de clarté, les démonstrations des résultats des deux sections précédentes seront données en annexe.

## 2 Résultats généraux de convergence des moments

Dans un premier temps, par souci de clarté, nous allons nous restreindre au cas où les paires  $(X_i, Y_i)$  sont indépendantes. Nous verrons ensuite qu'en rajoutant certaines hypothèses il est possible de généraliser les résultats au cas où elles sont  $\alpha$ -mélangeantes. Cela peut être utile pour faire de la prévision dans le cadre de séries temporelles (voir Partie IV de [9]).

### 2.1 Le cas indépendant

#### 2.1.1 Notations et principales hypothèses

Dans ce paragraphe nous reprenons les notations et les hypothèses introduites dans [8] qui nous seront utiles dans notre étude. Pour commencer, il nous faut introduire quelques fonctions qui joueront un rôle clef dans nos résultats.

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \mathbb{E}[(r(X) - r(x)) | d(X, x) = s], \\ F(h) &= \mathbb{P}(d(X, x) \leq h), \quad \tau_h(s) = \frac{F(hs)}{F(h)}, \end{aligned}$$



Nos premières hypothèses portent sur le modèle :

$$r \text{ est borné sur un voisinage de } x \text{ que l'on notera } \mathcal{V}_x, \quad (2)$$

$$F(0) = 0, \phi(0) = 0 \text{ et } \phi'(0) \text{ existe}, \quad (3)$$

$$\sigma_\epsilon^2(x) = \mathbb{E}[\epsilon^2 | X = x] \text{ est continue sur un voisinage de } x \text{ et } \sigma_\epsilon^2 := \sigma_\epsilon^2(x) > 0, \quad (4)$$

$$\forall s \in [0; 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_{h_n}(s) = \tau_0(s) \text{ avec } \tau_0(s) \neq 1_{[0;1]}(s). \quad (5)$$

L'hypothèse (3) permet de donner l'expression exacte des constantes là où une hypothèse standard de type Lipschitz ne donnerait que des ordres de grandeur. On pourra aussi remarquer que les hypothèses faites sur la loi de  $X$  ne se font qu'à travers des probabilités de petites boules et que la condition (5) est vérifiée par de nombreux processus standards (voir [8]). La deuxième partie de l'hypothèse assure que la constante  $M_0$  définie plus loin est strictement positive. Ensuite, on introduit une hypothèse portant sur le moment conditionnel d'ordre  $p$  de  $\epsilon$  sachant  $X$ . Par souci de simplicité on fait l'hypothèse :

$$\exists p > 2, \exists M > 0, \mathbb{E}[|\epsilon|^p / X] \leq M \text{ p.s.} \quad (6)$$

On peut remarquer que si  $\epsilon$  est bornée p.s. ou si elle est indépendante de  $X$  et a un moment d'ordre  $p$  alors cette hypothèse est vérifiée. Enfin il nous faut faire quelques hypothèses concernant notre estimateur à noyau :

$$h_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{nF(h_n)}}\right), \lim_{n \rightarrow +\infty} nF(h_n) = +\infty, \quad (7)$$

$$K \text{ a un support compact, est } C^1 \text{ et décroissante sur } ]0; 1[, K(1) > 0. \quad (8)$$

Il semble intéressant de faire quelques commentaires sur l'hypothèse (6) :

**Remarque :** On utilise seulement l'hypothèse (6) pour montrer que :

$$\forall s \leq p, \forall l \geq 0, \mathbb{E}\left[|\epsilon|^s \left|K\left(\frac{d(x, X)}{h_n}\right)\right|^l\right] = O\left(\mathbb{E}\left[\left|K\left(\frac{d(x, X)}{h_n}\right)\right|^l\right]\right).$$

Comme  $K$  est à support compact dans  $[0; 1]$ , on peut démontrer les résultats de cet article sous l'hypothèse moins restrictive

$$\exists p > 2, \exists \mu > 0, \exists M > 0, \mathbb{E}[|\epsilon|^p | X] 1_{\{d(x, X) \leq \mu\}} \leq M \text{ p.s.}$$

Nos résultats seront exprimés à l'aide des constantes suivantes :

$$M_0 = \left(K(1) - \int_0^1 (sK(s))' \tau_0(s) ds\right), M_j = \left(K^j(1) - \int_0^1 (K^j)'(s) \tau_0(s) ds\right), j = 1, 2,$$

et de la variable aléatoire

$$Z_n := \frac{M_1}{\sqrt{M_2 \sigma_\epsilon^2}} \sqrt{nF(h_n)} (\hat{r}(x) - r(x) - B_n)$$

où  $B_n = h_n \phi'(0) \frac{M_0}{M_1}$ .

Pour toute la suite de cet article on introduit une variable aléatoire gaussienne centrée réduite indépendante de  $(X_i, Y_i)_{1 \leq i, j \leq n}$  que l'on notera  $W$ . On notera  $G$  sa fonction de répartition et  $g$  sa densité.

### 2.1.2 Convergence des moments

A partir de la convergence en loi et de l'uniforme intégrabilité de  $|Z_n|^l$  pour  $0 \leq l < p$ , on obtient la convergence des moments présentée dans le théorème suivant.

**Théorème 2.1.** *On suppose que les couples  $(X_i, Y_i)$  sont indépendants, que les hypothèses (2)-(8) sont vérifiées, alors pour tout  $0 \leq q < p$*

$$\mathbb{E}[|Z_n|^q] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|W|^q].$$

De plus si  $q \in \mathbb{N}$  alors on a aussi  $\mathbb{E}[Z_n^q] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[W^q]$ .

*Démonstration.* La preuve repose sur les lemmes suivants :

**Lemme 2.2.** ( Voir [8] Théorème 1 )

*Si les hypothèses (2)-(5) et (7)-(8) sont vérifiées et si les paires  $(X_i, Y_i)$  sont indépendantes alors*

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

**Lemme 2.3.** *Si les couples  $(X_i, Y_i)$  sont indépendants, si (2), (3) et (5)-(8) sont vérifiées, si  $0 \leq q < p$ , alors  $|Z_n|^q$  est uniformément intégrable.*

Le Lemme 2.2 implique que  $Z_n$  converge en loi vers  $W$ . Par conséquent puisque  $x \mapsto |x|^q$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on a également la convergence en loi de  $|Z_n|^q$  vers  $|W|^q$ . De plus le Lemme 2.3 implique que  $|Z_n|^q$  est uniformément intégrable. On obtient donc :

$$\mathbb{E}[|Z_n|^q] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|W|^q].$$

Pour obtenir la seconde partie du théorème il suffit de remarquer que lorsque  $q$  est un entier naturel  $Z_n^q$  est uniformément intégrable puisque  $|Z_n|^q$  l'est et converge en loi vers  $W^q$  puisque  $x \mapsto x^q$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

## 2.2 Le cas $\alpha$ -mélangeant

Lorsque l'on s'intéresse à certains problèmes, l'hypothèse d'indépendance des variables ne peut être conservée. C'est par exemple le cas lorsque l'on étudie une série temporelle. Typiquement, on veut prévoir certaines des valeurs futures à partir des valeurs dont on dispose. On considère la série temporelle comme un processus à temps continu  $(\zeta_t)_{t \in [0, \tau N]}$ . On découpe ensuite ce processus en  $N$  variables fonctionnelles dépendantes définies sur  $[0, \tau]$  par  $\xi_i(x) := \zeta_{i\tau+x}$ . Cette idée a été initialement introduite dans [1]. Dans ce contexte, on propose le modèle de régression suivant prenant en compte la totalité de la trajectoire passée :

$$H(\xi_i) = r(\xi_{i-1}) + \varepsilon_i,$$

où  $H$  est un opérateur connu à valeurs réelles défini sur  $C^0([0, \tau])$ . Un exemple standard d'utilisation de ce modèle est le cas où  $H(\xi) = \xi(t_0)$ . On retrouve le modèle de régression (1) en remplaçant  $(X_i, Y_i)$  par  $(\xi_{i-1}, H(\xi_i))$ . Par conséquent, l'étude de séries temporelles peut être vue comme un problème de régression avec des données dépendantes. Pour pouvoir utiliser nos résultats dans ce contexte il faut prendre en compte la dépendance des variables fonctionnelles. On supposera qu'elles sont  $\alpha$ -mélangeantes. Ce cas le plus général de dépendance faible entre les variables a été largement étudié notamment dans [2], [15] et [16].

### 2.2.1 Notations et hypothèses supplémentaires

Dans le cas où les variables sont dépendantes il nous faut pouvoir contrôler la somme des covariances ; on utilise pour cela l'hypothèse :

$$\exists u \leq p, \exists M, \forall q_j \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^u q_j \leq u, \max_{1 \leq i_j \leq n} \mathbb{E} \left[ \left| \prod_{j=1}^u \epsilon_{i_j}^{q_j} \right| \mid X_1, \dots, X_n \right] \leq M \text{ p.s.} \quad (9)$$

On peut faire une remarque semblable à celle sur l'hypothèse (6) par rapport à l'hypothèse (9) et l'affaiblir un peu. Il nous faut également des hypothèses supplémentaires concernant la dépendance de nos variables. On suppose que les  $n$  paires  $(X_i, Y_i)$  sont  $\alpha$ -mélangeantes (voir [16] p34, Notation 2.1) avec des coefficients de mélange arithmétiques d'ordre  $a$ . Il nous faut encore introduire quelques notations :

$$\forall k \geq 2, \Theta_k(s) := \max \left( \max_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(d(X_{i_j}, x) \leq s, 1 \leq j \leq k), F^k(s) \right)$$

S'ajoutent également des hypothèses portant sur les fonctions  $\Theta_k$  et l'ordre  $a$  des coefficients de mélange.

$$\exists t < p, \forall k \leq t, \exists \nu_k > 0, \Theta_k(s) = O\left(F(s)^{1+\nu_k}\right) \text{ et } a > \max_{2 \leq k \leq t} (k-1) \frac{(1+\nu_k)p-t}{\nu_k(p-t)}, \quad (10)$$

$$\exists \gamma > 0, nF^{1+\gamma}(h_n) \rightarrow +\infty \text{ et } a > \frac{2}{\gamma} + 1. \quad (11)$$

On peut remarquer en ce qui concerne l'hypothèse (10) que, par définition de  $\Theta_k$ ,  $0 \leq \nu_k \leq k-1$  et que par conséquent la deuxième partie implique que  $a > 2$ .

Il est intéressant de noter que les coefficients géométriques sont arithmétiques d'ordre  $a$  quelque soit  $a$ . On peut donc supprimer, si les coefficients de mélange sont géométriques, les conditions portant sur  $a$  des hypothèses précédentes.

### 2.2.2 Convergence des moments

**Théorème 2.4.** *On suppose que les couples  $(X_i, Y_i)$  sont arithmétiquement  $\alpha$ -mélangeants d'ordre  $a$  et que les hypothèses (2)-(11) sont vérifiées. On a alors, pour tout  $0 \leq q < 2 \left\lfloor \frac{\min(t,u)}{2} \right\rfloor$*

$$\mathbb{E} [|Z_n|^q] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [|W|^q].$$

De plus si  $q \in \mathbb{N}$  alors on a aussi  $\mathbb{E} [Z_n^q] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [W^q]$ .

*Démonstration.* Le schéma de la preuve est le même que celui la démonstration du Théorème 2.1, en remplaçant les Lemmes 2.2 et 2.3 par les lemmes suivants.

**Lemme 2.5.** (Voir [5] Théorème 2.2) *Si les hypothèses (2)-(11) sont vérifiées, alors*

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

**Lemme 2.6.** *Si les couples  $(X_i, Y_i)$  sont arithmétiquement  $\alpha$ -mélangeants d'ordre  $a$ , si (2), (3), (5)-(11) sont vérifiées et si  $0 < q < 2 \left\lfloor \frac{\min(t,u)}{2} \right\rfloor$ , alors  $|Z_n|^q$  est uniformément intégrable.*



### 3 Expression asymptotique des moments et erreurs $\mathbb{L}^q$

#### 3.1 Résultats principaux

A partir des résultats généraux de la partie précédente, il est possible de donner l'expression asymptotique des moments centrés de l'estimateur à noyau mais aussi celle des moments de  $\hat{r}(x) - r(x)$  et donc celle des erreurs  $\mathbb{L}^q$ . Intéressons nous tout d'abord à l'expression asymptotique des moments centrés de l'estimateur à noyau. Les lemmes dont nous avons eu besoin pour montrer les résultats précédents permettent d'en exprimer les termes dominants.

**Théorème 3.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.1 avec  $\ell = p$  ou celles du Théorème 2.4 avec  $\ell = 2 \left\lceil \frac{\min(t,u)}{2} \right\rceil$ , pour tout  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq q < \ell$ , on a :*

$$\mathbb{E} [(\hat{r}(x) - \mathbb{E}[\hat{r}(x)])^q] = \left( \sqrt{\frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{nF(h_n) M_1^2}} \right)^q \mathbb{E}[W^q] + o\left(\frac{1}{(nF(h_n))^{\frac{q}{2}}}\right).$$

Remarque : Le résultat donné dans le Théorème 3.1 provient d'un résultat plus général qui permettrait d'énoncer un théorème équivalent pour les moments absolus d'ordres non nécessairement entiers (voir la preuve du Théorème 3.1 en annexe).

D'un point de vue statistique dans une perspective de choix de fenêtre, on s'intéresse plus souvent aux erreurs  $\mathbb{L}^q$  c'est à dire aux moments absolus de  $\hat{r}(x) - r(x)$ . Dans cette optique on établit les expressions asymptotiques des moments de  $\hat{r}(x) - r(x)$ . C'est l'objectif du corollaire suivant dans lequel nous préciserons les constantes selon la parité de l'exposant. En particulier, le cas impair nous amène à introduire les deux suites de polynômes suivantes :  $P_{2m+1}(u) = \sum_{l=0}^m a_{m,l} u^{2l+1}$  et  $Q_{2m+1}(u) = \sum_{l=0}^m b_{m,l} u^{2l}$ , où

$$a_{m,l} = \frac{(2m+1)!}{(2l+1)! 2^{m-l} (m-l)!}$$

et  $b_{m,l} = \sum_{j=m-l+1}^m \left[ C_{2m+1}^{2j+1} \frac{2^j j!}{2^{j+l-m} (j+l-m)!} - C_{2m+1}^{2j} \frac{(2j)! 2^{j+l-m} (j+l-m)!}{2^j j! (2(j+l-m))!} \right] + C_{2m+1}^{2(m-l)+1} 2^{m-l} (m-l)!$

ainsi que la fonction  $\psi_m(u) = (2G(u) - 1) P_{2m+1}(u) + 2g(u) Q_{2m+1}(u)$  (avec la convention qu'une somme sur un ensemble vide d'indices est nulle).

**Théorème 3.2.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.1 avec  $\ell = p$  ou celles du Théorème 2.4 avec  $\ell = 2 \left\lceil \frac{\min(t,u)}{2} \right\rceil$ , on a :*

(i)  $\forall 0 \leq q < \ell$ ,

$$\mathbb{E}[|\hat{r}(x) - r(x)|^q] = \mathbb{E} \left[ \left| h_n \phi'(0) \frac{M_0}{M_1} + W \sqrt{\frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{nF(h_n) M_1^2}} \right|^q \right] + o\left(\frac{1}{(nF(h_n))^{\frac{q}{2}}}\right),$$

(ii)  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $2m < \ell$ ,

$$\mathbb{E}[|\hat{r}(x) - r(x)|^{2m}] = \sum_{k=0}^m \frac{\left(\frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{M_1^2}\right)^k \left(\frac{M_0}{M_1} \phi'(0)\right)^{2(m-k)} (2m)! h_n^{2(m-k)}}{(2(m-k))! k! 2^k} \frac{1}{(nF(h_n))^k} + o\left(\frac{1}{(nF(h_n))^m}\right),$$

(iii)  $\forall m \in \mathbb{N}, 2m + 1 < \ell,$

$$\mathbb{E} \left[ |\hat{r}(x) - r(x)|^{2m+1} \right] = \left( \frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{M_1^2 n F(h_n)} \right)^{m+\frac{1}{2}} \psi_m \left( \frac{h_n \phi'(0) M_0 \sqrt{n F(h_n)}}{\sqrt{M_2 \sigma_\epsilon^2}} \right) + o \left( \frac{1}{(n F(h_n))^{m+\frac{1}{2}}} \right).$$

Remarque : le résultat (i) du Théorème 3.2 provient d'un résultat plus général qui implique également le même résultat sans les valeurs absolues de part et d'autre de l'égalité lorsque  $q \in \mathbb{N}$  (voir la preuve du (i) en annexe pour plus de détails). De là, on peut obtenir l'expression des moments d'ordre entier de  $\hat{r}(x) - r(x)$  (voir la preuve de (ii) en annexe pour plus de détails).

### 3.2 Cas particulier : erreurs $\mathbb{L}^1$ et $\mathbb{L}^2$

Pour illustrer les résultats (ii) et (iii), on peut donner les expressions asymptotiques des erreurs  $\mathbb{L}^1$  et  $\mathbb{L}^2$  :

**Corollaire 3.3.** *Si les hypothèses du Théorème 3.2 sont vérifiées, alors on a :*

$$\mathbb{E} [|\hat{r}(x) - r(x)|] = \sqrt{\frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{M_1^2 n F(h_n)}} \psi_0 \left( \frac{h_n \phi'(0) M_0 \sqrt{n F(h_n)}}{\sqrt{M_2 \sigma_\epsilon^2}} \right) + o \left( \frac{1}{\sqrt{n F(h_n)}} \right),$$

et

$$\mathbb{E} [|\hat{r}(x) - r(x)|^2] = \left( \frac{M_0}{M_1} \phi'(0) h_n \right)^2 + \frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{M_1^2 n F(h_n)} + o \left( \frac{1}{n F(h_n)} \right).$$

On peut noter l'expression relativement simple de l'erreur  $\mathbb{L}^1$  puisque dans ce cas,  $\psi_0(u) = 2uG(u) + 2g(u) - u$ . D'un point de vue statistique, on remarque que pour minimiser ces erreurs il va falloir choisir  $h_n$  de façon à équilibrer des termes croissants et d'autres décroissants en  $h_n$ .

### 3.3 Cas particulier : $E = \mathbb{R}^d$

Les résultats précédents sont donnés dans le cas général où la variable explicative est fonctionnelle. Ils s'appliquent donc bien entendu au cas où elle est à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Voyons à présent ce que deviennent nos hypothèses et nos résultats dans ce cas particulier. Si on suppose qu'il existe  $t < p$  tel que pour tout  $k \leq t$ ,  $X_i$  et  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$  admettent des densités  $f$  et  $c_k(i_j, 1 \leq j \leq k)$  continues au voisinage de  $x$  et telles que  $f(x) > 0$ , alors on montre facilement que

$$F(h_n) = f(x) h_n^d (1 + o(1)) \text{ et } \Theta_k(h_n) = O(h_n^{kd}).$$

Par conséquent l'hypothèse (5) portant sur  $\tau_{h_n}$  est toujours vérifiée avec  $\tau_0(s) = s^d$ . De plus la première partie de l'hypothèse (10) est vérifiée avec  $\nu_k = k - 1$ . Enfin, on peut remplacer  $F(h_n)$  par  $f(x) h_n^d$  dans les hypothèses et les résultats, ce qui donne les hypothèses :

$$h_n^{2+d} = O\left(\frac{1}{n}\right), \lim_{n \rightarrow +\infty} n h_n^d = +\infty, \quad (12)$$

$$\exists t > 0, a > \frac{t(p-1)}{(p-t)}, \quad (13)$$

$$\exists \gamma > 0, n h_n^{d(1+\gamma)}(h_n) \rightarrow +\infty \text{ et } a > \frac{2}{\gamma} + 1. \quad (14)$$



On remarque que les constantes ne dépendent plus de la loi de  $X$  :

$$M_0 = d \int_0^1 s^d K(s) ds, \quad M_j = d \int_0^1 s^{d-1} K^j(s) ds, \quad j = 1, 2.$$

Le Théorème 3.2 devient donc :

**Corollaire 3.4.** *Sous les hypothèses (2)-(6), (8) et (12) dans le cas indépendant avec  $\ell = p$  ou en y ajoutant (9), (13) et (14) dans le cas arithmétiquement  $\alpha$ -mélangeant avec  $\ell = 2 \left\lceil \frac{\min(t,u)}{2} \right\rceil$ , on a :*

$$(i) \quad \forall 0 \leq s < 2 \left\lceil \frac{\min(t,u)}{2} \right\rceil,$$

$$\mathbb{E} [|\hat{r}(x) - r(x)|^s] = \mathbb{E} \left[ \left| h_n \phi'(0) \frac{M_0}{M_1} + W \sqrt{\frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{nf(x) h_n^d M_1^2}} \right|^s \right] + o \left( \frac{1}{(nh_n^d)^{\frac{s}{2}}} \right),$$

$$(ii) \quad \forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq 2m < 2 \left\lceil \frac{\min(t,u)}{2} \right\rceil,$$

$$\mathbb{E} [|\hat{r}(x) - r(x)|^{2m}] = \sum_{k=0}^m \frac{\left( \frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{M_1^2} \right)^k \left( \frac{M_0}{M_1} \phi'(0) \right)^{2(m-k)} (2m)!}{(2(m-k))! k! 2^k (f(x))^k} h_n^{2(m-k) - dk} n^{-k} + o \left( \frac{1}{(nh_n^d)^m} \right),$$

$$(iii) \quad \forall m \in \mathbb{N}, 2m + 1 < 2 \left\lceil \frac{\min(t,u)}{2} \right\rceil,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\hat{r}(x) - r(x)|^{2m+1}] &= \left( \frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{M_1^2 n f(x) h_n^d} \right)^{m+\frac{1}{2}} \psi_m \left( \frac{h_n^{1+\frac{d}{2}} \phi'(0) M_0 \sqrt{nf(x)}}{\sqrt{M_2 \sigma_\epsilon^2}} \right) \\ &+ o \left( \frac{1}{(nh_n^d)^{m+\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Remarque : ces résultats généralisent à des moments d'ordre quelconque ceux donnés par [10] pour l'erreur  $\mathbb{L}^2$  et par [17] pour l'erreur  $\mathbb{L}^1$ .

## 4 Conclusion et perspectives

Grâce à l'expression explicite de la loi asymptotique de l'estimateur à noyau, on a pu obtenir les expressions asymptotiques des moments. Ces résultats sont très motivants car ils ouvrent d'intéressantes perspectives, en particulier vis-à-vis du choix de fenêtre au travers de l'erreur  $\mathbb{L}^q$ . Il serait notamment intéressant d'étudier comment l'estimateur se comporte sur des données réelles lorsque l'on choisit d'utiliser d'autres critères que l'erreur  $\mathbb{L}^1$  ou  $\mathbb{L}^2$ . De plus les résultats établis sont innovants dans le cadre fonctionnel général mais aussi dans le cadre vectoriel où ils s'appliquent sous des hypothèses plus simples. Il serait enfin intéressant de compléter ces résultats en donnant des résultats concernant les erreurs intégrées.

## 5 Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance au rapporteur pour ses remarques, commentaires et propositions pertinentes qui ont permis d'améliorer la qualité de cet article. Je souhaite également remercier les membres du groupe STAPH de Toulouse pour leurs remarques constructives. Je tiens à remercier en particulier Christophe CRAMBES, Frédéric FERRATY et Philippe VIEU pour leurs remarques et leur aide dans la rédaction de cet article.

## 6 Annexe

Dans les preuves suivantes nous noterons  $C$  les constantes positives quelconques par souci de simplicité. On sera amené à utiliser plusieurs fois l'inégalité suivante portant sur la covariance de variables  $\alpha$ -mélangentées établie dans [16] ((1.12b) p 10). Si  $X_i \in \mathbb{L}^p$  et  $X_j \in \mathbb{L}^q$  avec  $1 < p, q \leq \infty$ , alors en définissant  $r$  par  $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  on a :

$$|Cov(X_i, X_j)| \leq B_0 (\alpha(|i-j|))^{\frac{1}{r}} \|X_i\|_p \|X_j\|_q, \quad (15)$$

où  $B_0$  est une constante positive. On introduit les variables

$$\Gamma_{i,n} := Y_i K \left( \frac{d(X_i, x)}{h_n} \right), \Delta_{i,n} := K \left( \frac{d(X_i, x)}{h_n} \right), U_{i,n} = \frac{\Gamma_{i,n} \mathbb{E}[\Delta_{i,n}] - \Delta_{i,n} \mathbb{E}[\Gamma_{i,n}]}{F(h_n) \sqrt{nF(h_n)}}.$$

Il est établi dans [8] que sous (3) et (5) on a :

$$\frac{\mathbb{E}[\Gamma_{1,n}]}{\mathbb{E}[\Delta_{1,n}]} - r(x) = B_n + o(h_n).$$

On en déduit facilement (voir [5] pour les détails), grâce à (7), que

$$Z_n = \frac{M_1}{\sqrt{M_2 \sigma_\epsilon^2}} \frac{\sum_{i=1}^n U_{i,n}}{\hat{f}(x) \mathbb{E}[\hat{f}(x)]} + o(1).$$

On introduit les variables

$$W_{i,h} = Y_i K \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \frac{\mathbb{E} \left[ K \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \right]}{F(h)} - K \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \frac{\mathbb{E} \left[ Y_i K \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \right]}{F(h)}.$$

On utilisera par la suite pour plus de clarté la notation :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nF(h_n)} \sum_{i=1}^n \Delta_{i,n}.$$

**Remarque :** Attention, on utilise ici la même notation que dans le cas multivarié pour le dénominateur de l'estimateur à noyau mais ici  $\hat{f}$  n'estime pas la densité.

On a alors :

$$U_{i,n} = \frac{W_{i,h_n}}{\sqrt{nF(h_n)}} \text{ et } Z_n = \frac{M_1}{\sqrt{nF(h_n) M_2 \sigma_\epsilon^2}} \frac{\sum_{i=1}^n W_{i,h_n}}{\hat{f}(x) \mathbb{E}[\hat{f}(x)]} + o(1).$$

**Preuve du Lemme 2.3 :** Nous allons montrer que  $Z_n$  a tous ses moments d'ordre  $q \leq p$  bornés, ce qui impliquera que  $Z_n^q$  est uniformément intégrable pour tout  $q < p$ . On va utiliser la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Z_n|^q] &= \mathbb{E} \left[ |Z_n|^q \mathbf{1}_{|\hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)]| \leq \frac{\kappa(1)}{2}} \right] + \mathbb{E} \left[ |Z_n|^q \mathbf{1}_{|\hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)]| > \frac{\kappa(1)}{2}} \right] \\ &\leq C + \mathbb{E} \left[ \left| \frac{M_1}{\sqrt{M_2 \sigma_\epsilon^2}} \frac{\sum_{i=1}^n U_{i,n}}{\hat{f}(x) \mathbb{E}[\hat{f}(x)]} \right|^q \mathbf{1}_{|\hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)]| \leq \frac{\kappa(1)}{2}} \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[ \left| \frac{M_1}{\sqrt{M_2 \sigma_\epsilon^2}} \frac{\sum_{i=1}^n U_{i,n}}{\hat{f}(x) \mathbb{E}[\hat{f}(x)]} \right|^q \mathbf{1}_{|\hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)]| > \frac{\kappa(1)}{2}} \right] \\ &= C + A_{1,n} + A_{2,n} \end{aligned} \quad (16)$$

Il nous faut à présent montrer que les suites  $A_{1,n}$  et  $A_{2,n}$  sont bornées. On s'intéresse dans un premier temps à la majoration de  $A_{1,n}$ .

Première étape : majoration des moments du numérateur. Prouvons tout d'abord que pour tout  $0 \leq q \leq p$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n W_{i,h_n} \right|^q \right] = O \left( [nF(h_n)]^{\frac{q}{2}} \right). \quad (17)$$

En fait tout repose sur le lemme suivant :

**Lemme 6.1.** *Si les couples  $(X_i, Y_i)$  sont indépendants, sous les hypothèses (2), (6), (7) et (8), pour tout  $0 \leq q \leq p$  il existe des constantes  $K_1$  et  $K_2$  telles que pour tout  $l \in \mathbb{N}$  et  $h$  assez petit (tel que  $B(x, h) \subset \mathcal{V}_x$ ) on a :*

$$\mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^l W_{i,h} \right|^q \right] \leq K_1(q) l F(h) + K_2(q) (l F(h))^{\frac{q}{2}}.$$

**Preuve du Lemme 6.1 :** On peut remarquer qu'en utilisant les hypothèses (2), (6) et (8) et en conditionnant par  $X$ , on a pour tout  $q \leq p$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|W_{i,h}|^q] &\leq C \mathbb{E} \left[ K^q \left( \frac{d(X, x)}{h} \right) \right] \\ &\leq C F(h). \end{aligned}$$

On va décomposer la preuve suivant les valeurs de  $q$ .

**Preuve du lemme pour  $q = 2$  :** On peut montrer assez aisément que lemme est vrai pour  $q = 2$ . En effet, puisque les  $W_{i,h}$  sont centrées et indépendantes et de même loi, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^l W_{i,h} \right)^2 \right] &= l \mathbb{E} \left[ (W_{1,h})^2 \right] \\ &= l \mathbb{E} \left[ \left( Y_i K \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \frac{1}{F(h)} \mathbb{E} \left[ K \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - K \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \frac{1}{F(h)} \mathbb{E} \left[ Y_i K \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \right] \right)^2 \right] \\ &\leq C l \left\{ \mathbb{E} \left[ (r(X_i) + \epsilon_i)^2 K^2 \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \right] + \mathbb{E} \left[ K^2 \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \mathbb{E} \left[ (r(X_i) + \epsilon_i) K^2 \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \right] \right\} \\ &\leq C l \mathbb{E} \left[ K^2 \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \right] \\ &\leq C l F(h). \end{aligned}$$

On obtient les dernières lignes en utilisant les hypothèses (2), (6) et (8) qui impliquent qu'en conditionnant par  $X_i$ , pour  $u \in \{0, 1, 2\}$  et  $s > 0$ , on a :

$$\mathbb{E} \left[ Y_i^u K^s \left( \frac{d(X_i, x)}{h} \right) \right] \leq C F(h).$$

□



**Preuve du lemme pour  $0 \leq q < 2$  :** On démontre ensuite le lemme pour  $q < 2$  en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^l W_{i,h} \right|^q \right] \leq \left( \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^l W_{i,h} \right|^2 \right] \right)^{\frac{q}{2}} \leq K_3(q) (lF(h))^{\frac{q}{2}}.$$

□

**Preuve du lemme pour  $q > 2$  :** On va se servir des résultats  $L^2$  pour obtenir ceux d'ordre  $q < p$  par récurrence. En s'inspirant d'une preuve de [12] et de [6], on va montrer que si l'inégalité précédente est vérifiée pour  $q = m \geq 2$  et  $m \in \mathbb{N}$ , alors elle l'est pour  $q = m + \nu$ ,  $0 < \nu \leq 1$ . On définit  $C_{l,h}$  de la façon suivante :

$$C_{l,h} = \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^l W_{i,h} \right|^{m+\nu} \right]$$

ainsi que

$$S_{l,h} = \sum_{i=1}^l W_{i,h}, \quad \hat{S}_{l,h} = \sum_{i=l+1}^{2l} W_{i,h}.$$

On veut montrer que pour tout  $m$  et  $\nu$  il existe des constantes  $K_1$  et  $K_2$  telles que

$$C_{l,h} \leq K_1 (m + \nu) lF(h) + K_2 (m + \nu) (lF(h))^{\frac{m+\nu}{2}}.$$

Montrons dans un premier temps qu'il existe des constantes  $A_1$  et  $A_2$  positives et indépendantes de  $l$  et de  $h$  telles que

$$\mathbb{E} \left[ \left| S_{l,h} + \hat{S}_{l,h} \right|^{m+\nu} \right] \leq 2C_{l,h} + A_1 (lF(h))^{\frac{m+\nu}{m}} + A_2 (lF(h))^{\frac{m+\nu}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left| S_{l,h} + \hat{S}_{l,h} \right|^{m+\nu} \right] &\leq \mathbb{E} \left[ \left| S_{l,h} + \hat{S}_{l,h} \right|^m \left( |S_{l,h}|^\nu + |\hat{S}_{l,h}|^\nu \right) \right] \\ &\leq 2C_{l,h} + \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j |S_{l,h}|^{j+\nu} |\hat{S}_{l,h}|^{m-j} + \sum_{j=1}^m C_m^j |S_{l,h}|^j |\hat{S}_{l,h}|^{m-j+\nu} \right] \end{aligned}$$

Dans ce qui suit  $B_1, \dots, B_8$  désignent des constantes indépendantes de  $l$  et de  $h$ . En utilisant l'indépendance de nos variables, une inégalité de Hölder puis l'hypothèse de récurrence au rang  $m$  on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |S_{l,h}|^j |\hat{S}_{l,h}|^{m+\nu-j} \right] &= \mathbb{E} \left[ |S_{l,h}|^j \right] \mathbb{E} \left[ |\hat{S}_{l,h}|^{m+\nu-j} \right] \\ &\leq [\mathbb{E} [|S_{l,h}|^m]]^{\frac{j}{m}} [\mathbb{E} [|S_{l,h}|^m]]^{\frac{m+\nu-j}{m}} \\ &\leq \left( K_1(m) lF(h) + K_2(m) (lF(h))^{\frac{m}{2}} \right)^{\frac{m+\nu}{m}} \\ &\leq B_1 (lF(h))^{\frac{m+\nu}{m}} + B_2 (lF(h))^{\frac{m+\nu}{2}}. \end{aligned}$$

Avec un raisonnement identique on obtient, pour  $0 \leq j \leq m-1$  :

$$\mathbb{E} \left[ |S_{l,h}|^{j+\nu} |\hat{S}_{l,h}|^{m-j} \right] \leq B_1 (lF(h))^{\frac{m+\nu}{m}} + B_2 (lF(h))^{\frac{m+\nu}{2}}.$$

On a donc

$$\mathbb{E} \left[ \left| S_{l,h} + \hat{S}_{l,h} \right|^{m+\nu} \right] \leq 2C_{l,h} + B_3 (lF(h))^{\frac{m+\nu}{m}} + B_4 (lF(h))^{\frac{m+\nu}{2}}.$$

On peut maintenant majorer le terme  $C_{2l,h}$ .

$$\begin{aligned} C_{2l,h} &= \mathbb{E} \left[ \left| S_{l,h} + \hat{S}_{l,h} \right|^{m+\nu} \right] \\ &\leq 2C_{l,h} + A_1 (lF(h))^{\frac{m+\nu}{m}} + A_2 (lF(h))^{\frac{m+\nu}{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent on obtient en remplaçant  $2l$  par  $2^r$

$$\begin{aligned} C_{2^r,h} &\leq 2C_{2^{r-1},h} + A_1 (2^{r-1}F(h))^{\frac{m+\nu}{m}} + A_2 (2^{r-1}F(h))^{\frac{m+\nu}{2}} \\ &\leq 4C_{2^{r-2},h} + A_1 (2^{r-1}F(h))^{\frac{m+\nu}{m}} \left( 1 + \frac{2}{2^{\frac{m+\nu}{m}}} \right) + A_2 (2^{r-1}F(h))^{\frac{m+\nu}{2}} \left( 1 + \frac{2}{2^{\frac{m+\nu}{2}}} \right) \\ &\leq 2^r C_{1,h} + A_1 (2^{r-1}F(h))^{\frac{m+\nu}{m}} \left( \sum_{k=0}^{r-1} \left( \frac{2}{2^{\frac{m+\nu}{m}}} \right)^k \right) + A_2 (2^{r-1}F(h))^{\frac{m+\nu}{2}} \left( \sum_{k=0}^{r-1} \left( \frac{2}{2^{\frac{m+\nu}{2}}} \right)^k \right) \\ &\leq 2^r C_{1,h} + \frac{A_1 (2^{r-1}F(h))^{\frac{m+\nu}{m}}}{1 - \frac{2}{2^{\frac{m+\nu}{m}}}} + \frac{A_2 (2^{r-1}F(h))^{\frac{m+\nu}{2}}}{1 - \frac{2}{2^{\frac{m+\nu}{2}}}} \\ &\leq B_5 2^r F(h) + B_6 (2^r F(h))^{\frac{m+\nu}{2}} \end{aligned}$$

car  $1 < \frac{m+\nu}{m} \leq \frac{m+\nu}{2}$  et  $C_{1,h} \leq CF(h)$ . On écrit maintenant  $l$  en base 2 :

$$l = 2^r + a_1 2^{r-1} + \dots + a_r \leq 2^r + 2^{r-1} + \dots + 1 < 2^{r+1},$$

où les  $a_i$  valent 0 ou 1. On peut alors majorer  $C_{l,h}$  en décomposant la somme de  $l$  termes en une somme de  $2^r$  termes, une autre de  $a_1 2^{r-1}$  termes et ainsi de suite. On utilise ensuite l'inégalité de Minkowski pour obtenir :

$$\begin{aligned} C_{l,h} &\leq \left[ \left( \mathbb{E} \left[ |S_{2^r,h}|^{m+\nu} \right] \right)^{\frac{1}{m+\nu}} + \left( \mathbb{E} \left[ |S_{2^{r-1},h}|^{m+\nu} \right] \right)^{\frac{1}{m+\nu}} + \dots + \left( \mathbb{E} \left[ |S_{1,h}|^{m+\nu} \right] \right)^{\frac{1}{m+\nu}} \right]^{m+\nu} \\ &\leq \left[ \sum_{j=0}^r \left( B_5 2^{r-j} F(h) + B_6 (2^{r-j} F(h))^{\frac{m+\nu}{2}} \right)^{\frac{1}{m+\nu}} \right]^{m+\nu} \\ &\leq \left[ \sum_{j=0}^r (B_5 2^{r-j} F(h))^{\frac{1}{m+\nu}} + \sum_{j=0}^r \left( B_6 (2^{r-j} F(h))^{\frac{m+\nu}{2}} \right)^{\frac{1}{m+\nu}} \right]^{m+\nu} \\ &\leq B_7 2^r F(h) + B_8 2^{\frac{r(m+\nu)}{2}} F(h)^{\frac{m+\nu}{2}} \\ &\leq K_1 (m+\nu) l F(h) + K_2 (m+\nu) (lF(h))^{\frac{m+\nu}{2}}. \end{aligned}$$

On passe de la deuxième ligne à la troisième en utilisant l'inégalité  $|a+b|^\nu \leq |a|^\nu + |b|^\nu$  lorsque  $0 \leq \nu \leq 1$ . Ensuite on obtient la quatrième ligne en utilisant l'inégalité  $(a+b)^l \leq 2^l a^l + 2^l b^l$  pour tout  $a$  et  $b$  positifs. Les constantes  $B_7$  et  $B_8$  dépendent donc clairement de  $\nu$ . La propriété étudiée est héréditaire, donc vraie pour tout exposant  $0 \leq q \leq p$ .  $\square$

La preuve est ainsi achevée.  $\square$

En utilisant le lemme précédent avec  $l = n$  et  $n = h_n$  on obtient qu'il existe  $K_1$  et  $K_2$  telles que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n W_{i,h_n} \right|^q \right] &\leq K_1(q) nF(h_n) + K_2(q) (nF(h_n))^{\frac{q}{2}} \\ &\leq K_3(nF(h_n))^{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

La dernière ligne provient du fait que si  $q < 2$ ,  $K_1 = 0$  (voir la preuve du lemme 6.1) et sinon  $nF(h_n) \rightarrow +\infty$  donc le premier terme est négligeable devant le deuxième. On peut en déduire que pour tout  $0 \leq q \leq p$  il existe une constante  $C(q)$  telle que

$$\sup_n \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n U_{i,n} \right|^q \right] = \sup_n \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{nF(h_n)}} W_{i,h_n} \right|^q \right] \leq C(q).$$

Deuxième étape : bornes pour  $A_{1,n}$ . On peut montrer sous l'hypothèse (8), que l'on a  $\mathbb{E}[\hat{f}(x)] \geq K(1)$ . Par conséquent, on en déduit qu'on a

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(x) \right|^{-1} 1_{|\hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)]| \leq \frac{K(1)}{2}} &= \left| \hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)] + \mathbb{E}[\hat{f}(x)] \right|^{-1} 1_{|\hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)]| \leq \frac{K(1)}{2}} \\ &\leq \frac{2}{K(1)} \text{ p.s.} \end{aligned}$$

On déduit facilement de l'étape précédente et de ce qui précède que pour tout  $0 \leq q \leq p$  il existe une constante  $C(q)$  strictement positive telle que

$$\sup_n A_{1,n} \leq C(q). \quad (18)$$

On doit à présent majorer  $A_{2,n}$ , pour cela on utilise la majoration suivante :

$$\begin{aligned} A_{2,n} &= O \left( \mathbb{E} \left[ \left| \frac{\sqrt{nF(h_n)} \hat{f}(x)}{\mathbb{E}[\hat{f}(x)]} \right|^q 1_{|\hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)]| > \frac{K(1)}{2}} \right] \right) + O \left( \mathbb{E} \left[ \left| \frac{\sqrt{nF(h_n)}}{\mathbb{E}[\hat{f}(x)]} \right|^q 1_{|\hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)]| > \frac{K(1)}{2}} \right] \right) \\ &= \sqrt{nF(h_n)}^q \left( O \left( \mathbb{E} \left[ |\hat{f}(x)|^q 1_{|\hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)]| > \frac{K(1)}{2}} \right] \right) + O \left( \mathbb{P} \left( \left| \hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)] \right| > \frac{K(1)}{2} \right) \right) \right) \quad (19) \end{aligned}$$

On obtient la dernière majoration en se servant de la minoration de  $\mathbb{E}[\hat{f}(x)]$  par  $K(1)$ .

L'idée est maintenant d'utiliser l'hypothèse (6) qui permet d'établir que

$$\mathbb{E}[|\hat{f}(x)|^q | X_1, \dots, X_n] \leq Mp.s..$$

On en déduit à partir de (19) la majoration suivante.

$$\begin{aligned} A_{2,n} &\leq C \sqrt{nF(h_n)}^q \mathbb{P} \left( \left| \hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)] \right| > \frac{K(1)}{2} \right) \\ &\leq C \sqrt{nF(h_n)}^q \frac{\mathbb{E} \left[ \left| \hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)] \right|^q \right] 2^q}{K^q(1)} \\ &\leq C \mathbb{E} \left[ \left| \sqrt{nF(h_n)} \left( \hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)] \right) \right|^q \right]. \end{aligned}$$

Pour conclure on remarque que la preuve du Lemme 6.1 peut être facilement adaptée afin de prouver qu'il existe une constante  $C_2(q)$  telle que

$$\sup_n \mathbb{E} \left[ \left| \sqrt{nF(h_n)} \left( \hat{f}(x) - \mathbb{E}[\hat{f}(x)] \right) \right|^q \right] \leq C_2(q).$$



On en déduit aisément qu'il existe une constante  $C_0(q)$  telle que

$$\sup_n A_{2,n} \leq C_0(q). \quad (20)$$

On déduit aisément de (18) et (20) que les moments d'ordre  $\frac{p}{q} > 1$  de  $|Z_n|^q$  sont bornés.

Etape finale : uniforme intégrabilité de  $Z_n$ . Ce qui précède va nous permettre de montrer que pour tout  $0 \leq q < p$ ,  $|Z_n|^q$  est uniformément intégrable.

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [ |Z_n|^q 1_{\{|Z_n|^q > M\}} ] &\leq \lim_{M \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\mathbb{E} [|Z_n|^p])^{\frac{q}{p}} (\mathbb{P}(|Z_n|^q > M))^{1 - \frac{q}{p}} \\ &\leq \lim_{M \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} (C(p))^{\frac{q}{p}} \left( \frac{\mathbb{E} [|Z_n|^p]}{M^{\frac{p}{q}}} \right)^{1 - \frac{q}{p}} \\ &\leq \lim_{M \rightarrow +\infty} C(p) M^{-\frac{p-q}{q}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [ |Z_n|^q 1_{\{|Z_n|^q > M\}} ] = 0$  et donc  $|Z_n|^q$  est uniformément intégrable.  $\square$

**Preuve du Lemme 2.6 :** La preuve est semblable à celle du Lemme 2.3 et repose sur le lemme suivant :

**Lemme 6.2.** *Si les couples  $(X_i, Y_i)$  sont arithmétiquement  $\alpha$ -mélangeants d'ordre  $a$ , sous les hypothèses (2), (6)-(10) et si il existe  $\gamma > 0$  tel que  $nF^{1+\gamma}(h_n) \rightarrow +\infty$ , alors pour tout  $0 \leq q \leq 2 \left\lceil \frac{\min(t,u)}{2} \right\rceil$ , il existe une constante  $K$  telle que pour tout  $l \in \mathbb{N}$  et  $h \in \mathbb{R}$  on a :*

$$\mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n W_{i,h_n} \right|^q \right] \leq K(q) (nF(h_n))^{\frac{q}{2}}.$$

**Preuve du Lemme 6.2 :** On s'inspire d'une preuve de [18]. On va décomposer la preuve suivant les valeurs de  $q$ . On démontrera le lemme par récurrence pour des puissances paires :  $q = 2m \leq 2 \left\lceil \frac{\min(t,u)}{2} \right\rceil$ , si (9) et (10) sont vérifiées.

A partir de la majoration pour les exposants pairs on déduit celle pour les exposants inférieurs grâce à une inégalité de Hölder.

**Preuve du lemme pour  $q = 2m$  :** Pour simplifier les notations on définit pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $W_{n+i,h_n} \equiv 0$  p.s.. Commençons tout d'abord par remarquer que dans notre cas les valeurs absolues ne sont plus nécessaires et développons. On notera dans nos calculs  $C_{2m}^{q_1, q_2, \dots, q_k} = \frac{(2m)!}{q_1! q_2! \dots q_k!}$  les coefficients du multinôme.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n W_{i,h_n} \right|^{2m} \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n W_{i,h_n} \right)^{2m} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{q_j, \sum_{j=1}^n q_j = 2m} C_{2m}^{q_1, q_2, \dots, q_n} \prod_{i=1}^n W_{i,h_n}^{q_i} \right] \end{aligned}$$

On fait la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n W_{i,h_n} \right|^{2m} \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{2m} \sum_{\left\{ \begin{array}{l} q_j, q_j \geq 1 \\ \sum_{j=1}^k q_j = 2m \end{array} \right.} C_{2m}^{q_1, q_2, \dots, q_k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k W_{i_j, h_n}^{q_j} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{2m} \sum_{\left\{ \begin{array}{l} q_j, q_j \geq 1 \\ \sum_{j=1}^k q_j = 2m \end{array} \right.} C_{2m}^{q_1, q_2, \dots, q_k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W_{i_j, h_n}^{q_j} \right] \quad (21) \end{aligned}$$

On continue ensuite par l'étude de la partie finale de l'expression précédente.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W_{i_j, h_n}^{q_j} \right] &\leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W_{i_j, h_n}^{q_j} \right] \right| \\ &\leq \sum_{i_1=1}^n \sum_{1 \leq e_1, e_2, \dots, e_{k-1} \leq n} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W_{i_1 + \sum_{v=1}^{j-1} e_v, h_n}^{q_j} \right] \right|. \end{aligned}$$

On va montrer par récurrence sur  $m$  que cette dernière majoration est bornée quelque soient  $k$  et  $q_j, 1 \leq j \leq k$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (H_m) : \quad \forall k \leq 2m, \forall q_j \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^k q_j = q \leq 2m, \exists C_1, C_2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \\ \sum_{i_1=1}^n \sum_{1 \leq e_1, e_2, \dots, e_{k-1} \leq n} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W_{i_1 + \sum_{l=1}^{j-1} e_l, h_n}^{q_j} \right] \right| \leq C_1 (nF(h_n))^{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

On va dans un premier temps montrer que dans le cas où  $m = 1$  l'hypothèse de récurrence est vraie.

**Preuve de  $(H_1)$  :** Dans le cas où  $m = 1$  on peut avoir  $q = 1$  ou  $q = 2$ . Dans un premier temps notons pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , si  $q = 1$  alors la majoration est vérifiée puisque les  $W_{i,h_n}$  sont centrés. En effet  $q = 1$  implique  $k = 1$  on a donc :

$$n |\mathbb{E}[W_{1,h_n}]| = 0 \leq C_1 (nF(h_n))^{\frac{q}{2}}.$$

On peut montrer assez aisément que  $(H_1)$  est vérifiée lorsque  $q = 2$  en utilisant notamment les hypothèses (9) et (10) qui permettent de contrôler les covariances. Dans la preuve du Lemme 6.1 on a montré que

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[W_{i,h_n}^2] \leq C nF(h_n).$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq n} |\mathbb{E}[W_{i,h_n} W_{i+j,h_n}]| \leq C nF(h_n).$$

Pour ce faire, pour toute suite  $u_n$ , on peut faire la décomposition suivante :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq n} |\mathbb{E}[W_{i,h_n} W_{i+j,h_n}]| \leq A + B, \quad (22)$$

où  $A = \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq u_n} |\mathbb{E}[W_{i,h_n} W_{i+j,h_n}]|$  et  $B = \sum_{i=1}^n \sum_{u_n < j \leq n-1} |\mathbb{E}[W_{i,h_n} W_{i+j,h_n}]|$ .

Etudions tout d'abord A :

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq u_n} \mathbb{E} \left[ |Y_i Y_{i+j}| K \left( \frac{d(X_i, x)}{h_n} \right) K \left( \frac{d(X_{i+j}, x)}{h_n} \right) \right] \left( \frac{\mathbb{E} \left[ K \left( \frac{d(X_1, x)}{h_n} \right) \right]}{F(h_n)} \right)^2 \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq u_n} \mathbb{E} \left[ K \left( \frac{d(X_i, x)}{h_n} \right) K \left( \frac{d(X_{i+j}, x)}{h_n} \right) \right] \left( \frac{\mathbb{E} \left[ Y_1 K \left( \frac{d(X_1, x)}{h_n} \right) \right]}{F(h_n)} \right)^2 \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq u_n} \mathbb{E} \left[ |Y_i| K \left( \frac{d(X_i, x)}{h_n} \right) K \left( \frac{d(X_{i+j}, x)}{h_n} \right) \right] \left( \frac{\mathbb{E} \left[ K \left( \frac{d(X_1, x)}{h_n} \right) \right]}{F(h_n)} \right) \left| \frac{\mathbb{E} \left[ Y_1 K \left( \frac{d(X_1, x)}{h_n} \right) \right]}{F(h_n)} \right| \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq u_n} \mathbb{E} \left[ |Y_{i+j}| K \left( \frac{d(X_i, x)}{h_n} \right) K \left( \frac{d(X_{i+j}, x)}{h_n} \right) \right] \left( \frac{\mathbb{E} \left[ K \left( \frac{d(X_1, x)}{h_n} \right) \right]}{F(h_n)} \right) \left| \frac{\mathbb{E} \left[ Y_1 K \left( \frac{d(X_1, x)}{h_n} \right) \right]}{F(h_n)} \right| \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq u_n} \mathbb{E} \left[ K \left( \frac{d(X_i, x)}{h_n} \right) K \left( \frac{d(X_{i+j}, x)}{h_n} \right) \right] \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq u_n} \Theta_2(h_n) \\ &\leq C n u_n \Theta_2(h_n). \end{aligned} \quad (23)$$

On obtient la quatrième ligne avec les hypothèses (2), (6), (9) et (8) en conditionnant par  $(X_i, X_j)$ .

Obtenons à présent une majoration pour B. Une application de l'inégalité (15) pour des variables  $\alpha$ -mélangeantes qui ont des moments d'ordre  $p$  donne

$$|\mathbb{E}[W_{i,h_n} W_{j,h_n}]| \leq C [\alpha(|i-j|)]^{\frac{p-2}{p}} F(h_n)^{\frac{2}{p}}.$$

Par conséquent on peut majorer B. On a pour tout  $\eta$  suffisamment petit :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^n \sum_{u_n < j \leq n-1} |\mathbb{E}[W_{i,h_n} W_{i+j,h_n}]| \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \sum_{u_n < j \leq n-1} [\alpha(j)]^{\frac{p-2}{p}} F(h_n)^{\frac{2}{p}} \\ &\leq C F(h_n)^{\frac{2}{p}} n \sum_{u_n < k \leq n-1} k^{-\frac{\alpha(p-2)}{p}} \\ &\leq C F(h_n)^{\frac{2}{p}} n u_n^{-\frac{\alpha(p-2)}{p} + 1 + \eta} \sum_{u_n < k \leq n-1} k^{-1 - \eta} \\ &\leq C F(h_n)^{\frac{2}{p}} n u_n^{-\frac{\alpha(p-2)}{p} + 1 + \eta}, \end{aligned} \quad (24)$$

puisque  $-\frac{\alpha(p-2)}{p} + 1 + \eta < 0$  pour  $\eta > 0$  assez petit d'après (10).



En combinant (22), (23) et (24) on obtient

$$\sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq n} |\mathbb{E}[W_{i,h_n} W_{i+j,h_n}]| \leq Cn \left( u_n \Theta_2(h_n) + F(h_n)^{\frac{2}{p}} u_n^{-\frac{\alpha(p-2)}{p} + 1 + \eta} \right)$$

On prend  $u_n$  de façon à équilibrer les deux termes de droite :

$$u_n = \frac{(F(h_n))^{\frac{2}{\alpha(p-2)-\eta p}}}{(\Theta_2(h_n))^{\frac{p}{\alpha(p-2)-\eta p}}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq n} |\mathbb{E}[W_{i,h_n} W_{i+j,h_n}]| &\leq Cn (F(h_n))^{\frac{2}{\alpha(p-2)-\eta p}} \Theta_2(h_n)^{\frac{\alpha(p-2)-\eta p-p}{\alpha(p-2)-\eta p}} \\ &\leq Cn (F(h_n))^{\frac{2+(1+\nu)(\alpha(p-2)-\eta p-p)}{\alpha(p-2)-\eta p}} \\ &\leq Cn (F(h_n))^{1+\frac{2-p+\nu(\alpha(p-2)-\eta p-p)}{\alpha(p-2)-\eta p}} \\ &\leq Cn F(h_n) \end{aligned}$$

On finit la preuve en remarquant que pour  $\eta > 0$  assez petit  $2-p+\nu(\alpha(p-2)-\eta p-p) > 0$  d'après l'hypothèse (10) et que  $F(h) \leq 1$ . □

On vient de montrer que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang  $m = 1$ . La prochaine étape est de montrer qu'elle est héréditaire.

**Preuve de l'héréditarité de  $(H_m)$  :** On va maintenant supposer que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang  $m \geq 1$  et on va démontrer qu'alors elle est vraie au rang  $m + 1$ . L'idée est de faire le même type de raisonnement que dans la preuve de  $(H_1)$ . On va utiliser des inégalités sur les covariances de variables aléatoires  $\alpha$ -mélangeantes en prenant bien soin de choisir les indices les plus éloignés possibles. On se fixe  $k \leq 2m + 2$  et le vecteur d'exposants  $q_j \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 \leq j \leq k$  tels que  $q = \sum_{j=1}^k q_j \leq 2m + 2$ . A cause d'une précédente remarque on peut aussi supposer que  $q \geq 2$  puisque si  $q = 1$  la majoration à démontrer est toujours vérifiée.

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1=1}^n \sum_{1 \leq e_1, e_2, \dots, e_{k-1} \leq n} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W_{i_1 + \sum_{l=1}^{j-1} e_l, h_n}^{q_j} \right] \right| \\ &\leq \sum_{i_1=1}^n \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{e_s=1}^n \sum_{1 \leq e_j \leq e_s, j \neq s} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W_{i_1 + \sum_{l=1}^{j-1} e_l, h_n}^{q_j} \right] \right|. \end{aligned} \quad (25)$$

Pour plus de clarté, on s'intéresse dans un premier temps à la majoration de la partie finale du membre de droite de l'inégalité précédente.

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1=1}^n \sum_{e_s=1}^n \sum_{1 \leq e_j \leq e_s, j \neq s} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W_{i_1 + \sum_{l=1}^{j-1} e_l, h_n}^{q_j} \right] \right| \\ &\leq \sum_{i_1=1}^n \sum_{e_s=1}^{u_n} \sum_{1 \leq e_j \leq e_s, j \neq s} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W_{i_1 + \sum_{l=1}^{j-1} e_l, h_n}^{q_j} \right] \right| + \sum_{i_1=1}^n \sum_{e_s=u_n+1}^n \sum_{1 \leq e_j \leq e_s, j \neq s} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W_{i_1 + \sum_{l=1}^{j-1} e_l, h_n}^{q_j} \right] \right| \\ &= A + B. \end{aligned} \quad (26)$$

On va étudier et borner séparément  $A$  et  $B$ . En ce qui concerne  $A$ , comme les indices des variables sont pas très éloignés on utilise les hypothèses (9) et (10).

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{e_s=1}^{u_n} \sum_{1 \leq e_j \leq e_s, j \neq s} \left| \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W^{q_j}_{i_1 + \sum_{l=1}^{j-1} e_l, h_n} \mid X_{i_1}, X_{i_1+e_1}, \dots, X_{i_1 + \sum_{l=1}^{k-1} e_l} \right] \right] \right| \\
 &\leq C \sum_{i_1=1}^n \sum_{e_s=1}^{u_n} \sum_{1 \leq e_j \leq e_s, j \neq s} \Theta_k(h_n) \\
 &\leq C n u_n^{k-1} F^{1+\nu_k}(h_n). \tag{27}
 \end{aligned}$$

Passons maintenant à une majoration de  $B$  qui utilise l'inégalité (15).

$$\begin{aligned}
 B &\leq \sum_{i_1=1}^n \sum_{e_s=u_n+1}^n \sum_{1 \leq e_j \leq e_s, j \neq s} \left( \left\| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^s W^{q_j}_{i_1 + \sum_{v=1}^{j-1} e_v, h_n} \right] \right\| \left\| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=s+1}^k W^{q_j}_{i_1 + \sum_{v=1}^{j-1} e_v, h_n} \right] \right\| \right. \\
 &\quad \left. + \alpha(i_s)^{1 - \frac{\sum_{v=1}^s q_v}{p} - \frac{\sum_{v=s+1}^k q_v}{p}} \left\| \prod_{j=1}^s W^{q_j}_{i_1 + \sum_{v=1}^{j-1} e_v, h_n} \right\|_{\frac{p}{\sum_{v=1}^s q_v}} \left\| \prod_{j=s+1}^k W^{q_j}_{i_1 + \sum_{v=1}^{j-1} e_v, h_n} \right\|_{\frac{p}{\sum_{v=s+1}^k q_v}} \right) \\
 &\leq \sum_{i_1=1}^n \sum_{1 \leq e_j \leq n, j < s} \left\| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^s W^{q_j}_{i_1 + \sum_{v=1}^{j-1} e_v, h_n} \right] \right\| \sum_{i_0=1}^n \sum_{1 \leq e_j \leq n, j > s} \left\| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=s+1}^k W^{q_j}_{i_0 + \sum_{v=s+1}^{j-1} e_v, h_n} \right] \right\| \\
 &\quad + \sum_{i_1=1}^n \sum_{e_s=u_n+1}^n \sum_{1 \leq e_j \leq e_s, j \neq s} \alpha(e_s)^{\frac{p-q}{p}} F^{\frac{q}{p}}(h_n) \\
 &\leq B_1 + B_2
 \end{aligned}$$

Pour continuer et majorer  $B_1$  on fait le constat suivant : de deux choses l'une, soit  $s = 1$  et  $q_1 = 1$  ou  $s = k - 1$  et  $q_k = 1$  et alors l'une des deux espérances est nulle car les  $W_{i,h}$  sont centrées, soit l'hypothèse de récurrence ( $H_m$ ) permet d'obtenir les majorations suivantes où les  $K_j$  sont des constantes indépendantes de  $n$  :

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{1 \leq e_j \leq n, j < s} \left\| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^s W^{q_j}_{i_1 + \sum_{v=1}^{j-1} e_v, h_n} \right] \right\| \leq K_1 \sqrt{nF(h_n)^{\sum_{v=1}^s q_v}}, \tag{28}$$

$$\sum_{i_0=1}^n \sum_{1 \leq e_j \leq n, j > s} \left\| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=s+1}^k W^{q_j}_{i_0 + \sum_{v=s+1}^{j-1} e_v, h_n} \right] \right\| \leq K_2 \sqrt{nF(h_n)^{\sum_{v=s+1}^k q_v}}. \tag{29}$$

En effet, on peut montrer que dans le cas où aucune des espérances n'est nulle, on a  $s \leq 2m$ . On a directement  $s \leq k - 1 \leq 2m + 2 - 1 = 2m + 1$ . Si  $k = 2m + 2$  et  $s = k - 1$  alors  $q_j = 1, \forall 1 \leq j \leq 2m + 2$  et alors la seconde espérance est nulle. On a donc  $k < 2m + 2$  ou  $s < k - 1$  et donc  $s \leq 2m$ . On peut montrer de la même manière que  $k - s \leq 2m$ . On montre également que lorsque  $B_1 \neq 0$ , on a  $\sum_{i=1}^s q_j \leq 2m$  (on sait que  $\sum_{i=1}^k q_j \leq 2m + 2$  et que  $\sum_{j=s+1}^k q_j \geq 2$  puisque soit  $s < k - 1$ , soit  $q_k \geq 2$ ) et  $\sum_{i=s+1}^k q_j \leq 2m$ . A partir de ce qui précède on remarque que soit  $B_1 = 0$ , soit  $q \geq 4$  (puisque  $\sum_{j=s+1}^k q_j \geq 2$  et  $\sum_{j=1}^s q_j \geq 2$ ). Tout cela nous permet d'appliquer ( $H_m$ ) pour obtenir les majorations précédentes. A partir des inégalités (28) et (29) on aboutit à :

$$B_1 \leq K_3 \sqrt{nF(h_n)^q} \tag{30}$$

La dernière ligne provient du fait que  $q = \sum_{i=1}^k q_i$ . L'hypothèse (10) permet d'obtenir que si  $\eta > 0$  est assez petit, alors  $k-1 - a \frac{p-q}{p} + \eta < 0$  et d'aboutir à la majoration suivante (où  $C$  ne dépend pas de  $n$ ) :

$$\begin{aligned}
 B_2 &\leq n \sum_{i_s=u_n}^n i_s^{k-2} \alpha(i_s)^{\frac{p-q}{p}} F^{\frac{q}{p}}(h_n) \\
 &\leq Cn \sum_{i=u_n}^n i^{k-2-a \frac{p-q}{p} + 1 + \eta} i^{-1-\eta} F^{\frac{q}{p}}(h_n) \\
 &\leq Cn (u_n)^{k-2-a \frac{p-q}{p} + 1 + \eta} F^{\frac{q}{p}}(h_n) \sum_{i=u_n}^n i^{-1-\eta} \\
 &\leq Cn (u_n)^{k-1-a \frac{p-q}{p} + \eta} F^{\frac{q}{p}}(h_n). \tag{31}
 \end{aligned}$$

On peut facilement voir que les majorations (27) et (31) sont respectivement croissantes et décroissantes par rapport à  $u_n$ . L'idée est maintenant de choisir  $u_n$  de façon à équilibrer les ordres de grandeurs de ces majorations. On choisit donc

$$u_n = (F(h_n))^{\frac{q-p(1+\nu_k)}{a(p-q)-\eta p}}.$$

Avec ce choix de  $u_n$  on aboutit à la majoration suivante :

$$A + B_2 \leq Cn (F(h_n))^{\frac{(k-1)[q-p(1+\nu_k)]}{a(p-q)-\eta p} + 1 + \nu_k}.$$

En utilisant (10) on peut voir que  $(k-1)[q-p(1+\nu_k)] + \nu_k(a(p-q)-\eta p) > 0$  si  $\eta$  est assez petit et on a donc

$$A + B_2 \leq Cn F(h_n). \tag{32}$$

On déduit aisément de (25), (26), (30) et (32) la majoration suivante :

$$n \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \leq n} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^k W^{q_j}_{1+\sum_{v=1}^{j-1} i_v, h_n} \right] \right| \leq K_4 \sqrt{nF(h_n)^q} + K_5 n F(h_n) \tag{33}$$

$$\leq C_1 \sqrt{nF(h)^q}. \tag{34}$$

La dernière ligne provient du fait que  $q \geq 2$  et  $nF(h_n) \rightarrow +\infty$ . □

On en conclut donc que la propriété  $(H_m)$  est héréditaire et donc qu'elle est vraie pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m \leq \left\lfloor \frac{\min(t, u)}{2} \right\rfloor$  sous les hypothèses (9) et (10). On conclut directement à partir de (34) et (21) que

$$\mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n W_{i, h_n} \right|^{2m} \right] \leq C_1 (nF(h_n))^m.$$

□

□

Ainsi (17) est établie et la preuve de ce lemme peut être achevée comme celle du Lemme 2.3. □



**Preuve du Théorème 3.1 :** On remarque que  $\mathbb{E}[\hat{r}(x)] = r(x) + B_n + o(h_n) + O\left(\frac{1}{\sqrt{nF(h_n)}}\right)$  (voir [8] pour plus de détails dans le cas indépendant). De plus ceci reste vrai sous nos hypothèses lorsque  $u \geq 1$  (par conséquent  $\mathbb{E}[\hat{r}(x) | X_1, \dots, X_n] \leq M$  p.s.) avec la même décomposition et les résultats de [5] concernant la variance de  $\hat{f}(x)$  et la covariance de  $\hat{f}(x)$  et de  $\hat{g}(x)$ . Donc

$$Z_n = \sqrt{\frac{nF(h_n)M_1^2}{M_2\sigma_\epsilon^2}} (\hat{r}(x) - \mathbb{E}[\hat{r}(x)]) + o\left(h_n\sqrt{nF(h_n)}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{nF(h_n)}}\right).$$

On a donc que  $U_n := \sqrt{\frac{nF(h_n)M_1^2}{M_2\sigma_\epsilon^2}} (\hat{r}(x) - \mathbb{E}[\hat{r}(x)]) = Z_n + o(1)$  puisque  $\sqrt{nF(h_n)}h_n \leq C$  et par conséquent, lorsque  $l \in \mathbb{N}$ ,  $U_n^l$  est uniformément intégrable et converge en loi vers  $W^l$  où  $W$  est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite puisque  $(Z_n)^l$  possède ces propriétés. En effet,  $|U_n|^l \leq 2^l |Z_n|^l + o(1)$  et ce majorant est uniformément intégrable puisque  $|Z_n|^l$  l'est. De plus il est clair que  $U_n$  converge vers  $W$  en loi à cause de la convergence de  $Z_n$  et comme  $x \mapsto x^l$  est continue sur  $\mathbb{R}$  on en déduit que  $U_n^l$  converge en loi vers  $W^l$ . On obtient donc de la même manière que dans la preuve des Théorèmes 2.1 et 2.4 :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{\frac{nF(h_n)M_1^2}{M_2\sigma_\epsilon^2}} (\hat{r}(x) - \mathbb{E}[\hat{r}(x)]) \right)^l \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[W^l].$$

On peut obtenir des résultats similaires avec les valeurs absolues et sans supposer que  $l$  est entier. En effet, pour tout  $l \in [0; p]$ ,  $|U_n|^l$  est uniformément intégrable et converge en loi vers  $|W|^l$  où  $W$  est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite puisque  $|Z_n|^l$  a ces propriétés. On obtient donc de la même manière que dans la preuve des Théorèmes 2.1 et 2.4 :

$$\mathbb{E} \left[ \left| \sqrt{\frac{nF(h_n)M_1^2}{M_2\sigma_\epsilon^2}} (\hat{r}(x) - \mathbb{E}[\hat{r}(x)]) \right|^l \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|W|^l].$$

□

**Preuve du Théorème 3.2 : Preuve de (i) :** On part du fait que

$$T_n := \left| \sqrt{\frac{nF(h_n)M_1^2}{M_2\sigma_\epsilon^2}} (\hat{r}(x) - r(x)) \right|^q = \left| Z_n + \sqrt{\frac{nF(h_n)M_1^2}{M_2\sigma_\epsilon^2}} B_n \right|^q.$$

Les Lemmes 2.2 et 2.3 ou 2.5 et 2.6 montrent que  $|Z_n|^q$  est uniformément intégrable et que  $Z_n$  converge en loi vers  $W$ . L'hypothèse (7) permet d'obtenir que  $\zeta_n = \sqrt{\frac{nF(h_n)M_1^2}{M_2\sigma_\epsilon^2}} B_n$  est borné par une constante  $C$ . Une des conséquences de ceci est que  $T_n$  est uniformément intégrable puisque l'on peut montrer que

$$T_n \leq 2^q \left| \sqrt{\frac{nF(h_n)M_1^2}{M_2\sigma_\epsilon^2}} B_n \right|^q + 2^q |Z_n|^q,$$

et remarquer que le majorant est uniformément intégrable. D'autre part on se fixe  $\epsilon > 0$  et on fait la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[|Z_n + \zeta_n|^q] - \mathbb{E}[|W + \zeta_n|^q] \\ &= \mathbb{E}[|Z_n + \zeta_n|^q \mathbf{1}_{|Z_n| \leq M}] - \mathbb{E}[|W + \zeta_n|^q \mathbf{1}_{|W| \leq M}] \\ &+ \mathbb{E}[|Z_n + \zeta_n|^q \mathbf{1}_{|Z_n| > M}] - \mathbb{E}[|W + \zeta_n|^q \mathbf{1}_{|W| > M}] \end{aligned} \quad (35)$$

Dans un premier temps on remarque que  $|Z_n| > M$  (respectivement  $|W| > M$ ) implique que  $|Z_n + \zeta_n| > M - C$  (respectivement  $|W + \zeta_n| > M - C$ ). On peut donc majorer la dernière ligne de (35) :

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E} [ |Z_n + \zeta_n|^q 1_{|Z_n| > M} ] - \mathbb{E} [ |W + \zeta_n|^q 1_{|W| > M} ]| \\ & \leq \mathbb{E} [ |Z_n + \zeta_n|^q 1_{|Z_n + \zeta_n| > M - C} ] + \mathbb{E} [ |W + \zeta_n|^q 1_{|W + \zeta_n| > M - C} ]. \end{aligned}$$

Enfin, l'uniforme intégrabilité de  $T_n$  et de  $|W + \zeta_n|^q$  permet d'obtenir pour  $M$  assez grand ( $M \geq M_0$ ), les majorations suivantes :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [ |Z_n + \zeta_n|^q 1_{|Z_n + \zeta_n| > M - C} ] < \frac{\epsilon}{3}, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [ |W + \zeta_n|^q 1_{|W + \zeta_n| > M - C} ] < \frac{\epsilon}{3}. \quad (36)$$

On introduit la famille de fonctions  $\mathcal{F}_{C,M} = \{f_{\zeta,M}(x) = 1_{|x| \leq M} |x + \zeta|^q, |\zeta| \leq C\}$ . On utilisera le lemme suivant :

**Lemme 6.3.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et soit

$$\mathcal{F}_{C,M,f} = \{f_{\zeta,M}(x) = 1_{|x| \leq M} f(x + \zeta), |\zeta| \leq C\}.$$

Si  $Z_n$  converge en loi vers  $Z$  (dont la loi n'a pas d'atome) alors

$$\sup_{|\zeta| \leq C} |\mathbb{E} [f_{\zeta,M}(Z_n)] - \mathbb{E} [f_{\zeta,M}(Z)]| \rightarrow 0.$$

**Preuve du Lemme 6.3 :** On va s'inspirer très fortement de la preuve du Théorème de Helly-Bray ou Portemanteau. Par soucis de clarté on notera  $f_\zeta = f_{\zeta,M}$ . Remarquons tout d'abord que puisque  $f$  est continue, elle est bornée et uniformément continue sur tout compact donc notamment sur  $\mathcal{K} = [-M - C; M + C]$  :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_{f,\epsilon} > 0, \forall z_1, z_2 \in \mathcal{K}, |z_1 - z_2| < \delta_{f,\epsilon} \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon.$$

En notant que  $f_\zeta(z) = f(z + \zeta)$  si  $|z| \leq M$ , on a pour tous  $z_1, z_2 \in [-M; +M]$  :

$$|z_1 + \zeta - \zeta - z_2| = |z_1 - z_2| < \delta_{f,\epsilon} \Rightarrow |f_\zeta(z_1) - f_\zeta(z_2)| = |f(z_1 + \zeta) - f(z_2 + \zeta)| < \epsilon \quad (37)$$

Soit  $\epsilon > 0$  fixé. Comme  $[-M; +M]$  est un compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'intervalles  $A_j$  de longueur strictement plus petite que  $\delta_{f,\epsilon}$  :

$$[-M; +M] \subset \bigcup_{j=1}^J A_j, \quad \forall j, z_1, z_2 \in A_j \Rightarrow |z_1 - z_2| < \delta_{f,\epsilon}.$$

Pour toute fonction  $f_\zeta$  l'idée est de construire à partir de la remarque (37) une fonction en escaliers  $f_{\zeta,\epsilon}$  telle que  $\sup_z |f_\zeta(z) - f_{\zeta,\epsilon}(z)| < \epsilon$ . On la définit de la manière suivante :

$$f_{\zeta,\epsilon}(z) = \sum_{j=1}^J f_\zeta(z_j) 1_{[-M; +M]}(z) 1_{A_j}(z),$$

où  $z_j$  est un point de  $A_j \cap [-M; M]$ . Pour obtenir le résultat recherché on fait la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} & \sup_{|\zeta| < C} |\mathbb{E} [f_\zeta(Z_n)] - \mathbb{E} [f_\zeta(Z)]| \\ & = \sup_{|\zeta| < C} |\mathbb{E} [f_\zeta(Z_n)] - \mathbb{E} [f_{\zeta,\epsilon}(Z_n)] + \mathbb{E} [f_{\zeta,\epsilon}(Z_n)] - \mathbb{E} [f_{\zeta,\epsilon}(Z)] + \mathbb{E} [f_{\zeta,\epsilon}(Z)] - \mathbb{E} [f_\zeta(Z)]| \\ & \leq \sup_{|\zeta| < C} |\mathbb{E} [f_\zeta(Z_n)] - \mathbb{E} [f_{\zeta,\epsilon}(Z_n)]| + \sup_{|\zeta| < C} |\mathbb{E} [f_{\zeta,\epsilon}(Z_n)] - \mathbb{E} [f_{\zeta,\epsilon}(Z)]| \\ & \quad + \sup_{|\zeta| < C} |\mathbb{E} [f_{\zeta,\epsilon}(Z)] - \mathbb{E} [f_\zeta(Z)]| \\ & \leq 2\epsilon + \sup_{|\zeta| < C} |\mathbb{E} [f_{\zeta,\epsilon}(Z_n)] - \mathbb{E} [f_{\zeta,\epsilon}(Z)]|. \end{aligned} \quad (38)$$

On obtient la dernière ligne en utilisant que  $f_{\zeta, \epsilon}$  est proche de  $f_{\zeta}$ . Pour conclure il faut montrer que le dernier supremum tend vers 0.

$$\begin{aligned}
 & \sup_{|\zeta| < C} |\mathbb{E}[f_{\zeta, \epsilon}(Z_n)] - \mathbb{E}[f_{\zeta, \epsilon}(Z)]| \\
 = & \sup_{|\zeta| < C} \left| \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^J f_{\zeta}(z_j) (1_{A_j \cap [-M; +M]}(Z_n) - 1_{A_j \cap [-M; +M]}(Z)) \right] \right| \\
 = & \sup_{|\zeta| < C} \sum_{j=1}^J |f_{\zeta}(z_j)| |\mathbb{P}(Z_n \in A_j \cap [-M; +M]) - \mathbb{P}(Z \in A_j \cap [-M; +M])| \\
 = & O \left( \sum_{j=1}^J |\mathbb{P}(Z_n \in A_j \cap [-M; +M]) - \mathbb{P}(Z \in A_j \cap [-M; +M])| \right) \\
 = & o(1).
 \end{aligned}$$

Les dernières lignes proviennent du fait que  $f$  est bornée sur  $\mathcal{K}$  et que puisque  $Z_n$  converge vers  $Z$  en loi chacune des quantités  $\mathbb{P}(Z_n \in A_j \cap [-M; +M]) - \mathbb{P}(Z \in A_j \cap [-M; +M])$  converge vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  car la loi de  $Z$  n'a pas d'atomes. On en conclut donc que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0, \forall n \geq N_0, \sup_{|\zeta| < C} |\mathbb{E}[f_{\zeta, \epsilon}(Z_n)] - \mathbb{E}[f_{\zeta, \epsilon}(Z)]| < \epsilon. \quad (39)$$

On obtient directement en utilisant (38) et (39) que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0, \forall n \geq N_0, \sup_{|\zeta| < C} |\mathbb{E}[f_{\zeta}(Z_n)] - \mathbb{E}[f_{\zeta}(Z)]| < 3\epsilon,$$

ce qui achève la preuve. □

En appliquant le lemme précédent à la famille  $\mathcal{F}_{C, M}$  on en conclut que, pour tout  $M$  :

$$\begin{aligned}
 |\mathbb{E}[f_{\zeta_n, M}(Z_n)] - \mathbb{E}[f_{\zeta_n, M}(W)]| & \leq \sup_{|\zeta| < C} |\mathbb{E}[f_{\zeta, M}(Z_n)] - \mathbb{E}[f_{\zeta, M}(W)]| \\
 & = o(1).
 \end{aligned}$$

Par conséquent il existe  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$  on a

$$|\mathbb{E}[f_{\zeta_n, M}(Z_n)] - \mathbb{E}[f_{\zeta_n, M}(W)]| \leq \frac{\epsilon}{3}. \quad (40)$$

On aboutit ainsi à partir de (35), (36) et (40) à la conclusion suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0, \forall n \geq N_0, |\mathbb{E}[|Z_n + \zeta_n|^q] - \mathbb{E}[|W + \zeta_n|^q]| < \epsilon.$$

Ceci achève la preuve du (i). Avec un raisonnement identique on peut obtenir des résultats semblables sans les valeurs absolues lorsque  $q \in \mathbb{N}$ . Il suffit d'utiliser le lemme avec la famille  $\{f_{\zeta, M}(x) = 1_{|x| \leq M}(x + \zeta)^q, |\zeta| \leq C\}$  et de remarquer que

$$|\mathbb{E}[(Z_n + \zeta_n)^q 1_{|Z_n| > M}]| \leq \mathbb{E}[|Z_n + \zeta_n|^q 1_{|Z_n| > M}]$$

□

**Preuve de (ii) :** Dans le cas où  $q$  est un entier pair l'erreur  $L^q$  est le moment d'ordre  $q$  de  $\hat{r}(x) - r(x)$ ; on peut donc se passer des valeurs absolues. On va montrer un résultat plus



général que (ii) : sans les valeurs absolues et pour  $q = l$  entier quelconque. On a comme conséquence de la deuxième partie de la preuve de (i) le résultat :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ (\hat{r}(x) - r(x))^l \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( W \sqrt{\frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{nF(h_n) M_1^2}} + B_n \right)^l \right] + o \left( \frac{1}{(nF(h_n))^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^l C_l^k \mathbb{E} [W^k] \left( \sqrt{\frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{nF(h_n) M_1^2}} \right)^k (B_n)^{l-k} + o \left( \frac{1}{(nF(h_n))^{\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned}$$

On peut à présent remarquer que les moments impairs de  $W$  sont nuls tandis que ceux d'ordre  $2p$  valent  $\frac{(2p)!}{2^p p!}$ . On en déduit aisément que l'on a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ (\hat{r}(x) - r(x))^l \right] \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} C_l^{2p} \left( \frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{M_1^2 nF(h_n)} \right)^p \frac{(2p)!}{2^p p!} \left( \phi'(0) \frac{M_0}{M_1} h_n \right)^{l-2p} + o \left( \frac{1}{(nF(h_n))^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \left( \frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{M_1^2} \right)^p \left( \frac{M_0}{M_1} \phi'(0) \right)^{l-2p} \frac{l!}{(l-2p)! p! 2^p} \frac{h_n^{l-2p}}{(nF(h_n))^p} + o \left( \frac{1}{(nF(h_n))^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{M_2^p M_0^{l-2p} (\phi'(0))^{l-2p} (\sigma_\epsilon^2)^p}{M_1^l} \frac{l!}{(l-2p)! p! 2^p} \frac{h_n^{l-2p}}{(nF(h_n))^p} + o \left( \frac{1}{(nF(h_n))^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. En effet il suffit de remplacer  $l$  par  $2m$  pour obtenir (ii).  $\square$

**Preuve de (iii) :** On déduit du (i) que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |\hat{r}(x) - r(x)|^{2m+1} \right] &= \left( \sqrt{\frac{M_2 \sigma_\epsilon^2}{M_1^2 nF(h_n)}} \right)^{2m+1} \mathbb{E} \left[ \left| \sqrt{\frac{M_1^2 nF(h_n)}{M_2 \sigma_\epsilon^2}} B_n + W \right|^{2m+1} \right] \\ &\quad + o \left( \frac{1}{(nF(h_n))^{m+\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs on introduit la notation

$$U_n = \sqrt{\frac{M_1^2 nF(h_n)}{M_2 \sigma_\epsilon^2}} B_n.$$

Il nous faut donc exprimer plus précisément l'espérance de droite.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |U_n + W|^{2m+1} \right] &= - \int_{-\infty}^{-U_n} (U_n + w)^{2m+1} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw + \int_{-U_n}^{+\infty} (U_n + w)^{2m+1} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw \\ &= \sum_{k=0}^{2m+1} C_{2m+1}^k (U_n)^{2m+1-k} I_k, \end{aligned}$$

où

$$I_k = - \int_{-\infty}^{-U_n} \frac{w^k e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw + \int_{-U_n}^{+\infty} \frac{w^k e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw.$$

On utilisera le lemme suivant :

**Lemme 6.4.** Pour tout  $k$  entier naturel on a :

$$I_{2k+1} = 2g(U_n) \sum_{j=0}^k (U_n)^{2(k-j)} \frac{2^k k!}{2^{k-j} (k-j)!},$$

$$I_{2k} = -2g(U_n) \sum_{j=0}^{k-1} (U_n)^{2(k-j)-1} \frac{(2k)! 2^{k-j} (k-j)!}{2^k k! (2(k-j))!} + [2G(U_n) - 1] \frac{(2k)!}{2^k k!},$$

avec la convention qu'une somme sur un ensemble vide d'indices est nulle.

**Preuve du Lemme 6.4 :** Par des arguments de parité, on voit aisément que :

$$I_{2k} = 2 \int_0^{U_n} w^{2k} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw \text{ et } I_{2k+1} = 2 \int_{U_n}^{+\infty} w^{2k+1} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw.$$

On va raisonner par récurrence sur  $k$ . Etudions tout d'abord les  $I_{2k}$ .

Pour  $k = 0$ , il est évident que  $I_0 = 2G(U_n) - 1$ .

On suppose que la propriété est vraie pour  $k = r$ , et on veut montrer qu'elle est vraie pour  $k = r + 1$ .

$$I_{2(r+1)} = 2 \int_0^{U_n} w^{2(r+1)} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw$$

$$= 2 \left[ -w^{2r+1} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right]_0^{U_n} + (2r+1) I_{2r}$$

$$= (2r+1) \left( -2g(U_n) \sum_{j=0}^{r-1} (U_n)^{2(r-j)-1} \frac{(2r)! 2^{r-j} (r-j)!}{2^r r! (2(r-j))!} + [2G(U_n) - 1] \frac{(2r)!}{2^r r!} \right) - 2g(U_n) U_n^{2r+1}$$

$$I_{2(r+1)} = -2g(U_n) \sum_{j=0}^r (U_n)^{2(r+1-j)-1} \frac{(2(r+1))! 2^{r+1-j} (r+1-j)!}{2^{r+1} (r+1)! (2(r+1-j))!} + [2G(U_n) - 1] \frac{(2(r+1))!}{2^{r+1} (r+1)!}.$$

La propriété est donc héréditaire, vraie pour  $k = 0$  donc vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . On établit le résultat pour  $I_{2k+1}$  de la même manière. Il est clair que  $I_1 = 2g(U_n)$  et d'autre part

$$I_{2(r+1)+1} = 2U_n^{2(r+1)} g(U_n) + 2(r+1) I_{2r+1}.$$

□

En remplaçant  $I_k$  par son expression, on obtient en gardant comme convention qu'une

somme sur un ensemble d'indices vide est nulle :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ |U_n + W|^{2m+1} \right] &= \sum_{k=0}^m \left[ C_{2m+1}^{2k} (U_n)^{2(m-k)+1} I_{2k} + C_{2m+1}^{2k+1} (U_n)^{2(m-k)} I_{2k+1} \right] \\
 &= [2G(U_n) - 1] \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!} (U_n)^{2(m-k)+1} \\
 &\quad + 2g(U_n) \left\{ \sum_{j=0}^m (U_n)^{2(m-j)} \sum_{k=j}^m C_{2m+1}^{2k+1} \frac{2^k k!}{2^{k-j} (k-j)!} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=0}^{m-1} (U_n)^{2(m-j)} \sum_{k=j+1}^m C_{2m+1}^{2k} \frac{(2k)! 2^{k-j} (k-j)!}{2^k k! (2(k-j))!} \right\} \\
 &= [2G(U_n) - 1] P_{2m+1}(U_n) + 2g(U_n) Q_{2m+1}(U_n).
 \end{aligned}$$

On en déduit facilement le résultat recherché. □

Ainsi s'achève la preuve du Théorème 3.2. □

## Références

- [1] Bosq, D. (1991) Modelization, nonparametric estimation and prediction for continuous time processes. In : ROUSSAS G. (Ed) *Nonparametric functional estimation and related topics* NATO ASI Series, **335** Kluwer, 509-530.
- [2] Bosq, D. (1996) *Nonparametric statistics for stochastic processes. Estimation and prediction*. Lecture Notes in Statistics, **110**, Springer-Verlag, New York.
- [3] Bosq, D. (2000) *Linear processes in function spaces*. Lecture Notes in Statistics, **149**, Springer-Verlag, New York.
- [4] Cox, D.D. and Kim, T.Y. (1995) Moment bounds for mixing random variables useful in nonparametric function estimation *Stochastic Processes and their Applications*, **56**, 151-158.
- [5] Delsol, L. (2006) Advances on asymptotic normality in nonparametric functional Time Series Analysis (article soumis)
- [6] Doob, J.L. (1953) *Stochastic Processes* John Wiley and Sons, Inc New York
- [7] Ferraty, F., Goia, A. and Vieu, P. (2002) Functional nonparametric model for time series : a fractal approach for dimension reduction. *Test*, **11**, (2) 317-344
- [8] Ferraty, F., Mas, A. and Vieu, P. (2006) Advances on nonparametric regression for fonctionnal data. *ANZ Journal of Statistics In print*
- [9] Ferraty, F. and Vieu, P. (2006) *Nonparametric fonctionnal data analysis*. Springer-Verlag, New York.
- [10] Hall, P., Lahiri, S.N., Polzehl, J. (2002) On bandwidth choice in non-parametric regression with short- and long-range dependent errors. *Annals of Statistics*, **23**, (6) 1921-1936
- [11] Hoeffding, W. (1963) Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of American Statistic Association* **58**, 15-30.
- [12] Kim, T.Y. (1993) A note on moment bounds for strong mixing sequences *Statistics and Probability Letters*, **16 N°2**, 163-168.
- [13] Masry, E. (2005) Nonparametric regression estimation for dependent functional data : asymptotic normality. *Stochastic Process. Appl.*, **115**, (1), 155-177.