



**HAL**  
open science

# La conjecture de Manin géométrique pour une famille de quadriques intrinsèques

David Bourqui

► **To cite this version:**

David Bourqui. La conjecture de Manin géométrique pour une famille de quadriques intrinsèques. 2010. hal-00449471v1

**HAL Id: hal-00449471**

**<https://hal.science/hal-00449471v1>**

Preprint submitted on 21 Jan 2010 (v1), last revised 9 Mar 2010 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# LA CONJECTURE DE MANIN GÉOMÉTRIQUE POUR UNE FAMILLE DE QUADRIQUES INTRINSÈQUES

*par*

David Bourqui

---

**Résumé.** — Nous établissons une version de la conjecture de Manin pour une famille de quadriques intrinsèques, le corps de base étant un corps global de caractéristique positive.

**Abstract.** — We prove a version of Manin's conjecture for a certain family of intrinsic quadrics, the base field being a global field of positive characteristic.

Dans ce texte, nous établissons une version de la conjecture de Manin sur le comportement asymptotique du nombre de courbes de degré borné pour une certaine famille de quadriques intrinsèques, *i.e.* de variétés dont l'anneau de coordonnées total s'identifie à l'anneau de coordonnées d'une quadrique affine. Cette famille est construite à l'aide des résultats de [BH07] qui permettent de bâtir des variétés d'anneaux de coordonnées totaux fixés. La dimension des membres de la famille n'est pas bornée et son premier membre n'est autre que le plan projectif éclaté en trois points alignés, traité dans un précédent travail (*cf.* [Bou09]). Le résultat précis que nous obtenons est énoncé dans la sous-section 3.3 (théorème 3.5).

Le principe général de la démonstration suit celui de [Bou09]. L'idée de départ, due à Salberger ([Sal98]) et Peyre ([Pey95]), consiste à exploiter l'existence d'un certain torseur au-dessus de la variété. Comme expliqué dans [Bou09], ceci permet de réécrire la fonction zêta des hauteurs en termes des relations définissant l'anneau de coordonnées total et de séries génératrices indexées par les points entiers du dual du cône effectif. Afin de dégager terme dominant et termes non significatifs de la fonction zêta des hauteurs, il s'agit alors de décomposer les séries obtenues suivant les « bonnes » et « mauvaises » régions du dual du cône effectif. Pour faciliter une adaptation future de la méthode employée à d'autres variétés ou familles de variétés, nous commençons par décrire la stratégie suivie pour une famille de variétés plus générale que celle pour laquelle le résultat sera finalement démontré, dégageant au

---

*Classification mathématique par sujets (2000).* — 11G50 14C20 14J45 .

*Mots clefs.* — conjecture de Manin, fonction zêta des hauteurs, corps global de caractéristique positive, torseurs universels, anneaux de Cox.

passage des hypothèses suffisantes pour que la méthode aboutisse. Une des améliorations par rapport à [Bou09] est que les décompositions liées au cône effectif sont exprimées de manière intrinsèque. En particulier, bien que le cône effectif des variétés pour lesquelles la méthode sera menée à son terme soit simplicial, cette particularité ne joue aucun rôle dans notre démonstration. Par contre, on verra clairement que la position dans le cône effectif des diviseurs des sections globales engendrant l’anneau de coordonnées total a une influence cruciale pour la mise en oeuvre de la méthode. On renvoie à la remarque 2.3 pour quelques commentaires sur la nature des hypothèses mises en jeu.

Nous décrivons brièvement l’organisation de l’article. La section 1 contient les rappels utiles. La stratégie générale de démonstration est décrite dans la section 2. Elle est synthétisée par le théorème 2.2. La construction de notre famille de quadriques intrinsèques fait l’objet du début de la section 3 et la vérification des hypothèses ad hoc pour cette famille occupe la fin de cette même section.

## 1. Fonction zêta des hauteurs et relèvement au torseur universel

Dans cette section, tout en fixant quelques notations, nous rappelons le contexte de notre étude et le résultat de relèvement de la fonction zêta des hauteurs au torseur universel démontré dans [Bou09].

**1.1. Fonction zêta des hauteurs et conjecture de Manin géométrique.** — Soit  $k$  un corps fini de cardinal  $q$ . Soit  $\mathcal{C}$  une  $k$ -courbe projective, lisse et géométriquement intègre, dont on note  $g_{\mathcal{C}}$  le genre et  $h_{\mathcal{C}}$  le nombre de classes de diviseurs de degré 0. On note  $\mathcal{C}^{(0)}$  l’ensemble des points fermés de  $\mathcal{C}$ . Pour  $v \in \mathcal{C}^{(0)}$ , on note  $\kappa_v$  le corps résiduel et  $q_v = q^{f_v}$  son cardinal. On note  $\text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})$  le monoïde des diviseurs effectifs de  $\mathcal{C}$ . Rappelons que si  $\mathcal{D}$  est un diviseur de  $\mathcal{C}$  la dimension  $\ell(\mathcal{D}) \stackrel{\text{déf}}{=} \dim(H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})))$  est toujours majorée par  $1 + \deg(\mathcal{D})$  et vaut  $1 - g_{\mathcal{C}} + \deg(\mathcal{D})$  si on a  $\deg(\mathcal{D}) \geq 2g_{\mathcal{C}} - 1$ . En particulier, on a pour tout  $d \geq 0$  la majoration

$$|\{\mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C}), \deg(\mathcal{D}) = d\}| \leq \frac{q^{1+d} h_{\mathcal{C}}}{q-1}. \quad (1.1.1)$$

Soit  $X$  une  $k$ -variété projective, lisse et géométriquement intègre définie sur  $k$ . On suppose que son groupe de Picard géométrique est libre de rang fini et déployé, *i.e.* que l’action du groupe de Galois absolu est triviale. On note  $\mathcal{K}_X$  la classe du faisceau canonique de  $X$  dans le groupe de Picard. On suppose qu’elle est située à l’intérieur du cône effectif  $C_{\text{eff}}(X)$  de  $X$ .

Pour  $U$  ouvert de Zariski non vide de  $X$  assez petit et  $n \geq 0$ , on note  $N(X, -\mathcal{K}_X, U, n)$  le nombre de  $k$ -morphisms  $f : \mathcal{C} \rightarrow X$  dont l’image rencontre  $U$  et de degré anticanonique  $n$ . Si  $U$  est assez petit,  $N(X, -\mathcal{K}_X, U, n)$  est fini pour tout  $n$  et on peut définir la fonction zêta des hauteurs anticanonique comme l’élément de  $\mathbf{Z}[[t]]$  suivant :

$$Z_{X, -\mathcal{K}_X, U}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \geq 0} N(X, -\mathcal{K}_X, U, n) t^n. \quad (1.1.2)$$

Voici une version de la conjecture de Manin dans ce cadre.

**Question 1.1.** — Soit  $\delta \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \text{Max}\{d \in \mathbf{N}_{>0}, -\mathcal{K}_X \in d \text{ Pic}(X)\}$  et  $\tilde{Z}_{X,-\mathcal{K}_X,U}(t)$  la s\u00e9rie telle que  $\tilde{Z}_{X,-\mathcal{K}_X,U}(t^\delta) = Z_{X,-\mathcal{K}_X,U}(t)$ . Est-il vrai que si  $U$  est assez petit la s\u00e9rie  $Z_{X,-\mathcal{K}_X,U}(t)$  a pour rayon de convergence  $q^{-\delta}$  et que pour un certain  $\varepsilon > 0$  sa somme se prolonge en une fonction m\u00e9romorphe sur le disque  $|t| < q^{-\delta+\varepsilon}$  ayant un p\u00f4le d'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X))$  en  $t = q^{-\delta}$ , et des p\u00f4les d'ordre au plus  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$  en tout autre point du cercle de rayon  $q^{-\delta}$ , et v\u00e9rifiant

$$\lim_{t \rightarrow q^{-\delta}} (t - q^{-\delta})^{\text{rg}(\text{Pic}(X))} \tilde{Z}_{X,-\mathcal{K}_X,U}(t) = \alpha(X) \gamma(X) \quad (1.1.3)$$

o\u00f9

$$\alpha(X) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \lim_{t \rightarrow 1} (1 - t)^{\text{rg}(\text{Pic}(X))} \sum_{y \in C_{\text{eff}}(X)^\vee \cap \text{Pic}(X)^\vee} t^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (1.1.4)$$

et

$$\gamma(X) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left( \frac{h_{\mathcal{C}} q^{(1-g_{\mathcal{C}})}}{q-1} \right)^{\text{rg}(\text{Pic}(X))} q^{(1-g_{\mathcal{C}}) \dim(X)} \prod_{v \in \mathcal{C}(0)} (1 - q_v^{-1})^{\text{rg}(\text{Pic}(X))} \frac{|X(\kappa_v)|}{q_v^{\dim(X)}}. \quad (1.1.5)$$

**D\u00e9finition 1.2.** — 1. Soit  $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$  et  $(b_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ . On dit que la s\u00e9rie  $\sum a_n t^n$  est major\u00e9e par la s\u00e9rie  $\sum b_n t^n$  si on a  $|a_n| \leq b_n$  pour tout  $n$ .

2. Soit  $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ ,  $k \geq 1$  un entier et  $\rho > 0$  un r\u00e9el. On dit que la s\u00e9rie  $\sum a_n t^n$  est  $\rho$ -contr\u00f4l\u00e9e \u00e0 l'ordre  $k$  si elle v\u00e9rifie l'une des deux conditions suivantes (\u00e9quivalentes d'apr\u00e8s les estim\u00e9es de Cauchy) :

(a) on a  $a_n = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} (n^{k-1} \rho^{-n})$  ;

(b) la s\u00e9rie  $\sum a_n t^n$  est major\u00e9e par une s\u00e9rie dont le rayon de convergence est sup\u00e9rieur \u00e0  $\rho$  et dont la somme se prolonge en une fonction m\u00e9romorphe sur un disque de rayon strictement sup\u00e9rieur \u00e0  $\rho$ , ayant des p\u00f4les d'ordre au plus  $k$  sur le cercle de rayon  $\rho$ .

**Lemme 1.3.** — On conserve les hypoth\u00e8ses et notations pr\u00e9c\u00e9dentes. Si  $U$  est un ouvert de  $X$  tel que la s\u00e9rie

$$Z_{X,-\mathcal{K}_X,U}(t) - \gamma(X) \sum_{y \in C_{\text{eff}}(X)^\vee \cap \text{Pic}(X)^\vee} (qt)^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (1.1.6)$$

est  $q^{-1}$ -contr\u00f4l\u00e9e \u00e0 l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$ , alors la r\u00e9ponse \u00e0 la question 1.1 est positive pour  $U$ .

**1.2. Anneau de Cox, inversion de M\u00f6bius, et rel\u00e8vement au torseur universel.** — On conserve les notations et hypoth\u00e8ses de la section pr\u00e9c\u00e9dente. On suppose en outre que l'anneau de coordonn\u00e9es total (ou anneau de Cox) de  $X$  (cf. e.g. [Has04]), not\u00e9  $\text{Cox}(X)$ , est de type fini. Soit  $\{u_i\}_{i \in \mathcal{J}}$  une famille finie de sections globales (non constantes) qui engendrent  $\text{Cox}(X)$ . Soit  $\mathcal{I}_X$  l'id\u00e9al  $\text{Pic}(X)$ -homog\u00e8ne noyau du morphisme naturel  $k[u_i]_{i \in \mathcal{J}} \rightarrow \text{Cox}(X)$  et  $\mathcal{S}_X^{\text{hom}}$  l'ensemble de ses \u00e9l\u00e9ments

homogènes. Pour  $i \in \mathfrak{J}$ , on note  $\mathcal{E}_i$  le diviseur des zéros de  $u_i$ . Soit  $X_0$  l'ouvert de  $X$  égal au complémentaire de la réunion des diviseurs  $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ .

Soit  $T_{\text{NS}} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \text{Hom}(\text{Pic}(X), \mathbf{G}_m)$  le tore de Néron-Severi. Soit  $\hat{X}$  l'ouvert de  $\text{Spec}(\text{Cox}(X))$  formé des points semi-stables vis-à-vis de la  $T_{\text{NS}}$ -linéarisation sur le fibré trivial de  $\text{Spec}(\text{Cox}(X))$  induite par le choix d'une classe ample. Le quotient géométrique de  $\hat{X}$  par  $T_{\text{NS}}$  existe et s'identifie naturellement à  $X$ . On montre en outre que  $\hat{X} \rightarrow X$  représente l'unique classe de toseurs universels au-dessus de  $X$  (cf. [Has04, HK00]).

Une classe  $\mathcal{S}$  de parties de  $\mathfrak{J}$  sera dite *admissible* si on a

$$\hat{X} = \text{Spec}(\text{Cox}(X)) \cap \left( \bigcup_{\mathfrak{J} \in \mathcal{S}} \prod_{i \in \mathfrak{J}} u_i \neq 0 \right). \quad (1.2.1)$$

Par exemple, soit  $\mathcal{D} \in \text{Pic}(X)$  une classe ample et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des parties  $\mathfrak{J}$  de  $\mathfrak{J}$  telles qu'il existe une famille  $(\lambda_i)_{i \in \mathfrak{J}}$  de rationnels strictement positifs vérifiant  $\mathcal{D} = \sum_{i \in \mathfrak{J}} \lambda_i \mathcal{E}_i$ . Alors  $\mathcal{S}$  est admissible.

**Remarque 1.4.** — Pour tout  $i \in \mathfrak{J}$ , l'image réciproque du diviseur  $\mathcal{E}_i$  par le morphisme quotient  $\hat{X} \rightarrow X$  est  $\hat{X} \cap \{u_i = 0\}$ . On en déduit que si  $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}$  vérifie  $\bigcap_{i \in \mathfrak{J}} \mathcal{E}_i \neq \emptyset$ , toute classe admissible contient une partie  $\mathfrak{K}$  telle que  $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{J} = \emptyset$ .

On a la généralisation classique suivante de la formule d'inversion de Möbius (on notera que le dernier point découle de la remarque précédente).

**Proposition 1.5.** — Soit  $\mathcal{S}$  une classe admissible de  $\mathfrak{J}$ . Il existe une unique fonction  $\mu_{X, \mathcal{S}} : \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{\mathfrak{J}} \rightarrow \mathbf{C}$  vérifiant

$$\forall \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{\mathfrak{J}}, \quad \sum_{0 \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{D}} \mu_{X, \mathcal{S}}(\mathcal{E}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Inf}_{\mathfrak{J} \in \mathcal{S}} (\sum_{i \in \mathfrak{J}} \mathcal{D}_i) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Cette fonction vérifie en outre les propriétés suivantes :

1. elle est multiplicative, c'est-à-dire que si  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  vérifient

$$\forall i \in \mathfrak{J}, \text{Inf}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}'_i) = 0 \quad (1.2.3)$$

alors on a

$$\mu_{X, \mathcal{S}}(\mathcal{E} + \mathcal{E}') = \mu_{X, \mathcal{S}}(\mathcal{E}) \mu_{X, \mathcal{S}}(\mathcal{E}') \quad ; \quad (1.2.4)$$

2. pour tout  $v \in \mathcal{C}^{(0)}$  et tout  $\alpha \in \mathbf{N}^{\mathfrak{J}}$ ,  $\mu_{X, \mathcal{S}}((\alpha_i v))$  ne dépend que de  $\alpha$  ; on note  $\mu_{X, \mathcal{S}}^0(\alpha)$  cette valeur. On a  $\mu_{X, \mathcal{S}}^0(\alpha) = 0$  dans les cas suivants :

- (a) il existe  $i \in \mathfrak{J}$  tel que  $\alpha_i \geq 2$  ;
- (b)  $\alpha$  est non nul et il existe  $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}$  tel que  $\bigcap_{i \in \mathfrak{J}} \mathcal{E}_i \neq \emptyset$  et  $\alpha_i = 0$  pour  $i \notin \mathfrak{J}$  ; ceci vaut en particulier si on a  $\sum_{i \in \mathfrak{J}} \alpha_i = 1$ .

**Remarque 1.6.** — Soit  $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathfrak{J}}$  tel qu'au plus un  $\alpha_i$  soit nul. Il découle des propriétés de  $\mu_{X, \mathcal{S}}^0$  et de la remarque 1.4 que l'on a

$$\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \mu_{X, \mathcal{S}}^0(\beta) = 0. \quad (1.2.5)$$

On fixe dans la suite une classe admissible  $\mathcal{J}$  et on notera  $\mu_X$  la fonction  $\mu_{X, \mathcal{J}}$ . On écrit à présent  $\mathcal{T} = I \sqcup J$ , où  $I$  est tel que les classes  $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$  forment une base de  $\text{Pic}(X)$ . Pour  $i \in I$  (respectivement  $j \in J$ ), on notera  $u_i = s_i$  (respectivement  $u_j = t_j$ ) et  $\mathcal{E}_i = \mathcal{F}_i$  (respectivement  $\mathcal{E}_j = \mathcal{G}_j$ ). La notation  $\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}$  désignera toujours un couple  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  où  $\mathcal{F} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I$  et  $\mathcal{G} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^J$ . Écrivons, pour  $j \in J$ ,

$$\mathcal{G}_j = \sum_{i \in I} a_{i,j} \mathcal{F}_i, \quad a_{i,j} \in \mathbf{Z}. \quad (1.2.6)$$

Pour  $\mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})$ , on note  $s_{\mathcal{D}}$  la section canonique de  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$ . Pour  $\mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I$  et  $\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}$ , on désigne par  $\mathcal{N}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$  le cardinal de l'ensemble des éléments  $(t_j)_{j \in J}$  tous non nuls du produit

$$\prod_{j \in J} H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-\mathcal{G}_j + \sum_j a_{i,j} (\mathcal{D}_j + \mathcal{F}_i))) \quad (1.2.7)$$

vérifiant les relations

$$\forall F \in \mathcal{S}_X^{\text{hom}}, \quad F(s_{\mathcal{D}_i}, s_{\mathcal{F}_i}, t_j s_{\mathcal{G}_j}) = 0. \quad (1.2.8)$$

Des résultats des sections 1.3, 1.4 et 1.6 de [Bou09] découle alors la formule suivante, que l'on peut voir comme une formule de relèvement de la fonction zêta des hauteurs au torseur universel :

$$Z_{X, -\mathcal{K}_X, X_0}(t) = \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} \mu_X(\mathcal{E}) \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \text{deg}(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \text{deg}(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \text{deg}(\mathcal{D}_i) = \langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \text{deg}(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} \mathcal{N}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) t^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle}. \quad (1.2.9)$$

## 2. Le cas de certaines hypersurfaces intrinsèques

On reprend les hypothèses et notations de la section précédente. On suppose en outre qu'on a un isomorphisme

$$\text{Cox}(X) \xrightarrow{\sim} k[(s_i)_{i \in I}, (t_j)_{j \in J}] / F(s_i, t_j). \quad (2.0.10)$$

où  $F$  est  $\text{Pic}(X)$ -homogène de degré  $\mathcal{D}_{\text{tot}}$  et est *linéaire en les  $t_j$* , i.e. s'écrit

$$F = \sum_{j \in J} t_j \prod_{i \in I} s_i^{b_{i,j}}, \quad b_{i,j} \in \mathbf{N}. \quad (2.0.11)$$

D'après [BH07, proposition 8.5], on a la formule d'adjonction suivante.

**Lemme 2.1.** — *La classe du fibré anticanonique est*

$$-\mathcal{K}_X = \sum_{i \in I} \mathcal{F}_i + \sum_{j \in J} \mathcal{G}_j - \mathcal{D}_{\text{tot}}. \quad (2.0.12)$$

Dans cette section nous décrivons le schéma d'une stratégie pour établir que dans ce cas la question 1.1 a une réponse positive pour  $U = X_0$ . Plus précisément nous montrons le résultat suivant :

**Théorème 2.2.** — *On conserve les notations et hypothèses précédentes. On suppose qu'il existe une numérotation de  $J$  telle qu'on ait*

$$\forall 1 \leq j \leq |J| - 1, \quad \mathcal{G}_j + \mathcal{G}_{j+1} - \mathcal{D}_{tot} \in C_{\text{eff}}(X) \setminus \{0\}. \quad (2.0.13)$$

*On suppose également que les hypothèses 2.15, 2.17, et 2.21 décrites ci-dessous sont satisfaites.*

*Alors la série*

$$Z_{X, -\mathcal{K}_X, X_0}(t) - \gamma(X) \sum_{y \in C_{\text{eff}}(X)^\vee \cap \text{Pic}(X)^\vee} (qt)^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.0.14)$$

*est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$ ,*

La démonstration de ce théorème occupe le reste de cette section.

**Remarque 2.3.** — Les hypothèses que l'on va dégager sont de deux natures différentes : d'une part, on demande que les diviseurs des zéros des sections  $t_j$  soient « suffisamment positifs » (ceci apparaît déjà dans l'énoncé du théorème ci-dessus) ; d'autres part, qu'une certaine série génératrice de nature combinatoire naturellement associée à la relation définissant l'anneau de Cox ait de bonnes propriétés analytiques, et que son « terme dominant » soit relié au nombre de points de  $X$ .

Les surfaces de del Pezzo généralisées qui sont des hypersurfaces intrinsèques ont été classifiées par Derenthal dans [Der06]. Un certain nombre d'entre elles sont de la forme considérée ici. Il apparaît que parmi ces dernières la seule qui satisfasse nos hypothèses de positivité est le plan projectif éclaté en trois points alignés. Il est à noter cependant qu'une légère variante de la méthode décrite dans ce texte devrait s'appliquer à d'autres exemples issus de la liste de Derenthal vérifiant les hypothèses de positivité adéquates (travail en cours).

Vis-à-vis de la méthode décrite ci-dessous, le fait que les hypothèses de positivité ne sont pas satisfaites signifie que l'on englobe dans le terme d'erreur des termes correspondant à des régions trop importantes du cône effectif dual, dont on ne peut en fait plus garantir qu'ils ne contribuent pas au terme principal de la fonction zêta des hauteurs. Un relâchement des hypothèses de positivité devrait passer par une amélioration significative du lemme de comptage 2.6. Il serait sans doute intéressant à cet égard de pouvoir étendre par exemple la validité de la méthode au cas de la désingularisation minimale de la surface de del Pezzo singulière de degré 5 avec singularité de type  $A_1$ . Pour cette quadrique intrinsèque, l'équation de l'anneau de Cox est très similaire au cas du plan projectif éclaté en trois points alignés, mais la configuration du cône effectif est radicalement différente. Il est à noter que pour cet exemple (comme pour d'autres) nous avons pu vérifier que les hypothèses du second type étaient satisfaites. Il serait intéressant de dégager une démonstration conceptuelle de ce genre de résultat, notamment en ce qui concerne l'hypothèse 2.17.

## 2.1. Quelques lemmes préliminaires. —

**Lemme 2.4.** — Soit  $n \geq 1$  un entier, et  $\rho > 0$  un réel. Soit  $(a_d) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}^n}$  et

$$F(\mathbf{t}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^n} a_{\mathbf{d}} \prod_{1 \leq i \leq n} t_i^{d_i}. \quad (2.1.1)$$

On suppose que  $F(\mathbf{t})$  converge absolument sur un polydisque de rayon  $(r, \dots, r)$  avec  $r > \rho^{-1}$ . Soit  $(b_d) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}^n}$  définie par

$$\frac{F(\mathbf{t})}{(1 - \rho t_1) \dots (1 - \rho t_n)} = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^n} b_{\mathbf{d}} t_1^{d_1} \dots t_n^{d_n}. \quad (2.1.2)$$

Alors on a pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit

$$\forall \mathbf{d} \in \mathbf{N}^n, \quad \left| b_{\mathbf{d}} - F(\rho^{-1}, \dots, \rho^{-1}) \rho^{|\mathbf{d}|} \right| \leq \frac{\rho^{-\varepsilon} \|F\|_{\rho^{-1+\varepsilon}}}{(1 - \rho^{-\varepsilon})^n} \sum_{1 \leq i \leq n} \rho^{(1-\varepsilon)d_i + \sum_{j \neq i} d_j} \quad (2.1.3)$$

où  $\|F\|_{\eta} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Max}_{|t_i|=\eta} |F(\mathbf{t})|$ .

*Démonstration.* — D'après les estimations de Cauchy, on a pour  $\varepsilon > 0$  assez petit

$$\forall \mathbf{d} \in \mathbf{N}^n, \quad |a_{\mathbf{d}}| \leq \|F\|_{\rho^{-1+\varepsilon}} \rho^{(1-\varepsilon)|\mathbf{d}|}. \quad (2.1.4)$$

Par ailleurs un calcul immédiat montre qu'on a

$$\begin{aligned} & F(t_1, \dots, t_k, \rho^{-1}, \dots, \rho^{-1}) - F(t_1, \dots, t_{k-1}, \rho^{-1}, \dots, \rho^{-1}) \\ &= (\rho t_k - 1) \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^k, \delta \in \mathbf{N}, \\ (\delta_j)_{k+1 \leq j \leq n} \in \mathbf{N}^{n-k}}} a_{d_1, \dots, d_k+1+\delta, \delta_{k+1}, \dots, \delta_n} \rho^{-(\delta+1) - \sum_{k+1 \leq j \leq n} \delta_j} \prod_{1 \leq i \leq k} t_i^{d_i}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Si on pose

$$\frac{F(t_1, \dots, t_k, \rho^{-1}, \dots, \rho^{-1}) - F(t_1, \dots, t_{k-1}, \rho^{-1}, \dots, \rho^{-1})}{\prod_{1 \leq i \leq n} (1 - \rho t_i)} \stackrel{\text{déf}}{=} G_k(\mathbf{t}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^n} b_{k, \mathbf{d}} \prod_{1 \leq i \leq n} t_i^{d_i} \quad (2.1.6)$$

on a donc pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^n$  la relation

$$b_{k, \mathbf{d}} = - \sum_{\substack{0 \leq \delta_i \leq d_i, 1 \leq i \leq k-1 \\ \delta \in \mathbf{N}, \\ \delta_j \in \mathbf{N}, k+1 \leq j \leq n}} a_{\delta_1, \dots, \delta_{k-1}, d_k+1+\delta, \delta_{k+1}, \dots, \delta_n} \rho^{-(\delta+1) - \sum_{k+1 \leq j \leq n} \delta_j + \sum_{1 \leq i \leq k-1} (d_i - \delta_i) + \sum_{k+1 \leq j \leq n} d_j}. \quad (2.1.7)$$

D'après (2.1.4), on a pour  $\varepsilon > 0$  assez petit la majoration

$$|b_{k,d}| \leq \|F\|_{\rho^{-1+\varepsilon}} \rho^{-\varepsilon+(1-\varepsilon)d_k + \sum_{1 \leq i \leq n, i \neq k} d_i} \sum_{\substack{0 \leq \delta_i \leq d_i, 1 \leq i \leq k-1 \\ \delta \in \mathbf{N}, \\ \delta_j \in \mathbf{N}, k+1 \leq j \leq n}} \rho^{-\varepsilon(\delta_1 + \dots + \delta_{k-1} + \delta + \delta_{k+1} + \dots + \delta_n)} \quad (2.1.8)$$

$$\leq \frac{\|F\|_{\rho^{-1+\varepsilon}} \rho^{-\varepsilon+(1-\varepsilon)d_k + \sum_{1 \leq i \leq n, i \neq k} d_k}}{(1 - \rho^{-\varepsilon})^n}. \quad (2.1.9)$$

Compte tenu de la relation

$$\frac{F(\mathbf{t}) - F(\rho^{-1}, \dots, \rho^{-1})}{\prod_{1 \leq i \leq n} (1 - \rho t_i)} = \sum_{1 \leq k \leq n} G_k(\mathbf{t}) \quad (2.1.10)$$

on obtient bien la majoration annoncée.  $\square$

**Lemme 2.5.** — Soit  $N$  un  $\mathbf{Z}$ -module libre de rang fini,  $\mathcal{C}$  un cône polyédral rationnel de dimension maximale de  $N \otimes \mathbf{R}$ ,  $x_0$  un élément de l'intérieur de  $\mathcal{C}$  et  $x_1$  un élément de  $\mathcal{C}$ .

1. On suppose  $x_1$  non nul. Alors pour tout réel  $\rho > 1$  la série

$$\sum_{y \in \mathcal{C}^\vee \cap N^\vee} \rho^{-\langle y, x_1 \rangle} T^{\langle y, x_0 \rangle} \quad (2.1.11)$$

est 1-contrôlée à l'ordre  $\dim(\mathcal{C}) - 1$

2. Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(M_n)_{n \geq 0}$  deux suites de réels positifs. On suppose qu'il existe  $\rho > 1$  tel que la série

$$\sum a_n M_n^{\dim(\mathcal{C})} \rho^{M_n} \quad (2.1.12)$$

est absolument convergente.

Alors la série

$$\sum a_n \sum_{\substack{y \in \mathcal{C}^\vee \cap N^\vee \\ \langle y, x_1 \rangle \leq M_n}} t^{\langle y, x_0 \rangle} \quad (2.1.13)$$

est 1-contrôlée à l'ordre  $\dim(\mathcal{C}) - 1$ .

*Démonstration.* — Soit  $\Delta$  un éventail régulier de support  $\mathcal{C}$ . Pour tout cône  $\delta$  de  $\Delta$ , soit  $\{y_\ell\}_{\ell \in \delta(1)}$  les générateurs des rayons de  $\delta$ . Soit

$$\delta(1)_{x_1} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\ell \in \delta(1), \langle y_\ell, x_1 \rangle = 0\}. \quad (2.1.14)$$

La série (2.1.13) se réécrit

$$\sum_{\delta \in \Delta} \prod_{\ell \in \delta(1)_{x_1}} \frac{t^{\langle y_\ell, x_0 \rangle}}{1 - t^{\langle y_\ell, x_0 \rangle}} \sum_n a_n P_{\delta,n}(t) \quad (2.1.15)$$

où

$$P_{\delta,n}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{(n_\ell) \in (\mathbf{N}_{>0})^{\delta(1) \setminus \delta(1)x_1} \\ \sum n_\ell \langle y_\ell, x_1 \rangle \leq M_n}} t^{\sum n_\ell \langle y_\ell, x_0 \rangle}. \quad (2.1.16)$$

On a alors pour tout  $\rho \geq 0$

$$P_\delta(\rho) \leq M_n^{\dim(\mathcal{C})} \rho^{\dim(\mathcal{C}) \max(\langle y_\ell, x_0 \rangle) M_n}. \quad (2.1.17)$$

Ceci montre le deuxième point. Une décomposition analogue permet de montrer le premier point.  $\square$

La proposition suivante étend les résultats de la section 3.3 de [Bou09].

**Proposition 2.6.** — Soit  $n \geq 1$  un entier, soient  $\{\mathcal{H}_j, \mathcal{H}'_j\}_{1 \leq j \leq n}$  et  $\mathcal{H}$  des diviseurs de  $\mathcal{C}$  tels que  $\mathcal{H}$  et les  $\mathcal{H}_j + \mathcal{H}'_j$  sont deux à deux linéairement équivalents. Pour  $1 \leq j \leq n$ , soit  $s_j$  une section globale non nulle de  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_j)$ . On fixe des isomorphismes

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_j + \mathcal{H}'_j) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \quad 1 \leq j \leq n \quad (2.1.18)$$

ce qui permet de définir l'application linéaire

$$\varphi_{\mathbf{s}} : \prod_{1 \leq j \leq n} H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}'_j)) \rightarrow H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})) \quad (2.1.19)$$

qui à  $(t_j)$  associe  $\sum t_j s_j$ . On note  $\Delta_{\mathbf{s}}$  la dimension du noyau de  $\varphi_{\mathbf{s}}$ .

1. On a la majoration

$$\Delta_{\mathbf{s}} \leq n - 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{1 \leq j \leq n} \deg(\mathcal{H}'_j). \quad (2.1.20)$$

2. On a l'une des deux majorations suivantes :

$$\Delta_{\mathbf{s}} \leq n - 1 + \deg(\text{Inf}[\text{div}(s_j)]) - \deg(\mathcal{H}) + \sum_{1 \leq j \leq n} \deg(\mathcal{H}'_j) \quad (2.1.21)$$

ou

$$\Delta_{\mathbf{s}} \leq n - 2 + \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \sum_{1 \leq j \leq n} \deg(\mathcal{H}'_j). \quad (2.1.22)$$

3. On suppose qu'on a

$$\forall 1 \leq j \leq n-1, \quad \deg(\mathcal{H}_j) + \deg(\mathcal{H}_{j+1}) \geq \deg(\mathcal{H}) - \deg(\text{Inf}[\text{div}(s_j)]) + 2g_{\mathcal{C}} - 1. \quad (2.1.23)$$

Alors on a

$$\Delta_{\mathbf{s}} = (n-1)(1-g_{\mathcal{C}}) + \deg(\text{Inf}[\text{div}(s_j)]) - \deg(\mathcal{H}) + \sum_{1 \leq j \leq n} \deg(\mathcal{H}'_j). \quad (2.1.24)$$

et l'image de  $\varphi_{\mathbf{s}}$  est constituée de l'ensemble des multiples de  $\text{Inf}(\text{div}(s_i))$ .

*Démonstration.* — Commençons la remarque élémentaire suivante : pour toute partie  $K$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on a

$$\Delta_{\mathbf{s}} \leq \Delta_{(s_j)_{j \in K}} + \sum_{j \notin K} \ell(\mathcal{H}'_j) \leq \Delta_{(s_j)_{j \in K}} + n - |K| + \sum_{j \notin K} \deg(\mathcal{H}'_j) \quad (2.1.25)$$

Ceci entraîne déjà pour tout  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  la majoration

$$\Delta_{\mathbf{s}} \leq n - 1 + \sum_{j \neq j_0} \deg(\mathcal{H}'_j). \quad (2.1.26)$$

En moyennant sur tous les  $j_0$ , on obtient le premier point.

Montrons le deuxième point. Supposons que pour une certaine permutation des indices on ait

$$\deg(\mathcal{H}'_1 + \mathcal{H}'_2 - \mathcal{H} + \text{Inf}[\text{div}(s_1), \text{div}(s_2)]) < 0 \quad (2.1.27)$$

et

$$\forall k \geq 3, \quad \deg(\mathcal{H}'_k - \text{Inf}[\text{div}(s_j)_{1 \leq j \leq k-1} + \text{Inf}[\text{div}(s_j)_{1 \leq j \leq k}]) \geq 0. \quad (2.1.28)$$

D'après le point 2. du lemme 3.5 de [Bou09], on a la majoration

$$\Delta_{(s_1, s_2)} \leq 1 + \deg(\mathcal{H}'_1) + \deg(\mathcal{H}'_2) - \deg(\mathcal{H}) + \deg(\text{Inf}[\text{div}(s_1), \text{div}(s_2)]) \quad (2.1.29)$$

Par ailleurs pour tout  $k \geq 3$ , on a

$$\Delta_{(s_1, s_2, \dots, s_k)} \quad (2.1.30)$$

$$\leq \Delta_{(s_1, \dots, s_{k-1})} + \ell(\mathcal{H}'_k - \text{Inf}[\text{div}(s_j)_{1 \leq j \leq k-1} + \text{Inf}[\text{div}(s_j)_{1 \leq j \leq k}]) \quad (2.1.31)$$

$$\leq \Delta_{(s_1, \dots, s_{k-1})} + 1 + \deg(\mathcal{H}'_k) - \deg(\text{Inf}[\text{div}(s_j)_{1 \leq j \leq k-1}]) + \deg(\text{Inf}[\text{div}(s_j)_{1 \leq j \leq k}]) \quad (2.1.32)$$

De proche en proche, on obtient la majoration (2.1.21).

Supposons à présent que tous les couples  $(j_1, j_2) \in \{1, \dots, n\}^2$  vérifient

$$\deg(\mathcal{H}'_{j_1} + \mathcal{H}'_{j_2} - \mathcal{H} + \text{Inf}[\text{div}(s_{j_1}), \text{div}(s_{j_2})]) < 0 \quad (2.1.33)$$

D'après le point 1. du lemme 3.5 de [Bou09],  $\varphi_{s_{j_1}, s_{j_2}}$  est injective. On a donc

$$\Delta_{\mathbf{s}} \leq n - 2 + \sum_{j \notin \{j_1, j_2\}} \deg(\mathcal{H}'_j). \quad (2.1.34)$$

En moyennant sur tous les couples  $(j_1, j_2)$ , on obtient la majoration

$$\Delta_{\mathbf{s}} \leq n - 2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) \sum_{1 \leq j \leq n} \deg(\mathcal{H}'_j). \quad (2.1.35)$$

Supposons enfin qu'il existe  $n - 1 \geq k \geq 2$  et une permutation des indices telle qu'on ait

$$\deg(\mathcal{H}'_1 + \mathcal{H}'_2 - \mathcal{H} + \text{Inf}[\text{div}(s_1), \text{div}(s_2)]) \geq 0 \quad (2.1.36)$$

$$\forall 3 \leq j \leq k, \quad \deg(\mathcal{H}'_k - \text{Inf}[\text{div}(s_j)_{1 \leq j \leq k-1} + \text{Inf}[\text{div}(s_j)_{1 \leq j \leq k}]) \geq 0 \quad (2.1.37)$$

$$\forall j_0 \geq k + 1, \quad \deg(\mathcal{H}'_{j_0} - \text{Inf}[\text{div}(s_1, \dots, s_k)] + \text{Inf}[\text{div}(s_1, \dots, s_k, s_{j_0})]) < 0 \quad (2.1.38)$$

Alors, pour tout  $j_0 \geq k+1$ , on a  $\Delta_{(s_1, s_2, \dots, s_k, s_{j_0})} = \Delta_{(s_1, \dots, s_k)}$  et  $\Delta_{\mathbf{s}}$  est majoré par

$$\Delta_{(s_1, \dots, s_k)} + (n - k - 1) + \sum_{j \geq k+1, j \neq j_0} \deg(\mathcal{H}'_j) \quad (2.1.39)$$

soit d'après ce qui précède par

$$k-1 + \sum_{1 \leq j \leq k} \deg(\mathcal{H}'_j) - \deg(\mathcal{H}) + \deg(\text{Inf}[\text{div}(s_j)]_{1 \leq j \leq k}) + (n - k - 1) + \sum_{j \geq k+1, j \neq j_0} \deg(\mathcal{H}'_j). \quad (2.1.40)$$

En utilisant la majoration

$$\deg(\text{Inf}[\text{div}(s_1), \text{div}(s_2), \dots, \text{div}(s_k)]) \leq \frac{1}{k} \sum_{1 \leq j \leq k} \deg(\mathcal{H}_j) \quad (2.1.41)$$

on aboutit finalement à la majoration

$$\Delta_{\mathbf{s}} \leq n - 2 + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{1 \leq j \leq k} \deg(\mathcal{H}'_j) + \sum_{j \geq k+1, j \neq j_0} \deg(\mathcal{H}'_j) \quad (2.1.42)$$

En moyennant sur tous les  $j_0 \geq k+1$ , on obtient la majoration

$$\Delta_{\mathbf{s}} \leq n - 2 + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{1 \leq j \leq k} \deg(\mathcal{H}'_j) + \left(1 - \frac{1}{n-k}\right) \sum_{k+1 \leq j \leq n} \deg(\mathcal{H}'_j) \quad (2.1.43)$$

Ainsi (2.1.35) est encore vérifiée dans ce cas. Ceci achève la démonstration du troisième point.

Le dernier point est une généralisation immédiate (par récurrence) du point 3 de [Bou09, corollaire 3.6].  $\square$

**2.2. Décomposition de la fonction zêta des hauteurs.** — Pour  $K \subset J$ ,  $\mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I$  et  $\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}$ , on désigne par  $\mathcal{N}_K(\mathcal{D}, \mathcal{E})$  le cardinal de l'ensemble

$$\{(t_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-\mathcal{G}_j + \sum_i a_{i,j} (\mathcal{D}_i + \mathcal{F}_i)))\} \quad (2.2.1)$$

vérifiant

$$\forall j \notin K, t_j = 0 \quad (2.2.2)$$

et

$$\sum_{j \in J} t_j s_{\mathcal{G}_j} \prod_i (s_{\mathcal{D}_i} s_{\mathcal{F}_i})^{b_{i,j}} = 0, \quad (2.2.3)$$

et on pose

$$Z_K(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} \mu_X(\mathcal{E}) \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i) = \langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} \mathcal{N}_K(\mathcal{D}, \mathcal{E}) t^{\langle y, -\mathcal{H}_X \rangle}. \quad (2.2.4)$$

On a donc d'après (1.2.9) la relation

$$Z_{X, -\mathcal{X}_X, X_0}(t) = \sum_{K \subset J} (-1)^{|J|-|K|} Z_K(t). \quad (2.2.5)$$

**Proposition 2.7.** — Soit  $\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}$ ,  $\mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I$  et  $y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee$  tels que pour  $i \in I$  on ait  $\deg(\mathcal{D}_i) = \langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i)$ .

1. Pour tout  $j_0 \in J$ , on a

$$\log_q \mathcal{N}_{J \setminus \{j_0\}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{|J| - 1}\right) \sum_{j \neq j_0} (\langle y, \mathcal{G}_j \rangle - \deg(\mathcal{G}_j)) \quad (2.2.6)$$

2. La quantité  $\log_q \mathcal{N}_J(\mathcal{D}, \mathcal{E})$  est majorée soit par

$$|J| - 1 + \left\langle y, -\mathcal{D}_{\text{tot}} + \sum_{j \in J} \mathcal{G}_j \right\rangle - \sum_{j \in J} \deg(\mathcal{G}_j) + \deg(\text{Inf}_{j \in J} (\sum_{i \in I} b_{i,j} (\mathcal{F}_i + \mathcal{D}_i) + \mathcal{G}_j)) \quad (2.2.7)$$

soit par

$$1 + \left(1 - \frac{1}{|J| - 1}\right) \sum_{j \neq J} (\langle y, \mathcal{G}_j \rangle - \deg(\mathcal{G}_j)). \quad (2.2.8)$$

3. On suppose que pour une certaine numérotation de  $J$ , on a

$$\forall 1 \leq j \leq |J| - 1, \quad \langle y, \mathcal{G}_j + \mathcal{G}_{j+1} - \mathcal{D}_{\text{tot}} \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j) + \deg(\mathcal{G}_{j+1}) + 2g_\varphi - 1 \quad (2.2.9)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \log_q \mathcal{N}_J(\mathcal{D}, \mathcal{E}) = \\ (|J| - 1)(1 - g_\varphi) + \left\langle y, -\mathcal{D}_{\text{tot}} + \sum_{j \in J} \mathcal{G}_j \right\rangle + \sum_{j \in J} \deg(\mathcal{G}_j) + \deg(\text{Inf}_{j \in J} (\sum_{i \in I} b_{i,j} (\mathcal{F}_i + \mathcal{D}_i) + \mathcal{G}_j)). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

*Démonstration.* — On applique la proposition 2.6 avec

$$\mathcal{H}'_j = -\mathcal{G}_j + \sum_{i \in I} a_{i,j} (\mathcal{D}_i + \mathcal{F}_i), \quad \mathcal{H}_j = \mathcal{G}_j + \sum_{i \in I} b_{i,j} (\mathcal{D}_i + \mathcal{F}_i) \quad (2.2.11)$$

$$\text{et} \quad s_j = s_{\mathcal{G}_j} \prod_{i \in I} (s_{\mathcal{D}_i} s_{\mathcal{F}_i})^{b_{i,j}}, \quad (2.2.12)$$

en notant qu'on a  $\deg(\mathcal{H}) = \langle y, \mathcal{D}_{\text{tot}} \rangle$  et, pour  $j \in J$ ,  $\deg(\mathcal{H}'_j) = \langle y, \mathcal{G}_j \rangle - \deg(\mathcal{G}_j)$   $\square$

**Définition 2.8.** — Un élément  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in (\mathbf{R}_{\geq 0})^{I \cup J}$  est dit  $\mu_X$ -convergent si la série

$$\sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathcal{E})| q^{-\sum f_i \deg(\mathcal{F}_i) - \sum g_j \deg(\mathcal{G}_j)} \quad (2.2.13)$$

est convergente.

**Remarque 2.9.** — D'après le dernier point de la proposition 1.5, pour tout  $\varepsilon > 0$  l'élément  $(\frac{1}{2} + \varepsilon, \dots, \frac{1}{2} + \varepsilon)$  est  $\mu_X$ -convergent, et c'est également le cas de l'élément  $((1)_{i \in I}, (\varepsilon)_{j \in J})$  si l'intersection des diviseurs  $\{\mathcal{G}_j\}_{j \in J}$  est non vide.

**Lemme 2.10.** — Soit  $x \in \text{Pic}(X)$  et  $\gamma \in \mathbf{R}^J$ . On suppose qu'il existe  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in (\mathbf{R}_{\geq 0})^{I \cup J}$  vérifiant

1.  $((1 + f_i), (g_j + \gamma_j))$  est  $\mu_X$ -convergent ;
2.  $-\mathcal{K}_X - x - \sum_{i \in I} (1 + f_i) \mathcal{F}_i - \sum_{j \in J} g_j \mathcal{G}_j \in C_{\text{eff}}(X) \setminus \{0\}$ .

Alors la série

$$\sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathcal{E})| \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i) = \langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} q^{\langle y, x \rangle - \sum_{j \in J} \gamma_j \deg(\mathcal{G}_j)} t^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.2.14)$$

est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$ .

*Démonstration.* — D'après (1.1.1), elle est en effet majorée à une constante multiplicative près par la série

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathcal{E})| \\ & \times \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J}} q^{\langle y, x \rangle \sum_{j \in J} g_j (\langle y, \mathcal{G}_j \rangle - \deg(\mathcal{G}_j)) - \gamma_j \deg(\mathcal{G}_j) + \sum_{i \in I} (1 + f_i) (\langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i))} t^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

elle-même majorée par

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathcal{E})| q^{-\sum_{i \in I} (1 + f_i) \deg(\mathcal{F}_i) - \sum_{j \in J} (g_j + \gamma_j) \deg(\mathcal{G}_j)} \\ & \times \sum_{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee} q^{\left\langle y, x + \sum_{i \in I} (1 + f_i) \mathcal{F}_i + \sum_{j \in J} g_j \mathcal{G}_j \right\rangle} t^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle}. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

D'après les hypothèses et le lemme 2.5 cette dernière série est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$ .  $\square$

**2.3. Le terme  $Z_J$ .** — Pour  $\mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I$ ,  $\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}$  et  $y \in \text{Pic}(X)^\vee$  on définit  $\tilde{\mathcal{N}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}, y)$  par

$$\begin{aligned} & \log_q(\tilde{\mathcal{N}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}, y)) \\ & = \sum_j \langle y, \mathcal{G}_j \rangle - \langle y, \mathcal{D}_{\text{tot}} \rangle - \sum_j \deg(\mathcal{G}_j) + \deg \left[ \text{Inf}_j \left( \sum_i b_{i,j} (\mathcal{D}_i + \mathcal{F}_i) + \mathcal{G}_j \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Posons

$$Z_{\text{pr}}(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} \mu_X(\mathcal{E}) \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i) = \langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} q^{(|J|-1)(1-g_{\mathcal{C}})} \tilde{\mathcal{N}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}, y) t^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.3.2)$$

et, pour  $j_0, j_1 \in J$ ,

$$Z_{\text{err},1,j_0,j_1}(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathcal{E})| \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \langle y, \mathcal{G}_{j_0} + \mathcal{G}_{j_1} - \mathcal{D}_{\text{tot}} \rangle \leq \deg(\mathcal{G}_{j_0}) + \deg(\mathcal{G}_{j_1}) + 2g - 2 \\ \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i) = \langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} q^{(|J|-1)(1-g_{\mathcal{C}})} \tilde{\mathcal{N}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}, y) t^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.3.3)$$

$$\text{et } Z_{\text{err},2,j_0,j_1}(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathcal{E})| \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \langle y, \mathcal{G}_{j_0} + \mathcal{G}_{j_1} - \mathcal{D}_{\text{tot}} \rangle \leq \deg(\mathcal{G}_{j_0}) + \deg(\mathcal{G}_{j_1}) + 2g_{\mathcal{C}} - 2 \\ \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i) = \langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} \mathcal{N}_J(\mathcal{D}, \mathcal{E}) t^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.3.4)$$

Appliquant la proposition 2.7, on obtient le lemme suivant.

**Lemme 2.11.** — *Pour toute num\u00e9rotation de  $J$ , la s\u00e9rie  $Z_J(t) - Z_{\text{pr}}(t)$  est major\u00e9e par*

$$\sum_{1 \leq j \leq |J|-1} Z_{\text{err},1,j,j+1}(t) + Z_{\text{err},2,j,j+1}(t) \quad (2.3.5)$$

**2.4. Le terme  $Z_{\text{pr}}$ .** — Pour  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^I$  et  $\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}$ , posons

$$\mathcal{N}(\mathbf{d}, \mathcal{E}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{\substack{\mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}) = \mathbf{d}}} q^{\deg(\text{Inf}_j(\mathcal{G}_j + \sum_i b_{i,j}(\mathcal{D}_i + \mathcal{F}_i)))}. \quad (2.4.1)$$

Compte tenu de la relation (2.0.12) et de l'\u00e9galit\u00e9  $\dim(X) = |J| - 1$ , on a donc

$$q^{(g_{\mathcal{C}}-1)\dim(X)} Z_{\text{pr}}(t) = \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} \mu_X(\mathcal{E}) \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} q^{-\sum_j \deg(\mathcal{G}_j) - \sum_i \langle y, \mathcal{F}_i \rangle} \mathcal{N}(\langle y_i, \mathcal{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i), \mathcal{E}) (qt)^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.4.2)$$

2.4.1. *Estimation de  $\mathcal{N}(\mathbf{d}, \mathcal{E})$ .* — Pour  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbf{N}^{I \cup J}$ , on pose

$$F_{\rho, \mathbf{f}, \mathbf{g}}(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^I} \rho^{\text{Inf}_j(g_j + \sum_i b_{i,j}(d_i + f_i))} \mathbf{t}^{\mathbf{d}} \in k[[\rho, (t_i)_{i \in I}]] \quad (2.4.3)$$

et

$$\tilde{F}_{\rho, \mathbf{f}, \mathbf{g}} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left( \prod_{i \in I} 1 - t_i \right) F_{\rho, \mathbf{f}, \mathbf{g}}. \quad (2.4.4)$$

Pour tout  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbf{N}^{I \cup J}$ , \u00e9crivons

$$\tilde{F}_{\rho, \mathbf{f}, \mathbf{g}} = \sum_{\mathbf{d}} P_{\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{d}}(\rho) \mathbf{t}^{\mathbf{d}} \quad (2.4.5)$$

o\u00f9  $P_{\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{d}}$  est un polyn\u00f4me \u00e0 coefficients entiers. Il d\u00e9coule aussit\u00f4t de (2.4.3) et (2.4.4) qu'on a  $P_{\mathbf{f}, \mathbf{g}, 0} = \rho^{\text{Inf}_j(\sum_i b_{i,j} f_i + g_j)}$  et que pour tout  $\mathbf{d}$ , le polyn\u00f4me  $P_{\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{d}}$  a au plus  $|I|$  coefficients non nuls, qui sont tous major\u00e9s en valeur absolue par  $|I|$ .

**Hypoth\u00e8se 2.12.** — *Pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, les propri\u00e9t\u00e9s suivantes sont v\u00e9rifi\u00e9es :*

1. *pour tout  $\mathbf{d} \neq 0$ , on a*

$$(1 - \varepsilon) |\mathbf{d}| \geq 1 + \varepsilon + \deg(P_{0,0,\mathbf{d}}) \quad (2.4.6)$$

2. *il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \{0, 1\}^{I \cup J}$  et pour tout  $\mathbf{d}$  on a*

$$C + (1 - \varepsilon) |\mathbf{d}| \geq \deg(P_{\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{d}}) \quad (2.4.7)$$

Pour  $\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}$ , on consid\u00e8re \u00e0 pr\u00e9sent la s\u00e9rie g\u00e9n\u00e9ratrice

$$Z_{\mathcal{E}}(\mathbf{t}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^I} \mathcal{N}(\mathbf{d}, \mathcal{E}) \mathbf{t}^{\mathbf{d}} = \sum_{\mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I} q^{\deg(\text{Inf}_j(\mathcal{G}_j + \sum_i b_{i,j}(\mathcal{D}_i + \mathcal{F}_i)))} \mathbf{t}^{\deg(\mathcal{D})} \quad (2.4.8)$$

qui s'exprime donc comme le produit eul\u00e9rien  $\prod_{v \in \mathcal{C}^{(0)}} \frac{\tilde{F}_{q_v, v(\mathcal{E})}(\mathbf{t}^{f_v})}{\prod_{i \in I} (1 - t_i^{f_v})}$ . On a donc la relation

$$\left( \prod_{i \in I} 1 - q t_i \right) Z_{\mathcal{E}}(\mathbf{t}) = \left( \prod_{i \in I} (1 - q t_i) Z_{\mathcal{C}}(t_i) \right) \prod_{v \in \mathcal{C}^{(0)}} \tilde{F}_{q_v, v(\mathcal{E})}(\mathbf{t}^{f_v}), \quad (2.4.9)$$

o\u00f9  $Z_{\mathcal{C}}(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{D \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})} t^{\deg(D)}$  est la fonction z\u00eata de Hasse-Weil de  $\mathcal{C}$ . Si on a  $v(\mathcal{E}) \in \{0, 1\}^{I \cup J}$  et si l'hypoth\u00e8se 2.12 est v\u00e9rifi\u00e9e, la s\u00e9rie  $(\prod_{i \in I} 1 - q t_i) Z_{\mathcal{E}}(\mathbf{t})$  converge donc absolument sur un polydisque de rayon  $(q^{-1+\varepsilon}, \dots, q^{-1+\varepsilon})$  pour  $\varepsilon > 0$  assez petit. Notons  $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{(0)}$  l'ensemble (fini) des  $v \in \mathcal{C}^{(0)}$  tels que  $v(\mathcal{E}) \neq 0$  et  $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{(0)}$  le compl\u00e9mentaire dans  $\mathcal{C}^{(0)}$  de l'ensemble

$$\{v \in \mathcal{C}^{(0)}, \forall \mathbf{t} \in \mathbf{C}^I, \text{Max}(|t_i|) \leq q^{-1+\varepsilon} \Rightarrow \tilde{F}_{q_v, 0, 0}(\mathbf{t}) \neq 0\} \quad (2.4.10)$$

Si l'hypothèse 2.12 est vérifiée,  $\mathcal{C}_\varepsilon^{(0)}$  est un ensemble fini. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{i \in I} 1 - q t_i \right) Z_{\mathbf{E}}(\mathbf{t}) \\ &= \left( \prod_i (1 - q t_i) Z_{\mathcal{C}}(t_i) \right) \prod_{v \in \mathcal{C}^{(0)} \setminus \mathcal{C}_\varepsilon^{(0)}} \tilde{F}_{q_v, 0, 0}(\mathbf{t}) \prod_{v \in \mathcal{C}_\varepsilon^{(0)}} \tilde{F}_{q_v, v(\mathbf{E})}(\mathbf{t}) \prod_{v \in \mathcal{C}_\varepsilon^{(0)} \setminus \mathcal{C}_\varepsilon^{(0)}} \frac{\tilde{F}_{q_v, v(\mathbf{E})}(\mathbf{t})}{\tilde{F}_{q_v, 0, 0}(\mathbf{t})}. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

**Notation 2.13.** — Si l'hypothèse 2.12 est vérifiée, pour tout  $\mathbf{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}$  tel que  $v(\mathbf{E}) \in \{0, 1\}^{I \cup J}$ , on note

$$c_{\text{pr}}(\mathbf{E}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left( \frac{h_{\mathcal{C}} q^{1-g_{\mathcal{C}}}}{q-1} \right)^{|\mathbf{I}|} \prod_{v \in \mathcal{C}^{(0)}} \tilde{F}_{q_v, v(\mathbf{E})}(q_v^{-1}) \quad (2.4.12)$$

et pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit

$$c_{\mathbf{E}, \varepsilon} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\| \prod_{v \in \mathcal{C}_\varepsilon^{(0)} \setminus \mathcal{C}_\varepsilon^{(0)}} \frac{\tilde{F}_{q_v, v(\mathbf{E})}(\mathbf{t})}{\tilde{F}_{q_v, 0}(\mathbf{t})} \right\|_{q^{-1+\varepsilon}} \quad (2.4.13)$$

De ce qui précède et du lemme 2.4 découle alors aussit\u00f4t la proposition suivante.

**Proposition 2.14.** — *On suppose l'hypoth\u00e8se 2.12 v\u00e9rifi\u00e9e. Pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, il existe une constante  $C_\varepsilon$  telle qu'on ait pour tout  $\mathbf{d}$  et tout  $\mathbf{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}$  tel que  $v(\mathbf{E}) \in \{0, 1\}^{I \cup J}$  la majoration*

$$\left| N(\mathbf{d}, \mathbf{E}) - c_{\text{pr}}(\mathbf{E}) q^{\sum d_j} \right| \leq C_\varepsilon \cdot c_{\varepsilon, \mathbf{E}} \sum_{i \in I} q^{(1-\varepsilon)d_i + \sum_{i' \neq i} d_{i'}}. \quad (2.4.14)$$

**Hypoth\u00e8se 2.15.** — *L'hypoth\u00e8se 2.12 est v\u00e9rifi\u00e9e et pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit la s\u00e9rie*

$$\sum_{\mathbf{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathbf{E})| c_{\varepsilon, \mathbf{E}} q^{-\sum_{i \in I} (1-\varepsilon) \deg(\mathcal{F}_i) - \sum_{j \in J} \deg(\mathcal{G}_j)} \quad (2.4.15)$$

converge.

**2.4.2. Le terme  $Z_{\text{pr}}$ .** — Si l'hypoth\u00e8se 2.12 est v\u00e9rifi\u00e9e, posons

$$\begin{aligned} Z_{\text{pr}}^0(t) &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} q^{\dim(X)(1-g_{\mathcal{C}})} \sum_{\mathbf{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} \mu_X(\mathbf{E}) c_{\text{pr}}(\mathbf{E}) q^{-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i) - \sum_j \deg(\mathcal{G}_j)} \\ &\quad \times \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} (qt)^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

**Lemme 2.16.** — *On suppose l'hypoth\u00e8se 2.15 v\u00e9rifi\u00e9e. La s\u00e9rie  $Z_{\text{pr}} - Z_{\text{pr}}^0$  est alors  $q^{-1}$ -contr\u00f4l\u00e9e \u00e0 l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$ .*

*Démonstration.* — Posons pour  $i_0 \in I$  et  $\varepsilon > 0$  assez petit

$$Z_{\text{pr}, \varepsilon, i_0}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} C_\varepsilon \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathcal{E})| c_{\varepsilon, \mathcal{E}} q^{\varepsilon \deg(\mathcal{F}_{i_0}) - \sum_i \deg(\mathcal{F}_i) - \sum_j \deg(\mathcal{G}_j)} \\ \times \sum_{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee} q^{-\varepsilon \langle y, \mathcal{F}_{i_0} \rangle} (qt)^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.4.17)$$

D'après le lemme 2.5 et l'hypothèse 2.15, pour  $\varepsilon$  assez petit, la série  $Z_{\text{pr}, \varepsilon, i}$  est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$  pour tout  $i \in I$ . Or d'après la proposition 2.14, la série  $Z_{\text{pr}} - Z_{\text{pr}}^0$  est majorée par  $\sum_{i \in I} Z_{\text{pr}, \varepsilon, i}$ .  $\square$

2.4.3. *Le terme  $Z_{\text{pr}}^0$ .* —

**Hypothèse 2.17.** — On a la relation

$$\sum_{(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \{0, 1\}^{I \cup J}} \mu_X^0(\mathbf{f}, \mathbf{g}) q_v^{-\sum f_i - \sum g_j} \tilde{F}_{q_v, \mathbf{f}, \mathbf{g}}(q_v^{-1}) = (1 - q_v^{-1})^{\text{rg}(T_{\text{NS}})} \frac{|X(\kappa_v)|}{q_v^{\dim(X)}}. \quad (2.4.18)$$

**Remarque 2.18.** — On notera l'analogie avec la formule de [Bou09, Lemme 1.25].

**Proposition 2.19.** — On suppose les hypothèses 2.12 et 2.17 satisfaites. Alors la série

$$Z_{\text{pr}}^0(t) - \gamma(X) \sum_{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee} (qt)^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.4.19)$$

est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$ .

*Démonstration.* — Rappelons qu'on a

$$\gamma(X) = \left( \frac{h_{\mathcal{C}} q^{(1-g_{\mathcal{C}})}}{q-1} \right)^{\text{rg}(\text{Pic}(X))} q^{(1-g_{\mathcal{C}}) \dim(X)} \prod_{v \in \mathcal{C}^{(0)}} (1 - q_v^{-1})^{\text{rg}(\text{Pic}(X))} \frac{|X(\kappa_v)|}{q_v^{\dim(X)}}. \quad (2.4.20)$$

D'après le lemme 2.5 et la définition de  $Z_{\text{pr}}^0$ , la série

$$Z_{\text{pr}}^0(t) - q^{\dim(X)(1-g_{\mathcal{C}})} \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} \mu_X(\mathcal{E}) c_{\text{pr}}(\mathcal{E}) q^{-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i) - \sum_j \deg(\mathcal{G}_j)} \\ \times \sum_{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee} (qt)^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.4.21)$$

est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$ . Or on a

$$\begin{aligned} & q^{\dim(X)(1-g_\emptyset)} \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} \mu_X(\mathcal{E}) c_{\text{pr}}(\mathcal{E}) q^{-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i) - \sum_j \deg(\mathcal{G}_j)} \\ &= \left( \frac{h_\emptyset q^{1-g_\emptyset}}{q-1} \right)^{\text{rg}(\text{Pic}(X))} q^{\dim(X)(1-g_\emptyset)} \\ & \quad \times \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} \mu_X(\mathcal{E}) \left[ \prod_v \tilde{F}_{q_v, v(\mathcal{F}), v(\mathcal{G})}(q_v^{-1}) \right] q^{-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i) - \sum_j \deg(\mathcal{G}_j)} \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} \mu_X(\mathcal{E}) \left[ \prod_v \tilde{F}_{q_v, v(\mathcal{F}), v(\mathcal{G})}(q_v^{-1}) \right] q^{-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i) - \sum_j \deg(\mathcal{G}_j)} \\ &= \prod_v \sum_{(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \{0,1\}^{I \cup J}} \mu_X^0(\mathbf{f}, \mathbf{g}) q_v^{-\sum_i f_i - \sum_j g_j} \tilde{F}_{q_v, \mathbf{f}, \mathbf{g}}(q_v^{-1}) \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

L'hypothèse 2.17 donne alors le résultat.  $\square$

## 2.5. Les termes $Z_{\text{err},1,j_0,j_1}$ et $Z_{\text{err},2,j_0,j_1}$ . —

2.5.1. *Les termes  $Z_{\text{err},1,j_0,j_1}$ .* — Soit  $j_0, j_1 \in J$ . On a pour  $Z_{\text{err},1,j_0,j_1}$  une expression semblable à (2.4.2), avec  $|\mu_X(\mathcal{E})|$  en lieu et place de  $\mu_X(\mathcal{E})$  et le deuxième domaine de sommation restreint aux  $y$  vérifiant

$$\langle y, \mathcal{G}_{j_0} + \mathcal{G}_{j_1} - \mathcal{D}_{\text{tot}} \rangle \leq \deg(\mathcal{G}_{j_0}) + \deg(\mathcal{G}_{j_1}) + 2g_\emptyset - 2. \quad (2.5.1)$$

Par un raisonnement analogue à celui effectué pour  $Z_{\text{pr}}^0$ , on montre que si l'hypothèse 2.15 est satisfaite la série

$$\begin{aligned} & Z_{\text{err},1,j_0,j_1}(t) \\ & - q^{\dim(X)(1-g)} \sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathcal{E})| c_{\text{pr}}(\mathcal{E}) q^{-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i) - \sum_j \deg(\mathcal{G}_j)} \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_{j_0} + \mathcal{G}_{j_1} - \mathcal{D}_{\text{tot}} \rangle \leq \deg(\mathcal{G}_{j_0}) + \deg(\mathcal{G}_{j_1}) + 2g_\emptyset - 2}} (qt)^{\langle y, -\mathcal{X} \rangle} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$ . En utilisant le lemme 2.5, on obtient aussitôt ce qui suit.

**Proposition 2.20.** — *Soit  $j_0, j_1 \in J$  tels qu'on ait*

$$\mathcal{G}_{j_0} + \mathcal{G}_{j_1} - \mathcal{D}_{\text{tot}} \in C_{\text{eff}}(X) \setminus \{0\}. \quad (2.5.3)$$

*On suppose que l'hypothèse 2.15 est satisfaite. Alors  $Z_{\text{err},1,j_0,j_1}$  est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$*

2.5.2. *Les termes  $Z_{\text{err},2,j_0,j_1}$ .* — Soit  $j_0, j_1 \in J$ . En appliquant la proposition 2.7, on voit que  $Z_{\text{err},2,j_0,j_1}$  est majorée par la somme des deux séries

$$\sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathcal{E})| \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i) = \langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} q^{|J|-2+(1-\frac{1}{|J|-1})} (\langle y, \sum_j \mathcal{G}_j \rangle - \sum_j \deg(\mathcal{G}_j)) T^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.5.4)$$

et

$$\sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\mathcal{E})| \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \langle y, \mathcal{G}_{j_0} + \mathcal{G}_{j_1} - \mathcal{D}_{\text{tot}} \rangle \leq \deg(\mathcal{G}_{j_0}) + \deg(\mathcal{G}_{j_1}) + 2g_\varphi - 2 \\ \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i) = \langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} q^{|J|-2} \tilde{\mathcal{N}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}, y) T^{\langle y, -\mathcal{K}_X \rangle} \quad (2.5.5)$$

**Hypothèses 2.21.** — Il existe  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in (\mathbf{R}_{\geq 0})^{I \cup J}$  tel que

$$\left( (1 + f_i)_{i \in I}, \left( g_j + 1 - \frac{1}{|J|-1} \right)_{j \in J} \right) \quad (2.5.6)$$

est  $\mu_X$ -convergent et

$$-\mathcal{K}_X - \sum_{j \in J} \left( 1 - \frac{1}{|J|-1} + g_j \right) \mathcal{G}_j - \sum_{i \in I} (1 + f_i) \mathcal{F}_i \in C_{\text{eff}}(X) \setminus \{0\}. \quad (2.5.7)$$

**Remarque 2.22.** — D'après la formule d'adjonction (2.0.12), (2.5.7) peut se réécrire

$$\sum_j \left( \frac{1}{|J|-1} - g_j \right) \mathcal{G}_j - \mathcal{D}_{\text{tot}} - \sum_i f_i \mathcal{F}_i \in C_{\text{eff}}(X) \setminus \{0\} \quad (2.5.8)$$

**Remarque 2.23.** — Supposons que l'intersection des  $\{\mathcal{G}_j\}_{j \in J}$  est non vide. Compte tenu de la remarque 2.9, l'hypothèse 2.21 est alors satisfaite dès qu'on a

$$\frac{1}{|J|-1} \sum_j \mathcal{G}_j - \mathcal{D}_{\text{tot}} \in C_{\text{eff}}(X) \setminus \{0\} \quad (2.5.9)$$

**Proposition 2.24.** — Soit  $j_0, j_1 \in J$  tel qu'on ait

$$\mathcal{G}_{j_0} + \mathcal{G}_{j_1} - \mathcal{D}_{\text{tot}} \in C_{\text{eff}}(X) \setminus \{0\}. \quad (2.5.10)$$

On suppose que les hypothèses 2.15 et 2.21 sont satisfaites. Alors la série  $Z_{\text{err},2,j_0,j_1}$  est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$

*Démonstration.* — En effet sous l'hypothèse 2.15, le résultat est vérifiée pour la série (2.5.5) (qui coïncide à une constante près avec  $Z_{\text{err},1,j_0,j_1}$ ) et sous l'hypothèse 2.21, d'après le lemme 2.10, il l'est pour la série (2.5.5).  $\square$

## 2.6. Les termes $Z_K$ , avec $K \neq J$ . —

**Proposition 2.25.** — Soit  $K \subset J$  avec  $K \neq J$ . On suppose que l'hypothèse 2.21 est satisfaite. Alors la série  $Z_K$  est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1$

*Démonstration.* — Si  $K' \subset K$ , il est immédiat que la série  $Z_{K'}$  est majorée par  $Z_K$ . Il suffit donc de traiter le cas où  $K$  est égal à  $J \setminus \{j_0\}$ . La série considérée s'écrit pour mémoire

$$\sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu(\mathcal{E})| \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \text{deg}(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \text{deg}(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \text{deg}(\mathcal{D}) = (\langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \text{deg}(\mathcal{F}_i))} \mathcal{N}_{J \setminus \{j_0\}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) t^{\langle y, -\mathcal{X} \rangle} \quad (2.6.1)$$

D'après la proposition 2.7, cette série est majorée à une constante près par

$$\sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{I \cup J}} |\mu(\mathcal{E})| \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y, \mathcal{G}_j \rangle \geq \text{deg}(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y, \mathcal{F}_i \rangle \geq \text{deg}(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \mathcal{D} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^I \\ \text{deg}(\mathcal{D}) = (\langle y, \mathcal{F}_i \rangle - \text{deg}(\mathcal{F}_i))} q^{\left(1 - \frac{1}{|J| - 1}\right) \left(\sum_{j \neq j_0} \langle y, \mathcal{G}_j \rangle - \text{deg}(\mathcal{G}_j)\right)} t^{\langle y, -\mathcal{X} \rangle} \quad (2.6.2)$$

et donc par la série (2.5.5), pour laquelle on a déjà vu que le résultat était vérifié sous l'hypothèse 2.21.  $\square$

## 3. Construction d'une famille de quadrique intrinsèques et démonstration du résultat principal

Le but de cette section est de construire une famille de variétés justiciables de l'application de la méthode décrite dans la section précédente.

**3.1. Une famille d'éventails projectifs et lisses.** — Soit  $\mathcal{I}$  un ensemble fini de cardinal supérieur à 3 et  $K$  un  $\mathbf{Z}$ -module libre de base  $(\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \mathcal{F}_0)$ . Pour  $i \in \mathcal{I}$ , on pose  $\mathcal{G}_i \stackrel{\text{déf}}{=} -\mathcal{F}_i + \mathcal{F}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_j$ . Soit  $\pi : \mathbf{Z}^{(\mathcal{I} \times \{1,2\}) \cup \{0\}} \rightarrow M$  le morphisme qui envoie  $e_{i,1}$  sur  $\mathcal{F}_i$ ,  $e_{i,2}$  sur  $\mathcal{G}_i$  et  $e_0$  sur  $\mathcal{F}_0$ . On considère la suite exacte de  $\mathbf{Z}$ -modules libres de rang fini

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z}^{(\mathcal{I} \times \{1,2\}) \cup \{0\}} \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 0 \quad (3.1.1)$$

et la suite exacte duale

$$0 \rightarrow K^\vee \rightarrow \mathbf{Z}^{(\mathcal{I} \times \{1,2\}) \cup \{0\}} \xrightarrow{\iota^\vee} M^\vee \rightarrow 0. \quad (3.1.2)$$

Pour  $i \in \mathcal{I}$  soit  $g_i \stackrel{\text{déf}}{=} \iota^\vee(e_{i,2})$ . Ainsi  $\{g_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  est une base de  $M^\vee$ . On note  $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  sa base duale. On note également  $h \stackrel{\text{déf}}{=} \iota^\vee(e_0) = -\sum_{i \in \mathcal{I}} g_i$  et, pour tout  $i \in \mathcal{I}$ ,  $f_i \stackrel{\text{déf}}{=} \iota^\vee(e_{i,1}) = h + g_i$ .

**Proposition 3.1.** — *Aux automorphismes induits par les permutations des éléments de la base  $\{g_i\}$  près, il existe un unique éventail simplicial de  $M^\vee$  dont l'ensemble des générateurs des rayons est  $\{h\} \cup \{f_i\}_{i \in \mathcal{I}} \cup \{g_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ . Cet éventail est projectif et lisse.*

Si  $n$  est le cardinal de  $\mathcal{I}$ , cet éventail sera noté  $\Sigma_n$ . On utilisera dans ce qui suit le lemme élémentaire suivant :

**Lemme 3.2.** — *Soit  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}$ . Alors le rang de la famille  $\{(g_i)_{i \in \mathcal{I}_1}, (f_i)_{i \in \mathcal{I}_2}\}$  est  $|\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2|$  si  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \emptyset$  et  $1 + |\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2|$  sinon. En particulier cette famille est libre si et seulement si on a  $|\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2| = 0$  ou 1.*

Pour toute partie  $A$ , on note  $\mathcal{C}(A)$  le cône engendré. Soit  $\mathcal{C} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}(\{g_i\}_{i \in \mathcal{I}}) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \{x_i \geq 0\}$  et, pour  $i \in \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{C}_i \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}(\{h\} \cup \{f_j\}_{j \neq i})$ . On vérifie aussitôt que ces cônes sont simpliciaux et qu'on a, pour  $i \in \mathcal{I}$ ,

$$\mathcal{C}_i = \left\{ \sum_{j \neq i} x_j \leq (n-1)x_i \right\} \cap \bigcap_{j \neq i} \{x_j \geq x_i\}. \quad (3.1.3)$$

Pour  $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$ , on pose  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}(\{g_i, f_i\}_{i \in \mathcal{J}})$ .

**Proposition 3.3.** — 1. Soit  $i \in \mathcal{I}$ . On a

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}} = \{x_i \leq 0\} \cap \left\{ \sum_{j \neq i} x_j \geq (n-2)x_i \right\} \cap \bigcap_{j \neq i} \{x_j \geq x_i\} \quad (3.1.4)$$

2. Soit  $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$ . Les faces de  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$  sont les cônes  $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ ,  $\mathcal{C}(\{g_i\}_{i \in \mathcal{K}})$  et  $\mathcal{C}(\{f_i\}_{i \in \mathcal{K}})$ , pour  $\mathcal{K}$  décrivant les parties de  $\mathcal{J}$ .
3. Soit  $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$  et  $\{1, \dots, |\mathcal{J}|\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}$  une numérotation de  $\mathcal{J}$  (en d'autres termes un ordre total  $\prec$  sur  $\mathcal{J}$ ). Alors la famille

$$\mathcal{F}_{\prec} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \mathcal{C}(\{f_{i_1}, \dots, f_{i_k}, g_{i_k}, g_{i_{k+1}}, \dots, g_{i_{|\mathcal{J}|}}\}) \right\}_{1 \leq k \leq |\mathcal{J}|} \quad (3.1.5)$$

est l'ensemble des cônes maximaux d'une subdivision simpliciale  $\mathcal{S}_{\prec}$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ . L'application  $\prec \mapsto \mathcal{S}_{\prec}$  est une bijection de l'ensemble des ordres totaux sur  $\mathcal{J}$  sur l'ensemble des subdivisions simpliciales de  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ .

4. Soit  $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ ,  $\prec$  un ordre total sur  $\mathcal{J}$  et  $\prec|_{\mathcal{K}}$  l'ordre induit sur  $\mathcal{K}$ . Alors la subdivision simpliciale induite par  $\mathcal{S}_{\prec}$  sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$  est  $\mathcal{S}_{\prec|_{\mathcal{K}}}$ .
5. La famille  $\{\mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}}, \mathcal{C}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  est l'ensemble des cônes maximaux d'un éventail  $\Sigma$  de  $M^\vee$ , qui est l'éventail complet minimal dont un ensemble de générateurs des rayons est  $\{h\} \cup \{g_i, f_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ .
6. Soit  $\prec$  un ordre total sur  $\mathcal{I}$ . La famille de cônes  $\{\mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{C}_i\}_{i \in \mathcal{I}} \cup \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_{\prec|_{\mathcal{I} \setminus \{i\}}}$  est l'ensemble des cônes maximaux d'un éventail simplicial  $\Sigma_{\prec}$  de  $M^\vee$ , qui raffine  $\Sigma$ . L'application  $\prec \mapsto \Sigma_{\prec}$  est une bijection de l'ensemble des ordres totaux sur  $\mathcal{I}$  sur l'ensemble des subdivisions simpliciales de  $\Sigma$ . Pour tout ordre total  $\prec$  sur  $\mathcal{I}$ , l'éventail  $\Sigma_{\prec}$  est projectif et lisse.

*Démonstration.* — On vérifie aussitôt l'inclusion

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}} \subset \left\{ \sum_{j \neq i} x_j \leq (n-1)x_i \right\} \cap \bigcap_{j \neq i} \{x_j \geq x_i\}. \quad (3.1.6)$$

Réciproquement, soit  $x$  un élément du cône de droite. Il existe alors un  $k \neq i$  tel qu'on ait  $x_k \geq \frac{n-2}{n-1}x_i$ , et on a

$$x = \left( x_k - \frac{n-2}{n-1}x_i \right) g_k + \sum_{j \neq k, i} (x_j - x_i) g_j - \frac{x_i}{n-1} \sum_{j \neq k, i} f_j \in \mathcal{C}(\{g_j, f_j\}_{j \neq i}). \quad (3.1.7)$$

Le point 1 est donc démontré.

On constate aussitôt les égalités

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}} \cap \{x_i = 0\} = \mathcal{C}(\{g_j\}_{j \neq i}) \quad (3.1.8)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}} \cap \left\{ \sum_{j \neq i} x_j = (n-1)x_i \right\} = \mathcal{C}(\{f_j\}_{j \neq i}) \quad (3.1.9)$$

$$\text{et } \mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}} \cap \{x_k = x_i\} = \mathcal{C}(\{g_j, f_j\}_{j \notin \{i, k\}}). \quad (3.1.10)$$

Ces cônes étant de dimension  $|\mathcal{I}| - 1$  (les deux premiers sont simpliciaux, pour le dernier cela découle du lemme 3.2), on obtient ainsi, toujours d'après le lemme 3.2, toutes les facettes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}}$ . Le point 2 en découle en utilisant une récurrence sur le cardinal de  $\mathcal{I}$ .

Soit  $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$ . Supposons d'abord que  $\mathcal{J} = \{k, \ell\}$  avec  $k \neq \ell$ . D'après le point 2 les facettes de  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$  sont alors  $\mathcal{C}(\{g_k, g_\ell\})$ ,  $\mathcal{C}(\{f_k, f_\ell\})$ ,  $\mathcal{C}(\{f_k, g_k\})$  et  $\mathcal{C}(\{g_\ell, f_\ell\})$ . Compte tenu du lemme 3.2, on en déduit aussitôt l'assertion dans ce cas-là. Passons au cas général. Soit  $\mathcal{S}$  une subdivision simpliciale de  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ . D'après le lemme 3.2, tout cône maximal de  $\mathcal{S}$  s'écrit  $\mathcal{C}(\{f_k, g_\ell\}_{k \in \mathcal{J}_1, \ell \in \mathcal{J}_2})$  avec  $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}$  et  $|\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2| = 1$ . Comme  $\mathcal{C}(\{g_i\}_{i \in \mathcal{J}})$  est une face de  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ , c'est également une face d'un cône maximal de  $\mathcal{S}$ . Un tel cône s'écrit nécessairement  $\mathcal{C}(\{g_i\}_{i \in \mathcal{J}} \cup \{f_{i_0}\})$  pour un certain  $i_0 \in \mathcal{J}$ . Supposons avoir construit  $r$  éléments  $i_0, i_1, \dots, i_r$  de  $\mathcal{J}$  tels que  $\mathcal{S}$  contienne les cônes  $\mathcal{C}(\{f_{i_0}, f_{i_1}, \dots, f_{i_k}, g_{i_k}\} \cup \{g_i\}_{i \in \mathcal{J} \setminus \{i_0, \dots, i_k\}})$  pour  $1 \leq k \leq r$ . Si on a  $r < |\mathcal{I}|$ , le cône

$$\mathcal{C}(\{f_{i_0}, f_{i_1}, \dots, f_{i_r}, g_{i_r}\} \cup \{g_i\}_{i \in \mathcal{J} \setminus \{i_0, \dots, i_r\}}) \quad (3.1.11)$$

a pour face  $\mathcal{C}(\{f_{i_0}, \dots, f_{i_r}\} \cup \{g_i\}_{i \in \mathcal{J} \setminus \{i_0, \dots, i_r\}})$ , laquelle n'est incluse dans aucune des faces de  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ . Il existe donc un autre cône maximal de  $\mathcal{S}$  ayant pour face le cône (3.1.11). Un tel cône maximal s'écrit donc soit

$$\mathcal{C}(\{f_{i_0}, \dots, f_{i_r}, f_k\} \cup \{g_i\}_{i \in \mathcal{J} \setminus \{i_0, \dots, i_r\}}) \quad (3.1.12)$$

pour un  $k \in \mathcal{J} \setminus \{i_0, \dots, i_r\}$ , soit

$$\mathcal{C}(\{f_{i_0}, \dots, f_{i_r}\} \cup \{g_i\}_{i \in \mathcal{J} \setminus \{i_0, \dots, i_r\}} \cup \{g_k\}) \quad (3.1.13)$$

pour un  $k \in \mathcal{J} \setminus \{i_0, \dots, i_r\}$ . Mais cette dernière possibilité est exclue, car elle entraînerait que les cônes  $\mathcal{C}(\{g_k, f_k, f_{i_r}\})$  et  $\mathcal{C}(\{g_{i_r}, f_k, f_{i_r}\})$  sont deux cônes d'une même subdivision simpliciale de  $\mathcal{C}(\{g_k, g_{i_r}, f_k, f_{i_r}\})$ , ce qui contredirait le résultat dans le cas  $|\mathcal{J}| = 2$ . De proche en proche, on construit donc une numérotation  $i_0, \dots, i_{|\mathcal{J}|}$  de  $\mathcal{J}$  telle que les cônes

$$\left\{ \mathcal{C}(\{f_{i_0}, f_{i_1}, \dots, f_{i_k}, g_{i_k}, g_{i_{k+1}}, \dots, g_{i_{|\mathcal{J}|}}\}) \right\}_{1 \leq k \leq |\mathcal{J}|} \quad (3.1.14)$$

sont des cônes maximaux de  $\mathcal{S}$ . Supposons que  $\mathcal{S}$  contienne un cône maximal qui n'est pas dans cette liste : il existe alors  $1 \leq \ell < k \leq n$  tel que ce cône ait pour face  $\mathcal{C}(\{f_{i_k}, g_{i_k}, g_{i_\ell}\})$ . Alors les cônes  $\mathcal{C}(\{f_{i_k}, g_{i_k}, g_{i_\ell}\})$  et  $\mathcal{C}(\{f_{i_\ell}, g_{i_\ell}, g_{i_k}\})$  sont deux cônes d'une même subdivision simpliciale de  $\mathcal{C}(\{f_{i_k}, f_{i_\ell}, g_{i_k}, g_{i_\ell}\})$  : contradiction. Compte tenu du fait qu'il existe au moins une subdivision simpliciale de  $\mathcal{C}_K$  et de la symétrie du problème, le point 3 est démontré. Le point 4 est alors immédiat.

Démontrons le point 5. Montrons d'abord que les cônes considérés recouvrent  $M^\vee \otimes \mathbf{R}$ . Soit  $x \in M \otimes \mathbf{R}$ . Soit  $i$  tel que  $x_i = \min_{j \in \mathcal{I}}(x_j)$ . Si on a  $x_i \geq 0$ ,  $x$  est dans  $\mathcal{C}$ . Sinon, d'après (3.1.3) et le point 1,  $x$  est dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}}$  ou  $\mathcal{C}_i$  selon le signe de  $\sum_{j \neq i} x_j - (n-1)x_i$ .

Par ailleurs, pour tout  $i$  dans  $\mathcal{I}$ , l'hyperplan  $\{x_i = 0\}$  sépare  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}}$  d'une part,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_i$  d'autre part. Pour  $i, k$  éléments distincts de  $\mathcal{I}$ , l'hyperplan  $\{x_i = x_k\}$  sépare respectivement  $\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}}$  et  $\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{k\}}$ ,  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_k$ ,  $\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}}$  et  $\mathcal{C}_k$ . Enfin pour  $i \in \mathcal{I}$ , l'hyperplan  $\{\sum_{j \neq i} x_j = (n-1)x_i\}$  sépare  $\mathcal{C}_{\mathcal{I} \setminus \{i\}}$  et  $\mathcal{C}_i$ . Ceci achève la démonstration du point 5. Le

point 6 découle alors des points 3 et 4, exception faite de la lissité de l'éventail  $\Sigma_{\prec}$  qui se vérifie aussitôt et de sa projectivité. Il suffit de montrer cette dernière propriété pour un ordre total  $\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ , où  $n$  est le cardinal de  $\mathcal{I}$ . On considère les cônes réguliers de  $K$  obtenus par dualité de Gale (cf. [BH04, Section 3]) à partir des cônes maximaux de  $\Sigma_{\prec}$  :

$$\tilde{\mathcal{C}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}(\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \mathcal{F}_0) \quad (3.1.15)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_i \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}(\{\mathcal{G}_j\}_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{F}_i}) \quad i \in \mathcal{I} \quad (3.1.16)$$

$$\text{et } \widetilde{\mathcal{C}}_{i,j} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}\left(\left\{\mathcal{F}_i\right\}_{\substack{1 \leq k \leq i-1 \\ k \neq j}} \cup \left\{\mathcal{G}_k\right\}_{\substack{i+1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \cup \left\{\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_j, \mathcal{F}_0\right\}\right) \quad i, j \in \mathcal{I}, i \neq j \quad (3.1.17)$$

D'après [BH04, Corollary 9.3], pour montrer que  $\Sigma_{\prec}$  est projectif, il suffit de montrer que les intérieurs relatifs de ces cônes ont une intersection non vide. On détermine facilement les équations des intérieurs relatifs de ces cônes :

$$\text{intrel}(\tilde{\mathcal{C}}) = \bigcap_{0 \leq i \leq n} \{y_i > 0\} \quad (3.1.18)$$

$$\text{intrel}(\tilde{\mathcal{C}}_i) = \left\{ \sum_{1 \leq j \leq n} y_j > (n-1)y_0 \right\} \bigcap \left\{ \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} y_j > (n-2)y_0 \right\} \bigcap \bigcap_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} \{y_j < z\} \quad (3.1.19)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \text{intrel}(\widetilde{\mathcal{C}}_{i,j}) &= \bigcap_{\substack{1 \leq k \leq i-1, \\ k \neq j}} \{y_i < y_k\} \bigcap \bigcap_{\substack{i+1 \leq k \leq n, \\ k \neq j}} \{y_i > y_k\} \\ &\bigcap \left\{ (n-2-i)y_i < \sum_{\substack{i+1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} y_k \right\} \bigcap \left\{ (n-1-i)y_i < y_j + \sum_{\substack{i+1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} y_k \right\} \quad (3.1.20) \end{aligned}$$

Soit  $y_0 > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour  $1 \leq i \leq n$ , posons  $y_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{n-1}{n} y_0 + (n-i)\varepsilon$ . Alors pour  $\varepsilon > 0$  assez petit on vérifie que  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$  est bien dans l'intersection de ces intérieurs relatifs.  $\square$

**3.2. Construction de variétés d'anneau de Cox donné.** — Nous rappelons dans cette sous-section un résultat de l'article [BH07], dont nous suivrons autant que faire se peut les notations. Soit  $k$  un corps,  $\mathcal{J}$  un ensemble fini non vide et  $R$  un quotient de l'anneau de polynômes  $k[u_i]_{i \in \mathcal{J}}$ . On suppose qu'on a  $R^\times = k^\times$ , que  $R$  est factoriel, fidèlement graduée par un  $\mathbf{Z}$ -module libre de rang fini  $K$ , et que les images  $\bar{u}_i$  des  $u_i$  dans  $R$  sont des éléments  $K$ -homogènes premiers non deux à deux associés. On note  $\mathfrak{F} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\bar{u}_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ . L'application  $(e_i) \mapsto \deg(\bar{u}_i)$  induit une suite exacte de  $\mathbf{Z}$ -modules libres de rang fini

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z}^{\mathcal{J}} \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 0. \quad (3.2.1)$$

On note  $\gamma$  le cône  $\mathbf{R}_{\geq 0}^{\mathcal{J}}$  et, pour  $\mathfrak{J} \subset \mathcal{J}$ ,  $\gamma_{\mathfrak{J}}$  la face de  $\gamma$  engendrée par les  $\{e_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ ; on identifiera dans la suite l'ensemble des faces du cône  $\gamma$  à l'ensemble des parties de  $\mathcal{J}$ . Ainsi  $(\mathbf{Z}^{\mathcal{J}} \xrightarrow{\pi} K, \gamma)$  est le cône projeté associé au système de générateurs  $\mathfrak{F}$  (au sens de [BH07, p.1212]). On suppose qu'il existe un éventail  $\Sigma$  de  $M^\vee$  projectif et lisse dont les rayons sont les  $\iota^\vee(e_i^\vee)$ . Soit  $\mathcal{P}_\Sigma$  l'ensemble des parties maximales  $\mathfrak{J}$  de  $\mathcal{J}$  telles que  $\iota^\vee(\sum_{i \in \mathfrak{J}} \mathbf{R}_{\geq 0} e_i^\vee)$  est un cône maximal de  $\Sigma$ . L'ensemble  $\{\mathfrak{J} \setminus \mathfrak{J}\}_{\mathfrak{J} \in \mathcal{P}_\Sigma}$  forme alors la collection couvrante  $\text{Cov}(\Theta_\Sigma)$  d'une grappe  $\Theta_\Sigma$  dans le cône projeté  $(\mathbf{Z}^{\mathcal{J}} \xrightarrow{\pi} K, \mathbf{R}_{\geq 0}^{\mathcal{J}})$ , au sens de [BH07, p. 1209]. La grappe  $\Theta_\Sigma$  elle-même est l'ensemble des cônes minimaux parmi les  $\{\pi(\gamma_{\mathfrak{J}})\}_{\mathfrak{J} \in \text{Cov}(\Theta_\Sigma)}$ . L'ensemble  $\text{Rlv}(\Theta_\Sigma)$  est l'ensemble des parties de  $\mathcal{J}$  contenant un élément de  $\text{Cov}(\Theta_\Sigma)$ . Ainsi  $\Theta_\Sigma$  est aussi l'ensemble des cônes minimaux parmi les  $\{\pi(\gamma_{\mathfrak{J}})\}_{\mathfrak{J} \in \text{Rlv}(\Theta_\Sigma)}$ .

Pour  $\mathfrak{J} \subset \mathcal{J}$ , on pose  $\mathbf{A}_{\mathfrak{J}}^{\mathcal{J}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{(u_i) \in \mathbf{A}^{\mathcal{J}}, u_i \neq 0 \Leftrightarrow i \in \mathfrak{J}\}$  et  $\mathcal{Z}(\mathfrak{J}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{A}_{\mathfrak{J}}^{\mathcal{J}} \cap \text{Spec}(R)$ . Une partie  $\mathfrak{J}$  de  $\mathcal{J}$  est par définition une  $\mathfrak{F}$ -face si  $\mathcal{Z}(\mathfrak{J})$  est non vide. L'ensemble des éléments de  $\text{Rlv}(\Theta_\Sigma)$  qui sont des  $\mathfrak{F}$ -face est l'ensemble  $\text{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F}, \Sigma})$  des parties pertinentes d'une  $\mathfrak{F}$ -grappe  $\Phi_{\mathfrak{F}, \Sigma}$  dans le cône projeté associé à  $\mathfrak{F}$  étendue par  $\Theta_\Sigma$  (au sens de [BH07, Definition 2.3 et Definition 3.3]). La  $\mathfrak{F}$ -grappe  $\Phi_{\mathfrak{F}, \Sigma}$  elle-même est l'ensemble des cônes minimaux parmi les  $\{\pi(\gamma_{\mathfrak{J}})\}_{\mathfrak{J} \in \text{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F}, \Sigma})}$ . L'ensemble  $\text{Cov}(\Phi_{\mathfrak{F}, \Sigma})$  est l'ensemble des parties minimales de  $\text{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F}, \Sigma})$ . Ainsi la  $\mathfrak{F}$ -grappe  $\Phi_{\mathfrak{F}, \Sigma}$  est l'ensemble des cônes minimaux parmi les  $\{\pi(\gamma_{\mathfrak{J}})\}_{\mathfrak{J} \in \Phi_{\mathfrak{F}, \Sigma}}$ . On notera qu'on a trivialement  $\text{Cov}(\Theta_\Sigma) \subset \text{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F}, \Sigma})$ . On pose alors

$$\hat{X}_{\mathfrak{F}, \Sigma} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{\mathfrak{J} \in \text{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F}, \Sigma})} \mathcal{Z}(\mathfrak{J}) = \bigcup_{\mathfrak{J} \in \text{Rlv}(\Theta_\Sigma)} \mathcal{Z}(\mathfrak{J}) \subset \mathbf{A}^{\mathcal{J}}. \quad (3.2.2)$$

**Théorème 3.4 (Berchtold-Hausen).** — *On conserve les hypothèses et notations précédentes. On suppose que  $\hat{X}_{\mathfrak{F}, \Sigma}$  est lisse. Il existe alors une variété  $X_{\mathfrak{F}, \Sigma}$  projective et lisse, un isomorphisme  $\text{Pic}(X_{\mathfrak{F}, \Sigma}) \xrightarrow{\sim} K$  et un isomorphisme  $\text{Cox}(X_{\mathfrak{F}, \Sigma}) \xrightarrow{\sim} R$  compatibles aux graduations de  $\text{Cox}(X_{\mathfrak{F}, \Sigma})$  et  $R$  par  $\text{Pic}(X_{\mathfrak{F}, \Sigma})$  et  $K$ , respectivement. La variété  $X_{\mathfrak{F}, \Sigma}$  s'obtient comme le quotient géométrique de  $\hat{X}_{\mathfrak{F}, \Sigma}$  sous l'action naturelle du tore  $\text{Hom}(K, \mathbf{G}_m)$ .*

Ceci découle de [BH07, Proposition 3.2, Theorem 4.2 et Proposition 5.6].

**3.3. Le résultat principal.** — On conserve les notations de la sous-section 3.2. Soit  $n \geq 3$  un entier et soit  $R_n \stackrel{\text{déf}}{=} k[\{s_i, t_i\}_{1 \leq i \leq n}, s_0] / \sum_{1 \leq i \leq n} s_i t_i$ . Soit  $\mathfrak{F}_n$  l'ensemble des images des éléments  $s_0, \{s_i, t_i\}_{1 \leq i \leq n}$  dans  $R_n$ . Soit  $K_n$  le  $\mathbf{Z}$ -module libre de base

( $\{\mathcal{F}_i\}_{0 \leq i \leq n}$ ) On définit une  $K$ -graduation fidèle sur  $R$  en posant  $\deg(s_0) = \mathcal{F}_0$  et, pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $\deg(s_i) = \mathcal{F}_i$  et  $\deg(t_i) = \mathcal{G}_i \stackrel{\text{def}}{=} -\mathcal{F}_i + \mathcal{F}_0 + \sum_{1 \leq j \leq n} \mathcal{F}_j$ . Soit  $X_n$  la variété  $X_{\tilde{\mathcal{F}}_n, \Sigma_n}$  où  $\Sigma_n$  est l'éventail de la proposition. On vérifie aisément à partir de la description de  $\Sigma_n$  et de l'équation définissant  $R_n$  que la variété  $\hat{X}_{\tilde{\mathcal{F}}_n, \Sigma_n}$  est lisse. D'après le théorème 3.4,  $X_n$  est une variété projective et lisse d'anneau de Cox isomorphe à  $R_n$  et de groupe de Picard isomorphe à  $K_n$ , tel que le diviseur de  $s_i$  est  $\mathcal{F}_i$  et le diviseur de  $t_i$  est  $\mathcal{G}_i$ . On notera que l'intersection des diviseurs  $\mathcal{G}_i$  est non vide : en effet on vérifie aussitôt que  $\hat{X}_{\tilde{\mathcal{F}}_n, \Sigma_n} \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{t_i = 0\}$  est non vide. On notera que  $X_n$  est de dimension  $n - 1$ . D'après [Has04],  $X_3$  est isomorphe au plan projectif éclaté en trois points alignés.

**Théorème 3.5.** — *On conserve les notations précédentes. Soit  $n \geq 3$ . Soit  $Z_{X_n, -\mathcal{K}_{X_n}, X_{n,0}}(t)$  la fonction zêta des hauteurs anticanonique associée à l'ouvert  $X_{n,0} \stackrel{\text{def}}{=} X_n \setminus \bigcup \{s_i = 0\}_{0 \leq i \leq n} \cup \{t_i = 0\}_{1 \leq i \leq n}$ . Alors la série*

$$Z_{X_n, -\mathcal{K}_{X_n}, X_{n,0}}(t) - \gamma(X_n) \sum_{y \in C_{\text{eff}}(X_n)^\vee \cap \text{Pic}(X_n)^\vee} (qt)^{\langle y, -\mathcal{K}_{X_n} \rangle} \quad (3.3.1)$$

est  $q^{-1}$ -contrôlée à l'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(X_n)) - 1$ .

*Démonstration.* — On veut appliquer le théorème 2.2. Remarquons que  $C_{\text{eff}}(X_n)$  est simplicial, engendré par la base  $\{\mathcal{F}_i\}_{0 \leq i \leq n}$ . Pour  $1 \leq i \leq n - 1$ , on a

$$\mathcal{G}_i + \mathcal{G}_{i+1} - \mathcal{D}_{\text{tot}} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \notin \{i, i+1\}}} \mathcal{F}_j \in C_{\text{eff}}(X_n) \setminus \{0\}. \quad (3.3.2)$$

Par ailleurs on a

$$\frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \leq n} \mathcal{G}_i - \mathcal{D}_{\text{tot}} = \frac{n}{n-1} \mathcal{F}_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \mathcal{F}_i - \sum_{0 \leq i \leq n} \mathcal{F}_i = \frac{1}{n-1} \mathcal{F}_0 \in C_{\text{eff}}(X_n) \setminus \{0\}. \quad (3.3.3)$$

D'après la remarque 2.23 et le fait que l'intersection des diviseurs  $\{\mathcal{G}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est non vide, l'hypothèse 2.21 est donc satisfaite.

Montrons à présent que l'hypothèse 2.15 est vérifiée. En reprenant les notations de la sous-section 2.4.1, on a ici

$$F_{\rho, \mathbf{f}, \mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^{n+1}} \rho^{\text{Inf}_{1 \leq i \leq n} (d_i + f_i + g_i)} \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{d}} \quad (3.3.4)$$

D'après [Bou09, Proposition 3.2], on a

$$\tilde{F}_{\rho, 0, 0} = \frac{1 - \prod_{1 \leq i \leq n} t_i}{1 - \rho \prod_{1 \leq i \leq n} t_i} \quad \text{et} \quad \tilde{F}_{\rho, \mathbf{f}, \mathbf{g}} = \frac{G_{\rho, \mathbf{f}, \mathbf{g}}(\mathbf{t})}{1 - \rho \prod_{1 \leq i \leq n} t_i} \quad (3.3.5)$$

où  $G_{\rho, \mathbf{f}, \mathbf{g}}$  est un polynôme vérifiant

$$\|G_{q_v, \mathbf{f}, \mathbf{g}}(\mathbf{t}^{f_v})\|_{q^{-1+\varepsilon}} \leq 2 \cdot q_v^{\text{Min}(f_i + g_i)} \cdot (2 + \text{Max}(f_i + g_i))^n \cdot q_v^{(2 + \text{Max}(f_i + g_i)) n \varepsilon} \quad (3.3.6)$$

On en déduit aussitôt que l'hypothèse 2.12 est vérifiée et que pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, on a pour tout  $\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{2n+1}$  la majoration

$$c_{\mathcal{E}, \varepsilon} \leq C_{\varepsilon}^{|\mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{(0)}|} q^{\sum_v f_v (4n\varepsilon + \text{Min}_{1 \leq i \leq n} (v(\mathcal{F}_i) + v(\mathcal{G}_i)))} \quad (3.3.7)$$

où  $C_{\varepsilon}$  est une constante. Montrer la convergence de la série

$$\sum_{\mathcal{E} \in \text{Div}_{\text{eff}}(\mathcal{C})^{2n+1}} |\mu_{X_n}(\mathcal{E})| c_{\mathcal{E}, \varepsilon} q^{-\sum_{0 \leq i \leq n} (1-\varepsilon) \deg(\mathcal{F}_i) - \sum_{1 \leq i \leq n} \deg(\mathcal{G}_i)} \quad (3.3.8)$$

revient alors à montrer la convergence du produit eulérien

$$\prod_{v \in \mathcal{C}^{(0)}} 1 + \sum_{(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \{0,1\}^{2n+1} \setminus \{0\}} C_{\varepsilon} \mu_{X_n}^0(\mathbf{f}, \mathbf{g}) q_v^{4n\varepsilon + \text{Min}_{1 \leq i \leq n} (f_i + g_i) - \sum_{0 \leq i \leq n} (1+\varepsilon) f_i - \sum_{1 \leq i \leq n} g_i} \quad (3.3.9)$$

Il suffit donc de montrer que si  $\mu_{X_n}^0(\mathbf{f}, \mathbf{g})$  est non nul alors pour  $\varepsilon > 0$  assez petit on a

$$4n\varepsilon + \text{Min}_{1 \leq i \leq n} (f_i + g_i) - \sum_{0 \leq i \leq n} (1+\varepsilon) f_i - \sum_{1 \leq i \leq n} g_i < -1. \quad (3.3.10)$$

Mais comme on a  $n \geq 3$ , on a

$$\text{Min}_{1 \leq i \leq n} (f_i + g_i) - \sum_{1 \leq i \leq n} (f_i + g_i) - f_0 \leq -2 \quad (3.3.11)$$

sauf dans la situation suivante : tous les  $f_i + g_i$  sont nuls sauf peut-être un qui vaut 1 et alors dans ce dernier cas  $f_0$  est nul. D'après la proposition 1.5, cette situation entraîne que  $\mu_{X_n}^0(\mathbf{f}, \mathbf{g})$  est nul. Ainsi l'hypothèse 2.15 est vérifiée.

Montrons finalement que l'hypothèse 2.17 est vérifiée. Pour  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \{0,1\}^{2n+1}$  posons, comme dans [Bou09],

$$\begin{aligned} \text{fact}_{X_n, v}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) &\stackrel{\text{déf}}{=} q_v^{-\sum_{0 \leq i \leq n} f_i - \sum_{1 \leq i \leq n} g_i} \tilde{F}_{q_v, \mathbf{f}, \mathbf{g}}(q_v^{-1}) \\ &= (1 - q_v^{-1})^n q_v^{-f_0} \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n \\ d_i \geq f_i + g_i}} q_v^{\text{Min}(d_i)} q_v^{-\sum_{1 \leq i \leq n} d_i}, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

$$\kappa_v^{\mathbf{f}, \mathbf{g}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x_i)_{0 \leq i \leq n}, (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \kappa_v^{2n+1}, \quad \forall i, \quad x_i = 0 \text{ si } f_i = 1 \text{ et } y_i = 0 \text{ si } g_i = 1\}, \quad (3.3.13)$$

$$\text{et } \text{dens}_{X_n, v}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{|\{(x_i)(y_i) \in \kappa_v^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}, \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i = 0\}|}{q_v^{2n}}. \quad (3.3.14)$$

D'après [Bou09, Lemme 1.25], pour montrer que l'hypothèse 2.17 est vérifiée, il suffit de montrer la relation

$$\sum_{(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \{0,1\}^{2n+1}} \mu_{X_n}^0(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \text{fact}_{X_n, v}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \{0,1\}^{2n+1}} \mu_{X_n}^0(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \text{dens}_{X_n, v}(\mathbf{f}, \mathbf{g}). \quad (3.3.15)$$

Pour  $f_0 \in \{0, 1\}$ , on a d'après la remarque 1.6 la relation

$$\sum_{(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \{0, 1\}^{2n}} \mu_{X_n}(f_0, \mathbf{f}, \mathbf{g}) = 0 \quad (3.3.16)$$

Pour montrer la relation (3.3.15), il suffit donc de montrer pour tout  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \{0, 1\}^{2n}$  et tout  $f_0 \in \{0, 1\}$  la relation

$$\begin{aligned} & \text{fact}_{X_n, v}(f_0, f_1, \dots, f_n, \mathbf{g}) - \text{fact}_{X_n, v}(f_0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1) \\ &= \text{dens}_{X_n, v}(f_0, f_1, \dots, f_n, \mathbf{g}) - \text{dens}_{X_n, v}(f_0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1) \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

et pour montrer cette dernière relation il suffit par symétrie de montrer qu'on a

$$\begin{aligned} & \text{fact}_{X_n, v}(f_0, 0, f_2, \dots, f_n, \mathbf{g}) - \text{fact}_{X_n, v}(f_0, 1, f_2, \dots, f_n, \mathbf{g}) \\ &= \text{dens}_{X_n, v}(f_0, 0, f_2, \dots, f_n, \mathbf{g}) - \text{dens}_{X_n, v}(f_0, 1, f_2, \dots, f_n, \mathbf{g}) \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Supposons  $g_1 = 0$ . Alors le membre de gauche de (3.3.18) vaut

$$(1 - q_v^{-1})^n q_v^{-f_0} \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^{n-1} \\ d_i \geq f_i + g_i, 2 \leq i \leq n}} q_v^{-\sum_{2 \leq i \leq n} d_i} = (1 - q_v^{-1}) q_v^{-f_0 - \sum_{2 \leq i \leq n} f_i + g_i} \quad (3.3.19)$$

tandis que le membre de droite vaut

$$q_v^{(1-f_0)-2n} \left| \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \kappa_v^{(0, f_2, \dots, f_n), (0, g_2, \dots, g_n)}, x_1 \neq 0, \sum x_i y_i = 0 \} \right| \quad (3.3.20)$$

$$= q_v^{1-f_0-2n} (q_v - 1) \left| \kappa_v^{(f_2, \dots, f_n), (g_2, \dots, g_n)} \right| \quad (3.3.21)$$

$$= q_v^{-f_0-2(n-1)} (q_v^{-1} - 1) q_v^{\sum_{2 \leq i \leq n} (1-f_i+1-g_i)} \quad (3.3.22)$$

d'où l'égalité dans ce cas-là.

Supposons à présent qu'on a  $g_1 = 1$ . On peut également supposer qu'on a, pour un certain entier  $2 \leq k \leq n$ ,  $f_i + g_i \geq 1$  pour  $2 \leq i \leq k$  et  $f_i + g_i = 0$  pour  $i \geq k + 1$ . Commentons par la remarque suivante : posons pour  $n \geq 1$

$$N_n(q_v) \stackrel{\text{déf}}{=} \left| \{ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \kappa_v^{2n}, \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i = 0 \} \right| \quad (3.3.23)$$

On vérifie aussitôt la relation

$$N_n(q_v) = q_v N_{n-1}(q_v) + (q_v - 1) q_v^{2n-2} \quad (3.3.24)$$

qui entraîne par une récurrence immédiate l'égalité

$$\sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^n} q_v^{\text{Min}(1, n_i)} q_v^{-\sum n_i} = \frac{q_v^{-2n+1}}{(1 - q_v^{-1})^n} N_n(q_v). \quad (3.3.25)$$

Le membre de gauche de (3.3.18) vaut alors

$$(1 - q_v^{-1})^n q_v^{-f_0-1} \sum_{\substack{(d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{N}^{n-1} \\ d_i \geq f_i + g_i}} q_v^{\text{Min}(1, d_2, \dots, d_n)} q_v^{-\sum_{1 \leq i \leq n} d_i} \quad (3.3.26)$$

$$= (1 - q_v^{-1})^{n-k+1} q_v^{-f_0-1-\sum_{2 \leq i \leq k} (f_i+g_i)} \sum_{(d_{k+1}, \dots, d_n) \in \mathbf{N}^{n-k}} q_v^{\text{Min}(1, d_{k+1}, \dots, d_n)} q_v^{-\sum_{k+1 \leq i \leq n} d_i} \quad (3.3.27)$$

$$= (1 - q_v^{-1}) q_v^{-2(n-k)-f_0-\sum_{2 \leq i \leq k} (f_i+g_i)} N_{n-k}(q_v) \quad (3.3.28)$$

et le membre de droite

$$q_v^{(1-f_0)-2n} \left| \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \kappa_v^{(0, f_2, \dots, f_n), (1, g_2, \dots, g_n)}, x_1 \neq 0, \sum_{k+1 \leq i \leq n} x_i y_i = 0\} \right| \\ = q_v^{1-f_0-2n} (q_v - 1) q_v^{\sum_{2 \leq i \leq k} (1-f_i+1-g_i)} N_{n-k}(q_v) \quad (3.3.29)$$

d'où l'égalité dans ce cas également.

Ceci achève la démonstration du fait que l'hypothèse 2.17 est vérifiée pour la variété  $X_n$ , et donc la démonstration du théorème 3.5.  $\square$

### Références

- [BH04] Florian Berchtold and Jürgen Hausen, *Bunches of cones in the divisor class group— a new combinatorial language for toric varieties*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 6, 261–302. MR MR2041065 (2004m :14111)
- [BH07] ———, *Cox rings and combinatorics*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 3, 1205–1252 (electronic). MR MR2262848 (2007h :14007)
- [Bou09] David Bourqui, *Comptage de courbes sur le plan projectif éclaté en trois points alignés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 5, 1847–1895.
- [Der06] Ulrich Derenthal, *Singular Del Pezzo surfaces whose universal torsors are hypersurfaces*, arXiv:math/0604194v1, 2006.
- [Has04] B. Hassett, *Equations of universal torsors and Cox rings*, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen : Seminars Summer Term 2004, Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2004, pp. 135–143. MR MR2183138 (2007a :14046)
- [HK00] Yi Hu and Sean Keel, *Mori dream spaces and GIT*, Michigan Math. J. **48** (2000), 331–348, Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday. MR MR1786494 (2001i :14059)
- [Pey95] Emmanuel Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), no. 1, 101–218. MR MR1340296 (96h :11062)
- [Sal98] Per Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Astérisque (1998), no. 251, 91–258, Nombre et répartition de points de hauteur bornée (Paris, 1996). MR MR1679841 (2000d :11091)

---

DAVID BOURQUI, I.R.M.A.R, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France  
*E-mail* : david.bourqui@univ-rennes1.fr