



HAL
open science

Morphismes quadratiques entre modules sur un anneau carré

Henri Gaudier, Manfred Hartl

► **To cite this version:**

Henri Gaudier, Manfred Hartl. Morphismes quadratiques entre modules sur un anneau carré. 2010.
hal-00447433

HAL Id: hal-00447433

<https://hal.science/hal-00447433>

Preprint submitted on 15 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MORPHISMES QUADRATIQUES ENTRE MODULES SUR UN ANNEAU CARRÉ

HENRI GAUDIER AND MANFRED HARTL

ABSTRACT. We introduce the notions of a commutative square ring \underline{R} and of a quadratic map between modules over \underline{R} , called \underline{R} -quadratic map. This notion generalizes various notions of quadratic maps between algebraic objects in the literature. We construct a category of quadratic maps between \underline{R} -modules and show that it is a right-quadratic category and has an internal Hom-functor.

Along our way, we recall the notions of a general square ring \underline{R} and of a module over \underline{R} , and discuss their elementary properties in some detail, adopting an operadic point of view. In particular, it turns out that the associated graded object of a square ring \underline{R} is a nilpotent operad of class 2, and the associated graded object of an \underline{R} -module is an algebra over this operad, in a functorial way. This generalizes the well-known relation between groups and graded Lie algebras (in the case of nilpotency class 2). We also generalize some elementary notions from group theory to modules over square rings.

1. INTRODUCTION

In this paper we generalize various notions of quadratic map between algebraic objects studied in the literature: quadratic forms certainly are the most classical example, followed by the notion of quadratic map between modules defined to be the sum of a linear and a homogenous quadratic map. The latter notion does not cover the map $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto \binom{n}{2}$, which, however, is a quadratic map in Passi's sense who first introduced polynomial maps from groups to abelian groups [11]. In [9] we introduce a more general notion of quadratic map between modules which in the case of \mathbb{Z} -modules is equivalent with Passi's notion specialized to abelian domains. On the other hand, quadratic maps between arbitrary groups were studied in [10], [6] after they had arisen in the new field of "quadratic algebra", namely the theory of square rings and their modules, see [2] and numerous papers by Baues, Jibladze, Muro and Pirashvili giving applications of these structures in homotopy theory, see for example [1], [2], [3], [4], [5].

Square rings and their modules also constitute the framework of this paper; this allows to define a notion of quadratic map which covers the one for modules over an ordinary ring in [9], as well as quadratic maps between nilpotent groups of class 2 (which is the generic case of quadratic maps between groups, see proposition 3.2.28 below); but it also provides a notion of quadratic map between nilpotent algebras of class 2 over any operad. We start by recalling the definition and elementary properties of square rings and their modules, noting in addition that the associated graded group of a square ring \underline{R} has the structure of a nilpotent operad of class 2, and that the associated graded group of an \underline{R} -module is an algebra over this operad, in a functorial way. We need, however, to distinguish two notions of module over \underline{R} , the original one from [2], and a slightly more general one coming from the theory of modules over a square ringoid, by specializing to the one-object case [8]. The latter notion is needed in the last section where we construct a category of \underline{R} -quadratic maps between \underline{R} -modules, equipped with an internal Hom-functor, thus generalizing the category CP of quadratic maps between pairs of groups in [6]. The construction of this category indeed is the main objective of this paper: it allows us in forthcoming work to introduce square algebras and their modules, as a new approach to the study of quadratic maps, even between vector spaces.

To define \underline{R} -quadratic maps, \underline{R} has to be commutative, a property we introduce in section 3.1, and which can be conveniently expressed in terms of the operad associated with \underline{R} . Several equivalent characterizations of \underline{R} -quadratic maps are given, as well as some canonical examples; as a striking fact, the endomorphism of \underline{R} given by $r \mapsto r^2$ is no longer \underline{R} -quadratic in general, nor is the map $r \mapsto r^2 - r$, which is the universal quadratic map annihilating 1 on an ordinary commutative ring. In fact, lack of a canonical \underline{R} -quadratic endomorphism of the free \underline{R} -module of rank 1, we were not able so far to determine the structure of the target of the universal \underline{R} -quadratic map on an \underline{R} -module, as we did in [9] for quadratic maps on a module over an ordinary ring.

Date: January 15, 2010.

2000 Mathematics Subject Classification. 18D50, 13C99, 20N99, 20F18.

Key words and phrases. quadratic map, square ring, modules over square rings, commutative square ring, operad.

2. ANNEAUX CARRÉS ET LEURS MODULES

2.1. Anneaux carrés.

Définition 2.1.1. [2] Un *anneau carré* $\underline{R} = (R_e \xrightarrow{H} R_{ee} \xrightarrow{P} R_e)$ est donné par

- un pré-anneau (near-ring) à droite R_e (i.e. un objet qui satisfait tous les axiomes d'un anneau sauf la commutativité de l'addition et la distributivité à gauche),
- un groupe abélien R_{ee} ,
- une application quadriadditive⁽¹⁾ $R_e \times R_e \times R_{ee} \times R_e \rightarrow R_{ee}$, $(r, s, x, t) \mapsto (r, s) \cdot x \cdot t$ munissant R_{ee} d'une action à gauche du monoïde multiplicatif $R_e \times R_e$ et d'une action à droite du monoïde multiplicatif R_e , compatibles entre elles,⁽²⁾
- un morphisme de groupes $T : R_{ee} \rightarrow R_{ee}$ tel que $T^2 = \text{Id}$
- une application $H : R_e \rightarrow R_{ee}$ et un morphisme de groupe $P : R_{ee} \rightarrow R_e$ vérifiant les propriétés suivantes, où $r, s, t \in R_e$ et $x, y \in R_{ee}$:

$$(AC0) \quad PHP = P + P,$$

$$(AC1) \quad P \text{ est binaturel, i.e. } P((r, r) \cdot x \cdot s) = rP(x)s,$$

$$(AC2) \quad T = HP - \text{Id},$$

$$(AC3) \quad PT = P,$$

$$(AC4) \quad (P(x), r) \cdot y = (r, P(x)) \cdot y = 0 = y \cdot P(x),^{(3)}$$

$$(AC5) \quad H(r + s) = H(r) + H(s) + (s, r) \cdot H(2), \text{ où } 2 = 1_R + 1_R,$$

$$(AC6) \quad H(rs) = (r, r) \cdot H(s) + H(r) \cdot s,$$

$$(AC7) \quad (r + s)t = rt + st + P((r, s) \cdot H(t)),$$

$$(AC8) \quad T((r, s) \cdot x \cdot t) = (s, r) \cdot T(x) \cdot t.$$

Remarque 2.1.2. Rappelons [2] qu'alors $\overline{R} = \text{Coker } P$ est un anneau et que R_{ee} est un $\overline{R} \otimes \overline{R} \otimes \overline{R}^{op}$ -module. Grâce à la relation (AC8), on obtient ainsi une *opérade nilpotente de classe ≤ 2* , notée $\text{OP}(\underline{R})$, où $\text{OP}(\underline{R})_1 = \overline{R}$ et $\text{OP}(\underline{R})_2 = R_{ee}$ (rappelons qu'une opérade \mathbb{P} est dite nilpotente de classe $\leq n$ si $\mathbb{P}_k = 0$ pour $k > n$).

Remarquons également que $H(1) = 0$ (prendre $r = s = 1$ dans (AC6)), et que (AC2) \Rightarrow ((AC0) \Leftrightarrow (AC3)).

Des exemples d'anneaux carrés et de leur modules (cf. le paragraphe suivant) seront donnés dans le paragraphe 2.4 plus loin.

2.2. Modules sur un anneau carré. Nous donnons, en parallèle, deux définitions pour la notion de module sur un anneau carré. La première se trouve dans la littérature, par exemple dans [2], nous la notons ici BHP-module. La seconde, inspirée de la notion analogue pour les groupes ([6]), s'impose lorsque l'on veut que la somme et la composée d'applications quadratiques restent quadratiques. C'est aussi celle qu'on obtient en spécialisant la notion de module sur un annélide carré ([7]). Nous la notons ici CP-module.

¹ Pour éviter toute ambiguïté, une application qui respecte l'addition, sera dite additive (et non pas linéaire).

² ou si l'on préfère d'une action à gauche du monoïde $R_e \times R_e \times R_e^{op}$.

³ la dernière relation ne figure pas dans [2].

Définition 2.2.1. ([2] def 7.9) Soit $\underline{R} = (R_e \xrightarrow{H} R_{ee} \xrightarrow{P} R_e)$ un anneau carré. Un \underline{R} -BHP-module à droite est un groupe M (additif mais non nécessairement commutatif) muni d'opérations

– $M \times R_e \rightarrow M$, $(m, r) \mapsto m \cdot r$,
– $M \times M \times R_{ee} \rightarrow M$, $(m, n, x) \mapsto [m, n] \cdot x$
satisfaisant les relations suivantes, où $r, s \in R_e$, $x, y \in R_{ee}$, $m, m', n \in M$:

$$(MC1) \quad m \cdot 1 = m, \quad (m \cdot r) \cdot s = m \cdot (rs),$$

$$m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s,$$

$$(MC2) \quad (m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r + [m, n] \cdot H(r),$$

$$(MC3) \quad m \cdot P(x) = [m, m] \cdot x,$$

$$(MC4) \quad [m, n] \cdot T(x) = [n, m] \cdot x,$$

$$(MC5) \quad [m, n] \cdot x \text{ est additif en } m, n \text{ et } x,$$

$$(MC6) \quad ([m \cdot r, n \cdot s] \cdot x) \cdot t = [m, n] \cdot ((r, s) \cdot x \cdot t),$$

$$(MC7) \quad [[m, m'] \cdot x, n] \cdot y = 0.$$

Définition 2.2.2. ([8]) Soit $\underline{R} = (R_e \xrightarrow{H} R_{ee} \xrightarrow{P} R_e)$ un anneau carré. Un \underline{R} -CP-module à droite est un couple (M, A) formé d'un groupe M et un sous groupe A de M , muni d'opérations

– $M \times R_e \rightarrow M$, $(m, r) \mapsto m \cdot r$,
– $M \times M \times R_{ee} \rightarrow M$, $(m, n, x) \mapsto [m, n] \cdot x$
satisfaisant les relations suivantes, où $r, s \in R_e$, $x, y \in R_{ee}$, $m, m', n \in M$:

(MC0) A est stable sous l'action de R_e

$$(MC1) \quad m \cdot 1 = m, \quad (m \cdot r) \cdot s = m \cdot (rs),$$

$$m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s,$$

$$(MC2) \quad (m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r + [m, n] \cdot H(r),$$

$$(MC3) \quad m \cdot P(x) = [m, m] \cdot x,$$

$$(MC4) \quad [m, n] \cdot T(x) = [n, m] \cdot x,$$

$$(MC5) \quad [m, n] \cdot x \text{ est additif en } m, n \text{ et } x,$$

$$(MC6) \quad ([m \cdot r, n \cdot s] \cdot x) \cdot t = [m, n] \cdot ((r, s) \cdot x \cdot t),$$

$$(MC7a) \quad [m, n] \cdot x = 0 \text{ si } m \in A,$$

$$(MC7b) \quad [m, n] \cdot x \in A.$$

Remarque 2.2.3. L'axiome MC7 découle clairement des axiomes [MC7a] et [MC7b], par conséquent tout \underline{R} -CP-module est un \underline{R} -BHP-module.

Remarque 2.2.4. La définition peut s'interpréter de la façon suivante. On se donne un groupe M (dont on verra plus tard (2.2.6) par l'axiome MC7 qu'il est nilpotent de classe ≤ 2) muni d'une famille d'opérations unaires paramétrées par R_e et d'une famille d'opérations binaires paramétrées par R_{ee} (on verra plus loin que quand \underline{R} est commutatif les opérations unaires sont quadratiques, et les opérations binaires sont bilinéaires). Les applications H et P relient ces deux familles d'opérations: l'axiome MC2 exprime que l'effet croisé de l'opération unaire associée à $r \in R_e$ est l'opération binaire associée à $H(r)$, et l'axiome MC3 exprime que la composée de l'application diagonale de M et de l'opération binaire associée à $x \in R_{ee}$ est l'opération unaire associée à $P(x)$.

Exemples 2.2.5.

1) On vérifie aisément que le groupe R_e muni des actions

$$R_e \times R_e \rightarrow R_e \quad r \cdot s = rs$$

$$R_e \times R_e \times R_{ee} \rightarrow R_e \quad [r, s] \cdot x = P((r, s) \cdot x),$$

est un \underline{R} -BHP-module.

2) Soit A un sous groupe de R_e stable par la multiplication à droite par R_e et tel que $P(R_{ee}) \subseteq A \subseteq \underline{Z}_{\underline{R}}(R_e)$ ^(a). On vérifie aisément que (R_e, A) muni des mêmes actions que ci-contre est un \underline{R} -CP-module.

^a cette notation est définie en 2.2.16.

3) Soit M un \overline{R} -module à droite, par restriction des scalaires on a une action à droite de R_e sur M . En prenant l'application nulle $M \times M \times R_{ee} \rightarrow M$, on obtient une structure de \underline{R} -BHP-module sur M . On vérifie aisément que pour tout sous- \overline{R} -module à droite M' , le couple (M, M') est un \underline{R} -CP-module. En particulier, si \underline{R} est un anneau carré, R_{ee} est naturellement un \underline{R} -BHP-module. Et pour tout R_e -sous-module B de R_{ee} , (R_{ee}, B) est un \underline{R} -CP-module.

D'autres exemples seront donnés plus loin en 2.4.

Proposition 2.2.6. [8] Soit M un \underline{R} -BHP-module, $m, n \in M$, $r \in R_e$ et $x, y \in R_{ee}$:

- (1) les éléments $[m, n] \cdot x$ sont dans le centre de M ,
- (2) on a $[m, n] \cdot H(2) = [n, m]$,
- (3) le groupe M est nilpotent de classe 2,
- (4) $(-m) \cdot r = -(m \cdot r) + [m, m] \cdot H(r) = -(m \cdot r) + m \cdot PH(r)$,
- (5) $([m, n] \cdot x) \cdot P(y) = 0$, en particulier $P(x)P(y) = 0$.

On peut interpréter la propriété 2), en disant que les opérations binaires associées aux éléments x de R_{ee} généralisent les commutateurs de M (pour l'addition) définis par $[m, n] := m + n - m - n$.

Preuve. Remarquons d'abord que l'axiome MC2 donne

$$[m, n] \cdot H(2) = -n - n - m - m + m + n + m + n = -n + [-n, -m] + n$$

Remplaçant m et n par leurs opposés on a grâce à (MC5)

$$(*) \quad [m, n] \cdot H(2) = [-m, -n] \cdot H(2) = n + [n, m] - n$$

L'axiome MC7 avec $y = H(2)$ et la relation (*) donnent alors

$$\begin{aligned} 0 &= [[m, m'] \cdot x, n] \cdot H(2) \\ &= n + [n, [m, m'] \cdot x] - n = [n, [m, m'] \cdot x], \end{aligned}$$

ce qui prouve (1).

Puisque $[m, n] \cdot H(2)$ est dans le centre, la propriété (2) découle immédiatement de (*). Puisque les commutateurs sont centraux, la propriété (3) est vraie.

Pour la quatrième relation, on a :

$$0 = (m - m) \cdot r = m \cdot r + (-m) \cdot r + [m, -m] \cdot H(r) = m \cdot r + (-m) \cdot r - [m, m] \cdot H(r),$$

ce qui montre la formule, en terminant avec (MC3). Pour la cinquième relation, on a d'après la dernière relation de AC4

$$([m, n] \cdot x) \cdot P(y) = [m, n] \cdot (x \cdot P(y)) = [m, n] \cdot 0 = 0.$$

En prenant alors $M = R_e$, et $m = n = 1$ on obtient la toute dernière égalité. \square

Appliquant ce résultat au \underline{R} -module R_e on a

Corollaire 2.2.7. *L'image de P est contenue dans le centre (additif) de R_e . Pour $r, s \in R_e$ on a $[r, s] = P((s, r) \cdot H(2))$. Le groupe additif de R_e est nilpotent de classe 2. Et $(-r)s = -(rs) + rPH(s)$. \square*

En particulier pour $r = 1$ on a $s + (-1)s = PH(s)$.

Remarque 2.2.8. Si (M, A) est un \underline{R} -CP-module, tout sous-groupe de M contenant A est normal, d'après les relations 2.2.6(2) et (MC7b).

Définition 2.2.9. Un \underline{R} -BHP-sous-module de M est un sous-groupe N de M stable sous les actions de R_e et de R_{ee} . Il sera dit *normal* si en outre $[m, n] \cdot x$ est dans N pour $n \in N$, $m \in M$ et $x \in R_{ee}$.

Proposition 2.2.11. *Soient M un \underline{R} -BHP-module et N un \underline{R} -BHP-sous-module normal de M . Le groupe sous-jacent de N est un sous-groupe normal de M , et le quotient M/N est naturellement muni d'une structure de \underline{R} -BHP-module.*

Définition 2.2.10. Un \underline{R} -CP-sous-module de (M, A) est un \underline{R} -CP-module (N, B) où N (resp. B) est un sous-groupe de M (resp. A) stable sous les actions de R_e et de R_{ee} . Il sera dit *normal* si en outre $B = N \cap A$ et si $[m, n] \cdot x$ est dans N pour $n \in N$, $m \in M$ et $x \in R_{ee}$.

Proposition 2.2.12. *Soient $\underline{M} = (M, A)$ un \underline{R} -CP-module et $\underline{N} = (N, B)$ un \underline{R} -CP-sous-module normal de \underline{M} . Le groupe sous-jacent de N est un sous-groupe normal de M , et le quotient $(M/N, A/B)$ est naturellement muni d'une structure de \underline{R} -CP-module.*

Preuve. [Preuve de 2.2.11] Soit $m \in M$ et $n \in N$, puisque $[n, m] = [m, n] \cdot H(2) \in N$, N est un sous-groupe normal de M . On vérifie que les actions de R_e et de R_{ee} sur M passent bien au quotient:

$$(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r + [m, n] \cdot H(r)$$

où les deux derniers termes sont dans N .

$$[m + n, m'] \cdot x = [m, m'] \cdot x + [n, m'] \cdot x,$$

où le dernier terme est dans N . \square

Preuve. [Preuve de 2.2.12] Il reste à vérifier les axiomes MC0, MC7a et MC7b. Puisque $B = N \cap A$, il est stable sous l'action de R_e , et on a $A/B \simeq A + N/N$ et $(M/N)/(A/B) \simeq M/(A + N)$. Soient alors $m, m' \in M$ et $x \in R_{ee}$. Puisque $[m, m'] \cdot x \in A$, sa classe modulo $A + N$ est nulle, donc $[\overline{m}, \overline{m'}] \cdot x \in A/B$ (où \overline{m} est la classe de m modulo N). Et si $a \in A$ on a $[m, a] \cdot x = 0$. Donc $[\overline{m}, \overline{a}] \cdot x = 0$. \square

Proposition 2.2.13. *Soit M un \underline{R} -BHP-module, et soit $(N_i)_{i \in I}$ une famille de \underline{R} -BHP-sous-modules de M . L'intersection $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ est un \underline{R} -BHP-sous-module de M . \square*

Définition 2.2.14. Soit M un \underline{R} -BHP-module et soit E un sous ensemble de M on appelle \underline{R} -BHP-sous-module engendré par E l'intersection des sous-modules de M qui contiennent E . C'est le plus petit sous-module de M qui contienne E .

Proposition 2.2.15. Soit M un \underline{R} -BHP-module et soit E un sous ensemble de M . Le \underline{R} -BHP-sous-module engendré par E est formé de l'ensemble des éléments de M de la forme

$$(2.2.1) \quad \sum m_i \cdot r_i + \sum [m'_j, m''_k] \cdot x_{j,k}$$

où $m_i, m'_j, m''_k \in E, r_i \in R_e$ et $x_{j,k} \in R_{ee}$. \square

Définition 2.2.16. Soit M un \underline{R} -BHP-module, un élément $m \in M$ est dit \underline{R} -central si $[m, n] \cdot x = 0$ pour tous $n \in M$ et $x \in R_{ee}$.

On appelle \underline{R} -centre de M l'ensemble $Z_{\underline{R}}(M)$ des $m \in M$ qui sont \underline{R} -centraux. On appelle *module \underline{R} -dérivé* de M le \underline{R} -BHP-sous-module $[M, M]_{\underline{R}}$ de M , (ou $[M]$ s'il n'y a pas ambiguïté) engendré par les $[m, n] \cdot x$ pour $m, n \in M$ et $x \in R_{ee}$.

Proposition 2.2.17. 1) Le \underline{R} -centre et le module \underline{R} -dérivé sont des sous- \underline{R} -BHP-modules normaux, et on a les inclusions:

$$(2.2.2) \quad [M, M] \subseteq [M, M]_{\underline{R}} \subseteq Z_{\underline{R}}(M) \subseteq Z(M).$$

2) Le \underline{R} -centre, le module \underline{R} -dérivé, le quotient $M/Z_{\underline{R}}(M)$ et le \underline{R} -abélianisé $M^{\underline{R}\text{-ab}} = \overline{M} = M/[M, M]_{\underline{R}}$ sont des \overline{R} -modules. De même, si (M, A) est un \underline{R} -CP-module, A et $\overline{M} = M/A$ sont des \overline{R} -modules.

Preuve. La première assertion découle de MC5 et MC7. Les trois inclusions sont des conséquences immédiates de la proposition 2.2.6. On notera en particulier que l'inclusion $[M, M]_{\underline{R}} \subseteq Z_{\underline{R}}(M)$ équivaut à la propriété MC7.

La seconde vient de ce que $\text{Im } P$ annule les quatre modules. en effet, d'après (MC3) $m \cdot P(x) = [m, m] \cdot x$ qui est dans le groupe \underline{R} -dérivé pour $m \in M$, et est nul si m est dans le \underline{R} -centre. \square

Corollaire 2.2.18. Si M est un \underline{R} -BHP-module à droite, alors (M, A) est un \underline{R} -CP-module à droite pour tout sous-groupe A de M stable sous les actions de R_e et tel que $[M] \subseteq A \subseteq Z_{\underline{R}}(M)$. Autrement dit, A est un sous- \overline{R} -module de $Z_{\underline{R}}(M)$ contenant $[M]$.

Preuve. Les propriétés [MC7a] et [MC7b] équivalent respectivement à $A \subseteq Z_{\underline{R}}(M)$ et à $[M, M]_{\underline{R}} \subseteq A$. \square

On notera que A est stable sous les actions de R_{ee} puisque celles-ci sont triviales sur A .

En particulier, (R_e, A) est un \underline{R} -CP-module à droite pour tout sous-groupe A de R_e stable sous les actions de R_e et tel que $[R_e] \subseteq A \subseteq Z_{\underline{R}}(R_e)$.

Remarque 2.2.19. Si (M, A) est un \underline{R} -CP-module, il en résulte que $[M, M] \subseteq A \subseteq Z(M)$, par conséquent le couple (M, A) est un objet de la catégorie CP définie en [6].

Proposition 2.2.20. Soit M un \underline{R} -BHP-module. Alors les groupes abéliens \mathbb{N}^* -gradués

$$\text{Gr}_{\gamma}(M) = (M^{\underline{R}\text{-ab}}, [M, M]_{\underline{R}}, 0, \dots)$$

$$\text{Gr}_Z(M) = (M/Z_{\underline{R}}(M), Z_{\underline{R}}(M), 0, \dots)$$

ont une structure naturelle d'algèbre graduée sur l'opérade $\text{OP}(\underline{R})$.

Proposition 2.2.21. Soit $\underline{M} = (M, A)$ un \underline{R} -CP-module. Alors le groupe abélien \mathbb{N}^* -gradué

$$\text{Gr}(M, A) = (M/A, A, 0, \dots)$$

a une structure naturelle d'algèbre graduée sur l'opérade $\text{OP}(\underline{R})$.

Preuve. (pour (M, A) , les autres étant des cas particuliers) : M/A et A sont des \overline{R} -modules d'après la proposition 2.2.17. Vu la graduation et le fait que $\text{OP}(\underline{R})$ est nilpotente de classe 2, la structure de $\text{OP}(\underline{R})$ -algèbre sur $\text{Gr}(M, A)$ est entièrement déterminée par les applications

$$(M/A \oplus A) \otimes \text{OP}(\underline{R})_1 \rightarrow M/A \oplus A, \quad (\overline{m}, a) \otimes \overline{r} \mapsto (\overline{m\overline{r}}, ar)$$

$$(M/A) \otimes (M/A) \otimes \text{OP}(\underline{R})_2 \rightarrow A, \quad \overline{m} \otimes \overline{m'} \otimes x \mapsto [m, m'] \cdot x.$$

\square

En effet, les propositions précédentes généralisent le fait que les quotients de la suite centrale descendante d'un groupe (nilpotent de classe 2 ici) forment une algèbre de Lie, cf. le paragraphe 2.4.3 plus loin.

2.3. Morphismes de modules sur un anneau carré. Soit M et N deux \underline{R} -BHP-modules, une application f de M dans N sera dite additive (et non pas linéaire) si elle respecte l'addition, elle sera dite R_e -équivariante si elle respecte l'action de R_e , et elle sera dite R_{ee} -équivariante si elle respecte l'action de R_{ee} sur M et N , c'est à dire si

$$f([m, m'] \cdot x) = [f(m), f(m')] \cdot x.$$

Elle sera dite R_e -linéaire si elle est additive et R_e -équivariante.

Définition 2.3.1. ([2]) Soient M et N deux \underline{R} -BHP-modules, un BHP-morphisme ou application \underline{R} -BHP-linéaire est une application $\alpha : M \rightarrow N$ qui est R_e -linéaire et R_{ee} -équivariante.

L'application α est donc un homomorphisme de groupe tel que $\alpha(m \cdot r) = \alpha(m) \cdot r$, et $\alpha([m, m'] \cdot x) = [\alpha(m), \alpha(m')] \cdot x$.

Il est clair qu'on obtient ainsi une catégorie notée $\text{BHP-Mod}_{\underline{R}}$. Si N est un sous \underline{R} -BHP-module normal de M on peut vérifier que N est le noyau dans $\text{BHP-Mod}_{\underline{R}}$ du morphisme $M \rightarrow M/N$.

Il est immédiat qu'à un \underline{R} -BHP-morphisme $M \rightarrow N$ on associe canoniquement un \underline{R} -CP-morphisme $(M, [M]) \rightarrow (N, [N])$, ou plus généralement $(M, [M]) \rightarrow (N, B)$ où B est un sous-BHP-module tel que $[N] \subseteq B \subseteq \underline{Z}_R N$.

Exemple 2.3.3. Soit M un R -BHP module, pour tout $m \in M$ l'application $g_m : R_e \rightarrow M$, $r \mapsto m \cdot r$ est \underline{R} -BHP-linéaire. En effet, elle est additive et R_e équivariante par MC1, et R_{ee} -équivariante puisque, d'après MC3 et MC6 on a:

$$m \cdot ([r, s] \cdot x) = m \cdot P((r, s) \cdot x) = [m, m] \cdot ((r, s) \cdot x) = [m \cdot r, m \cdot s] \cdot x.$$

En particulier, si $M = R_e$ les multiplications à gauche dans R_e sont \underline{R} -BHP-linéaires.

Proposition 2.3.4. Une application \underline{R} -BHP-linéaire $f : M \rightarrow N$ entre \underline{R} -BHP-modules M, N induit un morphisme de $\text{OP}(\underline{R})$ -algèbres graduées

$$\text{Gr}_{\gamma}(f) : \text{Gr}_{\gamma}(M) \rightarrow \text{Gr}_{\gamma}(N)$$

de façon évidente.

On obtient ainsi des foncteurs

$$\text{Gr}_{\gamma} : \text{BHP-Mod}_{\underline{R}} \rightarrow \text{GrAlg}_2(\text{OP}(\underline{R})),$$

$$\text{Gr} : \text{CP-Mod}_{\underline{R}} \rightarrow \text{GrAlg}_2(\text{OP}(\underline{R}))$$

où $\text{GrAlg}_2(\text{OP}(\underline{R}))$ désigne la catégorie des algèbres gradués nilpotentes de classe 2 sur l'opérade $\text{OP}(\underline{R})$. Ils généralisent le foncteur qui associe à un groupe nilpotent de classe 2 l'algèbre de Lie formée des quotients de la suite centrale descendante, cf. le paragraphe 2.4.3 plus loin.

Définition 2.3.6. Un \underline{R} -module est dit \underline{R} -abélien, si l'application $M \times M \times R_{ee} \rightarrow M$ est nulle.

Lemme 2.3.7. Soit M un \underline{R} -module \underline{R} -abélien. Alors

- le groupe additif de M est abélien,
- M est annulé par $\text{Im } P$,
- l'action de R_e sur M est distributive à gauche,

et M est naturellement un \bar{R} -module.

Preuve. Cela découle immédiatement de 2.2.6 (2) et des axiomes (MC3) et (MC2). \square

Corollaire 2.3.8. La sous catégorie pleine de $\text{BHP-Mod}_{\underline{R}}$ formée des modules \underline{R} -abéliens est équivalente à la catégorie des \bar{R} -modules.

Définition 2.3.2. ([8]) Soient (M, A) et (N, B) deux \underline{R} -CP-modules un \underline{R} -CP-morphisme de (M, A) dans (N, B) est une application $\alpha : M \rightarrow N$ qui est R_e -linéaire et R_{ee} -équivariante, et telle que $\alpha(A) \subseteq B$.

Il est clair qu'on obtient ainsi une catégorie notée $\text{CP-Mod}_{\underline{R}}$. Si (N, B) est un sous \underline{R} -CP-module normal de (M, A) on peut vérifier que (N, B) est le noyau dans $\text{CP-Mod}_{\underline{R}}$ du morphisme $(M, A) \rightarrow (M/N, A/B)$.

Proposition 2.3.5. Une application \underline{R} -CP-linéaire $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ entre \underline{R} -CP-modules $(M, A), (N, B)$ induit des morphismes de $\text{OP}(\underline{R})$ -algèbres graduées

$$\text{Gr}(f) : \text{Gr}(M, A) \rightarrow \text{Gr}(N, B),$$

de façon évidente.

Corollaire 2.3.9. La sous-catégorie pleine de $\text{CP-Mod}_{\underline{R}}$ formée des modules \underline{R} -abéliens est équivalente à la catégorie des couples de \bar{R} -modules.

Proposition 2.3.10. Soient M et N deux \underline{R} -BHP-modules, et supposons que N est \underline{R} -abélien. Toute application \underline{R} -BHP-linéaire de M dans N se factorise par $\bar{M} = M/[M]_{\underline{R}}$. On obtient donc une bijection naturelle

$$\bar{R}\text{-mod}(\bar{M}, N) \rightarrow \text{BHP-Mod}_{\underline{R}}(M, N).$$

Corollaire 2.3.12. Sous les mêmes hypothèses, l'ensemble $\text{BHP-Mod}_{\underline{R}}(M, N)$ est naturellement un groupe abélien. Si en outre l'anneau \bar{R} est commutatif, c'est un \bar{R} -module. \square

Exemple 2.3.14. Soit M un \underline{R} -BHP-module et $m \in M$. Il existe une unique application \underline{R} -linéaire $R_e \rightarrow M$ qui envoie 1 sur m . En effet, si une telle application φ existe, comme elle est R_e -équivariante, on a $\varphi(r) = \varphi(1 \cdot r) = \varphi(1) \cdot r = m \cdot r$. d'où l'unicité. On a vu 2.3.3 que $r \mapsto m \cdot r$ est \underline{R} -BHP-linéaire. On en déduit alors que R_e est le \underline{R} -BHP-module libre à un générateur.

Définition 2.3.16. Soit E un ensemble, M un \underline{R} -BHP-module, et $f : E \rightarrow M$ une application. On appelle \underline{R} -image de f , qu'on note $\text{Im}_{\underline{R}} f$ le \underline{R} -BHP-sous-module de M engendré par l'ensemble $f(E)$ (cf. 2.2.14).

Lemme 2.3.17. Avec les notations ci-dessus, si Y est une partie de $f(E)$ qui \underline{R} -centralise tous les éléments de $f(E)$, alors le \underline{R} -BHP-sous-module de M engendré par Y est \underline{R} -central dans $\text{Im}_{\underline{R}} f$.

Preuve. Cela découle immédiatement de la proposition 2.2.15. \square

2.4. Exemples. Nous rappelons ici des exemples du paragraphe 8 de [2].

2.4.1. Modules sur un anneau commutatif classique. Soit R un anneau commutatif classique et $\underline{R} = (R \rightarrow 0 \rightarrow R)$ l'anneau carré associé. Un BHP-module M est simplement un R -module classique (les propriétés (MC3) à (MC7) sont vides, et le groupe M est commutatif puisque $H = 0$).

2.4.2. Modules sur l'anneau \mathbb{Z}_{nil} . On a $\mathbb{Z}_{\text{nil}} = (\mathbb{Z}_e \xrightarrow{H} \mathbb{Z}_{ee} \xrightarrow{P} \mathbb{Z}_e)$ avec $\mathbb{Z}_e = \mathbb{Z}_{ee} = \mathbb{Z}$, $H(n) = \binom{n}{2}$ et $P = 0$. Un \mathbb{Z}_{nil} -BHP-module est un groupe nilpotent de classe 2. L'action de \mathbb{Z}_e est donnée par $m \cdot r = m + \dots m$ (r fois); celle de \mathbb{Z}_{ee} est déterminée par $[m, m'] \cdot 1 = [m', m]$.

2.4.3. Modules sur les anneaux carrés tels que $P = 0$. Soit R un anneau, prenons $R_e = R$ et soit R_{ee} un $R_e \otimes R_e \otimes R_e^{\text{op}}$ -module tel que pour $r, s, t \in R_e$

$$(2.4.1) \quad (r \otimes s) \cdot x \cdot t = (s \otimes r) \cdot x \cdot t.$$

Pour toute application $H : R_e \rightarrow R_{ee}$ vérifiant

$$H(r + s) = H(r) + H(s) + (s, r) \cdot H(2) \quad \text{et} \quad H(rs) = (r \otimes r) \cdot H(s) + H(r) \cdot s$$

on obtient un anneau carré $R_{\text{nil}}^H = (R_e \xrightarrow{H} R_{ee} \xrightarrow{P=0} R_e)$, où $T = -\text{Id}$. Et tout anneau carré tel que $P = 0$ est obtenu de cette façon.

Un R_{nil}^H -module M est alors un groupe muni d'une action à droite du monoïde R_e , et d'opérations indexées par R_{ee} vérifiant les axiomes de la définition 2.2.1. Les axiomes MC3 et MC4 entraînent que ces opérations sont toutes alternées.

En particulier, si R est commutatif et si on prend pour R_{ee} l'idéal I_2 de R engendré par les éléments $r^2 - r$ avec $H(r) = r^2 - r$, on obtient l'anneau carré $R_{\text{Nil}} = (R \rightarrow I_2 \rightarrow R)$ [9].

Lorsque R est un anneau 2-binomial, l'anneau carré $R_{\text{nil}} = (R \xrightarrow{H} R \xrightarrow{P=0} R)$ avec $H(r) := \binom{r}{2}$ est isomorphe à R_{Nil} . Les R -groupes nilpotents de classe ≤ 2 classiques ([13]) sont donc exactement les R_{Nil} -modules. La notion de R_{Nil} -module pour un anneau commutatif quelconque généralise donc la notion de R -groupe nilpotent de classe ≤ 2 pour un anneau 2-binomial.

Proposition 2.3.11. Soient (M, A) et (N, B) deux \underline{R} -CP-modules, et supposons que (N, B) est \underline{R} -abélien. Toute application \underline{R} -CP-linéaire de (M, A) dans (N, B) se factorise par $(\bar{M}, \bar{A}) = (M/[M]_{\underline{R}}, A/[M]_{\underline{R}})$. On obtient donc une bijection naturelle

$$\bar{R}\text{-mod}((\bar{M}, \bar{A}), (N, B)) \rightarrow \text{CP-Mod}_{\underline{R}}((M, A), (N, B)).$$

Corollaire 2.3.13. Sous les mêmes hypothèses, l'ensemble $\text{CP-Mod}_{\underline{R}}((M, A), (N, B))$ est naturellement un groupe abélien. Si en outre l'anneau \bar{R} est commutatif, c'est un \bar{R} -module. \square

Exemple 2.3.15. Soit (M, A) un \underline{R} -CP-module et $m \in M$. Il existe une unique application \underline{R} -CP-linéaire $(R_e, P(R_{ee})) \rightarrow (M, A)$ qui envoie 1 sur m . On en déduit que $(R_e, P(R_{ee}))$ est le \underline{R} -CP-module libre à un générateur.

Notons aussi que $\text{Op}(R_{\text{nil}})$ est l'opérade Lie tronquée, et que pour un R_{nil} -BHP-module M (càd, un R -groupe nilpotent de classe ≤ 2), la $\text{Op}(R_{\text{nil}})$ -algèbre $\text{Gr}_\gamma(M)$ est la R -algèbre de Lie graduée associée à M classique.

2.4.4. *Modules sur l'anneau carré Λ_R de [2] (8.8).* Soit R un anneau commutatif, soit

$$(2.4.2) \quad \Lambda_R := (R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{0} R)$$

l'anneau carré où $R_e = R$ avec les mêmes addition et multiplication, $R_{ee} = R$ avec la même addition, $H = P = 0$. Les actions de R_e sur R_{ee} sont données par : $(r, s) \cdot x \cdot t := rsxt$.

Soit maintenant M un Λ_R -BHP-module. D'après 2.2.6 (2) le groupe additif de M est commutatif, et d'après MC2 M est un R -module (au sens classique). D'après MC6 les crochets sur M sont déterminés par le seul crochet $[m, n] \cdot 1$ qui est bilinéaire en m et n d'après MC5 et qui doit vérifier $[m, m] \cdot 1 = 0$, $[n, m] \cdot 1 = -[m, n] \cdot 1$ et $[[m, m'] \cdot 1, n] \cdot 1 = 0$. Il en résulte qu'un Λ_R -BHP-module n'est rien d'autre qu'une R -algèbre de Lie nilpotente de classe ≤ 2 .

On vérifie de même qu'un Λ_R -CP-module est un couple (M, A) , où M est une R -algèbre de Lie nilpotente de classe ≤ 2 , et A un sous module de M contenant $[M, M]$ et tel que $[A, M] = 0$.

2.4.5. *Modules sur l'anneau carré \otimes_R de [2] (8.8).* Dans cet exemple et les deux qui vont suivre, soit R un anneau commutatif, et soit R_e le groupe $R \oplus R$ muni de la multiplication

$$(2.4.3) \quad (r, s)(r', s') := (rr', r^2s' + sr').$$

On vérifie que R_e satisfait tous les axiomes d'un anneau, sauf la distributivité à droite. On a en effet:

$$\begin{aligned} (r + r', s + s')(r'', s'') &= (rr'' + r'r'', (r + r')^2s'' + (s + s')r''), \\ (r, s)(r'', s'') + (r', s')(r'', s'') &= (rr'', r^2s'' + sr'') + (r'r'', r'^2s'' + s'r''), \\ &= (rr'' + r'r'', r^2s'' + sr'' + r'^2s'' + s'r''). \end{aligned}$$

Donc

$$((r, s) + (r', s'))(r'', s'') = (r, s)(r'', s'') + (r', s')(r'', s'') + (0, 2rr's'').$$

On remarquera que l'inclusion canonique $R \rightarrow R_e$, $r \mapsto (r, 0)$ est compatible avec les deux opérations.

Définissons alors un anneau carré:

$$(2.4.4) \quad \otimes_R := (R_e \xrightarrow{H} R \oplus R \xrightarrow{P} R_e)$$

où $H(r, s) := (s, s)$, $P(x, y) := (0, x + y)$ et où les actions de R_e sur R_{ee} sont données par

$$((r, s), (r', s')) \cdot (x, y) \cdot (r'', s'') := (rr'xr'', rr'yr'').$$

Le lecteur vérifiera alors que \otimes_R satisfait les axiomes d'un anneau carré. Par exemple, pour AC7 on a

$$P(((r, s), (r'', s'')) \cdot H(r'', s'')) = P(((r, s), (r', s')) \cdot (s'', s'')) = P((rr's'', rr's'')) = (0, 2rr's'').$$

On a $T(x, y) = HP(x, y) - (x, y) = H(0, x + y) - (x, y) = (x + y, x + y) - (x, y) = (y, x)$.

Soit maintenant M un \otimes_R -BHP-module. Comme on a $H(2) = H((2, 0)) = 0$, la propriété 2.2.6 (2) montre que le groupe additif de M est commutatif. En outre, M est naturellement un R -module via l'inclusion de R dans R_e .

D'après MC5 MC4 et MC6 on a

$$\begin{aligned} [m, n] \cdot (r, s) &= [m, n] \cdot (r, 0) + [m, n] \cdot (0, s) = [m, n] \cdot (r, 0) + [m, n] \cdot T(s, 0) = [m, n] \cdot (r, 0) + [n, m] \cdot (s, 0) \\ &= ([m, n] \cdot (1, 0))r + ([n, m] \cdot (1, 0))s. \end{aligned}$$

Les crochets sont donc entièrement déterminés par le seul crochet $[m, n] \cdot 1$. Si on pose $m * n := [m, n] \cdot 1$, le calcul précédent s'écrit:

$$[m, n] \cdot (r, s) = (m * n)r + (n * m)s.$$

L'action de la seconde composante de R_e sur M s'exprime aussi à l'aide de l'opération $*$ grâce à MC3:

$$m \cdot (0, s) = m \cdot P(s, 0) = [m, m] \cdot (s, 0) = (m * m)s$$

Il en résulte que la donnée d'un \otimes_R -BHP-module M équivaut à la donnée d'un R -module M muni d'une multiplication $*$ qui est R -bilinéaire et nilpotente de classe ≤ 2 , puisque MC7 avec $x = y = 1$ donne $(m * m') * n = 0$ pour tous m, m' et n . Autrement dit, M est une R -algèbre non nécessairement commutative (sans unité) nilpotente de classe ≤ 2 .

On vérifie de même qu'un \otimes_R -CP-module est un couple (M, A) , où M est une R -algèbre non nécessairement commutative (sans unité) nilpotente de classe ≤ 2 , et A un idéal de M contenant $M * M$ et tel que $A * M = M * A = 0$.

2.4.6. *Modules sur l'anneau carré S_R de [2] (8.8).* A partir du même R_e , définissons un autre anneau carré:

$$(2.4.5) \quad S_R := (R_e \xrightarrow{H} R \xrightarrow{P} R_e)$$

où $H(r, s) := 2s$, $P(x) := (0, x)$ et où les actions de R_e sur R_{ee} sont données par

$$((r, s), (r', s')) \cdot x \cdot (r'', s'') := rr'xr''.$$

Le lecteur vérifiera alors que S_R satisfait les axiomes d'un anneau carré. Par exemple, pour AC7 on a

$$P(((r, s), (r', s')) \cdot H(r'', s'')) = P(((r, s), (r', s')) \cdot (2s'')) = P((2rr's'')) = (0, 2rr's'').$$

On a $T(x) = HP(x) - x = H(0, x) - x = 2x - x = x$.

Soit maintenant M un S_R -BHP-module. Comme on a $H(2) = H((2, 0)) = 0$, la propriété 2.2.6 (2) montre que le groupe additif de M est commutatif. En outre, M est naturellement un R -module via l'inclusion de R dans R_e .

D'après MC6 on a

$$[m, n] \cdot x = [m, n] \cdot (1 \cdot (x, 0)) = ([m, n] \cdot 1)(x, 0) = ([m, n] \cdot 1)x.$$

Les crochets sont donc entièrement déterminés par le seul crochet $[m, n] \cdot 1$. Définissons alors une multiplication sur M par $m * n := [m, n] \cdot 1$.

L'action de la seconde composante de R_e sur M s'exprime aussi à l'aide de l'opération $*$ grâce à MC3:

$$m \cdot (0, s) = m \cdot P(s) = [m, m] \cdot s = (m * m)s$$

En outre, d'après MC4 on a $[m, n] \cdot T(1) = [n, m] \cdot 1$. Et comme $T = \text{Id}$ on en déduit que la multiplication $*$ est commutative.

Il en résulte que la donnée d'un S_R -BHP-module M équivaut à la donnée d'un R -module M muni d'une multiplication commutative $*$ qui est R -bilinéaire et nilpotente de classe ≤ 2 , puisque MC7 avec $x = y = 1$ donne $(m * m') * n = 0$ pour tous m, m' et n . Autrement dit, M est une R -algèbre commutative (sans unité) nilpotente de classe ≤ 2 .

On vérifie de même qu'un S_R -CP-module est un couple (M, A) , où M est une R -algèbre commutative nilpotente de classe ≤ 2 , et A un idéal de M contenant $M * M$ et tel que $A * M = 0$.

2.4.7. *Modules sur l'anneau carré Γ_R de [2] (8.8).* Toujours à partir du même R_e définissons un troisième anneau carré:

$$(2.4.6) \quad \Gamma_R := (R_e \xrightarrow{H} R \xrightarrow{P} R_e)$$

où $H(r, s) := s$, $P(x) := (0, 2x)$ et où les actions de R_e sur R_{ee} sont données par

$$((r, s), (r', s')) \cdot x \cdot (r'', s'') := rr'xr''.$$

Le lecteur vérifiera alors que Γ_R satisfait les axiomes d'un anneau carré. Par exemple, pour AC7 on a

$$P(((r, s), (r', s')) \cdot H(r'', s'')) = P(((r, s), (r', s')) \cdot (s'')) = P((rr's'')) = (0, 2rr's'').$$

On a $T(x) = HP(x) - x = H(0, 2x) - x = 2x - x = x$.

Soit maintenant M un Γ_R -BHP-module. Comme on a $H(2) = H((2, 0)) = 0$, la propriété 2.2.6 (2) montre que le groupe additif de M est commutatif. En outre, M est naturellement un R -module via l'inclusion de R dans R_e . Définissons alors une application $\gamma : M \rightarrow M$ par $\gamma(m) := m \cdot (0, 1)$. D'après MC2 on a

$$[m, n] \cdot 1 = [m, n] \cdot H(0, 1) = (m + n) \cdot (0, 1) - m \cdot (0, 1) - n \cdot (0, 1) = \gamma(m + n) - \gamma(m) - \gamma(n).$$

Il en résulte que la multiplication $m * n := [m, n] \cdot (0, 1)$ est commutative et R -bilinéaire, et que $m * m = 2\gamma(m)$. On a aussi

$$\gamma(mr) = \gamma(m \cdot (r, 0)) = m \cdot (r, 0) \cdot (0, 1) = m \cdot (0, r^2) = m \cdot (0, 1) \cdot (r^2, 0) = \gamma(m) \cdot (r^2, 0) = \gamma(m)r^2.$$

Il en résulte que la donnée d'un Γ_R -BHP-module M équivaut à la donnée d'une R -algèbre à puissance divisée (sans unité) nilpotente de classe ≤ 2 .

2.4.8. *Anneaux carrés associés à la suspension des pseudo-plans projectifs* [2] (8.4). Dans l'exemple précédent, soit I_2 l'idéal de R engendré par les éléments $r^2 - r$ et soit $\varepsilon \in \text{Ann}(I_2)$. Déformons l'addition de R_e en posant

$$(r, s) + (r', s') := (r + r', s + s' + \varepsilon r r')$$

Avec le même R_{ee} , les mêmes actions de R_e sur R_{ee} et les mêmes applications H et P que pour l'anneau carré Γ_R , on obtient un nouvel anneau carré Γ_R^ε , qui généralise l'exemple précédent puisque $\Gamma_R^0 = \Gamma_R$.

Lorsque l'on prend $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\varepsilon = \binom{n}{2}$ l'anneau carré obtenu est l'anneau carré des endomorphismes de ΣP_n .

3. ANNEAUX CARRÉS COMMUTATIFS ET APPLICATIONS \underline{R} -QUADRATIQUES

3.1. Anneaux carrés commutatifs.

Définition 3.1.1. Un anneau carré \underline{R} est dit commutatif si

- l'anneau quotient $\overline{R} = R_e / \text{Im } P$ est commutatif
- les trois actions de R_e sur R_{ee} coïncident,⁽⁴⁾ c'est à dire $(r, 1) \cdot x = (1, r) \cdot x = x \cdot r$.

Remarquons que la propriété de commutativité s'exprime en termes de l'opérade associée : \underline{R} est commutatif si et seulement si l'anneau $\text{OP}(\underline{R})_1$ est commutatif et $\text{OP}(\underline{R})$ est une opérade de $\text{OP}(\underline{R})_1$ -modules.

Lemme 3.1.2. *Si \underline{R} est commutatif, on a $x \cdot rs = x \cdot sr$ pour $r, s \in R_e$ et $x \in R_{ee}$. En outre le groupe additif de R_e est commutatif.*

Preuve. La première relation est une conséquence immédiate de la définition. Pour la seconde propriété, soient r et s dans R_e , on a d'après 2.2.6

$$[r, s] = P((s, r) \cdot H(2)) = P((1, 1) \cdot H(2)) rs = [1, 1] rs = 0. \quad \square$$

Lemme 3.1.3. *Soit M un module sur l'anneau carré commutatif \underline{R} . Pour $m, n \in M$, $r, s, t \in R_e$ et $x, y \in R_{ee}$, on a $[m \cdot r, n \cdot s] \cdot (x \cdot t) = ([m, n] \cdot x) \cdot rst$, et dans le produit rst on peut changer l'ordre des facteurs.*

Preuve. Cela découle de MC6. □

Corollaire 3.1.4. *Soit \underline{R} un anneau carré commutatif, pour $r \in R_e$ et $x \in R_{ee}$ on a $rP(x) = P(x)r^2$.*

Preuve. En utilisant AC1, la définition 3.1.1 et à nouveau AC1 on a:

$$rP(x) = P((r, r) \cdot x) = P(x \cdot r^2) = P(x)r^2. \quad \square$$

Remarque 3.1.5. Puisque \overline{R} est commutatif, $rs - sr \in \text{Im } P$, par conséquent $m \cdot sr - m \cdot rs = m \cdot (sr - rs) = m \cdot P(x) = [m, m] \cdot x$. Donc, si m est tel que $[m, m] \cdot x = 0$ pour tout $x \in R_{ee}$, on a $m \cdot sr = m \cdot rs$ pour tous $r, s \in R_e$.

3.1.6. *Exemples.* Les anneaux carrés des exemples 2.4.1, \mathbb{Z}_{nil} (2.4.2), R_{nil}^H si R est commutatif (2.4.3) et si $(r, 1) \cdot x = x \cdot r$, Λ_R (2.4.4), \otimes_R (2.4.5) et S_R (2.4.6) sont des anneaux carrés commutatifs.

3.1.7. *Les anneaux carrés Γ_R (2.4.7) et Γ_R^ε (2.4.8).* Pour ces anneaux carrés, on a $\text{Im } P = 2R$, donc $\overline{R} = R \times R/2R$. On vérifie alors que \overline{R} est un anneau commutatif si et seulement si $I_2 = 2R$. Cette condition est réalisée, par exemple si $1/2 \in R$ ou si R est un anneau 2-binomial, ou si $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

⁴Une autre définition possible a finalement été écartée : Un anneau carré \underline{R} est dit commutatif si la multiplication dans R_e est commutative et si les trois actions de R_e sur R_{ee} coïncident. En effet la commutativité de la multiplication de R_e entraîne la distributivité à gauche, il en résulte que $PH = 0$ et que $2P = 0$. Elle entraîne aussi la commutativité de l'addition de R_e , puisque $[m, n] = P((n, m) \cdot H(2)) = PH(2)nm = 0$. On aurait finalement que R_e serait un anneau commutatif, ce qui semble un peu trop restrictif.

3.2. Applications quadratiques entre \underline{R} -modules. Dans toute la suite, on supposera que \underline{R} est un anneau carré commutatif.

Définition 3.2.1. Soient \underline{R} un anneau carré commutatif, M et N deux \underline{R} -modules et $f : M \rightarrow N$ une application. On appelle *défaut additif* de f l'application

$$(3.2.1) \quad d_f : M \times M \rightarrow N \quad (m, m') \mapsto d_f(m, m') := f(m + m') - f(m') - f(m).$$

On appelle *défauts scalaires* de f les applications

$$(3.2.2) \quad f_{(r)} : M \rightarrow N \quad m \mapsto f_{(r)}(m) := f(m \cdot r) - f(m) \cdot r,$$

pour $r \in R_e$. On appelle *défauts des commutateurs* de f les applications

$$(3.2.3) \quad f_{[x]} : M \times M \rightarrow N \quad (m, m') \mapsto f_{[x]}(m, m') := f([m, m'] \cdot x) - [f(m), f(m')] \cdot x,$$

pour $x \in R_{ee}$.

Définition 3.2.2. Soit \underline{R} un anneau carré commutatif et soient M et N deux \underline{R} -BHP-modules, une application $f : M \rightarrow N$ est \underline{R} -BHP-quadratique si elle satisfait :

- (1) les images des défauts : $\text{Im}_{\underline{R}} d_f$, $\text{Im}_{\underline{R}} f_{(r)}$ et $\text{Im}_{\underline{R}} f_{[x]}$ sont \underline{R} -centrales dans $\text{Im}_{\underline{R}} f$, pour $r \in R_e$ et $x \in R_{ee}$.
- (2) le défaut additif d_f et les défauts des commutateurs $f_{[x]}$ sont \underline{R} -bilinéaires,
- (3) les défauts scalaires $f_{(r)}$ sont homogènes de degré 2 ^(a), i.e. $f_{(r)}(m \cdot s) = f_{(r)}(m) \cdot s^2$, pour $m \in M$, $r, s \in R_e$.

^a Nous n'utilisons pas ici l'appellation "quadratique homogène" car pour le moment rien ne dit que $f_{(r)}$ est \underline{R} -quadratique. On verra plus loin 3.2.18 que si f est \underline{R} -BHP-quadratique, les $f_{(r)}$ le sont aussi.

Définition 3.2.3. Soit \underline{R} un anneau carré commutatif et soient (M, A) et (N, B) deux \underline{R} -CP-modules, on appelle application \underline{R} -CP-quadratique de (M, A) dans (N, B) une application $f : M \rightarrow N$ qui satisfait :

- (1) l'image $f(A)$ et celles des défauts : $\text{Im}_{\underline{R}} d_f$, $\text{Im}_{\underline{R}} f_{(r)}$ et $\text{Im}_{\underline{R}} f_{[x]}$ sont contenues dans B , pour $r \in R_e$ et $x \in R_{ee}$,
- (2) le défaut additif d_f et les défauts des commutateurs $f_{[x]}$ sont \underline{R} -bilinéaires,
- (3) les défauts scalaires $f_{(r)}$ sont homogènes de degré 2, i.e. $f_{(r)}(m \cdot s) = f_{(r)}(m) \cdot s^2$,
- (4) tous les défauts s'annulent sur A , c.a.d.

$$d_f(M, A) = d_f(A, M) = 0$$

$$f_{(r)}(A) = 0$$

$$f_{[x]}(M, A) = f_{[x]}(A, M) = 0.$$

pour $m \in M$, $r, s \in R_e$ et $x \in R_{ee}$.

Puisque $f(A) \subset B$, que d_f est biadditif et que $d_f(M, A) = d_f(A, M) = 0$, l'application $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ est une "quadratic pair map" au sens de [6].

Remarquons qu'une application \underline{R} -BHP-quadratique où \underline{R} -CP-quadratique annule 0 car $d_f(0, 0) = 0$.

Exemple 3.2.4. On a vu (2.2.5) que R_e et R_{ee} sont des \underline{R} -BHP-modules quadratiques. L'application $H : R_e \rightarrow R_{ee}$ est \underline{R} -BHP-quadratique. On vérifie en effet que $d_H(r, s) = (s, r) \cdot H(2)$, $H_{[x]}(r, s) = HP((r, s) \cdot x)$, $H_{(r)}(s) = (s, s) \cdot H(r)$.

Exemple 3.2.5. Soit A un sous-groupe de R_e stable par multiplication à droite par R_e et tel que $P(R_{ee}) \subseteq A \subseteq \underline{Z}_{\underline{R}}(R_e)$, et soit B un sous- \underline{R} -module de R_{ee} . On a vu (2.2.5) que (R_e, A) et (R_{ee}, B) sont des \underline{R} -CP-modules quadratiques. Alors si $H(A) \subseteq B$ l'application $H : (R_e, A) \rightarrow (R_{ee}, B)$ est \underline{R} -CP-quadratique.

Exemple 3.2.6. Soit M un \underline{R} -BHP-module. Pour tout $t \in R_e$ la multiplication à droite $\mu_t : M \rightarrow M$, $\mu_t(m) = m \cdot t$ est une application \underline{R} -BHP quadratique. En effet, on a $d_{\mu_t}(m, n) = [m, n] \cdot H(t)$ qui est bien \underline{R} -bilinéaire et d'image \underline{R} -centrale. On a aussi $(\mu_t)_{(r)}(m) = m \cdot (rt - tr) = m \cdot P(y)$ pour un certain y . L'image est bien \underline{R} -centrale et on a $(\mu_t)_{(r)}(m \cdot s) = m \cdot s \cdot P(y) = m \cdot P(y) \cdot s^2 = (\mu_t)_{(r)}(m) \cdot s^2$. Enfin on a $(\mu_t)_{[x]}(m, n) = [m, n] \cdot (x \cdot (t - t^2))$ qui est \underline{R} -bilinéaire et d'image \underline{R} -centrale.

En particulier, si $M = R_e$, les multiplications à droite dans R_e sont des applications \underline{R} -BHP-quadratiques.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition 3.2.3.

Proposition 3.2.7. Soit $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ une application \underline{R} -CP-quadratique. Elle induit des morphismes de \overline{R} -modules

$$\overline{f} = \text{Gr}_1(f) : M/A \rightarrow N/B \quad \text{et} \quad f_2 = \text{Gr}_2(f) : A \rightarrow B$$

tels que $\overline{f}(\overline{m}) = \overline{f(m)}$ et $f_2(a) = f(a)$, pour $m \in M$ et $a \in A$.

Proposition 3.2.8. Soient M et N deux \underline{R} -BHP-modules, et $\varphi : M \times M \rightarrow \underline{Z}_{\underline{R}}(N)$ une application \underline{R} -bilinéaire. Alors φ s'annule sur $M \times [M]$ et $[M] \times M$. Elle définit donc une application \overline{R} -linéaire $\overline{\varphi} : \overline{M} \otimes_{\overline{R}} \overline{M} \rightarrow \underline{Z}_{\underline{R}}(N)$. L'ensemble $\underline{R}\text{-Bil}(M \times M, \underline{Z}_{\underline{R}}(N))$ des applications \underline{R} -bilinéaires de M dans le \underline{R} -centre de N est un \overline{R} -module.

Preuve. Soient $m, m', m'' \in M$ et $x \in R_{ee}$. Puisque φ est \underline{R} -bilinéaire, on a $\varphi([m, m'] \cdot x, m'') = [\varphi(m, m''), \varphi(m', m'')] \cdot x = 0$ puisque l'image de φ est dans le \underline{R} -centre de N . Donc l'application injective $\underline{R}\text{-Bil}(\overline{M} \times \overline{M}, \underline{Z}_{\underline{R}}(N)) \rightarrow \underline{R}\text{-Bil}(M \times M, \underline{Z}_{\underline{R}}(N))$ induite par la surjection $M \rightarrow \overline{M}$ est bijective. La preuve se termine grâce à la bijection naturelle entre $\underline{R}\text{-Bil}(\overline{M} \times \overline{M}, \underline{Z}_{\underline{R}}(N))$ et $\overline{R}\text{-mod}(\overline{M} \otimes_{\overline{R}} \overline{M}, \underline{Z}_{\underline{R}}(N))$. \square

Remarque 3.2.9. Soit $f : M \rightarrow N$ une application \underline{R} -BHP-quadratique. Les applications d_f et $f_{[x]}$ sont \underline{R} -bilinéaires et \underline{R} -centrales dans l'image. D'après 2.3.10 elles s'annulent si l'un de leurs arguments est dans $[M]$, autrement dit $d_f(M, [M]) = d_f([M], M) = 0$ et $f_{[x]}(M, [M]) = f_{[x]}([M], M) = 0$.

Exemple 3.2.10. Le commutateur pour la multiplication $R_e \times R_e \rightarrow R_e$, $(r, s) \mapsto rs - sr$ est une application bi- \underline{R} -BHP-quadratique. Montrons le pour la première variable: fixons s , alors $c_s(r) := rs - sr = \mu_s(r) - g_s(r)$. Puisque l'anneau \overline{R} est commutatif, l'image de c_s est incluse dans l'image de P , donc tous les défauts de c_s sont \underline{R} -centraux dans l'image de c_s . Comme le groupe additif de R_e est commutatif, $d_{c_s} = d_{\mu_s} - d_{g_s} = d_{\mu_s}$ puisque g_s est \underline{R} -BP-linéaire. Donc d_{c_s} est \underline{R} -bilinéaire. De même, on a

$$\begin{aligned} (c_s)_{[x]}(r, r') &= c_s([r, r'] \cdot x) - [c_s(r), c_s(r')] \cdot x \\ &= (\mu_s)_{[x]}(r, r') - (g_s)_{[x]}(r, r') + [rs, sr'] \cdot x + [sr, r's] \cdot x = (\mu_s)_{[x]}(r, r') + [r, r'] \cdot (x \cdot 2s^2), \end{aligned}$$

puisque g_s est \underline{R} -BHP-linéaire et en utilisant 3.1.3. D'après la proposition précédente, c_s est \underline{R} -bilinéaire. Enfin on a

$$\begin{aligned} (c_s)_{(t)}(r) &= c_s(rt) - c_s(r)t = \mu_s(rt) - g_s(rt) - (\mu_s(r)t + (-g_s(r))t) + [\mu_s(r), -g_s(r)] \cdot H(t) \\ &= (\mu_s)_{(t)}(r) - (g_s)_{(t)}(r) + [c_s(r), g_s(r)] \cdot H(t) = (\mu_s)_{(t)}(r), \end{aligned}$$

puisque g_s est \underline{R} -linéaire. Donc $(c_s)_{(t)}$ est quadratique homogène.

Explicitons maintenant les différentes conditions de la définition d'une application BHP-quadratique:

Lemme 3.2.11. Soit $f : M \rightarrow N$.

(1) le défaut additif d_f est \underline{R} -central dans $\text{Im}_{\underline{R}} f$ si et seulement si

$$(3.2.4) \quad [f(m + m'), f(n)] \cdot x = [f(m), f(n)] \cdot x + [f(m'), f(n)] \cdot x.$$

(2) le défaut scalaire $f_{(r)}$ est \underline{R} -central dans $\text{Im}_{\underline{R}} f$ si et seulement si

$$(3.2.5) \quad [f(m \cdot r), f(n)] \cdot x = ([f(m), f(n)] \cdot x) \cdot r.$$

(3) le défaut du commutateur $f_{[x]}$ est \underline{R} -central dans $\text{Im}_{\underline{R}} f$ si et seulement si

$$(3.2.6) \quad [f([m, m'] \cdot x), f(n)] \cdot y = 0.$$

Ces trois relations équivalent à dire que les applications $m \mapsto [f(m), n] \cdot x$ sont \underline{R} -linéaires pour $n \in \text{Im} f$ et $x \in R_{ee}$.

Preuve. (1) On doit avoir $[f(m + m') - f(m') - f(m), f(n)] \cdot x = 0$. L'additivité du crochet en la première variable (MC5) permet de conclure.

(2) On doit avoir $[f(m \cdot r) - f(m) \cdot r, f(n)] \cdot x = 0$. La même additivité et (MC6) donnent la relation cherchée.

(3) On doit avoir $[f([m, m'] \cdot x) - [f(m), f(m')] \cdot x, f(n)] \cdot y = 0$. La même additivité et (MC7) donnent la relation cherchée. \square

Lemme 3.2.12. Soit $f : M \rightarrow N$ telle que son défaut additif d_f soit \underline{R} -central dans $\text{Im}_{\underline{R}} f$.

(1) L'image du défaut additif est annulée par l'image de P .

(2) Le défaut d_f est biadditif si et seulement si

$$(3.2.7) \quad f(m + m' + m'') + f(m) + f(m') + f(m'') = f(m + m') + f(m' + m'') + f(m + m'') - [f(m'), f(m + m'')].$$

(3) Le défaut d_f est R_e -équivariant si et seulement si

$$(3.2.8) \quad f(m \cdot r + n \cdot s) = f(m+n) \cdot rs - f(n) \cdot rs - f(m) \cdot rs \\ + f(m \cdot r) + f(n \cdot s) - [f(m), f(n)] \cdot H(rs).$$

(4) Le défaut d_f commute aux commutateurs si et seulement si

$$(3.2.9) \quad f([m, m'] \cdot x + n) = f([m, m'] \cdot x) + f(n)$$

Preuve. (1) En effet, on a d'après MC3

$$d_f(m, m') \cdot P(x) = [d_f(m, m'), d_f(m, m')] \cdot x = 0,$$

puisque $d_f(m, m')$ est \underline{R} -central.

(2) Pour l'additivité en la première variable on doit avoir

$$\begin{aligned} d_f(m + m', m'') &= d_f(m, m'') + d_f(m', m'') \\ f(m + m' + m'') - f(m'') - f(m + m') &= d_f(m', m'') + d_f(m, m'') \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + d_f(m', m'') + f(m'') \\ &\quad + f(m + m'') - f(m'') - f(m) \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + f(m' + m'') - f(m'') \\ &\quad - f(m') + f(m'') + f(m + m'') - f(m'') - f(m) \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + f(m' + m'') - f(m') \\ &\quad + [f(m''), f(m')] + f(m + m'') - f(m'') - f(m) \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + f(m' + m'') - f(m') \\ &\quad + f(m + m'') + [f(m''), f(m')] - f(m'') - f(m) \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + f(m' + m'') + f(m + m'') + [f(m + m''), f(m')] \\ &\quad + [f(m''), f(m')] - f(m') - f(m'') - f(m) \\ f(m + m' + m'') &= f(m + m') + f(m' + m'') + f(m + m'') - \\ &\quad [f(m'), f(m + m'')] - f(m'') - f(m') - f(m). \end{aligned}$$

Un calcul analogue pour la seconde variable aboutit à la même relation, ce qui montre la deuxième propriété.

(3) Remarquons tout d'abord que puisque $rs - sr \in \text{Im } P$ on a, en utilisant (1), $d_f(m, m') \cdot rs = d_f(m, m') \cdot sr$. On doit alors avoir

$$\begin{aligned} d_f(m \cdot r, n \cdot s) &= d_f(m, n) \cdot rs = (f(m+n) - f(n) - f(m)) \cdot rs \\ &= f(m+n) \cdot rs + (-f(n)) \cdot rs + (-f(m)) \cdot rs + ([f(m+n), -f(n)] \cdot H(rs) \\ &\quad + [f(m+n) - f(m)] \cdot H(rs) + [-f(n), -f(m)] \cdot H(rs)) \\ &= f(m+n) \cdot rs - f(n) \cdot rs + [f(n), f(n)] \cdot H(rs) - f(m) \cdot rs + [f(m), f(m)] \cdot H(rs) \\ &\quad - [f(m), f(n)] \cdot H(rs) - [f(n), f(n)] \cdot H(rs) - [f(m), f(m)] \cdot H(rs) \\ &= f(m+n) \cdot rs - f(n) \cdot rs - f(m) \cdot rs + f(m \cdot r) + f(n \cdot s) - [f(m), f(n)] \cdot H(rs) \end{aligned}$$

Ce qui montre la troisième propriété.

(4) On doit avoir

$$d_f([m, m'] \cdot x, n) = [d_f(m, n), d_f(m', n)] \cdot x$$

Or le second membre est nul puisque l'image de d_f est \underline{R} -centrale. On développe alors le premier membre:

$$d_f([m, m'] \cdot x, n) = 0 = f([m, m'] \cdot x + n) - f(n) - (f([m, m'] \cdot x))$$

ce qui donne la dernière équation. \square

Lemme 3.2.13. Soit $f : M \rightarrow N$

(1) Si le défaut d_f est \underline{R} -bilinéaire et \underline{R} -central dans $\text{Im } \underline{R}f$ alors les défauts des commutateurs sont biadditifs.

(2) Si les défauts $f_{(r)}$ sont \underline{R} -centraux dans $\text{Im}_{\underline{R}} f$ alors les défauts des commutateurs sont R_e -biéquivariants si et seulement si $f_{(r)}([M]) = 0$ pour tout $r \in R_e$, c.a.d. si et seulement si

$$(3.2.10) \quad f([m, n] \cdot x \cdot r) = (f([m, n] \cdot x)) \cdot r$$

(3) Si les défauts $f_{[x]}$ sont \underline{R} -centraux dans $\text{Im}_{\underline{R}} f$ alors ils sont R_{ee} -équivariants.

Preuve. (1) En effet, en utilisant successivement 3.2.11(1) et 3.2.12(4), on a:

$$\begin{aligned} f_{[x]}(m, m' + m'') &= f([m, m' + m''] \cdot x) - [f(m), f(m' + m'')] \cdot x \\ &= f([m, m'] \cdot x + [m, m''] \cdot x) - [f(m), f(m') + f(m'')] \cdot x \\ &= f([m, m'] \cdot x) + f([m, m''] \cdot x) - ([f(m), f(m')] \cdot x + [f(m), f(m'')] \cdot x) \\ &= f([m, m'] \cdot x) - [f(m), f(m')] \cdot x + f([m, m''] \cdot x) - [f(m), f(m'')] \cdot x \\ &= f_{[x]}(m, m') + f_{[x]}(m, m''). \end{aligned}$$

Ce qui montre la première partie du lemme.

(2) On a

$$f_{(r)}([m, m'] \cdot x) = f([m, m'] \cdot x \cdot r) - f([m, m'] \cdot x) \cdot r$$

Or puisque \underline{R} est commutatif,

$$([m, m'] \cdot x) \cdot r = [m, m'] \cdot (x \cdot r) = [m, m'] \cdot ((r, 1) \cdot x) = [m \cdot r, m'] \cdot x,$$

donc

$$\begin{aligned} f_{(r)}([m, m'] \cdot x) &= f([m \cdot r, m'] \cdot x) - f([m, m'] \cdot x) \cdot r \\ &= f_{[x]}(m \cdot r, m') + [f(m \cdot r), f(m')] \cdot x \\ &\quad - (f_{[x]}(m, m') + [f(m), f(m')] \cdot x) \cdot r \end{aligned}$$

Comme $[f(m), f(m')] \cdot x$ est central, on a

$$-(f_{[x]}(m, m') + [f(m), f(m')] \cdot x) \cdot r = -[f(m), f(m')] \cdot (x \cdot r) - f_{[x]}(m, m') \cdot r,$$

et en utilisant la relation (3.2.5) on obtient:

$$f_{(r)}([m, m'] \cdot x) = f_{[x]}(m \cdot r, m') - (f_{[x]}(m, m')) \cdot r.$$

(3) Supposons maintenant que les images des $f_{[x]}$ sont centrales dans l'image de f . On a d'une part d'après 3.2.11(3)

$$f_{[x]}([m, m'] \cdot y, n) = f([m, m'] \cdot y, n) \cdot x - [f([m, m'] \cdot y), f(n)] \cdot x = -[f([m, m'] \cdot y), f(n)] \cdot x = 0,$$

et d'autre part:

$$[f_{[x]}(m, n), f_{[x]}(m', n)] \cdot y = 0. \quad \square$$

On peut résumer ces trois lemmes sous la forme:

Proposition 3.2.14. Une application $f : M \rightarrow N$ est \underline{R} -BHP-quadratique si et seulement si elle vérifie les relations:

$$(3.2.11a) \quad [f(m + m'), f(n)] \cdot x = [f(m), f(n)] \cdot x + [f(m'), f(n)] \cdot x,$$

$$(3.2.11b) \quad [f(m \cdot r), f(n)] \cdot x = ([f(m), f(n)] \cdot x) \cdot r,$$

$$(3.2.11c) \quad [f([m, m'] \cdot x), f(n)] \cdot y = 0,$$

$$(3.2.11d) \quad f(m + m' + m'') + f(m) + f(m') + f(m'') = f(m + m') + f(m' + m'') + f(m + m'') - [f(m'), f(m + m'')],$$

$$(3.2.11e) \quad f(m \cdot r + n \cdot s) = f(m + n) \cdot rs - f(n) \cdot rs - f(m) \cdot rs + f(m \cdot r) + f(n \cdot s) - [f(m), f(n)] \cdot H(rs),$$

$$(3.2.11f) \quad f([m, m'] \cdot x + n) = f([m, m'] \cdot x) + f(n)$$

$$(3.2.11g) \quad f(m \cdot sr) - (f(m \cdot s)) \cdot r = (f(m \cdot r) - (f(m)) \cdot r) \cdot s^2,$$

$$(3.2.11h) \quad f([m, n] \cdot x \cdot r) = (f([m, n] \cdot x)) \cdot r,$$

pour tous $m, m', m'', n \in M$, $r, s \in R_e$ et $x, y \in R_{ee}$.

Il résulte de cette proposition et plus particulièrement du lemme 3.2.13

Corollaire 3.2.15. *Une application $f : M \rightarrow N$ entre deux \underline{R} -BHP-modules est \underline{R} -BHP-quadratique si et seulement si elle satisfait les propriétés suivantes:*

- (1) les applications $m \mapsto [f(m), n] \cdot x$ sont \underline{R} -linéaires pour $n \in \text{Im } f$ et $x \in R_e$.
- (2) le défaut additif d_f est \underline{R} -bilinéaire,
- (3) les défauts scalaires $f_{(r)}$ sont quadratiques homogènes, i.e. $f_{(r)}(m \cdot s) = f_{(r)}(m) \cdot s^2$, pour $m \in M$, $r, s \in R_e$,
- (4) on a $f_{(r)}([M]) = 0$.

Corollaire 3.2.16. *Une application $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ entre deux \underline{R} -CP-modules est \underline{R} -CP-quadratique si et seulement si elle satisfait les propriétés suivantes:*

- (1) l'image $f(A)$ et les images du défaut additif et des défauts scalaires, $\text{Im}_{\underline{R}} d_f$ et $\text{Im}_{\underline{R}} f_{(r)}$, sont contenues dans B , pour $r \in R_e$.
- (2) le défaut additif d_f est \underline{R} -bilinéaire,
- (3) les défauts scalaires $f_{(r)}$ sont quadratiques homogènes, i.e. $f_{(r)}(m \cdot s) = f_{(r)}(m) \cdot s^2$, pour $m \in M$, $r, s \in R_e$,
- (4) le défaut additif et les défauts scalaires s'annulent sur A :

$$d_f(M, A) = d_f(A, M) = 0 = f_{(r)}(A)$$

pour $m \in M$ et $r, s \in R_e$.

On notera que la caractérisation d'une application \underline{R} -CP-quadratique dans le corollaire 3.2.16 n'implique aucune condition portant sur les défauts des commutateurs ; en effet, leur propriétés souhaitées découlent des conditions portant sur les autres défauts : $\text{Im}_{\underline{R}} f_{[x]} \subset B$ car $f(A) \subset B \supset [N]$, l'application $f_{[x]}$ annule A en chaque variable car les commutateurs de M resp. de N annulent A resp. B et donc $f(A)$ en chaque variable, et $f_{[x]}$ est \underline{R} -bilinéaire d'après le lemme 3.2.13.

Lemme 3.2.17. [Lemme des 3 défauts] *Soit $f : M \rightarrow N$ une application vérifiant les conditions (1) et (2) de 3.2.2, et $r \in R_e$ alors*

$$d_{f_{(r)}}(m, m') = f_{[H(r)]}(m, m') + d_f(m, m') \cdot (r^2 - r).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} d_{f_{(r)}}(m, m') &= f_{(r)}(m + m') - f_{(r)}(m') - f_{(r)}(m) \\ &= f((m + m') \cdot r) - (f(m + m')) \cdot r - f_{(r)}(m') - f_{(r)}(m) \\ &= f(m \cdot r + m' \cdot r + [m, m'] \cdot H(r)) \\ &\quad - (f(m) + f(m') + d_f(m, m')) \cdot r - f_{(r)}(m') - f_{(r)}(m) \\ &= f(m \cdot r + m' \cdot r) + f([m, m'] \cdot H(r)) \\ &\quad - (f(m) + f(m')) \cdot r - d_f(m, m') \cdot r - f_{(r)}(m') - f_{(r)}(m) \\ &= d_f(m \cdot r, m' \cdot r) + f(m \cdot r) + f(m' \cdot r) + f([m, m'] \cdot H(r)) \\ &\quad - [f(m), f(m')] \cdot H(r) - f(m') \cdot r - f(m) \cdot r \\ &\quad - d_f(m, m') \cdot r - f_{(r)}(m') - f_{(r)}(m) \end{aligned}$$

puisque $f_{(r)}$ et $f_{[H(r)]}$ sont \underline{R} -centraux dans $\text{Im}_{\underline{R}} f$:

$$\begin{aligned} d_{f_{(r)}}(m, m') &= f_{[H(r)]}(m, m') + d_f(m, m') \cdot r^2 + f(m \cdot r) - f(m) \cdot r \\ &\quad - d_f(m, m') \cdot r - f_{(r)}(m) \\ &= f_{[H(r)]}(m, m') + d_f(m, m') \cdot r^2 - d_f(m, m') \cdot r \\ &= f_{[H(r)]}(m, m') + d_f(m, m') \cdot (r^2 - r) \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.18. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application \underline{R} -BHP-quadratique. Les défauts scalaires $f_{(r)} : M \rightarrow N$ sont \underline{R} -BHP-quadratiques.*

Preuve. D'après le lemme précédent et puisque les défauts additifs et des commutateurs de f commutent entre eux, les défauts $d_{(r)}$ sont R_e -bilinéaires. \square

Le corollaire 3.2.16 et la proposition 3.2.19 permettent de donner une caractérisation plus concise d'une application \underline{R} -CP-quadratique, comme suit.

Proposition 3.2.20. *Soient (M, A) et (N, B) deux \underline{R} -CP-modules et $f : M \rightarrow N$ une application. Alors $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ est \underline{R} -CP-quadratique si et seulement si elle satisfait les propriétés suivantes.*

- (1) $f(A) \subset B$;
- (2) l'application $d_f : M \times M \rightarrow N$ se factorise par un morphisme de \overline{R} -modules

$$\overline{d}_f : \overline{M} \otimes_{\overline{R}} \overline{M} \longrightarrow B,$$

i.e. $d_f(m, m') = i_B \overline{d}_f(\overline{m} \otimes \overline{m}')$ où $i_B : B \hookrightarrow N$;

- (3) pour $r \in R_e$, l'application $f_{(r)} : M \rightarrow N$ se factorise par un morphisme de \overline{R} -modules

$$\overline{f}_{(r)} : \Gamma_{\overline{R}}^2(M) \longrightarrow B,$$

i.e. $f_{(r)} = i_B \overline{f}_{(r)} \gamma_2$ où $\Gamma_{\overline{R}}^2(M)$ est le terme homogène de degré 2 de l'algèbre des puissances divisées sur M , cf. [12] ou [9] où sa structure a été déterminée pour tout anneau commutatif \overline{R} .

Proposition 3.2.21. *Soit $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ une application \underline{R} -CP-quadratique, l'application $f : M \rightarrow N$ est \underline{R} -BHP-quadratique.*

Preuve. C'est immédiat: puisque $B \subset Z_{\underline{R}}(N)$, il centralise aussi $f(M)$. \square

Proposition 3.2.22. *Inversement soit $f : M \rightarrow N$ une application \underline{R} -BHP-quadratique. L'application $f : (M, [M]) \rightarrow (\text{Im}_{\underline{R}} f, Z_{\underline{R}}(\text{Im}_{\underline{R}} f))$ est \underline{R} -CP-quadratique.*

Preuve. Remarquons d'abord que, par 2.2.18, $(M, [M])$ et $(\text{Im}_{\underline{R}} f, Z_{\underline{R}}(\text{Im}_{\underline{R}} f))$ sont des \underline{R} -CP-modules. Appliquant les corollaires 3.2.15 et 3.2.16 il suffit de montrer que $d_f(M, [M]) = d_f([M], M) = f_{[x]}(M, [M]) = f_{[x]}([m], M) = 0$, ce qui découle de 3.2.9, et que $f([M]) \subseteq Z_{\underline{R}}(\text{Im}_{\underline{R}} f)$. Or on a

$$f([m, m'] \cdot x, f(m'')) \cdot y = f([m, m'] \cdot x, m'') \cdot y - f_{[y]}([m, m'] \cdot x, m'').$$

Le premier terme de la différence est nul par MC7, et le second par la remarque 3.2.9. \square

Remarque 3.2.23. Soit f une application \underline{R} -BHP-quadratique, on peut vérifier que $d_{f_{(2)}}(m, m') = d_f(m, m') + d_f(m', m)$. On en déduit que lorsque $r = 2$, la formule du lemme 3.2.17 se réduit à $d_f(m', m) - d_f(m, m') = f([m', m]) - [f(m'), f(m)]$, et on retrouve la formule (9) de [6].

Exemple 3.2.24. Lorsque la multiplication dans R_e n'est pas commutative, l'application $R_e \rightarrow R_e$, $r \mapsto r^2$ n'est pas toujours quadratique. Prenons par exemple l'anneau carré $\underline{R} = \bigotimes_{\underline{R}} (2.4.5)$. On peut vérifier que la condition de biadditivité du défaut additif (3.2.11d) est satisfaite pour les éléments (r, s) , (r', s') et (r'', s'') de R_e si et seulement si $2rr's'' + 2rs's'' + 2sr'r'' = 0$ c'est à dire si et seulement si R est de caractéristique 2. La condition (3.2.11f) pour les éléments $m = m' = (1, 0)$, $m'' = (r, 0)$ et $x = (1, 0)$ donne $r^2 + r = 0$. Par conséquent l'application $R_e \rightarrow R_e$, $r \mapsto r^2$ est quadratique si et seulement si l'anneau R est booléen, mais alors R_e est lui même au anneau commutatif.

3.2.25. *Applications quadratiques entre modules sur un anneau commutatif classique.* Soient R un anneau commutatif classique, $\underline{R} = (R \rightarrow 0 \rightarrow R)$ l'anneau carré associé et M et N deux BHP-modules (cf. 2.4.1) Une application $f : M \rightarrow N$ est \underline{R} -BHP-quadratique si et seulement si elle est quadratique au sens de [9]: les conditions portant sur les défauts des crochets sont triviaux et la \underline{R} -bilinéarité se réduit à la R -bilinéarité.

De même une application \underline{R} -CP-quadratique $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ est une application R -quadratique au sens de [9] vérifiant les conditions (1) et (4) de 3.2.3, c'est à dire R -quadratique au sens de [9], quadratique dans la catégorie \mathbf{CP} ([6]) et vérifiant la condition (4) de 3.2.3.

Proposition 3.2.19. *Soit $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ une application \underline{R} -CP-quadratique. Les défauts scalaires $f_{(r)} : (M, A) \rightarrow (N, B)$ sont \underline{R} -CP-quadratiques.*

Preuve. Puisque $f_{(r)}(A) = 0$, les conditions supplémentaires de la définition sont immédiatement satisfaites. \square

3.2.26. *Applications quadratiques entre modules sur l'anneau \mathbb{Z}_{nil} .* Soient $\mathbb{Z}_{\text{nil}} = (\mathbb{Z}_e \xrightarrow{H} \mathbb{Z}_{ee} \xrightarrow{P} \mathbb{Z}_e)$ (2.4.2), M et N deux \mathbb{Z}_{nil} -BHP-modules, c'est à dire deux groupes nilpotents de classe ≤ 2 , et $f : M \rightarrow N$ une application \mathbb{Z}_{nil} -BHP-quadratique. D'après 3.2.23 on a

$$f_{[1]}(m, m') = d_f(m, m') - d_f(m', m),$$

par conséquent les défauts des commutateurs sont biadditifs et \mathbb{Z}_{nil} -bilinéaires. On vérifie même que

$$f_{[1]}(m, [n, n']) = d_f(m, [n, n']) - d_f([n, n'], m) = 0,$$

en effet, puisque d_f est bilinéaire et d'image centrale:

$$\begin{aligned} d_f(m, [n, n']) &= d_f(m, n + n' - n - n') \\ &= d_f(m, n) + d_f(m, n') - d_f(m, n) - d_f(m, n') = 0. \end{aligned}$$

On a donc pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $f_{[r]}(M, [M]) = f_{[r]}([M], M) = 0$. Il en résulte qu'une application \mathbb{Z}_{nil} -BHP-quadratique $f : M \rightarrow N$ est simplement une application quadratique entre groupes nilpotents de classe 2. En fait, toute application quadratique entre groupes $f : G \rightarrow H$ se ramène à une application quadratique entre groupes nilpotents de classe 2, "à un morphisme entre les troisièmes termes des suites centrales descendantes près", comme suit : notons $\gamma_3(G) = [G, [G, G]]$, $\overline{G} = G/\gamma_3(G)$, et $\pi_G : G \rightarrow \overline{G}$ la projection canonique.

Proposition 3.2.27. *Soient G un groupe et $q : G \rightarrow Q(G)$ son application quadratique universelle [6]. Alors la restriction $q_3 : \gamma_3(G) \rightarrow Q(G)$ de q à $\gamma_3(G)$ est un isomorphisme sur $\gamma_3(Q(G))$.*

Preuve. L'application q_3 est un homomorphisme car d_q annule $[G, G]$ en chaque variable. De plus, pour $a, b, c \in G$, on a $q[a, [b, c]] = [qa, [qb, qc]]$, cf. [10], donc $\gamma_3(Q(G)) = q(\gamma_3(G))$. Or q est injective car elle admet une retraction, à savoir, l'application $\overline{1}_G : Q(G) \rightarrow G$ obtenue en appliquant la propriété universelle de q à l'application identique 1_G de G qui est bien quadratique. \square

Corollaire 3.2.28. *Toute application quadratique entre groupes $f : G \rightarrow H$ induit un diagramme commutatif de homomorphismes de groupes dont les lignes sont exactes :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \gamma_3(G) & \xrightarrow{q_3} & Q(G) & \xrightarrow{Q(\pi_G)} & Q(\overline{G}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_3 & & \downarrow \overline{f} & & \downarrow \overline{\overline{f}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \gamma_3(H) & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\pi_H} & \overline{H} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On remarque que $\overline{\overline{f}}$ correspond à une application quadratique de \overline{G} dans \overline{H} , donc entre groupes nilpotents de classe ≤ 2 .

Preuve. L'application \overline{f} est obtenue en appliquant la propriété universelle de q à f . D'après la proposition 3.2.27 il ne reste qu'à montrer que $\text{Ker}(Q(\pi_G)) = \gamma_3(Q(G))$. Rappelons de [6] que l'on a une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow G^{ab} \otimes G^{ab} \xrightarrow{w_G} Q(G) \xrightarrow{\overline{1}_G} G \longrightarrow 0.$$

Elle donne naissance au diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} G^{ab} \otimes G^{ab} & \xrightarrow{\pi_{Q(G)} w_G} & Q(G)/\gamma_3(Q(G)) & \xrightarrow{\overline{\pi_G 1_G}} & G/\gamma_3(G) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \overline{Q(\pi_G)} & & \parallel & & \\ 0 \longrightarrow & \overline{G}^{ab} \otimes \overline{G}^{ab} & \xrightarrow{w_{\overline{G}}} & Q(\overline{G}) & \xrightarrow{\overline{1}_{\overline{G}}} & \overline{G} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Notons que l'application $\overline{Q(\pi_G)}$ est bien définie d'après la proposition 3.2.27. On en déduit que $\pi_{Q(G)} w_G$ est injective et que $\overline{Q(\pi_G)}$ est donc un isomorphisme. \square

3.3. Module et catégorie des applications CP-quadratiques.

Lemme 3.3.1. *Soit \underline{R} un anneau carré non nécessairement commutatif, soient $A \subset M$ deux ensembles et $\underline{N} = (N, B)$ un \underline{R} -CP-module quadratique. Désignons par $\text{Appl}_{A/B}(M, N)$ l'ensemble des applications de M dans N telles que l'image de A soit contenue dans B et par $\text{Appl}_{A/0}(M, B)$ le sous-ensemble formé des applications de M dans B telles que l'image de A soit 0 . Définissons point par point sur ces ensembles une addition, une action de R_e et une action de R_{ee} . Alors le couple*

$$\text{Appl}(\underline{M}, \underline{N}) := (\text{Appl}_{A/B}(M, N), \text{Appl}_{A/0}(M, B))$$

est un \underline{R} -CP-module quadratique.

Preuve. Les applications $f + g$, $-f$, $f \cdot r$ et $[f, g] \cdot x$ sont définies par

$$\begin{aligned} (f + g)(m) &= f(m) + g(m) & (-f)(m) &= -(f(m)) \\ (f \cdot r)(m) &= (f(m)) \cdot r & ([f, g] \cdot x)(m) &= [f(m), g(m)] \cdot x. \end{aligned}$$

L'ensemble $\text{Appl}_{A/B}(M, N)$ est clairement un sous-groupe du groupe des applications de M dans N , et $\text{Appl}_{A/0}(M, B)$ en est un sous-groupe. Puisque les opérations sont définies point par point elles héritent de propriétés du couple (N, B) , ce qui montre la proposition. \square

Proposition 3.3.2. *Soient $\underline{M} = (M, A)$ et $\underline{N} = (N, B)$ deux \underline{R} -CP-modules quadratiques, et soit $\underline{B} := (B, 0)$. Le couple*

$$\underline{R}\text{-Quad}(\underline{M}, \underline{N}) := (\underline{R}\text{-CP-quad}(\underline{M}, \underline{N}), \underline{R}\text{-CP-quad}(\underline{M}, \underline{B}))$$

muni des opérations naturelles est un \underline{R} -CP-module quadratique.

Preuve. Montrons que $\underline{R}\text{-CP-quad}(\underline{M}, \underline{N})$ est un sous-groupe du groupe des applications de M dans N , c.a.d. que $f + g$ et $-f$ sont des applications \underline{R} -CP-quadratiques si f et g le sont. On a

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \in B \quad (-f)(a) = -(f(a)) \in B.$$

$$\begin{aligned} d_{f+g}(m, m') &= (f + g)(m + m') - (f + g)(m') - (f + g)(m) \\ &= f(m + m') + g(m + m') - g(m') - f(m') - g(m) - f(m) \\ &= f(m + m') + d_g(m, m') + [f(m'), g(m)] - f(m') - f(m) \\ &= d_f(m, m') + d_g(m, m') + [f(m'), g(m)] \in B. \end{aligned}$$

En prenant $g = -f$ on en déduit

$$d_{-f}(m, m') = -d_f(m, m') - [f(m), f(m')] \in B.$$

$$\begin{aligned} (f + g)_{(r)}(m) &= (f + g)(m \cdot r) - ((f + g)(m)) \cdot r \\ &= f(m \cdot r) + g(m \cdot r) - (f(m) + g(m)) \cdot r \\ &= f(m \cdot r) + g(m \cdot r) - g(m) \cdot r - f(m) \cdot r - [f(m), g(m)] \cdot H(r) \\ &= f(m \cdot r) + g_{(r)}(m) - f(m) \cdot r - [f(m), g(m)] \cdot H(r) \\ &= f_{(r)}(m) + g_{(r)}(m) - [f(m), g(m)] \cdot H(r) \in B. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$(-f)_{(r)}(m) = -f_{(r)}(m) - [f(m), f(m)] \cdot H(r) \in B.$$

Ce qui montre que les applications $f + g$ et $-f$ satisfont les conditions du (1) du corollaire 3.2.16. On en déduit aussi qu'elles satisfont les conditions (4) car $f(A) \subset B \subset \underline{Z}_{\underline{R}}(N)$.

Les calculs ci-dessus montrent que les défauts additifs de $f + g$ et $-f$ sont des combinaisons linéaires d'applications \underline{R} -bilinéaires de M dans B . D'après la proposition 3.2.8 elles sont aussi \underline{R} -bilinéaires, ce qui démontre la condition (2) du corollaire 3.2.16.

Montrons la condition (3). D'après les calculs ci-dessus, et en utilisant 3.2.14(b) on a:

$$\begin{aligned} (f + g)_{(r)}(m \cdot s) &= f_{(r)}(m \cdot s) + g_{(r)}(m \cdot s) - [f(m \cdot s), g(m \cdot s)] \cdot H(r) \\ &= f_{(r)}(m) \cdot s^2 + g_{(r)}(m) \cdot s^2 - ([f(m), g(m)] \cdot H(r)) \cdot s^2 \\ &= (f_{(r)}(m) + g_{(r)}(m) - [f(m), g(m)] \cdot H(r)) \cdot s^2 = ((f + g)_{(r)}(m)) \cdot s^2, \end{aligned}$$

la factorisation se faisant sans terme correctif puisque tous les termes sont dans B . On a également:

$$\begin{aligned} (-f)_{(r)}(m \cdot s) &= -f_{(r)}(m \cdot s) - [f(m \cdot s), f(m \cdot s)] \cdot H(r) \\ &= -f_{(r)}(m) \cdot s^2 - ([f(m), f(m)] \cdot H(r)) \cdot s^2 \\ &= ((-f)_{(r)}(m)) \cdot s^2. \end{aligned}$$

On a donc montré que $(\underline{R}\text{-CP-quad}(\underline{M}, \underline{N}), \underline{R}\text{-CP-quad}(\underline{M}, \underline{B}))$ est un sous- \underline{R} -CP-module quadratique de $(\text{Appl}_{A/B}(M, N), \text{Appl}_{A/0}(M, B))$. \square

Proposition 3.3.3. *Soient $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ et $g : (N, B) \rightarrow (L, C)$ deux applications \underline{R} -CP-quadratiques. L'application composée $g \circ f : (M, A) \rightarrow (L, C)$ est \underline{R} -CP-quadratique.*

Preuve. D'après [6] le défaut additif de $g \circ f$ est donné par

$$(3.3.1) \quad d_{g \circ f}(m, m') = gd_f(m, m') + d_g(f(m), f(m')).$$

Donc $d_{g \circ f}$ a son image dans C , annule A en chaque variable, et est \underline{R} -bilinéaire d'après les propositions 3.2.7 et 3.2.20.

Considérons les défauts scalaires $(g \circ f)_{(r)}$. On a

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{(r)}(m) &= (g \circ f)(m \cdot r) - ((g \circ f)(m)) \cdot r = g(f(m \cdot r)) - (g(f(m))) \cdot r \\ &= g(f_{(r)}(m) + f(m) \cdot r) - (g(f(m))) \cdot r \\ &= g(f_{(r)}(m)) + g(f(m) \cdot r) - (g(f(m))) \cdot r + d_g(f_{(r)}(m), f(m) \cdot r) \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul puisque son premier argument est dans B , donc

$$(3.3.2) \quad (g \circ f)_{(r)}(m) = g(f_{(r)}(m)) + g_{(r)}(f(m)).$$

Ce qui montre que $(g \circ f)_{(r)}$ a son image dans C et s'annule si m est dans A . Enfin on a

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{(r)}(m \cdot s) &= g(f_{(r)}(m \cdot s)) + g_{(r)}(f(m \cdot s)) \\ &= g(f_{(r)}(m) \cdot s^2) + g_{(r)}(f_{(s)}(m) + f(m) \cdot s) \\ &= g(f_{(r)}(m)) \cdot s^2 + g_{(s^2)}(f_{(r)}(m)) + g_{(r)}(f_{(s)}(m)) \\ &\quad + g_{(r)}(f(m) \cdot s) + d_{g_{(r)}}(f_{(s)}(m), f(m) \cdot s) \end{aligned}$$

Or le deuxième, le troisième et le cinquième terme sont nuls puisque $f_{(r)}(m)$ et $f_{(s)}(m)$ sont dans B , donc

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{(r)}(m \cdot s) &= g(f_{(r)}(m)) \cdot s^2 + g_{(r)}(f(m) \cdot s) \\ &= g(f_{(r)}(m)) \cdot s^2 + g_{(r)}(f(m)) \cdot s^2 = (g \circ f)_{(r)}(m) \cdot s^2 \end{aligned}$$

Pour des usages futurs, déterminons enfin les défauts $(g \circ f)_{[x]}$. On a

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{[x]}(m, m') &= (g \circ f)([m, m'] \cdot x) - [(g \circ f)(m), (g \circ f)(m')] \cdot x \\ &= g(f([m, m'] \cdot x)) - [g(f(m)), g(f(m'))] \cdot x \\ &= g(f_{[x]}(m, m')) + [f(m), f(m')] \cdot x - [g(f(m)), g(f(m'))] \cdot x \\ &= g(f_{[x]}(m, m')) + g([f(m), f(m')] \cdot x) - [g(f(m)), g(f(m'))] \cdot x \\ &\quad + d_g(f_{[x]}(m, m'), [f(m), f(m')] \cdot x) \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul puisque son second argument est dans B , donc

$$(3.3.3) \quad (g \circ f)_{[x]}(m, m') = g(f_{[x]}(m, m')) + g_{[x]}(f(m), f(m')) \quad \square$$

Proposition 3.3.4. *Soient $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ et $g : (N, B) \rightarrow (L, C)$ deux applications \underline{R} -CP-quadratiques. L'application*

$$f^* : \underline{R}\text{-Quad}((N, B), (L, C)) \rightarrow \underline{R}\text{-Quad}((M, A), (L, C)) \quad g \mapsto g \circ f$$

est \underline{R} -CP-linéaire. Et l'application

$$g_* : \underline{R}\text{-Quad}((M, A), (N, B)) \rightarrow \underline{R}\text{-Quad}((M, A), (L, C)) \quad f \mapsto g \circ f$$

est \underline{R} -CP-quadratique.

Preuve. Montrons que f^* est additive. On a

$$\begin{aligned} (f^*(g_1 + g_2))(m) &= ((g_1 + g_2) \circ f)(m) = (g_1 + g_2)(f(m)) = g_1(f(m)) + g_2(f(m)) \\ &= (g_1 \circ f)(m) + (g_2 \circ f)(m) = (g_1 \circ f + g_2 \circ f)(m) = (f^*(g_1) + f^*(g_2))(m). \end{aligned}$$

Montrons que f^* est R_e -équivariante. On a

$$(f^*(g \cdot r))(m) = ((g \cdot r) \circ f)(m) = (g \cdot r)(f(m)) = g(f(m)) \cdot r = (f^*(g))(m) \cdot r = ((f^*(g)) \cdot r)(m).$$

Pour montrer que f^* est \underline{R} -linéaire il reste à montrer que f^* conserve les crochets. On a

$$\begin{aligned} (f^*([g_1, g_2] \cdot x))(m) &= ([g_1, g_2] \cdot x)(f(m)) = [g_1(f(m)), g_2(f(m))] \cdot x \\ &= [(f^*(g_1))(m), (f^*(g_2))(m)] \cdot x = ((f^*(g_1), f^*(g_2))) \cdot x(m). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que g_* est \underline{R} -CP-quadratique. On a

$$\begin{aligned} (d_{g_*}(f_1, f_2))(m) &= (g_*(f_1 + f_2) - g_*(f_2) - g_*(f_1))(m) = (g(f_1 + f_2))(m) - (g(f_2))(m) - (g(f_1))(m) \\ &= g(f_1(m) + f_2(m)) - g(f_2(m)) - g(f_1(m)) \\ &= g(f_1(m)) + g(f_2(m)) + d_g(f_1(m), f_2(m)) - g(f_2(m)) - g(f_1(m)) \\ &= d_g(f_1(m), f_2(m)) \end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que d_{g_*} est \underline{R} -bilinéaire en les variables f_1 et f_2 , qu'elle s'annule si l'image de f_1 ou celle de f_2 est dans B , que son image est constituée d'applications de M dans C . Il reste à étudier les défauts scalaires.

$$(g_*)_{(r)}(f) = g_*(f \cdot r) - (g_*(f)) \cdot r = g \circ (f \cdot r) - (g \circ f) \cdot r.$$

$$(g_*)_{(r)}(f)(m) = g((f \cdot r)(m)) - ((g \circ f) \cdot r)(m) = g(f(m) \cdot r) - (g(f(m)) \cdot r) = g_{(r)}(f(m))$$

Ce qui assure que $(g_*)_{(r)}$ s'annule si l'image de f est dans B et que l'image de $(g_*)_{(r)}(f)$ est dans C . Enfin on a

$$\begin{aligned} (g_*)_{(r)}(f)(m \cdot s) &= g_{(r)}(f(m \cdot s)) = g_{(r)}(f(m) \cdot s + f_{(s)}(m)) \\ &= g_{(r)}(f(m) \cdot s) + g_{(r)}(f_{(s)}(m)) + d_{g_{(r)}}(f(m) \cdot s, f_{(s)}(m)). \end{aligned}$$

Dans cette somme on remarque que $f_{(s)}(m) \in B$ d'après 3.2.3 (1). Il en résulte d'une part que le deuxième terme est nul d'après 3.2.3 (4), et que le dernier terme est aussi nul car $g_{(r)}$ est quadratique d'après 3.2.19. On a donc

$$(3.3.4) \quad (g_*)_{(r)}(f)(m \cdot s) = g_{(r)}(f(m) \cdot s)$$

En prenant $s = 1$ on obtient pour $t \in R_e$

$$\begin{aligned} (g_*)_{(r)}(f \cdot t)(m) &= g_{(r)}((f \cdot t)(m)) = g_{(r)}(f(m) \cdot t) = g_{(r)}(f(m)) \cdot t^2 = (g_*)_{(r)}(f)(m) \cdot t^2 \\ &= (((g_*)_{(r)}(f)) \cdot t^2)(m) \end{aligned}$$

On a donc bien $(g_*)_{(r)}(f \cdot t) = ((g_*)_{(r)}(f)) \cdot t^2$. □

Les résultats de ce paragraphe se résument comme suit :

Théorème 3.3.5. *Il existe une catégorie $\mathbf{CP}_{\underline{R}}$ dont les objets sont les \underline{R} -CP-modules quadratiques et dont les morphismes sont les applications \underline{R} -CP-quadratiques. Elle est préquadratique à droite au sens de [2], et admet un foncteur Hom interne.*

Remarque 3.3.6. Soit R un anneau commutatif. En prenant $\underline{R} = (R \rightarrow 0 \rightarrow R)$, on obtient une catégorie $\mathbf{CP}_R = \mathbf{CP}_{\underline{R}}$ qui contient toute application R -quadratique $f: M \rightarrow N$ entre R -modules M, N (au sens de [9]) comme morphisme, d'au moins deux façons canoniques : $f: (M, 0) \rightarrow (N, N)$ et $f: (M, \text{rad}_R(f)) \rightarrow (N, f(\text{rad}(f)) + D_f)$ sont des morphismes dans \mathbf{CP}_R où $\text{rad}_R(f)$ désigne l'ensemble des éléments m de M tels que $d_f(m, m') = 0$ pour tout $m' \in M$ et $f(mr) = f(m)r$ pour tout $r \in R$, et où D_f désigne le sous- R -module de N engendré par les images de d_f et des $f_{(r)}$, $r \in R$. Nous nous attendons à ce que l'étude des catégories $\mathbf{CP}_{\underline{R}}$ fournisse alors une approche nouvelle des applications quadratiques entre modules (carrés et classiques) qui sera développée dans [7].

REFERENCES

- [1] H.J. Baues, Quadratic homology, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999), 429-457.
- [2] H.J. Baues, M. Hartl and T. Pirashvili, Quadratic categories and square rings, *J. Pure Appl. Algebra* **122** (1997), 1-40.
- [3] H.J. Baues, M. Jibladze and T. Pirashvili, Quadratic algebra of square groups, *Adv. Math.* **217** (3) (2008), 1236-1300.
- [4] H.J. Baues, M. Jibladze and T. Pirashvili, Third McLane cohomology, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* **144** (2008), 337-367.
- [5] H.J. Baues, F. Muro, *Toda brackets and cup-one squares for ring spectra*, *Comm. Algebra* **37** (2009), no. 1, 56-82.
- [6] M. Hartl, Quadratic maps between groups, *Georgian Math. J.* **16** (2009), n°1, 55-74.
- [7] H. Gaudier F. Goichot, M. Hartl, Square algebroids and their modules, en préparation.
- [8] H. Gaudier F. Goichot, M. Hartl, B. Loiseau and T. Pirashvili, Square algebra, en préparation.
- [9] H. Gaudier, M. Hartl, Quadratic maps between modules, *J. of Algebra*, **322** (2009), 1667-1688.
- [10] M. Jibladze and T. Pirashvili, Quadratic envelope of the category of class two nilpotent groups, *Georgian Math. J.* **13** (2006), Number 4, 693-722.
- [11] I. B. S. Passi, Polynomial maps on groups, *J. Algebra* **9** (1968), 121-151.
- [12] N. Roby, Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 3^e série **80** (1963), 213-348.
- [13] R.B. Warfield, Jr., *Nilpotent groups*, LNM Vol. 513 (1976), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

UNIV. LILLE NORD DE FRANCE, F-59000 LILLE, FRANCE
UVHC,LAMAV ET FR CNRS 2956, F-59313 VALENCIENNES, FRANCE
E-mail address: manfred.hartl@univ-valenciennes.fr
E-mail address: henri.gaudier@univ-valenciennes.fr