



**HAL**  
open science

# Représentations irréductibles de certaines algèbres d'opérateurs différentiels

Alexis Tchoudjem

► **To cite this version:**

Alexis Tchoudjem. Représentations irréductibles de certaines algèbres d'opérateurs différentiels. 2010. ⟨hal-00449485⟩

**HAL Id: hal-00449485**

**<https://hal.science/hal-00449485v1>**

Preprint submitted on 22 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Représentations irréductibles de certaines algèbres  
d'opérateurs différentiels  
Irreducible representations of some differential  
operator algebras

Alexis TCHOUDJEM  
Institut Camille Jordan  
Université Claude Bernard Lyon I  
Boulevard du Onze Novembre 1918  
69622 Villeurbanne  
FRANCE  
tchoudjem@math.univ-lyon1.fr

Villeurbanne, le 22 janvier 2010

**Abstract :** For a projective variety  $X$  and a line bundle  $L$  over  $X$ , one considers the  $L$ -twisted global differential operator algebra  $\mathcal{D}_L(X)$  which naturally operates on the space of global sections  $H^0(X, L)$ . In the case where  $X$  is the wonderful compactification of the group  $\mathrm{PGL}_3$ , one proves that the space  $H^0(X, L)$  is an irreducible representation of the algebra  $\mathcal{D}_L(X)$  or zero. For that, one introduces a 2-order differential operator which is defined over whole  $X$  but which does not arise from the infinitesimal action of the automorphism group  $\mathrm{Aut}(X)$ .

## Introduction

According to the famous Borel-Weil theorem, if  $X$  is a flag variety and if  $L$  is a line bundle over  $X$ , then the space  $H^0(X, L)$  is an irreducible representation of the Lie algebra of the automorphism group of  $X$ , or 0. If  $\overline{G}$  is the wonderful compactification of an adjoint semisimple algebraic group  $G$ , then all the line bundles over  $\overline{G}$  are  $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -linearized ( $\widehat{G}$  being the universal covering of  $G$ ) and the space of global sections  $H^0(\overline{G}, L)$  is a representation of  $\widehat{G} \times \widehat{G}$  which is reducible in general. Now, the algebra  $\mathcal{D}_L(\overline{G})$  operates on  $H^0(\overline{G}, L)$  too; that algebra is the global section algebra of a sheaf of algebras defined from  $L$  and the sheaf of differential operators over  $\overline{G}$ . In the case where  $G$  is  $\mathrm{PGL}_3$ , one gives a 2-order differential operator defined over whole  $\overline{G}$  (*cf.* théorème 8.4). Then, by using this operator, one proves that the space  $H^0(\overline{G}, L)$  is irreducible (or zero) as a  $\mathcal{D}_L(\overline{G})$ -module, for all line bundles  $L$  over  $\overline{G}$ . One finishes with a similar result over the « complete conic variety » (*cf.* théorème 10.1).

**Résumé :** À une variété projective  $X$  et à un fibré en droites  $L$  sur  $X$ , on peut associer une algèbre  $\mathcal{D}_L(X)$ , l'algèbre des  $L$ -opérateurs différentiels globaux sur  $X$ , qui opère naturellement sur l'espace des sections globales  $H^0(X, L)$ . On montre ici que dans le cas particulier où  $X$  est la compactification magnifique du groupe  $\mathrm{PGL}_3$ , l'espace  $H^0(X, L)$  est soit nul soit une représentation irréductible de l'algèbre  $\mathcal{D}_L(X)$ . On introduit pour cela un opérateur différentiel d'ordre 2 défini sur tout  $X$  mais qui ne provient pas de l'action infinitésimale sur  $X$  du groupe d'automorphismes  $\mathrm{Aut}X$ .

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Opérateurs différentiels sur une variété</b>	<b>4</b>
1.1 Opérateurs différentiels tordus par un faisceau inversible . . .	4
1.2 Action de groupes . . . . .	5
<b>2 Compactifications magnifiques des groupes adjoints</b>	<b>6</b>
<b>3 Immersion dans un produit d'espaces projectifs</b>	<b>6</b>
3.1 Notations . . . . .	6
<b>4 La grosse cellule</b>	<b>7</b>
<b>5 Le groupe de Picard</b>	<b>8</b>
<b>6 Sections des faisceaux inversibles</b>	<b>8</b>
6.1 sur la grosse cellule . . . . .	8
6.2 sections globales . . . . .	8
<b>7 Cas particulier</b>	<b>9</b>
<b>8 Formules de changement de variables</b>	<b>10</b>
8.1 Fonctions . . . . .	10
8.2 Dérivations issues de l'action de l'algèbre de Lie . . . . .	11
8.3 Un opérateur différentiel d'ordre 2 . . . . .	13
8.4 Opérateurs différentiels tordus . . . . .	16
<b>9 Irréductibilité des espaces de sections globales</b>	<b>18</b>
<b>10 Autre cas</b>	<b>24</b>
<b>Références</b>	<b>24</b>

Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

## Introduction

D'après le célèbre théorème de Borel-Weil, si  $X$  est une variété de drapeaux et si  $L$  est un fibré en droites sur  $X$ , alors, lorsqu'il est non nul, l'espace  $H^0(X, L)$  est une représentation irréductible de l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de  $X$ . Si  $\overline{G}$  est la compactification magnifique d'un groupe algébrique semi-simple adjoint  $G$ , alors tout fibré en droites  $L$  sur  $\overline{G}$  est  $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -linéarisé ( $\widehat{G}$  est le revêtement universel de  $G$ ) et l'espace des sections globales  $H^0(\overline{G}, L)$  est une représentation de  $\widehat{G} \times \widehat{G}$  qui

est réductible en général. Mais sur  $H^0(\overline{G}, L)$ , l'anneau  $\mathcal{D}_L(\overline{G})$  opère aussi ; c'est l'algèbre des sections globales d'un faisceau d'algèbres défini à partir de  $L$  et du faisceau des opérateurs différentiels sur  $\overline{G}$ . On donne ici dans le cas particulier où  $G = \mathrm{PGL}_3$  un opérateur différentiel d'ordre 2 défini sur tout  $\overline{G}$  (cf. le théorème 8.4). Puis on démontre en utilisant cet opérateur que l'espace  $H^0(\overline{G}, L)$  est irréductible (ou nul) comme  $\mathcal{D}_L(\overline{G})$ -module pour tout fibré en droites  $L$  sur  $\overline{G}$ . On termine par un résultat analogue sur la variété des « coniques complètes » (cf. le théorème 10.1).

## 1 Opérateurs différentiels sur une variété

Soit  $X$  une variété algébrique lisse.

On rappelle ici la définition du faisceau  $\mathcal{D}_X$  des opérateurs différentiels sur  $X$ .

On note  $\mathcal{E}nd_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_X)$  le faisceau des  $\mathbf{k}$ -endomorphismes locaux de  $\mathcal{O}_X$ . On identifiera  $\mathcal{O}_X$  à un sous-faisceau  $\mathcal{E}nd_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_X)$ .

On pose :  $\mathcal{D}_X^{(0)} := \mathcal{O}_X$  et pour tout  $n \geq 0$  et tout ouvert  $U$  de  $X$  :

$$\Gamma(U, \mathcal{D}_X^{(n+1)}) :=$$

$$\left\{ d \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_U) : \forall V \subseteq U \text{ ouvert}, \forall a \in \mathcal{O}_X(U), [d|_V, a] \in \mathcal{D}_X^{(n)}(V) \right\} .$$

### Définition 1

$$\mathcal{D}_X := \cup_{n \geq 0} \mathcal{D}_X^{(n)} .$$

On notera  $\mathcal{D}(X)$  l'anneau  $\Gamma(X, \mathcal{D}_X)$  des opérateurs différentiels globaux sur  $X$ .

EXEMPLE : Si  $\mathbb{P}^1 = \{[x_0 : x_1] : (x_0, x_1) \in \mathbf{k}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ , alors :

$$\mathcal{D}(\mathbb{P}^1) = \mathbf{k}[x_0 \partial_{x_0}, x_0 \partial_{x_1}, x_1 \partial_{x_0}]$$

(avec  $x_1 \partial_{x_1} = -x_0 \partial_{x_0}$ ).

### 1.1 Opérateurs différentiels tordus par un faisceau inversible

Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ . On rappelle que le faisceau d'algèbres des opérateurs différentiels tordus par  $\mathcal{L}$ , noté  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ , est un sous-faisceau de  $\mathcal{E}nd_{\mathbf{k}}(\mathcal{L})$  défini comme le faisceau  $\mathcal{D}_X$ , par récurrence :

On pose  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(0)} := \mathcal{O}_X$  et pour tout  $n \geq 0$  et tout  $U$  ouvert de  $X$  :

$$\Gamma(U, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(n+1)}) :=$$

$$\left\{ d \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathcal{L}|_U) : \forall V \subseteq U \text{ ouvert}, \forall a \in \mathcal{O}_X(V), [d|_V, a] \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(n)}(V) \right\} .$$

## Définition 2

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} := \cup_{n \geq 0} \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^{(n)} .$$

EXEMPLE : Soient  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\mathcal{L}_n := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$  le faisceau inversible des fonctions  $n$ -homogènes. On a :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}_n}(\mathbb{P}^1) = \mathbf{k}[x_0 \partial_{x_0}, x_0 \partial_{x_1}, x_1 \partial_{x_0}]$$

(avec  $x_1 \partial_{x_1} = n - x_0 \partial_{x_0}$ ).

### Remarques :

1) On a un isomorphisme de faisceaux d'algèbres :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} \simeq \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1} .$$

2) L'algèbre  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(X)$  opère naturellement sur tous les groupes de cohomologie  $H^i(U, \mathcal{L})$ , pour tout  $i \geq 0$  et tout  $U$  ouvert de  $X$ .

## 1.2 Action de groupes

Si  $G$  est un groupe algébrique qui agit algébriquement sur  $X$  et si  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible  $G$ -linéarisé sur  $X$ , alors l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{g}$ , sur  $X$  (cf. [2][§1]) induit un morphisme naturel d'algèbres associatives :

$$U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(X)$$

(où  $U(\mathfrak{g})$  est l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ ).

EXEMPLE : — Si  $X = \mathbb{P}^1$  et  $G = SL_2$ ,  $\mathfrak{sl}_2$  son algèbre de Lie, alors on a un morphisme surjectif :

$$U(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L}_n}(\mathbb{P}^1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto -x_1 \partial_{x_0}, -x_0 \partial_{x_1}, -x_0 \partial_{x_0} + x_1 \partial_{x_1} .$$

— En revanche, si  $X$  est l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en  $0 := [1 : 0 : 0]$ , si

$$G := \text{Aut} X = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \in \text{PGL}_3(\mathbf{k}) \right\}, \text{ le morphisme :}$$

$$U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}(X)$$

n'est pas surjectif.

## 2 Compactifications magnifiques des groupes adjoints

Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire semi-simple et adjoint. On notera  $R : \widehat{G} \rightarrow G$  son revêtement universel ( $\widehat{G}$  est semi-simple simplement connexe et  $\ker R$  est le centre de  $\widehat{G}$ ). On notera  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ .

Les multiplications à gauche et à droite définissent une action de  $G \times G$  sur  $G$ . D'après [1, §2], il existe une compactification magnifique de  $G$   $c$ -à- $d$  une variété projective, lisse et connexe, notée  $\overline{G}$  qui contient  $G$  telle que :

- i)  $G \times G$  agit sur  $\overline{G}$  et cette action prolonge l'action sur  $G$ ;
- ii)  $G$  est ouvert dans  $\overline{G}$ ;
- iii) si on note  $Z_1, \dots, Z_r$  les composantes irréductibles de  $\overline{G} \setminus G$  (les *diviseurs limitrophes*), alors  $\overline{G} \setminus G = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$  est un diviseur à croisements normaux et  $r$  est le rang de  $G$ ;
- iv) chaque adhérence de  $G \times G$ -orbite de  $\overline{G}$  est l'intersection (transverse) des  $Z_i$  qui la contiennent;
- v) l'intersection  $Z_1 \cap \dots \cap Z_r$  est l'unique orbite fermée de  $\overline{G}$ .

## 3 Immersion dans un produit d'espaces projectifs

Soient  $\widehat{T} \subseteq \widehat{B}$  un tore maximal et un sous-groupe de Borel de  $\widehat{G}$ . On pose  $T := R(\widehat{T}), B := R(\widehat{B})$ . Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  la base correspondante du système de racines de  $(G, T)$  (les  $\alpha_i$  sont en fait des caractères de  $T$ ). Soient  $\omega_1, \dots, \omega_r$  les poids fondamentaux correspondant à cette base (ce sont des caractères de  $\widehat{T}$ ). Notons  $\rho_1 : \widehat{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V_{\omega_1}), \dots, \rho_r : \widehat{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V_{\omega_r})$  les représentations irréductibles de  $\widehat{G}$  associées.

Posons aussi pour tout  $i : E_{\omega_i} := \mathrm{End}(V_{\omega_i})$ .

Considérons

$$i : G \rightarrow \mathbb{P}(E_{\omega_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(E_{\omega_r})$$

$$g \mapsto ([\rho_1(g)], \dots, [\rho_r(g)]) .$$

Le morphisme  $i$  est une immersion et on peut identifier  $\overline{G}$  à  $\overline{i(G)}$ .

On notera pour tous  $g, g' \in G, x \in \overline{G}, g x g' := (g, g'^{-1}).x$ .

### 3.1 Notations

Fixons quelques notations.

Soient  $\widehat{B}^-$  (resp.  $B^-$ ) le sous-groupe de Borel opposé à  $\widehat{B}$  relativement à  $\widehat{T}$  (resp. opposé à  $B$  relativement à  $T$ ).

On notera aussi  $U$  et  $U^-$  les radicaux unipotents de  $B$  et  $B^-$ ,  $\mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{n}^-$  les algèbres de Lie de  $U$  et  $U^-$ .

La variété  $\overline{G}$  possède un unique point fixe pour  $B^- \times B$ . Notons le  $\mathbf{z}$ . Pour tout caractère  $\lambda$  de  $\widehat{T}$  dominant (par rapport à  $\widehat{B}$ ), on note  $V_\lambda$  le  $\widehat{G}$ -module

irréductible de plus haut poids  $\lambda$  et  $\lambda^*$  le plus haut poids du  $\widehat{G}$ -module irréductible dual  $V_\lambda^*$ . On choisit  $v_\lambda \in V_\lambda$  et  $v_{-\lambda}^* \in V_\lambda^*$  un  $\widehat{B}$ -vecteur propre de poids  $\lambda$  et un  $\widehat{B}^-$ -vecteur propre de poids  $-\lambda$  tels que  $\langle v_{-\lambda}^*, v_\lambda \rangle = 1$ . De même, on choisit un  $\widehat{B}^-$ -vecteur propre  $v_{-\lambda^*} \in V_\lambda$  et un  $\widehat{B}$ -vecteur propre  $v_{\lambda^*}^* \in V_\lambda^*$ . Si on considère  $\overline{G}$  comme une sous-variété fermée de  $\mathbb{P}(E_{\omega_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(E_{\omega_r})$  et compte tenu de l'identification :

$$E_{\omega_i} = V_{\omega_i} \otimes V_{\omega_i}^*$$

on a :

$$\mathbf{z} = ([v_{-\omega_1^*} \otimes v_{\omega_1^*}^*], \dots, [v_{-\omega_r^*} \otimes v_{\omega_r^*}^*]) .$$

## 4 La grosse cellule

Il existe un ouvert (unique) de  $\overline{G}$ , noté  $(\overline{G})_0$  et appelé la *grosse cellule*, qui est  $B \times B^-$  invariant et isomorphe à un espace affine.

De plus,  $\overline{G} = (G \times G) \cdot (\overline{G})_0$  et  $BB^- = (\overline{G})_0 \cap G$ .

De plus, la décomposition  $BB^- = UTU^- \simeq U \times T \times U^-$  se « prolonge » à  $(\overline{G})_0$ . En effet, si on pose  $(\overline{T})_0 := \overline{T} \cap (\overline{G})_0$ , on a un isomorphisme :

$$U \times (\overline{T})_0 \times U^- \rightarrow (\overline{G})_0$$

$$(u, x, u') \mapsto uxu' .$$

Ajoutons que pour tout  $1 \leq i \leq r$ , le caractère  $\alpha_i : T \rightarrow \mathbb{G}_m$  se prolonge en un morphisme, encore noté  $\alpha_i : (\overline{T})_0 \rightarrow \mathbb{A}^1$  et que l'on a aussi un isomorphisme :

$$(\overline{T})_0 \rightarrow \mathbb{A}^r$$

$$x \mapsto (\alpha_1(x), \dots, \alpha_r(x)) .$$

Pour simplifier, on notera encore  $\alpha_i$  les morphismes :

$$(\overline{G})_0 \rightarrow \mathbb{A}^1$$

$$uxu' \mapsto \alpha_i(x)$$

(pour tout  $u \in U$  et tout  $u' \in U^-$ ).

En particulier,  $\mathbf{k}[(\overline{G})_0] = \mathbf{k}[U \times U^-][\alpha_1, \dots, \alpha_r]$ .

En fait, on a aussi :

$$(\overline{G})_0 = \left\{ ([A_1], \dots, [A_r]) \in \overline{G} \subseteq \mathbb{P}(E_{\omega_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(E_{\omega_r}) : \forall 1 \leq i \leq r, f_i(A_i) \neq 0 \right\} .$$

où pour tout  $i$ ,  $f_i$  est la forme linéaire :

$$f_i : E_{\omega_i} \rightarrow \mathbf{k}, A \mapsto \langle v_{\omega_i^*}^*, Av_{-\omega_i^*} \rangle .$$

De plus, les diviseurs limitrophes  $Z_i$  vérifient :

$$Z_i \cap (\overline{G})_0 = \left\{ x \in (\overline{G})_0 : \alpha_i(x) = 0 \right\} .$$

## 5 Le groupe de Picard

Rappelons la description des fibrés en droites (ou des faisceaux inversibles) sur  $\overline{G}$ .

Tous les faisceaux inversibles sur  $\overline{G}$  sont  $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -linéarisés de manière unique de plus :

**Proposition 5.1** (cf. [1, §8]) *On a un isomorphisme :*

$$\mathbb{Z}^r \rightarrow \text{Pic}(\overline{G})$$

$$(n_1, \dots, n_r) \mapsto \left( \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_1})}(n_1) \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_r})}(n_r) \right) |_{\overline{G}} .$$

Si  $\lambda = n_1\omega_1 + \dots + n_r\omega_r$  est un caractère de  $\widehat{T}$ , on posera :

$$\mathcal{L}_\lambda := \left( \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_1})}(n_1) \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\omega_r})}(n_r) \right) |_{\overline{G}} .$$

En particulier, sur la fibre  $\mathcal{L}_\lambda|_{\mathbf{z}}$ , le tore  $\widehat{T} \times \widehat{T}$  agit avec le poids  $(\lambda^*, -\lambda^*)$  où si l'on note  $W$  le groupe de Weyl de  $(G, T)$  et  $w_0$  l'élément le plus long de  $W$ ,  $\lambda^* := -w_0\lambda$ .

**Remarque :** si on note  $\mathcal{O}_{\overline{G}}(Z_i)$  le faisceau inversible associé au diviseur  $Z_i$ , on a un isomorphisme de faisceaux  $G \times G$ -linéarisés :

$$\mathcal{O}_{\overline{G}}(Z_i) \simeq \mathcal{L}_{\alpha_i^*} .$$

## 6 Sections des faisceaux inversibles

### 6.1 sur la grosse cellule

La grosse cellule  $(\overline{G})_0$  est isomorphe à un espace affine donc pour tout caractère  $\lambda$  de  $\widehat{T}$ ,  $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda)$  est un  $k[(\overline{G})_0]$ -module libre de rang 1. Si  $\lambda = n_1\omega_1 + \dots + n_r\omega_r$ , alors :

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda) = \mathbf{k}[(\overline{G})_0]f_\lambda$$

où  $f_\lambda := (f_1^{n_1} \boxtimes \dots \boxtimes f_r^{n_r}) |_{(\overline{G})_0}$ .

### 6.2 sections globales

Rappelons que l'on considère les caractères  $\alpha_i$ , ( $1 \leq i \leq r$ ), comme des fonctions régulières  $U \times U^-$ -invariantes sur la grosse cellule  $(\overline{G})_0$  (cf. §4).

**Théorème 6.1** (cf. [1, §8.2]) *Pour tout caractère  $\lambda$  de  $\widehat{T}$ , on a un isomorphisme de  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ -modules :*

$$\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda) \simeq \bigoplus_{\substack{m_1, \dots, m_r \geq 0 \\ \lambda^* - m_1\alpha_1 - \dots - m_r\alpha_r \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_r^{m_r} f_\lambda .$$

## 7 Cas particulier

On suppose maintenant que  $G = \mathrm{PGL}_3(\mathbf{k})$ . Dans ce cas :

$$\widehat{G} = \mathrm{SL}_3(\mathbf{k}), r = 2$$

Les sous-groupes  $\widehat{T}, T, \widehat{B}, B, \widehat{B}^-, B^-$  sont respectivement les sous-groupes des matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Si on note  $\epsilon_i$  le caractère :

$$\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{pmatrix} \mapsto t_i$$

on a :  $\omega_1 = \epsilon_1, \omega_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3$ .

On a avec ces notations :

$$E_{\omega_1} = \mathrm{End}(\mathbf{k}^3) \text{ et } E_{\omega_2} = \mathrm{End}(\bigwedge^2 \mathbf{k}^3) \simeq \mathrm{End}(\mathbf{k}^3) .$$

Donc si l'on prend pour base de  $\mathbf{k}^3$  la base canonique  $e_1, e_2, e_3$  et pour base de  $\bigwedge^2 \mathbf{k}^3$  la base canonique duale :  $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$ , on a  $E_{\omega_1} \simeq E_{\omega_2} \simeq M_3(\mathbf{k})$ .

En particulier, le plongement de  $G$  dans  $\overline{G}$  est donné par :

$$G \rightarrow \mathbb{P}^8(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^8(\mathbf{k})$$

$$[g] \mapsto ([g], [\mathrm{Com}(g)])$$

où  $\mathrm{Com}(g)$  est la comatrice de  $g$ .

On en déduit une description explicite de  $\overline{\mathrm{PGL}_3(\mathbf{k})}$  avec des équations :

**Proposition 7.1** *Si  $G = \mathrm{PGL}_3(\mathbf{k})$ , alors :*

$$\overline{G} = \left\{ ([g], [g']) \in \mathbb{P}(M_3(\mathbf{k})) \times \mathbb{P}(M_3(\mathbf{k})) : g^t g' \in \mathbf{k}I_3 \right\}$$

où  $I_3$  est la matrice identité  $3 \times 3$ .

De plus, si on note  $g_{i,j}$  le  $(i, j)$ -ième coefficient d'une matrice  $g$ , on a :

$$(\overline{G})_0 = \left\{ ([g], [g']) \in \overline{G} : g_{3,3} g'_{1,1} \neq 0 \right\}$$

$$(\overline{T})_0 = \left\{ \left( \left( \begin{bmatrix} t_2 t'_2 & & \\ & t_2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & t'_2 & \\ & & t_2 t'_2 \end{bmatrix} \right) : t_2, t'_2 \in \mathbf{k} \right\} .$$

Soit  $a := \left( \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \end{bmatrix} \right) \in (\overline{T})_0$ . Pour tout

$$u = \begin{bmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{1,3} \\ & 1 & u_{2,3} \\ & & 1 \end{bmatrix} \in U, \text{ tout } u' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ u_{2,1} & 1 & \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \in U^-,$$

on a :

$$\alpha_1(uau') = \frac{t'_2}{t'_1}, \alpha_2(uau') = \frac{t_2}{t_3}$$

et on pose  $U_{i,j}(uau') := u_{i,j}$  si  $1 \leq i \neq j \leq 3$ .

Ainsi,  $\mathbf{k}[(\overline{G})_0] = k[U_{i,j} : 1 \leq i \neq j \leq 3][\alpha_1, \alpha_2]$ .

On remarque enfin que dans ce cas particulier, les diviseurs  $Z_1$  et  $Z_2$  sont définis par :

$$Z_1 = \{([g], [g']) \in \overline{G} : \text{rg}(g) = 1\}, \quad Z_2 = \{([g], [g']) \in \overline{G} : \text{rg}(g') = 1\}.$$

## 8 Formules de changement de variables

### 8.1 Fonctions

Puisque

$$G \cap (\overline{G})_0 = BB^- = \{[g] \in G : g_{3,3} \neq 0, g_{2,2}g_{3,3} - g_{2,3}g_{3,2} \neq 0\}$$

les fonctions  $\alpha_1, \alpha_2, U_{i,j}, 1 \leq i \neq j \leq 3$  sont régulières sur  $BB^-$ . On peut donc les exprimer en fonction des coordonnées  $g_{i,j}$  de la matrice  $g$ . En posant  $\Delta_{i,j}(g) := (-1)^{i+j} \text{Com}(g)_{i,j}$  et  $\Delta(g) := \det(g)$ , on trouve :

**Proposition 8.1** *Pour tout  $g \in BB^-$ ,*

$$\alpha_1(g) = \frac{g_{3,3}\Delta(g)}{\Delta_{1,1}^2(g)}$$

$$\alpha_2(g) = \frac{\Delta_{1,1}(g)}{g_{3,3}^2}$$

$$U_{1,2}(g) = \frac{\Delta_{2,1}(g)}{\Delta_{1,1}(g)}$$

$$U_{2,1}(g) = \frac{\Delta_{1,2}(g)}{\Delta_{1,1}(g)}$$

$$U_{1,3}(g) = \frac{g_{1,3}}{g_{3,3}}$$

$$U_{3,1}(g) = \frac{g_{3,1}}{g_{3,3}}$$

$$U_{2,3}(g) = \frac{g_{2,3}}{g_{3,3}}$$

$$U_{3,2}(g) = \frac{g_{3,2}}{g_{3,3}}$$

et réciproquement :

$$\frac{g_{1,1}}{g_{3,3}} = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 U_{1,2} U_{2,1} + U_{1,3} U_{3,1}$$

$$\frac{g_{1,2}}{g_{3,3}} = \alpha_2 U_{1,2} + U_{1,3} U_{3,2}$$

$$\frac{g_{1,3}}{g_{3,3}} = U_{1,3}$$

$$\frac{g_{2,1}}{g_{3,3}} = \alpha_2 U_{2,1} + U_{2,3} U_{3,1}$$

$$\frac{g_{2,2}}{g_{3,3}} = \alpha_2 + U_{2,3} U_{3,2}$$

$$\frac{g_{2,3}}{g_{3,3}} = U_{2,3}$$

$$\frac{g_{3,1}}{g_{3,3}} = U_{3,1}$$

$$\frac{g_{3,2}}{g_{3,3}} = U_{2,3}$$

## 8.2 Dérivations issues de l'action de l'algèbre de Lie

On choisit la base suivante de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$  :

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour tout  $\xi \in U(\mathfrak{g})$ , on note  $\xi^{(g)}$  l'image de  $(\xi, 0) \in U(\mathfrak{g} \times 0)$  dans  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ . Soit  $\Phi_0$  le morphisme d'algèbres :

$$\Phi_0 : U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}(\overline{G})$$

induit par l'action de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  sur  $\mathcal{O}_{\overline{G}}$ .

Comme  $\mathcal{D}(\overline{G}) \subseteq \Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}}) \cap \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ , on peut exprimer les  $\Phi_0(\xi^{(g)})$ ,  $\xi \in \mathfrak{g}$ , en fonction des coordonnées de  $G$  et en fonction des coordonnées de  $(\overline{G})_0$  :

**Proposition 8.2** *Dans l'anneau  $\Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ , on a :*

$$\begin{aligned} \Phi_0(Y_1^{(g)}) &= -g_{1,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{1,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} - g_{1,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}}, \\ \Phi_0(Y_2^{(g)}) &= -g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{3,1}} - g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{3,2}} - g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{3,3}}, \\ \Phi_0(Y_3^{(g)}) &= -g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{1,2} \frac{\partial}{\partial g_{3,2}} - g_{1,3} \frac{\partial}{\partial g_{3,3}}, \\ \Phi_0(X_1^{(g)}) &= -g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{1,1}} - g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{1,2}} - g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{1,3}}, \\ \Phi_0(X_2^{(g)}) &= -g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{3,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} - g_{3,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}}, \\ \Phi_0(X_3^{(g)}) &= -g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{1,1}} - g_{3,2} \frac{\partial}{\partial g_{1,2}} - g_{3,3} \frac{\partial}{\partial g_{1,3}}, \\ \Phi_0(H_1^{(g)}) &= -g_{1,1} \frac{\partial}{\partial g_{1,1}} - g_{1,2} \frac{\partial}{\partial g_{1,2}} - g_{1,3} \frac{\partial}{\partial g_{1,3}} + g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} + g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} + g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}}, \\ \Phi_0(H_2^{(g)}) &= -g_{2,1} \frac{\partial}{\partial g_{2,1}} - g_{2,2} \frac{\partial}{\partial g_{2,2}} - g_{2,3} \frac{\partial}{\partial g_{2,3}} + g_{3,1} \frac{\partial}{\partial g_{3,1}} + g_{3,2} \frac{\partial}{\partial g_{3,2}} + g_{3,3} \frac{\partial}{\partial g_{3,3}}. \end{aligned}$$

Dans l'anneau  $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ , on a :

$$\begin{aligned} \Phi_0(Y_1^{(g)}) &= 2U_{1,2}\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - U_{1,2}\alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\ &\quad - U_{1,3} \frac{\partial}{\partial U_{2,3}} - U_{1,2}^2 \frac{\partial}{\partial U_{1,2}} \\ &\quad - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial U_{2,1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_0(Y_2^{(g)}) &= -U_{2,3}\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + 2U_{2,3}\alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\
&\quad + (U_{1,3} - U_{1,2}U_{2,3}) \frac{\partial}{\partial U_{1,2}} + U_{2,3}^2 \frac{\partial}{\partial U_{2,3}} - U_{1,3}U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{1,3}} \\
&\quad - \alpha_2 (U_{2,1} \frac{\partial}{\partial U_{3,1}} + \frac{\partial}{\partial U_{3,2}}) , \\
\Phi(Y_3^{(g)}) &= (U_{1,3} - 2U_{1,3}U_{3,2})\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + (U_{1,3} + U_{1,2}U_{2,3})\alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\
&\quad + (U_{1,3} - U_{1,2}U_{2,3})U_{1,2} \frac{\partial}{\partial U_{1,2}} + U_{1,3}U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{2,3}} + U_{1,3}^2 \frac{\partial}{\partial U_{1,3}} \\
&\quad + \alpha_1 U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{2,1}} - \alpha_2 (U_{1,2} \frac{\partial}{\partial U_{3,2}} + U_{1,2}U_{2,1} \frac{\partial}{\partial U_{3,1}}) - \alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial U_{3,1}} , \\
\Phi_0(X_1^{(g)}) &= -\frac{\partial}{\partial U_{1,2}} - U_{2,3} \frac{\partial}{\partial U_{1,3}} , \\
\Phi_0(X_2^{(g)}) &= -\frac{\partial}{\partial U_{2,3}} , \\
\Phi_0(X_3^{(g)}) &= -\frac{\partial}{\partial U_{1,3}} .
\end{aligned}$$

**Démonstration** : Par exemple, pour la deuxième liste de formules, on utilise que :

$$\Phi_0(\xi^{(g)}) = (\xi^{(g)}.\alpha_1) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + (\xi^{(g)}.\alpha_2) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (\xi^{(g)}.U_{i,j}) \frac{\partial}{\partial U_{i,j}}$$

pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$ .

**Q.e.d.**

### 8.3 Un opérateur différentiel d'ordre 2

Comme  $(\overline{G})_0$  est isomorphe à un espace affine,

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}}) = \mathbf{k}[\alpha_1, \alpha_2, U_{i,j} : 1 \leq i \neq j \leq 3][\partial_{\alpha_1}, \partial_{\alpha_2}, \partial_{U_{i,j}} : 1 \leq i \neq j \leq 3] .$$

De plus, comme  $BB^-$  est un ouvert de  $G$ ,

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}}) \subseteq \Gamma(BB^-, \mathcal{D}_{\overline{G}}) \subseteq \mathbf{k}(g_{i,j} : 1 \leq i, j \leq 3)[\partial_{g_{k,l}} : 1 \leq k, l \leq 3] .$$

On peut donc exprimer en particulier  $\partial_{\alpha_1}$  et  $\partial_{\alpha_2}$  en fonction des fonctions coordonnées  $g_{i,j}$  et des dérivées partielles  $\partial_{g_{k,l}}$  :

**Proposition 8.3** *On a :*

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_1} &= \frac{\Delta_{1,1}}{g_{3,3}} \partial_{g_{1,1}} \\
\partial_{\alpha_2} &= \frac{g_{3,3}}{\Delta_{1,1}} (\Delta_{2,2} \partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1} \partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1} \partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2} \partial_{g_{2,1}}) .
\end{aligned}$$

**Démonstration** : Posons  $(F_1, \dots, F_8) := (\alpha_1, \alpha_2, U_{1,2}, \dots, U_{3,2})$   
et  $(x_1, \dots, x_8) := (\frac{g_{1,1}}{g_{3,3}}, \dots, \frac{g_{3,2}}{g_{3,3}})$ . Les coefficients de l'inverse de la matrice jacobienne :

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 8}$$

donnent les coefficients des dérivations  $\partial_{\alpha_1}, \dots$  en fonction des dérivations  $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial g_{3,3}} = g_{3,3} \partial_{g_{i,j}}, 1 \leq i, j \leq 3, (i, j) \neq (3, 3)$ . **Q.e.d.**

On remarque en particulier que :

$$\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} = \partial_{g_{1,1}} (\Delta_{2,2} \partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1} \partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1} \partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2} \partial_{g_{2,1}}) \in \Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}}) .$$

On en déduit :

**Théorème 8.4** *L'opérateur différentiel*

$$D_0 := \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} = \partial_{g_{1,1}} (\Delta_{2,2} \partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1} \partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1} \partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2} \partial_{g_{2,1}})$$

est défini sur  $\overline{G}$  tout entier.

**Remarques :**

— Les opérateurs différentiels  $\partial_{\alpha_i}$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) ne sont pas dans  $\mathcal{D}(\overline{G})$  ;  
— on peut vérifier que l'opérateur différentiel  $D_0$  n'est pas l'image d'un élément de  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$  car, par exemple, il ne commute pas avec l'élément de Casimir standard de  $U(\mathfrak{g} \times 0)$  (ou  $U(0 \times \mathfrak{g})$ ).

**Démonstration** : Puisque  $D_0$  appartient au  $G \times G$ -module rationnel  $\Gamma(G, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ ,  $D_0$  est  $U(\mathfrak{n}^- \times \mathfrak{n}^-)$ -fini et  $U(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n})$ -fini. Donc d'après le lemme de prolongement 8.5 qui suit, il existe un ouvert  $\Omega$ , contenant  $(\overline{G})_0$ ,  $U^- \times U^-$  et  $U \times U^-$ -stable, tel que  $D_0 \in \Gamma(\Omega, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ . Or, comme  $G$  est engendré par  $U$  et  $U^-$ ,  $\Omega$  est  $G \times G$ -stable et  $\Omega = (G \times G) \cdot (\overline{G})_0 = \overline{G}$ .

**Q.e.d.**

Pour le lemme suivant, on note  $\mathfrak{g}_a$  l'algèbre de Lie du groupe  $\mathbb{G}_a$  et pour tout  $i \geq 0$ ,  $\mathfrak{g}_a^i$  le sous-espace  $\mathbf{k}d^i$  de l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{g}_a)$  (pour un générateur quelconque  $d$  de  $\mathfrak{g}_a$ ).

**Lemme 8.5 (de prolongement)** *Soit  $Y$  une  $\mathbb{G}_a$ -variété. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau localement libre de  $\mathcal{O}_Y$ -modules et  $\mathbb{G}_a$ -linéarisé sur  $Y$ . Soit  $\Omega$  un ouvert de  $Y$ . Alors la  $\mathbb{G}_a$ -linéarisation de  $\mathcal{F}$  induit une structure de  $U(\mathfrak{g}_a)$ -module sur  $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ .*

*Soit  $\sigma \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ . Si pour un certain  $n_0 \geq 0$   $\mathfrak{g}_a^{n_0} \cdot \sigma = 0$ , alors il existe  $\tilde{\Omega}$  un ouvert  $\mathbb{G}_a$ -stable de  $Y$  et  $\tilde{\sigma} \in \Gamma(\tilde{\Omega}, \mathcal{F})$  tel que :*

$$\tilde{\sigma}|_{\Omega} = \sigma$$

*(autrement dit  $\sigma$  se prolonge en une section définie sur un ouvert  $\mathbb{G}_a$ -stable).*

**Démonstration** : Notons  $\mu : \mathbb{G}_a \times Y \rightarrow Y$  le morphisme défini par l'action :  $(g, y) \mapsto g.y$  et  $p : \mathbb{G}_a \times Y \rightarrow Y$  la projection sur  $Y$ . Le faisceau  $\mathcal{F}$  est  $\mathbb{G}_a$ -linéarisé : cela signifie qu'il existe un isomorphisme de faisceaux de  $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_a \times Y}$ -modules :

$$\Phi : \mu^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p^* \mathcal{F}$$

qui vérifie les conditions de [3, 1 §3 def. 1.6].

Pour tout  $n > 0$ , soit  $\mathbb{G}_{a,n} := \text{Spec}(\mathbf{k}[T]/(T^n))$  le  $n$ -ième voisinage infinitésimal de 0 dans  $\mathbb{G}_a$ . La restriction  $\Phi_n$  de  $\Phi$  à  $\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega$  donne un isomorphisme :

$$\Phi_n : \mu^* \mathcal{F}|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega} \xrightarrow{\sim} p^* \mathcal{F}|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega}$$

or,  $p^* \mathcal{F}|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega} \simeq \mathbf{k}[T]/(T^n) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{F}|_{\Omega}$ .

Notons  $\mu^* \sigma$  l'image de  $\sigma$  dans  $\Gamma(\mu^{-1}\Omega, \mu^* \mathcal{F})$  par le morphisme naturel  $\mathcal{F} \rightarrow \mu_* \mu^* \mathcal{F}$ .

On a pour tout  $n > 0$ ,  $\Phi_n(\mu^* \sigma) \in \mathbf{k}[T]/(T^n) \otimes_{\mathbf{k}} \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$  (et  $\Phi_n(\mu^* \sigma) = \Phi_{n+1}(\mu^* \sigma) \bmod (T^n)$ ).

Notons  $d : \mathbf{k}[T] \rightarrow \mathbf{k}$ ,  $P(T) \mapsto P'(0)$ . On a  $\mathfrak{g}_a = \mathbf{k}d$  et pour tout  $n$ ,  $\mathfrak{g}_a^n = \mathbf{k}d^n$  où  $d^n : \mathbf{k}[T] \rightarrow \mathbf{k}$ ,  $P(T) \mapsto P^{(n)}(0)$ .

L'action de  $U(\mathfrak{g}_a)$  sur  $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$  est telle que :

$$d^n . \sigma = (d^n \otimes 1)(\Phi_n(\mu^* \sigma))$$

pour tout  $n > 0$ .

On a alors par hypothèse :

$$\forall n \geq n_0, (d^n \otimes 1)(\Phi_n(\mu^* \sigma)) = d^n . \sigma = 0 .$$

Donc il existe  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n_0} \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$  tels que :

$$\Phi_n(\mu^* \sigma) = 1 \otimes \sigma_1 + \dots + T^{n_0-1} \otimes \sigma_{n_0} \bmod (T^n)$$

pour tout  $n \geq n_0$  (il suffit de poser  $\sigma_i := (i-1)!d^{i-1}\sigma$  pour  $1 \leq i \leq n_0$ ).

Posons :

$$\sigma' := 1 \otimes \sigma_1 + T \otimes \sigma_2 + \dots + T^{n_0-1} \otimes \sigma_{n_0} \in \mathbf{k}[T] \otimes_{\mathbf{k}} \Gamma(\Omega, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathbb{G}_a \times \Omega, p^* \mathcal{F}) .$$

Comme  $\Phi_n(\mu^* \sigma) = \sigma'|_{\mathbb{G}_{a,n} \times \Omega}$  pour tout  $n \geq n_0$ , comme  $\Phi$  est un isomorphisme de faisceaux et comme  $p^* \mathcal{F}$  est un faisceau localement libre, on a :

$$\mu^* \sigma \Big|_{\mu^{-1}\Omega \cap \mathbb{G}_a \times \Omega} = \Phi^{-1}(\sigma') \Big|_{\mathbb{G}_a \times \Omega \cap \mu^{-1}\Omega}$$

et donc (comme  $\mu^* \mathcal{F}$  est un faisceau), si l'on pose  $W := \mu^{-1}\Omega \cup \mathbb{G}_a \times \Omega$ , il existe  $\hat{\sigma} \in \Gamma(W, \mu^* \mathcal{F})$  tel que :  $\mu^* \sigma = \hat{\sigma} \Big|_{\mu^{-1}\Omega}$ .

Soit  $g \in \mathbb{G}_a$ . On pose  $i : Y \rightarrow \mathbb{G}_a \times Y$ ,  $y \mapsto (g, g^{-1}y)$ . On a :

$$\Omega \cup g\Omega \subseteq i^{-1}W \text{ et } \mu \circ i = \text{Id}_Y .$$

On a donc :

$$i^* \mu^* \sigma = \sigma ;$$

$$i^* \hat{\sigma} \in \Gamma(i^{-1}W, \mathcal{F}) ;$$

$$\sigma = i^* \hat{\sigma}|_{\Omega} .$$

En particulier, on a prolongé  $\sigma$  à l'ouvert  $\Omega \cup g\Omega$ . Puisqu'on peut le faire pour tout  $g \in \mathbb{G}_a$ ,  $\sigma$  se prolonge à l'ouvert  $\cup_{g \in \mathbb{G}_a} g\Omega$  qui est stable par  $\mathbb{G}_a$ .

**Q.e.d.**

#### 8.4 Opérateurs différentiels tordus

Soit  $\lambda = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$  un caractère de  $\hat{T}$ . On notera  $\mathcal{D}_\lambda$  le faisceau d'opérateurs différentiels sur  $\overline{G}$  tordu par le faisceau inversible  $\mathcal{L}_\lambda$  :

$$\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{G}}} \mathcal{D}_{\overline{G}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{G}}} \mathcal{L}_\lambda^{-1} .$$

Rappelons les notations du paragraphe 6.1 :

$$f_\lambda := f_1^{\lambda_1} \boxtimes f_2^{\lambda_2} \Big|_{(\overline{G})_0} \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda) .$$

Notons  $\Phi_\lambda$  le morphisme d'algèbres :

$$\Phi_\lambda : U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$$

induit par l'action de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  sur  $\mathcal{L}_\lambda$ . En utilisant les formules de changement de variables de la proposition 8.1, on obtient :

**Proposition 8.6** *Dans l'anneau  $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_\lambda)$ , on a :*

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(Y_1^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(Y_1^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} - \lambda_2 U_{1,2} , \\ \Phi_\lambda(Y_2^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(Y_2^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} - \lambda_1 U_{2,3} , \\ \Phi_\lambda(Y_3^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(Y_3^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} - \lambda_1 U_{1,3} + \lambda_2 (U_{1,2} U_{2,3} - U_{1,3}) , \\ \Phi_\lambda(X_1^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(X_1^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} , \\ \Phi_\lambda(X_2^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(X_2^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} , \\ \Phi_\lambda(X_3^{(g)}) &= f_\lambda \otimes \Phi_0(X_3^{(g)}) \otimes f_\lambda^{-1} . \end{aligned}$$

**Démonstration** : Si  $a \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{O}_{\overline{G}})$  et si  $\xi \in \mathfrak{g}$ , alors :

$$\xi^{(g)}.(af_\lambda) = (\xi^{(g)}.a + \frac{\xi^{(g)}.f_\lambda}{f_\lambda})f_\lambda .$$

**Q.e.d.**

On a aussi un opérateur différentiel tordu d'ordre 2 particulier :

**Lemme 8.7** *Pour tout caractère  $\lambda$  de  $\widehat{T}$ ,*

$$f_\lambda \otimes \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \otimes f_\lambda^{-1} \in \Gamma(\overline{G}, \mathcal{D}_\lambda) .$$

**Démonstration** : Posons  $D_\lambda := f_\lambda \otimes \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \otimes f_\lambda^{-1}$ . Comme pour le théorème 8.4, il suffit de vérifier que  $D_\lambda$  est  $U(\mathfrak{n}^- \times \mathfrak{n})$  et  $U(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}^-)$ -fini. Puisque  $D_\lambda \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_\lambda)$  et que  $(\overline{G})_0$  est  $B \times B^-$ -stable, on sait déjà que  $D_\lambda$  est  $U(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}^-)$ -fini. Pour le côté  $U(\mathfrak{n}^- \times \mathfrak{n})$ -fini, nous allons montrer que  $D_\lambda \in \Gamma(B^-B, \mathcal{D}_\lambda)$ .

Remarquons que  $B^-B = \{[g] \in G : g_{1,1}\Delta_{3,3} \neq 0\}$ .

On pose :

$$f_\lambda^* : (g, g') \mapsto (g_{1,1})^{\lambda_1} (g'_{3,3})^{\lambda_2}$$

c'est une application définie sur un ouvert de  $M_3(\mathbf{k}) \times M_3(\mathbf{k})$ . Si on pose  $(\overline{G})_\infty := \{([g], [g']) \in \overline{G} : g_{1,1}g'_{3,3} \neq 0\}$ ,  $f_\lambda^*$  définit un élément de  $\Gamma((\overline{G})_\infty, \mathcal{L}_\lambda)$ .

Dans l'espace  $\Gamma(BB^- \cap B^-B, \mathcal{L}_\lambda)$ , on a l'égalité :

$$\begin{aligned} f_\lambda &= \begin{pmatrix} g_{3,3} \\ g_{1,1} \end{pmatrix}^{\lambda_1} \begin{pmatrix} g'_{1,1} \\ g'_{3,3} \end{pmatrix}^{\lambda_2} f_\lambda^* \\ &= \begin{pmatrix} g_{3,3} \\ g_{1,1} \end{pmatrix}^{\lambda_1} \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} \\ \Delta_{3,3} \end{pmatrix}^{\lambda_2} f_\lambda^* . \end{aligned}$$

Donc en notant  $h$  la fraction rationnelle sur  $G$  :

$$\begin{pmatrix} g_{3,3} \\ g_{1,1} \end{pmatrix}^{-\lambda_1} \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} \\ \Delta_{3,3} \end{pmatrix}^{-\lambda_2}$$

on a :

$$D_\lambda = f_\lambda^* \otimes h^{-1} D_0 h \otimes f_\lambda^{*-1} .$$

Calculons dans l'anneau  $\Gamma(BB^- \cap B^-B, \mathcal{D}_{\overline{G}})$  :

$$\begin{aligned} h^{-1} D_0 h &= h^{-1} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} h \\ &= h^{-1} \partial_{\alpha_1} h \partial_{\alpha_2} + h^{-1} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} (h) \\ &= h^{-1} h \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} + h^{-1} \partial_{\alpha_1} (h) \partial_{\alpha_2} + h^{-1} \partial_{\alpha_1} (\partial_{\alpha_2} (h)) + h^{-1} \partial_{\alpha_2} (h) \partial_{\alpha_1} \end{aligned}$$

$$(1) \quad \begin{aligned} &= D_0 + h^{-1}\partial_{\alpha_1}(h)\partial_{\alpha_2} + h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h)\partial_{\alpha_1} \\ &+ (h^{-1}\partial_{\alpha_1}(h))(h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h)) + \partial_{\alpha_1}(h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h)) \end{aligned}$$

Or :

$$\partial_{\alpha_1} = \frac{\Delta_{1,1}}{g_{3,3}}\partial_{g_{1,1}}$$

donc :

$$\begin{aligned} h^{-1}\partial_{\alpha_1}(h) &= -\lambda_1 \frac{\partial_{\alpha_1}(g_{3,3})}{g_{3,3}} - \lambda_2 \frac{\partial_{\alpha_1}(\Delta_{1,1})}{\Delta_{1,1}} + \frac{\partial_{\alpha_1}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \\ &= \frac{\partial_{\alpha_1}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \in \frac{\Delta_{1,1}}{g_{3,3}}\mathbf{k}[g_{i,j}, (g_{1,1})^{-1}, (\Delta_{3,3})^{-1}] .$$

De même, comme  $\partial_{\alpha_2} = \frac{g_{3,3}}{\Delta_{1,1}}(\Delta_{2,2}\partial_{g_{1,1}} + \Delta_{1,1}\partial_{g_{2,2}} + \Delta_{2,1}\partial_{g_{1,2}} + \Delta_{1,2}\partial_{g_{2,1}})$ , on a :

$$\begin{aligned} h^{-1}\partial_{\alpha_2}(h) &= -\lambda_1 \frac{\partial_{\alpha_2}(g_{3,3})}{g_{3,3}} - \lambda_2 \frac{\partial_{\alpha_2}(\Delta_{1,1})}{\Delta_{1,1}} + \frac{\partial_{\alpha_2}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \\ &= -\lambda_2 \frac{g_{3,3}^2}{\Delta_{1,1}} + \frac{\partial_{\alpha_2}((g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2})}{(g_{1,1})^{\lambda_1}(\Delta_{3,3})^{\lambda_2}} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \in \frac{g_{3,3}}{\Delta_{1,1}}\mathbf{k}[g_{i,j}, (g_{1,1})^{-1}, (\Delta_{3,3})^{-1}] .$$

On déduit donc de (1), (2) et (3) que  $h^{-1}D_0h$  est de la forme :

$$a_{1,1}\partial_{g_{1,1}} + a_{2,2}\partial_{g_{2,2}} + a_{1,2}\partial_{g_{1,2}} + a_{2,1}\partial_{g_{2,1}}$$

où  $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{1,2}, a_{2,1} \in \mathbf{k}[g_{i,j}, (g_{1,1})^{-1}, (\Delta_{3,3})^{-1}]$ .

En conséquence :  $h^{-1}D_0h \in \Gamma(B^{-1}B, \mathcal{D}_{\overline{G}})$ .

**Q.e.d.**

## 9 Irréductibilité des espaces de sections globales

**Théorème 9.1** *Pour tout caractère  $\lambda$  de  $\widehat{T}$ , le  $\mathcal{D}_{\lambda}(\overline{G})$ -module  $\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_{\lambda})$  est nul ou irréductible.*

**Démonstration** : Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$  (d'où :  $\lambda^* = \lambda_2\omega_1 + \lambda_1\omega_2$ ).

Rappelons que

$$\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{m_1, m_2 \geq 0 \\ \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2 \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \cdot \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} f_\lambda .$$

On note  $L(\nu)$  le  $\mathfrak{g}$ -module simple de plus haut poids  $\nu$  (pour tout caractère de  $\widehat{T}$ ,  $\nu$ , dominant). On a un isomorphisme de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -modules irréductibles :

$$U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \cdot \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} f_\lambda \simeq \text{End}_{\mathbf{k}} L(\nu)$$

pour tout  $\nu = \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2$  dominant. En effet, la section  $\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} f_\lambda$  est un  $\widehat{B} \times \widehat{B}^-$ -vecteur propre de poids  $(\nu, -\nu)$ .

Posons  $\sigma_\nu := \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} f_\lambda \in \Gamma(BB^-, \mathcal{L}_\lambda)$  pour tout caractère  $\nu = \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2$  de  $\widehat{T}$ . Lorsque  $m_1, m_2 \geq 0$ ,  $\sigma_\nu \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda)$  et lorsque, de plus,  $\nu$  est dominant,  $\sigma_\nu \in \Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda)$ .

Comme

$$\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\nu} U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \cdot \sigma_\nu$$

(somme sur les caractères  $\nu$  dominants de  $\lambda^* - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_2$ ), comme  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$  agit sur  $\Gamma(\overline{G}, \mathcal{L}_\lambda)$  via un morphisme d'algèbres  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$  et comme les  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -modules  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \cdot \sigma_\nu$  sont irréductibles, il suffit de montrer que

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}) \cdot \sigma_\nu$$

pour tous  $\nu, \nu' \in \lambda^* - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_2$  dominants.

Soient  $m_1, m_2, m'_1, m'_2$  des entiers positifs tels que  $\nu = \lambda^* - m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2$ ,  $\nu' = \lambda^* - m'_1\alpha_1 - m'_2\alpha_2$ .

Soient  $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $\nu = \nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2$ .

On a donc :

$$(4) \quad \nu_1 = \lambda_2 - 2m_1 + m_2 \text{ et } \nu_2 = \lambda_1 + m_1 - 2m_2 .$$

**1-er cas** :  $\nu' = \nu + \alpha_1 + \alpha_2$ .

Dans ce cas,  $m_1 = m'_1 + 1 > 0$  et  $m_2 = m'_2 + 1 > 0$ .

D'après le lemme 8.7, l'opérateur  $D_\lambda := f_\lambda \otimes D_0 \otimes f_\lambda^{-1}$  est dans  $\mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$ .

Or :

$$\begin{aligned} D_\lambda \cdot \sigma_\nu &= (f_\lambda \otimes D_0 \otimes f_\lambda^{-1}) \cdot \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} f_\lambda \\ &= D_0(\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2}) f_\lambda \\ &= m_1 m_2 \alpha_1^{m_1-1} \alpha_2^{m_2-1} f_\lambda \\ &= m_1 m_2 \sigma_{\nu'} \end{aligned}$$

et  $\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}) \cdot \sigma_\nu$ .

Pour les cas suivants, on va utiliser des opérateurs différentiels de  $\mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$  particuliers.

Comme le faisceau  $\mathcal{L}_\lambda$  est  $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -linéarisé, l'algèbre  $\mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$  est un  $\widehat{G} \times \widehat{G}$ -module. Si  $w \in \widehat{G}$ , on note :

$$\tilde{w} := (w, w) \in \widehat{G} \times \widehat{G}$$

et on pose :  $D_\lambda^w := \tilde{w}.D_\lambda = \tilde{w}.(D_\lambda(\tilde{w}^{-1}.\cdot)) \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G})$ .

Soit

$$c := \frac{1}{3}(H_1 + H_2) + \frac{1}{9}(H_1^2 + H_2^2 + H_1H_2) + \frac{1}{3}(Y_1X_1 + Y_2X_2 + Y_3X_3) \in U(\mathfrak{g}) .$$

L'élément  $c$  est dans  $Z(\mathfrak{g})$  le centre de l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{g})$  et, pour tout caractère  $\mu = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$ , agit comme une homothétie sur le  $\mathfrak{g}$ -module irréductible  $L(\mu)$  de plus haut poids  $\mu$  :

$$\forall v \in L(\mu), c.v = \chi_\mu(c)v$$

où  $\chi_\mu(c) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{3} + \frac{\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2}{9}$ .

Identifions l'élément  $c \in Z(\mathfrak{g})$  avec l'élément  $(c, 0)$  du centre  $Z(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$  de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ .

**Lemme 9.2** *Soit  $f \in \mathbf{k}[U_{i,j} : 1 \leq i \neq j \leq 3] \subseteq \mathbf{k}[(\overline{G})_0]$ . Pour tout caractère  $\nu$  de  $\widehat{T}$  qui appartient à l'ensemble :*

$$\lambda^* - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_2 ,$$

on a l'égalité suivante dans  $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_\lambda)$  :

$$(5) \quad (c - \chi_\nu(c))(f\sigma_\nu)$$

$$(6) \quad = \frac{1}{3} \left( \alpha_1 \partial_{U_{1,2}} \partial_{U_{2,1}} \right.$$

$$(7) \quad \left. + \alpha_2 (\partial_{U_{2,3}} + U_{1,2} \partial_{U_{1,3}}) (\partial_{U_{3,2} + U_{2,1}} \partial_{U_{3,1}}) \right.$$

$$(8) \quad \left. + \alpha_1 \alpha_2 \partial_{U_{1,3}} \partial_{U_{3,1}} \right) (f)\sigma_\nu$$

**Démonstration** : Notons  $F := Z_1 \cap Z_2$  l'unique  $G \times G$ -orbite fermée de  $\overline{G}$  et  $\mathcal{I}_F := \mathcal{I}_{Z_1} + \mathcal{I}_{Z_2}$  son idéal de définition dans  $\mathcal{O}_{\overline{G}}$ .

On remarque que pour tout caractère  $\mu$  de  $\widehat{T}$ , on a un isomorphisme de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -modules :

$$(9) \quad \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\mu^*}) / \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\mu^*} \otimes \mathcal{I}_F)$$

$$(10) \quad \simeq \Gamma((\overline{G})_0 \cap F, \mathcal{L}_{\mu^*}|_F)$$

$$(11) \quad \simeq \Gamma(BB^-/B^- \times B^-B/B, \mathcal{L}_{G/B^- \times G/B}(\mu, -\mu))$$

$$(12) \quad \simeq M_{(\mu, -\mu)}^*$$

où  $\mathcal{L}_{G/B^- \times G/B}(\mu, -\mu)$  est le faisceau inversible sur la variété de drapeaux  $G/B^- \times G/B$  associé au caractère  $(\mu, -\mu)$  de  $\widehat{T} \times \widehat{T}$  et  $M_{(\mu, -\mu)}^*$  est le dual du  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -module de Verma de plus haut poids  $(\mu, -\mu)$ .

Tout élément de  $Z(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$  agit sur  $M_{(\mu, -\mu)}^*$  comme une homothétie donc on a pour tout  $\sigma \in \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*})$ ,

$$(c - \chi_{\nu}(c)) \cdot \sigma \in \alpha_1 \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*}) + \alpha_2 \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*}) .$$

D'un autre côté, grâce à la proposition 8.1 on peut exprimer l'opérateur  $\Phi_{\nu^*}(c) \in \Gamma(\overline{G}, \mathcal{D}_{\nu^*})$  en fonction des coordonnées  $\alpha_1, \alpha_2, U_{i,j}, 1 \leq i \neq j \leq 3$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu^*}(c) &= \frac{1}{3} \sigma_{\nu} \otimes \left( \alpha_1 \partial_{U_{1,2}} \partial_{U_{2,1}} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 (\partial_{U_{2,3}} + U_{1,2} \partial_{U_{1,3}}) (\partial_{U_{3,2}} + U_{2,1} \partial_{U_{3,1}}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_1 \alpha_2 \partial_{U_{1,3}} \partial_{U_{3,1}} \right) + \dots \otimes \sigma_{\nu}^{-1} \end{aligned}$$

où les ... sont mis pour des opérateurs dans  $\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{D}_{\overline{G}})$  qui ne changent pas les degrés en  $\alpha_1$  et en  $\alpha_2$  des monômes :

$$\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \prod_{1 \leq i \neq j \leq 3} U_{i,j}^{n_{i,j}} .$$

On a ainsi l'égalité de l'énoncé dans :

$$\Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\nu^*}) \subseteq \Gamma((\overline{G})_0, \mathcal{L}_{\lambda}) .$$

**Q.e.d.**

**2-ème cas :**  $\nu' = \nu + \alpha_2$

Dans ce cas,  $m_2 = m'_2 + 1 \geq 1$ .

$$\text{Soit } s_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widehat{G} .$$

Grâce aux formules de changement de variables de la proposition 8.1, on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1^{-1} \cdot \sigma_{\nu} &= \frac{g_{3,3}^{\nu_2 - \lambda_1} \Delta^{m_1} \Delta_{2,2}^{\nu_1}}{\Delta_{1,1}^{\lambda_2}} f_{\lambda} \\ &= \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1} f_{\lambda} \\ &= (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1} \sigma_{\nu} \\ &D_{\lambda}(\tilde{s}_1^{-1} \sigma_{\nu}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_2 \alpha_1^{m_1-1} \alpha_2^{m_2-1} (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1-1} (m_1 (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1}) + \nu_1 \alpha_1) f_\lambda \\
&= m_2 (\alpha_1 + U_{1,2} U_{2,1})^{\nu_1-1} (m_1 \sigma_{\nu+\rho} + \nu_1 \sigma_{\nu+\alpha_2}) f_\lambda \\
&\quad D_\lambda^{s_1}(\sigma_\nu) \\
&= \tilde{s}_1 \cdot (D_\lambda(\tilde{s}_1^{-1} \cdot \sigma_\nu)) \\
&= m_2 \alpha_1^{m_1-1} \alpha_2^{m_2-1} ((m_1 + \nu_1) \alpha_1 + m_1 U_{1,2} U_{2,1}) f_\lambda \\
&= m_2 (m_1 U_{1,2} U_{2,1} \sigma_{\nu+\rho} + (m_1 + \nu_1) \sigma_{\nu+\alpha_2}) .
\end{aligned}$$

On a donc grâce au lemme 9.2 :

$$\begin{aligned}
(13) \quad & (c - \chi_{\nu+\rho}(c)) \cdot D_\lambda^{s_1}(\sigma_\nu) \\
(14) \quad &= m_2 \left( \frac{m_1}{3} + (m_1 + \nu_1) (\chi_{\nu+\alpha_2}(c) - \chi_{\nu+\rho}(c)) \right) \sigma_{\nu+\alpha_2} \\
(15) \quad &= m_2 \left( \frac{m_1}{3} - (m_1 + \nu_1) \frac{\nu_1 + 2}{3} \right) \sigma_{\nu+\alpha_2} \\
(16) \quad &= -\frac{m_2}{3} ((m_1 + \nu_1)(\nu_1 + 1) + \nu_1) \sigma_{\nu+\alpha_2} .
\end{aligned}$$

Or, comme  $\nu$  est dominant,  $\nu_1 \geq 0$ . De plus,  $m_1 \geq 0, m_2 \geq 1$  donc

$$\frac{m_2}{3} ((m_1 + \nu_1)(\nu_1 + 1) + \nu_1) > 0$$

et

$$\sigma_{\nu+\alpha_2} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}) \cdot \sigma_\nu .$$

De même on traite le cas où  $\nu' = \nu + \alpha_1$ .

**3-ème cas :**  $\nu' = \nu - \alpha_1$ .

$$\text{On pose } w := s_1 s_2 \text{ où } s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Comme précédemment, on peut calculer  $D_\lambda^w(\sigma_\nu)$ . Et on trouve :

$$\begin{aligned}
&(c - \chi_{\nu+\rho}(c))(c - \chi_{\nu+\alpha_1}(c))(c - \chi_{\nu-\alpha_1+\alpha_2}(c))(c - \chi_{\nu+\alpha_2}(c))(c - \chi_\nu(c)) \cdot D_\lambda^w \sigma_\nu \\
&= r \sigma_{\nu-\alpha_1}
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
&r = \\
&-\frac{2}{3^5} (\nu_2 + 3)(\nu_1 + m_1 + 1)(\nu_1 + \nu_2 + 1)(\nu_1 + \nu_2 + m_2 + 2)(2\nu_1 + \nu_2 + 3)\nu_1(\nu_1 - 1)
\end{aligned}$$

$> 0$

et donc  $\sigma_{\nu-\alpha_1} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$ .

De même, on traite le cas où  $\nu' = \nu - \alpha_2$ .

**4-ème cas :**  $\nu' = \rho$  et  $\nu = 0$ .

On a :

$$(17) \quad (c - \chi_{2\rho})(c - \chi_{\rho+\alpha_1})(c - \chi_\rho)D_\lambda^{w_0}\sigma_\rho = -\frac{2}{3}(m_1 + 4)(m_2 + 4)\sigma_0 .$$

Donc  $\sigma_0 \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\rho$ .

**Cas général :** Rappelons que :

$$(18) \quad \nu = \nu' + (m'_1 - m_1)\alpha_1 + (m'_2 - m_2)\alpha_2 .$$

On raisonne par récurrence sur  $|m'_1 - m_1| + |m'_2 - m_2|$ .

Si  $m'_1 = m_1$  et  $m'_2 = m_2$ ,  $\sigma_{\nu'} = \sigma_\nu$  et il n'y a rien à montrer.

Si  $m'_1 < m_1$ , et  $m'_2 < m_2$ , d'après le 1-er cas,

$$\sigma_{\nu+\rho} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$$

et par hypothèse de récurrence,

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_{\nu+\rho} \subseteq \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu .$$

Si  $m'_1 < m_1$  et  $m'_2 \geq m_2$ ,  $\nu + \alpha_1$  est dominant, d'après le deuxième cas,

$$\sigma_{\nu+\alpha_1} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$$

et par hypothèse de récurrence :

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_{\nu+\alpha_1} \subseteq \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu .$$

De même si  $m'_1 \geq m_1$  et  $m'_2 < m_2$ ,  $\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$ .

Si  $m'_1 > m_1$  et  $m'_2 \geq m_2$ , alors si  $m'_2 = m_2$ ,  $\nu - \alpha_1$  est dominant et d'après le 3-ème cas et l'hypothèse de récurrence :

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_{\nu-\alpha_1} \subseteq \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu .$$

Si  $m'_2 > m_2$ , alors  $\nu - \alpha_1$  ou  $\nu - \alpha_2$  est dominant et encore d'après le 3-ème cas et l'hypothèse de récurrence :

$$\sigma_{\nu'} \in \mathcal{D}_\lambda(\overline{G}).\sigma_\nu$$

ou bien ni  $\nu - \alpha_1$  ni  $\nu - \alpha_2$  ne sont dominants et alors nécessairement :  $\nu' = 0$  et  $\nu = \rho$  (car  $\nu' < \nu$  et  $\nu$  et  $\nu'$  sont dominants) ; on utilise alors le 4-ème cas pour conclure. **Q.e.d.**

## 10 Autre cas

Notons  $S_3$  l'espace des matrices  $3 \times 3$  symétriques à coefficients dans  $\mathbf{k}$ .  
Soit  $\bar{\mathcal{C}}$  la variété :

$$\bar{\mathcal{C}} := \{([S], [S']) \in \mathbb{P}(S_3) \times \mathbb{P}(S_3) : SS' \in \mathbf{k}I_3\}$$

c'est la variété des « coniques complètes ». C'est une compactification magnifique (de rang 2) du  $SL_3$ -espace homogène  $PGL_3/PSO_3$  (on peut identifier  $gPSO_3 \in PGL_3/PSO_3$  et le couple  $({}^tgg, g^{-1}{}^tg^{-1})$ ).

Le théorème 9.1 est encore vrai si l'on remplace  $\bar{G}$  par  $\bar{\mathcal{C}}$ .

Pour tout faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $\bar{\mathcal{C}}$ , soit

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \otimes \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{C}}} \otimes \mathcal{L}^{-1} .$$

**Théorème 10.1** *Pour tout faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $\bar{\mathcal{C}}$ , le  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{C}})$ -module  $\Gamma(X, \mathcal{L})$  est soit nul soit irréductible.*

**Démonstration** : C'est la même démonstration que dans le cas de  $\bar{G}$ . Cette fois, on utilise la grosse cellule :

$$(\bar{\mathcal{C}})_0 := \{([S], [S']) \in \bar{\mathcal{C}} : S_{1,1}S'_{3,3} \neq 0\} .$$

On note pour tout  $g \in SL_3(\mathbf{k})$ , pour tout  $([S], [S']) \in \bar{\mathcal{C}}$ ,

$$g \cdot ([S], [S']) := ({}^t g^{-1} S g^{-1}, [g S^t g])$$

et  $U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{2,3} \\ & 1 & u_{1,3} \\ & & 1 \end{pmatrix} : \forall 1 \leq i < j \leq 3, u_{i,j} \in \mathbf{k} \right\}$ . On a un isomorphisme de variétés algébriques :

$$U \times \mathbb{A}^2 \rightarrow (\bar{\mathcal{C}})_0$$

$$(u, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \mapsto u \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} xy \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right) .$$

On remarque alors que

$$\partial_x \partial_y \in \Gamma(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{C}}}) .$$

Cet opérateur joue alors le même rôle que  $D_0$  dans le cas de  $\bar{G}$ . **Q.e.d.**

## Références

- [1] C. De Concini and C. Procesi. Complete symmetric varieties. *in Invariant theory (Montecatini, 1982), Lecture Notes in Math.*, 996 :1–44, 1983.
- [2] G. Kempf. The grothendieck-cousin complex of an induced representation. *Adv. in Math.*, 29(3) :310–396, 1978.
- [3] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. Geometric invariant theory. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, 34, 1994.